Mandalas, curvas clássicas e visualização com R

in:VI Seminário Internacional de Estatística com R

Profs. Drs. Luciane Alcoforado & João Paulo Martins dos Santos

Academia da Força Aérea

25 a 27 de maio de 2022 (updated: 2022-05-11)

Introdução e objetivos

Prof. Luciane https://altabooks.com.br/produto/utilizando-a-linguagem-r/

Prof. João Paulo http://www.livrosabertos.sibi.usp.br/portaldelivrosUSP/catalog/book/752

Portal de Livros Abertos da USP

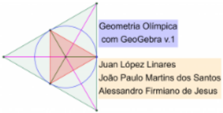
Catálogo Estatísticas Sobre Submissões

Geometria olímpica com GeoGebra v.1

Juan López Linares
(Author)
Universidade de São Paulo. Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

João Paulo Martins dos Santos
(Author)
Academia da Força Aérea em Pirassununga/SP

Alessandro Firmiano de Jesus
(Author)
Academia da Força Aérea em Pirassununga/SP



pdf

Publicado
fevereiro 3, 2022

DOI: https://doi.org/10.11606/9786587023212

Mandalas

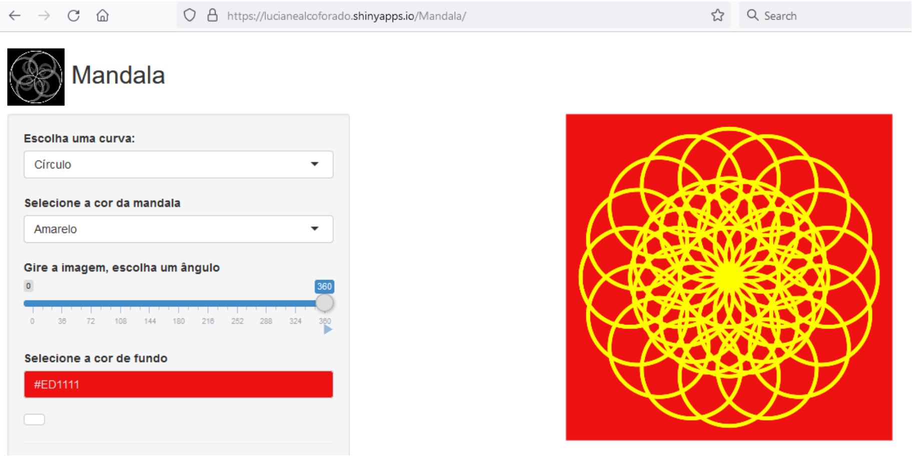
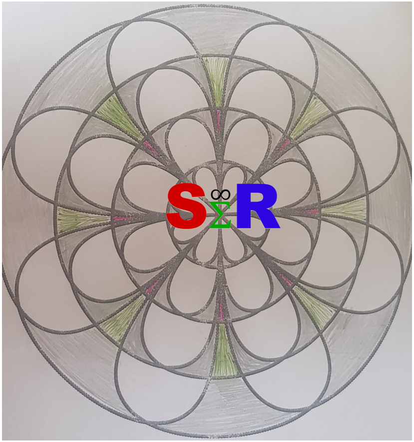


Figure 3:

Mandalas: círculo em Sanscrito

Oxford Languages: substantivo masculino
FILOSOFIA e RELIGIÃO: diagrama de formas geométricas concêntricas, utilizado no hinduísmo, no budismo, nas práticas psicofísicas da ioga e no tantrismo como objeto ritualístico e ponto focal para meditação. Do ponto de vista religioso, o mandala é considerado uma representação do ser humano e do universo; em sua forma menos elaborada, é denominado iantra.



Objetivos

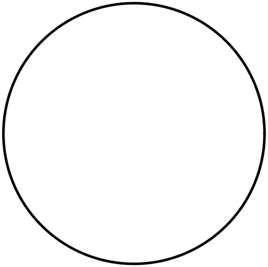
- Descrever e visualizar algumas curvas clássicas
- Apresentar algumas transformações geométricas
  - isometria: rotação
  - isometria: translação
  - transformação afim uniforme: contração
- Realizar rotação, translação e contração em R
- Construir uma base de pontos para representar uma curva(data frame)
- Visualizar as Mandalas: ggplot2
- Criar Mandalas com Matemática e programação R

