Área Académica de Ingeniería Física

Física Computacional I

Tarea 4

Estudiante:
Ever Ortega Calderón

Fecha de entrega:
27 de abril de 2021

Profesores:
Álvaro Amador Jara
Jose Esteban Pérez Hidalgo

I Semestre 2021

**Método de separación de variables**

Para él método de separación de variables se debe de realizar un trabajo analítico previo, el cual se muestra a continuación:

La ecuación en estudio es:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}$$

Suponemos que la solución acepta la siguiente separación:

$$\rho(x,t) = X(x)T(t)$$

Sustituyendo la supuesta solución anterior en la ecuación de estudio se obtiene:

$$\frac{\partial X(x)T(t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 X(x)T(t)}{\partial x^2}$$

$$X(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t} = DT(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

$$X(x)T^{'}(t) = D\ T(t)\ X^{''}(x)$$

$$\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = D\frac{X^{''}(x)}{X(x)}$$

Ahora que se tienen separados los lados temporal (a la izquierda) y espacial (a la derecha) se introduce la constante de separación llamada -s

De esta forma

$$\frac{1}{D}\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = \frac{X^{''}(x)}{X(x)} = -\mathrm{s}$$

Por tanto

$$\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = -\mathrm{sD}$$

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = -s$$

Es decir

$$T^{'}(t) = -\mathrm{sD}\ T(t)$$

$$X^{''}(x) = -sX(x)$$

Por otro lado, la solución de la parte espacial se puede obtener por medio de la ecuación característica, la cual nos brinda una solución en términos de senos y cosenos, como se muestra a continuación:

$$X(x) = C_1\cos(\sqrt{s}x) + C_2\sin(\sqrt{s}x)$$

Con ayuda de las condiciones de contorno se pueden obtener las constantes:

Cuando X(0)=0=$C_1\cos(\sqrt{s}*0) + C_2\sin(\sqrt{s}*0) = C_1$=0

Cuando $X(L_x) = X(10) = C_2\sin(\sqrt{s}L_x) = C_2\sin(\sqrt{s}*L_x) = 0$

La condición anterior se cumple si $C_2 = 0$ o bien si s= $\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2$ con n entero, este último será el caso por considerar, de el podemos deducir que $s = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2$

Por ende

$$X(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right)$$

La ecuación temporal:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\mathrm{sD}$$

La solución de la ecuación referente a la parte temporal sería:

$$T'(t) = -\mathrm{sD}T(t)$$
$$T'(t) + \mathrm{sD}T(t) = 0$$

Recordando que $s = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2$

$$T'(t) + \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 \mathrm{D}T(t) = 0$$

$$T(t) = A_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 t}$$

La solución del problema es:

$$\rho(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) e^{-D\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 t}$$

La solución del problema es:

$$\rho(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) e^{-D\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 t}$$

Para encontrar los $B_n$ se usa los coeficientes de Fourier:

$$B_n = \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} \rho(x,0)\sin(\frac{n\pi x}{L_x})dx$$
$$B_n = \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{l}}\sin(\frac{n\pi x}{L_x})dx$$
$$B_n = \frac{2A}{L_x}\int_0^{L_x} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{l}}\sin(\frac{n\pi x}{L_x})dx$$

La integral anterior la calculará numéricamente el código.

Así la solución será:

$$\rho(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2A}{L_x}\int_0^{L_x} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{l}}\sin(\frac{n\pi x}{L_x})dx\right) * \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right) e^{-D\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 t}$$

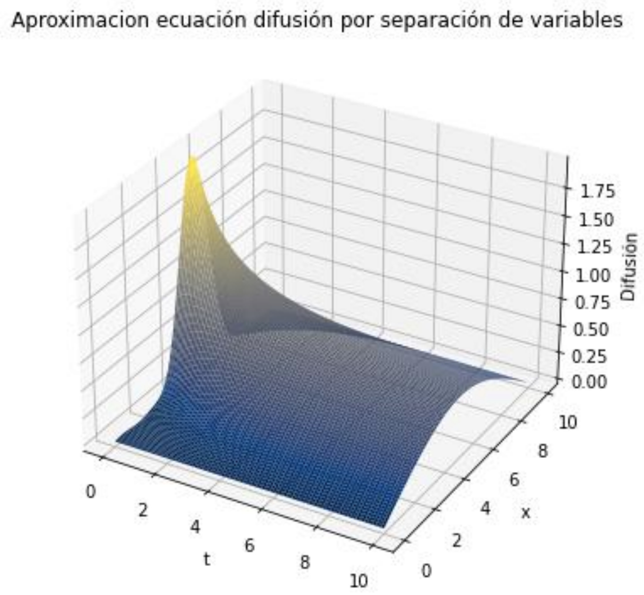
Con A=2 l=1.5 $x_0 = 5$ n entero D=0.5

La ecuación anterior es la solución analítica por medio del método seleccionado, ahora se programará su solución numérica.

