FYS2140
Obligatorisk innlevering 5

Oppg.1.

Jeg starter med å finne forventningsverdien til x. Tidligere har vi funnet forventningsverdier ved å integrere fra $-\infty$ til ∞, men siden vi nå er i en uendelig brønn med bredde fra $x = 0$ til $x = a$, må forventningsverdien befinne seg innenfor disse grensene, og jeg trenger bare å integrere fra 0 til a:

$$\langle x \rangle = \int_0^a \Psi^* x \Psi dx = \int_0^a x \sqrt{\frac{2}{\mathrm{a}}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{i\left(\frac{n^2\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)t} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{a}}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i\left(\frac{n^2\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)t} dx$$

Dette uttrykket her ser unektelig veldig fælt ut, men som i forrige oblig faller eksponensialfunksjonene mot hverandre, og vi får:

$$\frac{2}{a}\int_0^a x \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Jeg kan nå bruke den trigonometriske sammenhengen

$$\sin^2 bx = \frac{1}{2}(1 - \cos(2bx))$$

$$\frac{2}{a}\int_0^a x \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{a}\left(\int_0^a x\, dx - \int_0^a x \cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right) dx\right)$$

Det siste integralet kunne jeg løst ved delvis integrasjon, men heldigvis for meg har Rottmann alt knekt det. Ubestemt integral 123 fra Rottmann sier at:

$$\int xcosbxdx = \frac{1}{b^2}cosbx + \frac{x}{b}sinbx + C$$

Det første integralet burde jeg klare å løse selv. Får da at:

$$\frac{1}{a}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a - \left[\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right) + \left(\frac{a}{2\pi n}x\right) sin\left(\frac{2\pi n}{a}x\right)\right]_0^a\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}a^2 - \left(\left(\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^2 \cos(2\pi n) + \left(\frac{a^2}{2\pi n}\right)\sin(2\pi n)\right) - \left(\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^2 \cos(0) + \left(\frac{a^2}{2\pi n}\right)\sin(0)\right)\right)\right)$$

Vi antar at n bare kan være heltall, noe som er selve grunnmuren i kvantefysikken. Ser dermed at $\sin(2\pi n) = 0$ og $\cos(2\pi n) = 1$. Ender opp med:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}a^2 - \left(\left(\frac{a}{2\pi n}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\pi n}\right)^2\right)\right) = \frac{1}{a}\frac{a^2}{2}$$
$$\langle x\rangle = \frac{a}{2}$$

Når jeg skal starte med å regne ut forventningsverdien for x^2, går jeg fram på akkurat samme måte som ovenfor, og får:

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

Bruker igjen at

$$\sin^2 bx = \frac{1}{2}(1 - \cos(2bx))$$

Og får:

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\left(\int_0^a x^2 dx - \int_0^a x^2\, cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)dx\right)$$

Det første integralet skal jeg klare selv, mens det siste slår jeg opp i Rottmann. Finner ubestemt integral 124:

$$\int x^2 cosbxdx = \frac{2}{b^2}xcosbx - \frac{2 - b^2x^2}{b^3}sinbx + C$$

Det første jeg ser er at sinusleddet blir borte når jeg setter inn $b = 2\frac{n\pi}{a}$. Står da igjen med at:

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{a^3}{2\pi^2n^2}\cos(2\pi n)\right) = a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2n^2}\right)$$

I følge Ehrenfests teorem er

$$\langle p\rangle = m\langle v\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}$$

Siden $\langle x\rangle$ er konstant, må $\langle p\rangle$ være like null, så

$$\langle p\rangle = 0$$

Når jeg skal finne forventningsverdien til p^2, velger jeg å bruke Schrödingerligningen jeg har slik at utregningen blir veldig enkel:

$$\langle p^2\rangle = \int_0^a \Psi_n^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi_n dx = \int_0^a \Psi_n^* - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_n)dx$$

Schrödingers ligning sier at:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi_\mathrm{n}}{\partial x^2}+V(x)\Psi_\mathrm{n}=E_n\Psi_\mathrm{n}$$

Vi vet at potensialet vårt er lik null, og ved å stokke litt om på ligningen, får jeg at:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}(\Psi_\mathrm{n})=2\mathrm{mE_n}\Psi_n$$

Ser at det er akkurat dette jeg har inni integranden, så jeg får da:

$$\Rightarrow\int_0^a\Psi_\mathrm{n}^*\,2mE_n\Psi_n dx=2mE_n\int_0^a\Psi_\mathrm{n}^*\,\Psi_n dx$$

Kan flytte $2mE_n$ utenfor siden den er uavhengig av x. Jeg vet at så lenge Ψ_n er normalisert, er integralet $\int_0^a\Psi_\mathrm{n}^*\,\Psi_n dx=1$. Et uttrykk for E_n som matcher Ψ_n er

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Får da at

$$\langle p^2\rangle=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

Variansen er definert som

$$\sigma_i^2=\langle i^2\rangle-\langle i\rangle^2$$

Dette gir at

$$\sigma_x^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi^2n^2}\right)-\frac{a^2}{2^2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n^2\pi^2}\right)$$

Og

$$\sigma_p^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}-0=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

Vet at standardavviket er gitt ved kvadratroten av variansen, og at Heisenbergs uskarphetsrelasjon sier at:

$$\sigma_x\sigma_p\geq\frac{\hbar}{2}$$

Hvis jeg nå ha regnet riktig, skal svaret jeg har fått følge Heisenberg:

$$\sqrt{\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n^2\pi^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{n^2\pi^2}\right)}=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3}-2}$$

Dette uttrykket ser ikke så pent ut, men det kan vises at det alltid er større enn $\frac{\hbar}{2}$ for $n\geq 1$, og følger dermed Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

Oppg.2.

a) Jeg vet at bølgefunksjonen min må tilfredsstille normeringsintegralet

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \Psi^2 dx = 1$$

Siden en partikkel som følger bølgeligningen må befinne seg i venstre halvdel av brønnen. Ettersom sannsynligheten for hvor partikkelen befinner seg i den venstre delen er uniform fordelt, kan ikke Ψ være avhengig av x, og vi får et veldig enkelt integral:

$$\Psi^2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx = \Psi^2 \frac{a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \Psi = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{a}}}$$

Dette gjelder vel å merke bare når vi ser på intervallet $x = [0, \frac{a}{2}]$, utenfor dette intervallet er sannsynligheten null. Vi skriver ofte:

$$\Psi(x,0) = \left\{ \begin{matrix} \sqrt{\frac{2}{a}} & for \;\; 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & ellers \end{matrix} \right\}$$

b) Jeg har at

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Og jeg gjenkjenner derfor energien jeg skal finne sannsynligheten for å finne til å være E_1. I kvantefysikken må energien komme i kvanter, så hadde jeg fått beskjed om å finne sannsynligheten for å finne en energi som ikke tilfredsstilte E_n hvor n var et heltall, måtte sannsynligheten vært null.

Siden $n = 1$ i vårt tilfelle, er oppgaven min at jeg skal finne $|c_1|^2$. Fouriers triks sier at

$$|c_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi(x,0) dx$$

Så i mitt tilfelle får jeg derfor

$$|c_1|^2 = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{2}{a}} dx = -\frac{2}{a}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{a}\cos(0) = \frac{2}{a}$$