Algumas curvas famosas

Curvas clássicas: Círculo

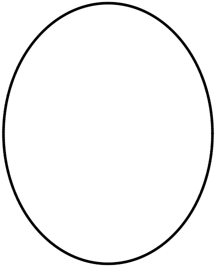
- Curvas mais conhecida
- fundamental da historia da humanidade
- Anterior **Ahmes**: $\pi \approx 3.16$.
- Associada a invenção da roda.
- Equações paramétricas

$$x = r\cos(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
$$y = r\sin(\theta)$$



Elipse

- $Dist(P, F_1) + Dist(P, F_2) = 2a$
- Generaliza o círculo
- Estudioso: Menaechmus
- Estudo em Cônicas
- Aplicada em Astronomia
- Equações paramétricas:
  $$\begin{matrix} x = a \cdot \cos(\theta) \\ y = b \cdot \sin(\theta) \end{matrix} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



Cardioide

- "Similar a um coração"

  grego kardioeides = kardia: coração + eidos:forma.

- Estudioso: Castillon em 1741

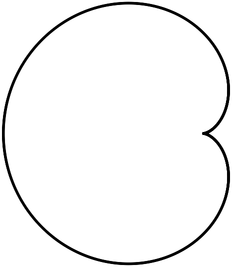
  Philosophical Transactions of the Royal Society

- Cilindro rolando sobre outro cilindro. Raios iguais.
- Caso particular de uma epiciclóide: raios distintos
- Equações paramétricas:

  $x = 2r\cos(\theta) - r\cos(2\theta)$

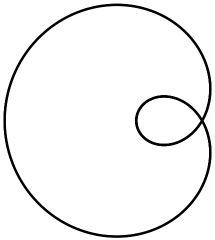
  $y = 2r\sin(\theta) - r\sin(2\theta)$

  $\theta \in [0, 2\pi]$



Limaçon de Pascal

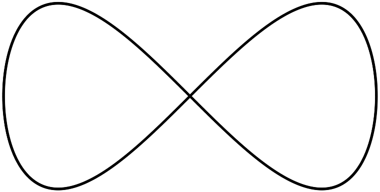
- Étienne Pascal pai de Blaise Pascal
- Nome: Gilles-Personne Roberval in 1650
- Caso especial: cardioide
- Equações paramétricas:



$$x = (b + a \cdot \cos(t)) \cdot \cos(t) = \frac{a}{2} + b \cdot \cos(t) + \frac{a}{2} \cdot \cos(2t)$$
$$y = (b + a \cdot \cos(t)) \cdot \sin(t) = b \cdot \sin(t) + \frac{a}{2} \cdot \sin(2t)$$

Lemniscata

- forma de hélice, o famoso “oito deitado”
- representa o sinal matemático do “infinito”
- Jacob Bernoulli em 1694
- Caso especial um conjunto de curvas mais gerais
- significados diversos equilíbrio dinâmico, eternidade, etc.



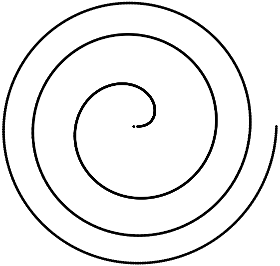
- Parametrização:
  $x = \sin(\theta), \qquad y = \cos(\theta) sen(\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$$x = \frac{a \cdot \sin(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)}, \qquad y = \frac{a \cdot \cos(\theta)\sin(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)}, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Espiral de Fermat

- estudada primeiramente por Fermat em 1636
- Equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = a \cdot \sqrt{t}\cos(t) \\ y = a \cdot \sqrt{t}\sin(t) \end{cases} \quad t \geqslant 0$$



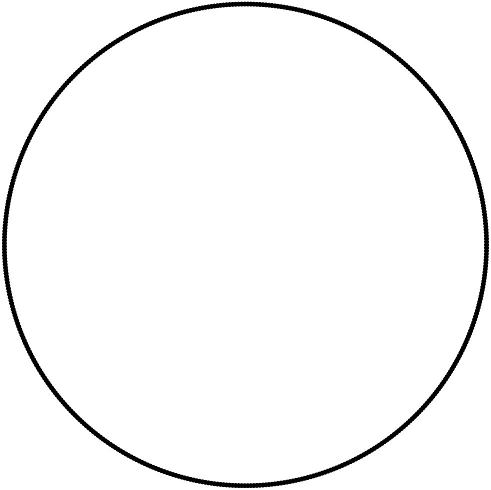
Visualização com ggplot em R

Visualizando com ggplot2: círculo

```
#Passo 1: Cálculos e tabela com os pontos P(x,y)
n = 500; r = 1
t = seq(0, 2*pi, length.out = n)
x = r*cos(t)
y = r*sin(t)
dt = data.frame(x,y)
```

```
#Passo 2: Construindo a curva
require(ggplot2) #carregando o pacote
p = ggplot()+
          coord_fixed()+
                    theme_void()
p = p+
     geom_point(data=dt, aes(x=x, y=y), color='black')
p#visualização
```