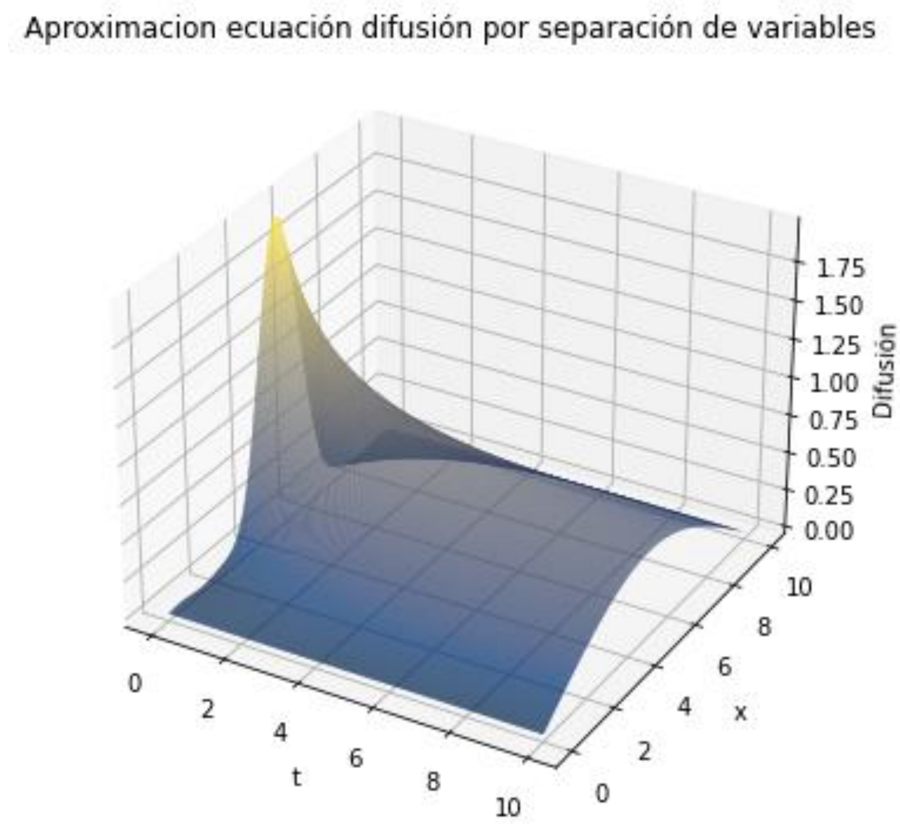
**Pseudocódigos**

- Se importan las bibliotecas numpy, scipy y matplotlib, que serán de ayuda para distintos fines. De SciPy se importa scipy.integrate as spint para resolver la integral que se involucra en el cálculo de los coeficientes.
- Se definen la función Parte_temporal la cual brindará la parte relacionada ecuación temporal a resolver.
- Se definen la función Parte_espacial la cual brindará la parte relacionada ecuación espacial a resolver.
- Se define la función Coeficientes la cual calculará los coeficientes $B_n$ según cuantos n se deseen
- Se definen todas las constantes que el problema involucra, así como la cantidad de puntos que se desean en la partición del rango de espacio y tiempo para poder evaluar los cálculos.
- Se debe definir el universo de valores que se requieren para el cálculo de la ecuación diferencial, esto se hace por medio de np.linspace desde la posición inicial =0 hasta la posición final $L_x = 10$.
- Se calcula la solución para las combinaciones del espacio y el tiempo, según para los n deseados, para lo cual se llaman las funciones creadas y el resultado se almacena en un arreglo de ceros creados según el tamaño de x y t.
- Se grafica la solución en función de x y t por medio de un gráfico 3D

