Oblig 1 - FYS 2140

27.07-16
Even Marius Nordhagen

Oppg. 1 a) (i)

$$z = i \qquad z^* = -i \qquad |z| = 1 \qquad |z|^2 = 1$$
$$z\bar{z} = -i \cdot i = -(-1) = 1 = |z|^2$$

(ii)

$$z = 3 + 4i$$
$$\bar{z} = 3 - 4i \qquad |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad |z|^2 = 25$$
$$z\bar{z} = (3+4i)(3-4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25 = |z|^2$$

(iii)

$$z = -3$$
$$\bar{z} = -3 \qquad |z| = 3 \qquad |z|^2 = 9$$
$$z\bar{z} = -3 \cdot -3 = 9 = |z|^2$$

(iv)

$$z = 1 + i$$
$$\bar{z} = 1 - i \qquad |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad |z|^2 = 2$$
$$z\bar{z} = (1+i)(1-i) = 1 - i + i - i^2 = 2 = |z|^2$$

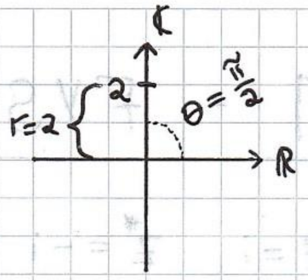
b) (i) Bruker sammenhengen som er oppgitt

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{5} = \frac{3 + 6i + 4i + 8i^2}{5}$$
$$= \frac{3 - 8 + 6i + 4i}{5} = \underline{\underline{-1 + 2i}}$$

(ii)

$$\frac{\sqrt{3} + i}{(1-i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4(1-i)} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2(1+i)}{8}$$
$$= \frac{3 + 2\sqrt{3}i + i^2 + 3i + 2\sqrt{3}i^2 + i^3}{8}$$
$$= \frac{3 - 1 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i + 3i - i}{8}$$
$$= \frac{2 - 2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}i}{8} \qquad \underline{\underline{\frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{4}}}$$

c) (i) $z = 2i$

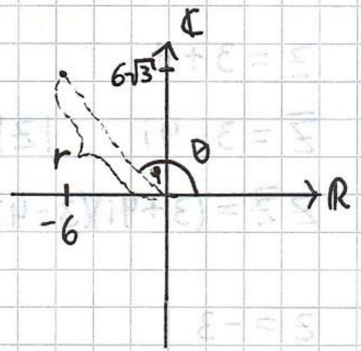


Generelt er

$z = re^{i\theta}$, så i dette tilfellet er

$$\underline{\underline{z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}}}$$

(ii) $z = -6 + 6\sqrt{3}\,i$



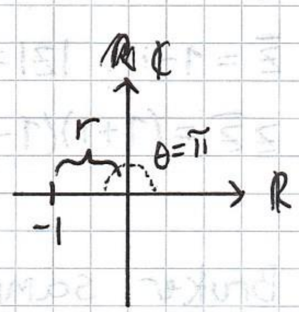
$$r = \sqrt{6^2 + 6^2 \cdot 3}$$
$$= \sqrt{36 + 108} = 12$$

$$\tan\varphi = \frac{6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\underline{\underline{z = 12e^{i\frac{2\pi}{3}}}}$$

(iii) $z = -1$



$r = 1 \quad \theta = \pi$

(kunne også vært $-\pi$ hvis dette var innenfor definisjonsområdet, noe som ikke er tilfelle.

$$\underline{\underline{z = e^{i\pi}}}$$

d) (i) $z_1 = 2e^{-i\pi}$ og $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z = 2e^{-i\pi} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)} = \underline{\underline{6e^{-\frac{2\pi}{3}i}}}$$

(ii) $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{5}}$ og $z_2 = e^{i\frac{\pi}{5}}$

$$z = e^{-i\frac{\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{-i\frac{\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Hvis jeg multipliserer et komplekst tall med $e^{i\frac{\pi}{2}}$, vil det komplekse tallet forflytte seg med en vinkel 90° geometrisk.