Visualização

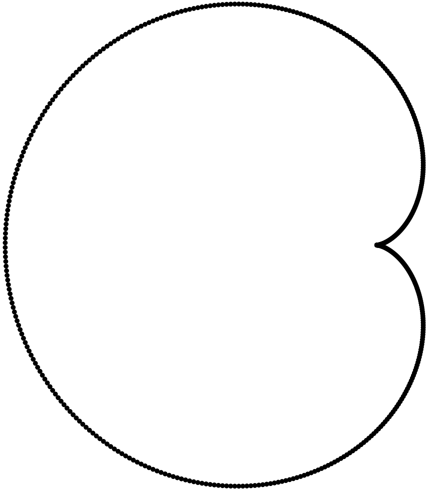


Visualizando com ggplot2: cardiode

```
#Passo 1: Cálculos e tabela com os pontos P(x,y)
n = 500;  r = 1
t = seq(0, 2*pi, length.out = n)
x = 2*r*cos(t)-r*cos(2*t)
y = 2*r*sin(t)-r*sin(2*t)
dt = data.frame(x,y)
```

```
#Passo 2: Construindo a curva
require(ggplot2) #carregando o pacote
p = ggplot()+
          coord_fixed()+
                     theme_void()
p = p+
     geom_point(data=dt, aes(x=x, y=y), color='black')
p#visualização
```

Visualização

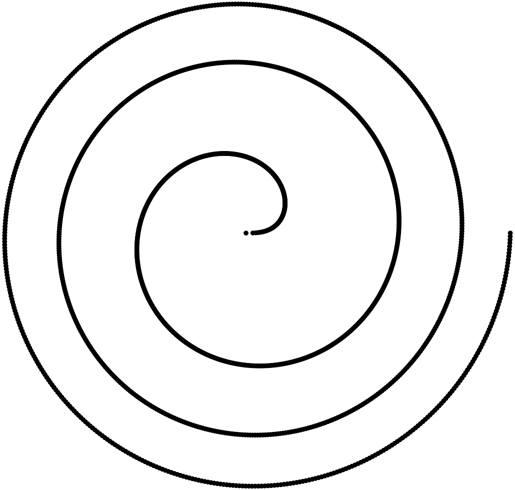


Visualizando com ggplot2: espiral de Fermat

```
#Passo 1: Cálculos e tabela com os pontos P(x,y)
n = 1500
t = seq(0, 6*pi, length.out = n)
r = 1
x = r*sqrt(t)*cos(t)
y = r*sqrt(t)*sin(t)
dt = data.frame(x,y)
```

```
#Passo 2: Construindo a curva
require(ggplot2) #carregando o pacote
p = ggplot()+
            coord_fixed()+
                          theme_void()
p = p+
      geom_point(data=dt, aes(x=x, y=y), color='black')
p#visualização
```