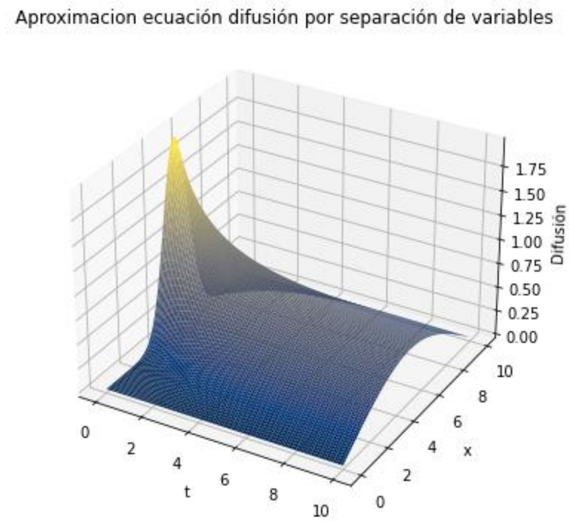
**Gráfico resultado**



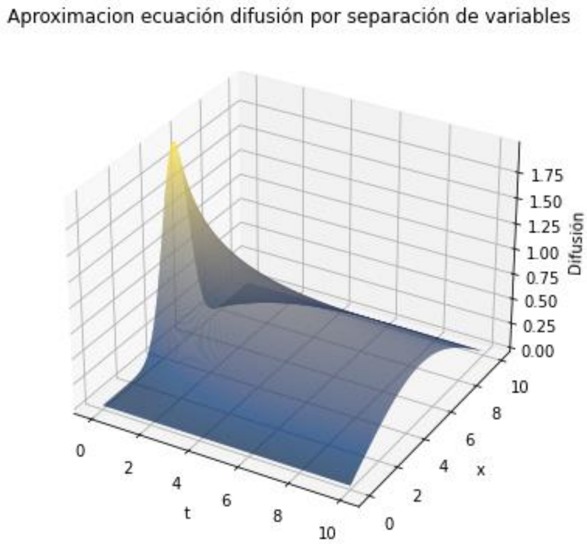

Gráfica 1
n=10 cant_puntos=100




Gráfica 2
n=10 cant_puntos=300



Gráfica 3
n=30 cant_puntos=100



Gráfica 4
n=30 cant_puntos=300

**Método de diferencias finitas**

Se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}$$

Se deben de discretizar las variables, la función y sus primeras derivadas:

$$x \to x_m = m\Delta x$$
$$t \to t_n = n\Delta t$$
$$\rho(x,t) \to \rho_{(m,n)} = \rho(x_m, t_n)$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \to \left(\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\right)_n = \frac{\rho_{(m,n+1)} - \rho_{(m,n)}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}\right)_m = \frac{\rho_{(m+1,n)} + \rho_{(m-1,n)} - 2\rho_{(m,n)}}{\Delta x^2}$$

Ahora se usa la discretización anterior para reescribir la ecuación en estudio:

$$\frac{\rho_{(m,n+1)} - \rho_{(m,n)}}{\Delta t} = D\frac{\rho_{(m+1,n)} + \rho_{(m-1,n)} - 2\rho_{(m,n)}}{\Delta x^2}$$

Despejando la ecuación anterior:

$$\frac{\rho_{(m,n+1)} - \rho_{(m,n)}}{\Delta t} - D\frac{\rho_{(m+1,n)} + \rho_{(m-1,n)} - 2\rho_{(m,n)}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{\rho_{(m,n+1)}}{\Delta t} - \frac{\rho_{(m,n)}}{\Delta t} - D\frac{\rho_{(m+1,n)} + \rho_{(m-1,n)}}{\Delta x^2} + D\frac{2\rho_{(m,n)}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\frac{\rho_{(m,n+1)}}{\Delta t} = \frac{\rho_{(m,n)}}{\Delta t} + D\frac{\rho_{(m+1,n)} + \rho_{(m-1,n)}}{\Delta x^2} - D\frac{2\rho_{(m,n)}}{\Delta x^2}$$

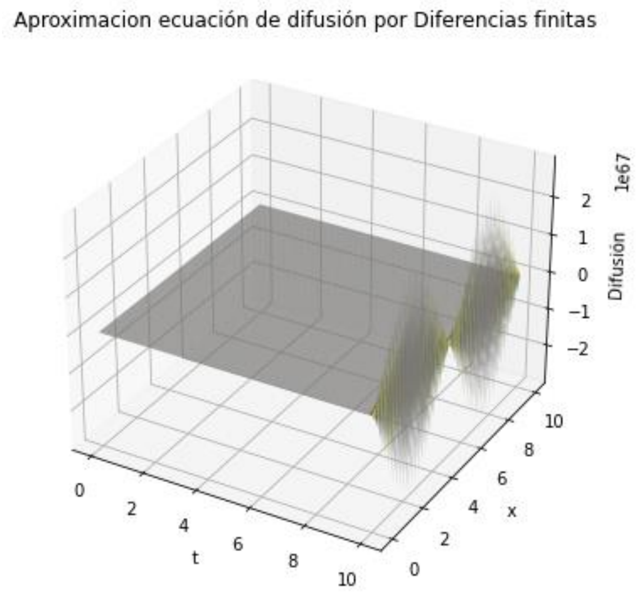
$$\rho_{(m,n+1)} = \rho_{(m,n)} + D\Delta t\frac{\rho_{(m+1,n)} + \rho_{(m-1,n)} - 2\rho_{(m,n)}}{\Delta x^2}$$