Oppg. 2 a) $\frac{df(x)}{dx} = bf(x)$

En generell løsning av denne må være en funksjon hvor bare en konstant skiller funksjonen og den deriverte. Eneste løsning er en eksponensialfunksjon, generelt

$$\underline{\underline{f(x) = Ce^{bx}}}$$

Har $f(0)=1$ og $f'(0)=3$

Den spesifike løsningen blir da

$$f(0) = Ce^{b\cdot 0} = C = 1$$

$$f'(x) = Cbe^{bx}$$

$$f'(0) = 1\cdot b\cdot e^{b\cdot 0} = b = 3 \qquad \underline{\underline{f(x) = e^{3x}}}$$

b) $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = af(x)$

Fra videregående har vi den generelle differensiallignngen $ax'' + bx' + cx = 0$

Som kan betraktes som et annengradspolynom $ar^2 + br + c = 0$. Hvis man bruker ABC-formelen på denne, kan jeg få flere typer løsninger.

I vårt tilfelle er $a=1$, $b=0$ og $c=-a$

$$r = \frac{\pm\sqrt{4a}}{2} = \sqrt{a}$$

I dette tilfellet er den generelle løsningen

(☆) $f(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$

$$f''(x) = Aae^{\sqrt{a}x} + Bae^{\sqrt{a}x} = af(x)$$

Ser at dette må stemme med differensiallignigen vi startet med.

Hvis $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, må A være null siden det første leddet vil øke eksponensielt med X.
Hvis $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, må B være null med samme betingelser.

Har at

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \text{og} \quad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(\sqrt{a}x) = \frac{e^{\sqrt{a}x} - e^{-\sqrt{a}x}}{2} \qquad \cosh(\sqrt{a}x) = \frac{e^{\sqrt{a}x} + e^{-\sqrt{a}x}}{2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$e^{\sqrt{a}x} = 2\sinh(\sqrt{a}x) + e^{-\sqrt{a}x} \qquad e^{-\sqrt{a}x} = 2\cosh(\sqrt{a}x) - e^{\sqrt{a}x}$$

Jeg setter så disse to uttrykkene sammen:

$$e^{\sqrt{a}x} = 2\sinh(\sqrt{a}x) + 2\cosh(\sqrt{a}x) - e^{\sqrt{a}x}$$

Flytter så siste ledd over til andre siden og deler på to:

$$e^{\sqrt{a}x} = \sinh(\sqrt{a}x) + \cosh(\sqrt{a}x)$$

$$e^{-\sqrt{a}x} = 2\cosh(\sqrt{a}x) - 2\sinh(\sqrt{a}x) - e^{-\sqrt{a}x}$$

$$e^{-\sqrt{a}x} = \cosh(\sqrt{a}x) - \sinh(\sqrt{a}x)$$

Hvis jeg nå setter alt dette inn i (☆), får jeg at

$$f(x) = A(\sinh(\sqrt{a}x) + \cosh(\sqrt{a}x)) + B(\cosh(\sqrt{a}x) - \sinh(\sqrt{a}x))$$

$$= (A-B)\sinh(\sqrt{a}x) + (A+B)\cosh(\sqrt{a}x)$$

c) Har igjen $f''(x) = a f(x)$, men nå er a negativ. Hvis jeg nå bruker samme metode som i forrige oppgave, har jeg at $a=1$, $b=0$, $c=a$.

$$r = \frac{\pm\sqrt{-4a}}{2} = \pm\sqrt{a}\,i$$ vha. ABC-formel

I dette tilfellet er den generelle løsningen

$$f(x) = e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx))$$

Hvor $a=0$ og $b=\sqrt{a}$

$$f(x) = C_1\cos(\sqrt{a}x) + C_2\sin(\sqrt{a}x)$$

Ved å tenke litt kunne vi også gjettet oss til at løsningen måtte ha noe med trigonometriske funksjoner å gjøre. Velger vi $f(x)=\sin(x)$ for eksempel får vi at $f(x) = -f''(x)$. Det samme gjelder for $f(x)=\cos(x)$.