Visualização



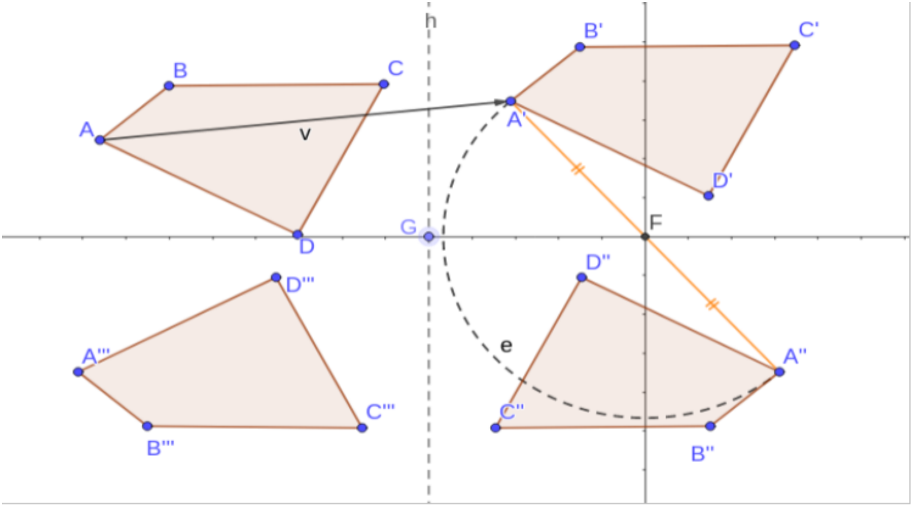
Reutilização do código de visualização

O código é utilizado em todas as visualizações subsequentes.

```
require(ggplot2)
p = ggplot()+
            coord_fixed()+
                          theme_void()
p = p+
      geom_point(data=dt, aes(x=x, y=y), color='black')
p
```

Matemática: Transformações Geométricas

Transformações Geométricas



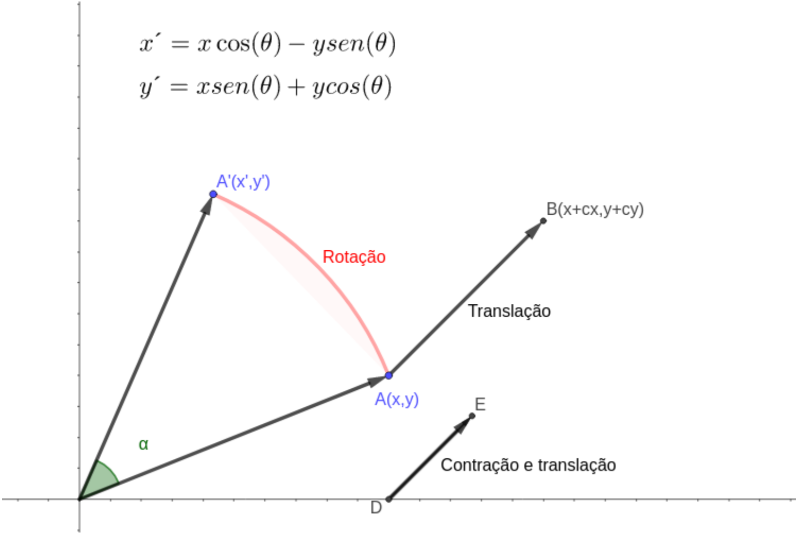
Tranformações Geométricas

- Isometrias
  - preservam distâncias surgem como a base do conceito de Congruência
  - Figuras transformadas por isometrias possuem mesmas características: área, perímetro, forma.
  - congruência no plano: composição de transformações rígidas
  - F e G transformações no plano, então $S \circ F$ é transformação .
- Transformação afim: contração
  - transformação afim modifica as dimensões do objeto. Dado $P(x, y)$, a transformação:

    $$x' = c_1 x \qquad y' = c_1 y$$

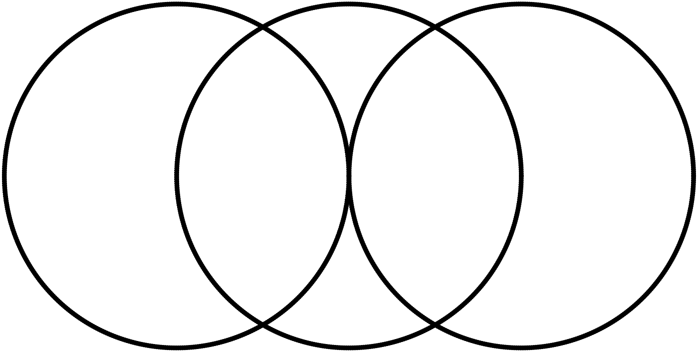
    gera $P'(x', y')$.
  - $c_1 = c_2 = 1$ mantém objeto.
  - $c_1 = c_2 < 1$ reduz tamanho do objeto.