La ecuación anterior es la que se usará para iterar y obtener la solución de la EDP

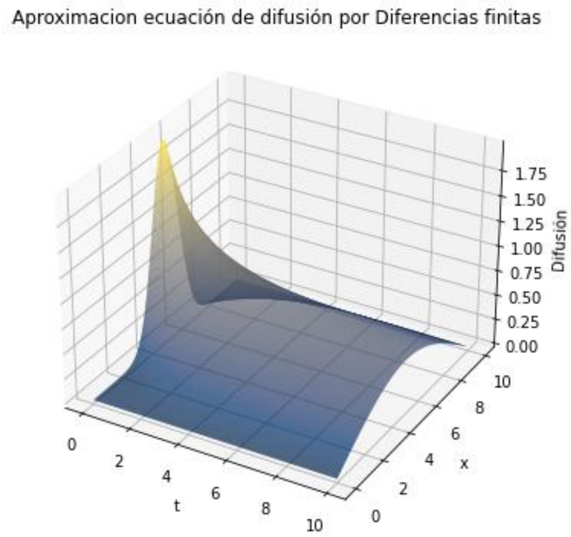
## Pseudocódigos

- Se importan las bibliotecas necesarias: numpy, matplotlib
- Se crea la función Aproximación que utiliza la fórmula a iterar para recorrer la malla de valores de m y n, para lo cual se necesitan 2 ciclos, uno que recorra las filas de la malla y otro que recorra las columnas de cada fila, correspondientes a la malla de espacio y tiempo discretizados y dicha función retorna un arreglo de valores correspondientes a la solución
- Se utiliza una función Grafico para crear los valores necesarios y llamar la función Aproximación, además se realiza el gráfico.

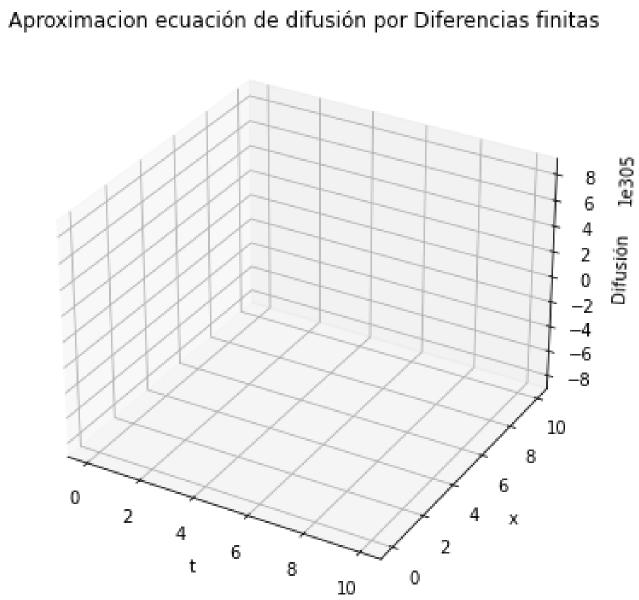
## Gráfico resultado




Gráfica 5
x=100 t=900 tiempo=10 extension=10




Gráfica 6
x=100 t=1000 tiempo=10 extension=10




Gráfica 7
x=1000 t=1000 tiempo=10 extension=10

**Discusión**

*El impacto, cualitativo y cuantitativo, de los parámetros propios de cada uno de los métodos escogidos en el cálculo numérico en la solución.