Det er også mulig å få eksponensial-funksjoner med komplekse eksponenter.

$f(x) = e^{\pm\sqrt{a}\,i}$ vil også fungere

Oppg. 3 a) (i) Fra Rottmann har jeg den generelle sammenhengen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2-ac}{a}}$$

I mitt tilfelle er $a=1$, $b=2$ og $c=1$
Integralet blir derfor

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+4x+1)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{1}}\,e^{\frac{4-1}{1}} = \underline{\underline{\sqrt{\pi}\,e^3}}$$

(ii) Har uttrykket $\int_0^{\infty} x e^{-2x^2}\,dx$

Substitusjon
$u = -2x^2$
$u' = -4x$
$du = u' \cdot dx$

$$= -\int_0^{\infty} -\frac{4x}{4} e^{-2x^2}\,dx = -\int_0^{-\infty} \frac{1}{4} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^u\,du = \frac{1}{4}\left[e^u\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}(1-0) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

b $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$ Velger å bytte til sfæriske koordinater

Har at $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ og må huske å sette inn jacobideterminanten i integranden.
$\theta = [0, 2\pi]$, $\varphi = [0, \pi]$ og $r = [0, \infty]$.

Når jeg setter inn alt dette, ser integralet mitt slik ut:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2r} r^2 \sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Fra oppgaveteksten har sammenhengen

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^{n+1}} n!$$

Jeg identifiserer dette til å være det innerste integralet mitt, hvor $\alpha = 2$, og $n = 2$.
I mitt tilfelle integrerer jeg også mhp. r.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2^3} 2!\right] \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(-\cos\pi + \cos 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{\pi}}$$

c) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{ma}}{\hbar} e^{-ma|x|/\hbar^2} e^{-ipx/\hbar} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0^{3/2}}{p^2 + p_0^2}$$

Fra Rottmann har jeg Fourier-transformasjonen:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{k} e^{-k|x|} e^{-ipx} dx = \frac{1}{x^2 + k^2}$$

Hvor $k = p_0 = \frac{ma}{\hbar}$ Jeg velger å endre litt på dette uttrykket, slik at det ligner på det jeg har:

$$\frac{1}{2p_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|x|} e^{ipx} dx = \frac{1}{x^2 + k^2}$$

Nå setter jeg i gang med uttrykket mitt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{ma}}{\hbar}e^{-ma|x|/\hbar^2}e^{-ipx/\hbar}\,dx$$

Starter med å flytte alle konstanter på utsiden av integralet og erstatte $\frac{ma}{\hbar}$ med p_0:

$$\frac{2p_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\sqrt{ma}}{\hbar}\frac{1}{2p_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{p_0}{\hbar}|x|}e^{-i\frac{px}{\hbar}}\,dx$$

Så substituerer jeg $x'=\frac{x}{\hbar}$, $(x')'=\frac{1}{\hbar}$

Får da at $dx\cdot\frac{1}{\hbar}=dx'$

$$\frac{2p_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\sqrt{ma}}{\cancel{\hbar}}\underbrace{\frac{1}{2p_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-p_0|x'|}e^{-ipx'}\cancel{\hbar}\,dx'}$$

Ser nå at hele det uttrykket her er det som står nederst på forrige side, og det skal i følge Rottmann være lik $\frac{1}{x'^2+p_0^2}$!

Det jeg har regnet med som x' er i følge oppgaven p. Sitter da igjen med:

$$\frac{2p_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\sqrt{ma}}{1}\cdot\frac{1}{p^2+p_0^2}=\frac{2p_0\sqrt{p_0\cancel{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\cancel{\hbar}}}\frac{1}{p^2+p_0^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\cancel{2}\,p_0^{3/2}}{\sqrt{\pi}\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{p^2+p_0^2}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{p_0^{3/2}}{p^2+p_0^2}}}$$