Transformações Geométricas



Aplicações: Construção de Mandalas

Mandala da vida: círculos base



Visualização

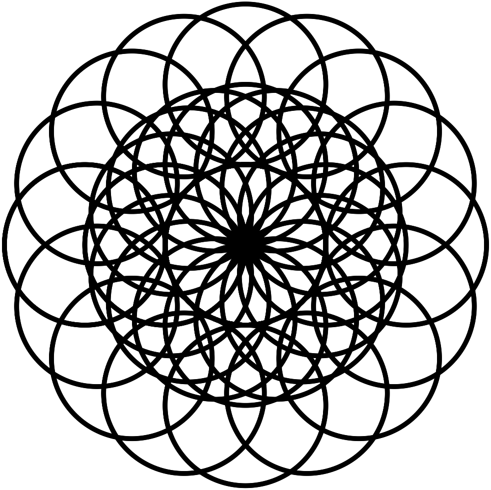
```
#Parâmetros
n=500; raio=1; t=seq(0,2*pi, length.out = n)
#pontos para círculo inicial
x=raio*cos(t)
y=raio*sin(t)
#pontos para os 3 círculos
xt=c(x,x-raio,x-2*raio)
yt=c(y,y,y)

p= ggplot()+
coord_fixed()+
    theme_void()
p=p+geom_point(data=dt, aes(x=xt, y=yt), color='black')
p
```

Mandala da vida: rotações $\pi/8, 2\pi/8, ..., 2\pi$

```
rotacao = (pi/8)*(1:16); n=length(xt); xt1=xt; yt1=yt
for(i in 1:length(rotacao))
  {
xt1=c(xt1,xt[1:n]*cos(rotacao[i])-yt[1:n]*sin(rotacao[i]))
yt1=c(yt1,xt[1:n]*sin(rotacao[i])+yt[1:n]*cos(rotacao[i]))
}
dt= data.frame(xt1,yt1,z="circulo")
p= ggplot()+
coord_fixed()+
    theme_void()
p=
  p+
   geom_point(data=dt, aes(x=xt1, y=yt1), color='black')
p
```

Visualização Mandala da vida

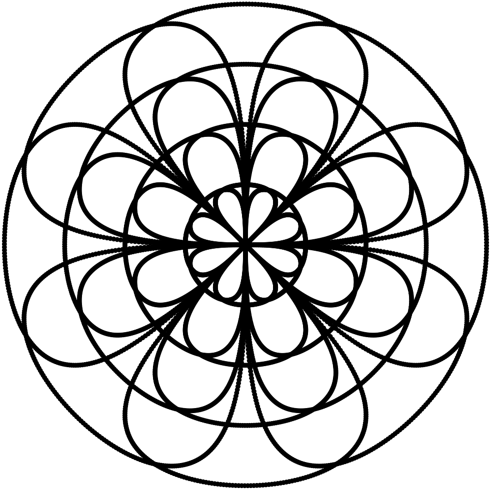


Mandala do infinito: Lemniscata

Sobreposição: Lemniscata com rotações $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ e 3 contrações por fatores 25%, 50% e 75%.

```
n=500; t=seq(0, 2*pi, length.out = n); rotacao=pi/4*(1:3)
x=sin(t);  y=sin(t)*cos(t)
xt=x; yt=y#rotações
for(i in 1:length(rotacao)){
xt=c(xt, x[1:n]*cos(rotacao[i])-y[1:n]*sin(rotacao[i]))
yt=c(yt, x[1:n]*sin(rotacao[i])+y[1:n]*cos(rotacao[i])) }
xtt=NULL; ytt=NULL; red=c(0.25, 0.5, 0.75) #redução
for(i in 1:length(red)){
provx=paste0("x",i); provy=paste0("y",i)
xtt=c(xtt, assign(provx, xt*red[i]))
ytt=c(ytt, assign(provy, yt*red[i])) }
dt=data.frame(x=c(xt, xtt), y=c(yt, ytt), z="lemniscata")
```

Visualização

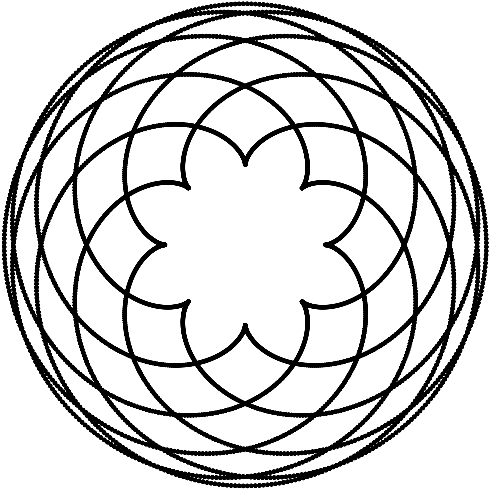


Mandala do coração: cardioide

Rotações variando de $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, ..., 2\pi$

```
n=500; t=seq(0, 2*pi, length.out = n); rotacao=pi/4*(1:7)
x=c(2*raio*cos(t)-raio*cos(2*t))
y=c(2*raio*sin(t)-raio*sin(2*t))
xt=x; yt=y #rotação dos pontos
for(i in 1:length(rotacao)){
xt=c(xt, x[1:n]*cos(rotacao[i])-y[1:n]*sin(rotacao[i]))
yt=c(yt, x[1:n]*sin(rotacao[i])+y[1:n]*cos(rotacao[i]))
}
dt= data.frame(xt, yt, z="cardióide")
```