-Separación de variables

En el método de separación de variables se deben considerar cierta cantidad de términos n, debido a que la serie abarca términos hasta al infinito, sin embargo computacionalmente no podemos lograr esto, por ende debemos cierta cantidad de términos, como mayor sea la cantidad de n será más demandante computacionalmente, esto se pudo identificar en el tiempo de ejecución del programa, así mismo la cantidad de puntos en los que se divide el espacio también retarda la ejecución del programa, pues se deben calcular más resultados de difusión, ambas situaciones se muestran a continuación:

| Gráfica | Cantidad de puntos | Términos de n | Tiempo (s) |
|---|---|---|---|
| 3 | 100 | 30 | 58.74 |
| 1 | 100 | 10 | 13.61 |
| 4 | 300 | 30 | 530.31 |
| 2 | 300 | 10 | 121.86 |

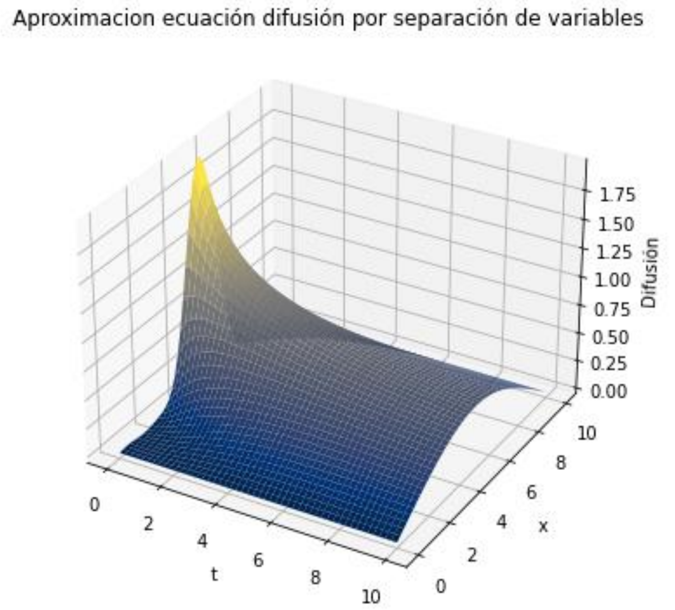
-Diferencias finitas

Los parámetros que afectan el cálculo de la solución en este método es referente a la separación que se crea en la malla de valores producto de la discretización, dando el $\Delta x$ y $\Delta t$ con los valores incorrectos los cálculos no se hacen de la manera esperada.

Si el $\Delta x$ es menor a aproximadamente 0.1 no se logra una gráfica cómo se muestra en la gráfica 7, si $\Delta t$ es mayor a aproximadamente a 0.01 el gráfico se distorsiona y se obtiene una gráfica como la gráfica 5, mientras que si estos valores se mantienen en los valores ideales se obtiene una gráfica como la 6, la cual calza físicamente con lo esperado.

*Las diferencias, al menos cualitativas, entre las soluciones que fueron obtenidas con cada método escogido.

Al observar las gráficas antes presentadas, gráfica 6 y las gráficas de la parte de separación de variables, se aprecia que las diferencias no son apreciables entre uno u otro, sin embargo, las diferencias finitas duraron mucho menos en comparación a las gráficas de separación de variables, por lo que se presenta una de separación de variables con 50 puntos y 10 términos de n, con estas condiciones la duración de ambos métodos es parecido (aproximadamente 4 segundos):




Gráfica 8
n=30 cant_puntos=300

En ese caso se notan pequeñas curvas en la solución por medio de separación de variables (Gráfica 8) que no están en la de diferencias finitas (Gráfica 6), además en la Gráfica 8 se notan las líneas producto de la baja cantidad de puntos usados, a pesar de todo las soluciones son muy parecidas.

*Ventajas y desventajas de cada uno de los métodos escogidos para obtener la solución numérica de la EDP planteada

-Separación de variables:

Ventajas: al ser una solución muy analítica se obtiene una mejor precisión. Las condiciones iniciales se incluyen en la parte analítica por lo que computacionalmente no se necesitan incluir. Funciona de forma simple, es evaluar los x y los t en ciertos n deseados y se obtiene el valor de difusión debido.

Desventajas: lleva un trabajo analítico más complejo. Es más demandante computacionalmente pues debe hacer más cálculos, entre ellos una integral significativa, además de senos y exponenciales.

-Diferencias finitas:

Ventajas: El proceso previo para llegar a la ecuación a iterar es sencillo. Los cálculos no son demandantes computacionalmente, se consigue una solución buena de forma rápida.

Desventajas: Es un método sumamente numérico, por ende, puede ser menos preciso. Se deben incluir las condiciones iniciales para encontrar una solución. El método no funciona para ciertos valores de espaciado sea en x o en t, por lo que tiene un límite en su precisión.

**Códigos generados**

https://github.com/ever2706/FCI-Tarea4.git