Soit $f(x)$ la densité d'une variable aléatoire symétrique d'espérance nulle. Je m'intéresse à l'espérance de X^3 :

$$I \coloneqq \int_{IR} x^3 f(x) dx.$$

Posons $dU(x) = x^3 dx$ et $V = f$, alors $U = \frac{1}{4}x^4 + C$, et $dV = f'dx$.

$I = \frac{1}{4}x^4 f|_{IR} + Cf|_{IR} - \int \frac{1}{4} x^4 f' dx - \int Cf' dx.$

Le premier terme à droite de l'égalité vaut zéro car on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 f - \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 f$, la limite moins elle-même du fait de la parité de x^4 (je manque de rigueur ici). Le deuxième et le dernier terme sont égaux. On a donc $I = \frac{1}{4}\int x^4 f' dx$.

Intégrons encore par partie en posant $U = \frac{1}{4}x^4$ et $dV = f'dx$. On a donc $dU = x^3$ et $V = f$. D'où : $I = \frac{1}{4}x^4 f|_{IR} - \int x^3 f dx$. On retrouve $0 - I$. Par conséquent, $I = 0 - I$. Autrement dit, $2I = 0$, d'où $I = 0$.