Visualização

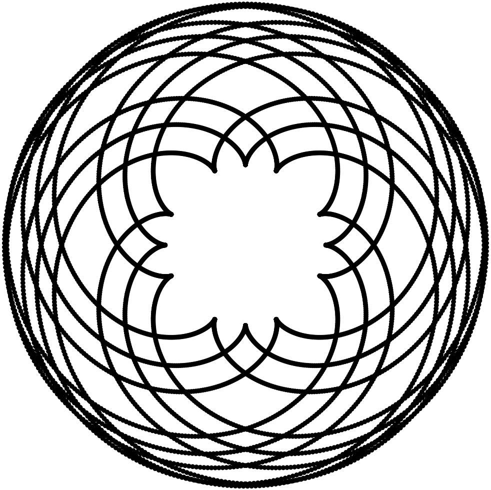


Mandala 3 corações: cardioide

Dois estágios: rotações em $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ e rotação da figura gerada em $\pi/6, -\pi/6$

```
n=500; t=seq(0, 2*pi, length.out = n);
raio=1; rotacao=pi/2*(1:3)
x=c(2*raio*cos(t)-raio*cos(2*t))
y=c(2*raio*sin(t)-raio*sin(2*t))
xt=x; yt=y
for(i in 1:length(rotacao)){
  xt=c(xt, x[1:n]*cos(rotacao[i])-y[1:n]*sin(rotacao[i]))
  yt=c(yt, x[1:n]*sin(rotacao[i])+y[1:n]*cos(rotacao[i]))}
  rotacao = c(pi/8,-pi/8); xt1=NULL; yt1=NULL; n=length(xt)
for(i in 1:length(rotacao)){
  xt1=c(xt1,xt[1:n]*cos(rotacao[i])-yt[1:n]*sin(rotacao[i]))
  yt1=c(yt1,xt[1:n]*sin(rotacao[i])+yt[1:n]*cos(rotacao[i]))}
  dt= data.frame(x=c(xt, xt1), y=c(yt, yt1), z="cardióide")
```

Visualização

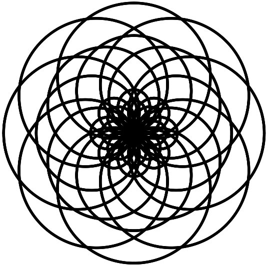


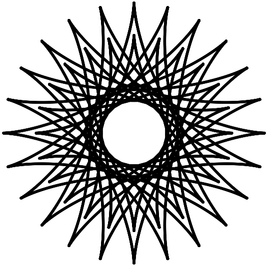
Muitas Possibilidades

- O número de combinações para produção de figuras distintas depende apenas do usuário
- As curvas famosas(clássicas) podem ser utilizadas em um número infinito de possibilidades
- Outras curvas podem ser adicionadas às curvas apresentadas: círculo, elipse, deltoide, astroide, limaçon, lemniscata, cardioide
- Variação do ângulo de rotação, combinação das contrações e posições

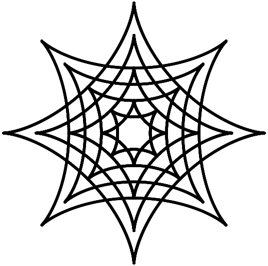
Algumas combinações interessantes

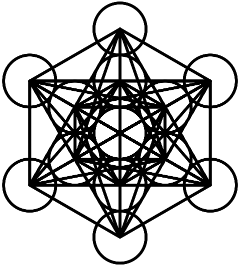
Outras construções: 01



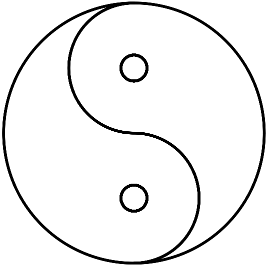


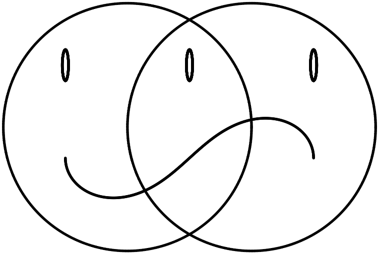
Outras construções: 02



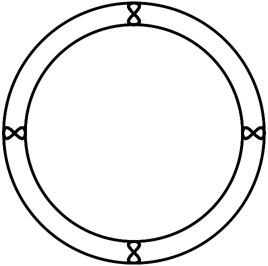


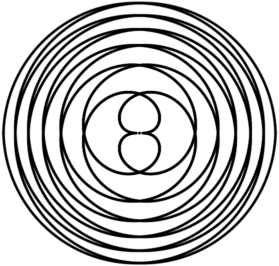
Outras construções: 03





Desafio: Quais curvas compõem as Mandalas?





Conclusões

- Construções interessantes com utilização de curvas matemáticas famosas
- Muitas possibilidades de construção: apenas iniciando
- Ilustração de programação com R em nível elementar e curioso
- Ilustração da programação com R em nível avançado
- Trabalhos futuros
  - Especialização: funções para geração de Mandalas
  - Melhorias do App Shiny
  - Animações com R/Shiny
  - Explorar outras formas e combinações de curvas famosas

Adicionais

Acesso ao ebook de mandalas para impressão (https://github.com/Lucianea/Mandalas/blob/main/Livro_de_Mandalas.pdf)

Acesso ao aplicativo shiny: (https://lucianealcoforado.shinyapps.io/Mandala/)

Obrigado, Gracias, Thanks!

Referências

- Bezerra, J. 2022. “Mandalas.” Toda Materia. https://www.todamateria.com.br/mandala/.
- Coxeter, H. S.M., and S. L. Greitzer. 1967. Geometry Revisited. The Mathematical Association of America.
- Ferréol, R., S. Boureau, and A Esculier. 2017. “2D Curves.” https://mathcurve.com/courbes2d.gb/lemniscate/lemniscate.shtml#:~:text=%2D%20the%20lemniscate%20of%20Bernoulli%20is,they%20correspond%20to%20minima...
- Medeiros, D.S. 2022. “Aula Interativa: Ciclóides.” https://aulainterativa.ect.ufrn.br/cicloides/.
- Nascimento Venceslau, Allisson Wesley do. 2015. “Curvas Parametrizadas, Ciclóides, Experimentos E Aplicações.” Universidade Federal de Sergipe.
- O’Connor, John, and Edmund Robertson. 2001. “A History of Pi.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages/.
- ———. 2022a. “Curves: Circle.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Circle/.
- ———. 2022b. “Curves: Elipse.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Ellipse/.
- ———. 2022c. “Curves: Cardioid.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Cardioid/.
- ———. 2022d. “Curves: Hypocycloid.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Hypocycloid/.
- ———. 2022e. “Curves: Astroid.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Astroid/.
- ———. 2022f. “Curves: Fermats.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Fermats/.
- ———. 2022g. “Curves: Lemacon of Pascal.” MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Limacon/.
- Hadley Wickham, ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis, Springer-Verlag New York, 2016.
- Kirill Müller and Hadley Wickham, tibble: Simple Data Frames, 2020, R package version 3.0.4. Disponível em https://CRAN.R-project.org/package=tibble.
- Yihui Xie (2021). knitr: A General-Purpose Package for Dynamic Report Generation in R. R package version 1.33.
- Yihui Xie (2015) Dynamic Documents with R and knitr. 2nd edition. Chapman and Hall/CRC. ISBN 978-1498716963
- Yihui Xie (2014) knitr: A Comprehensive Tool for Reproducible Research in R. In Victoria Stodden, Friedrich Leisch and Roger D. Peng, editors, Implementing Reproducible Computational Research. Chapman and Hall/CRC. ISBN 978-1466561595
- Sunil, M., and R. Kosawatta. 2017. CliffsNotes Geometry Common Core Quick Review. HMH Books.

Referências

* Weisstein, Eric W. 20022a. “Ellipse.” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html.

- ———. 20022b. “Cardioid.” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Cardioid.html.
- ———. 20022c. “Deltoid.” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Deltoid.html.
- ———. 20022d. “Astroid.” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Astroid.html.