

## 1. INTRODUCCIÓN

Los desplazamientos de sólido rígido se pueden expresar en términos matemáticos como transformaciones lineales de la posición de un punto P en un sistema de referencia fijado al sólido rígido a la posición del punto P en el espacio respecto de un observador, usualmente fijo. Estos desplazamientos se suelen expresar a través de la rotación del sistema de referencia fijado al sólido  $\Sigma_B$  (de base ortonormal  $\mathbf{u}_B, \mathbf{v}_B, \mathbf{w}_B$ ) respecto del sistema de referencia fijo  $\Sigma_O$  ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ), y la traslación del origen del sistema  $\Sigma_B$ . Como estas transformaciones deben mantener la distancia entre puntos y la orientación entre líneas de un sólido rígido, se denominan transformaciones euclídeas. Estos desplazamientos tienen estructura de grupo de Lie, y el grupo de dimensión 6 de los desplazamientos euclídeos se denomina SE(3).

La parametrización más habitual en ingeniería mecánica emplea los ángulos de Euler en la representación del grupo de los desplazamientos esféricos SO(3) (figura 1). Para ello se define la matriz de rotación según una secuencia de giros. La más común en Mecánica Clásica es la secuencia **wuw** que proporciona la expresión:

$$R_B^O = \begin{bmatrix} c\varphi c\psi - c\theta s\varphi s\psi & -s\varphi c\psi - c\theta c\varphi s\psi & -s\theta s\psi \\ c\varphi s\psi + c\theta s\varphi c\psi & -s\varphi s\psi + c\theta c\varphi c\psi & -s\theta c\psi \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $c$  y  $s$  representan las funciones seno y coseno. Esta representación, o cualquiera que use la concatenación de tres giros, contiene una orientación en la que es singular. Aquí singular se refiere a que la orientación no viene dada por valores únicos o definidos de los ángulos, y se corresponde con  $\theta = 0, \pi$ .

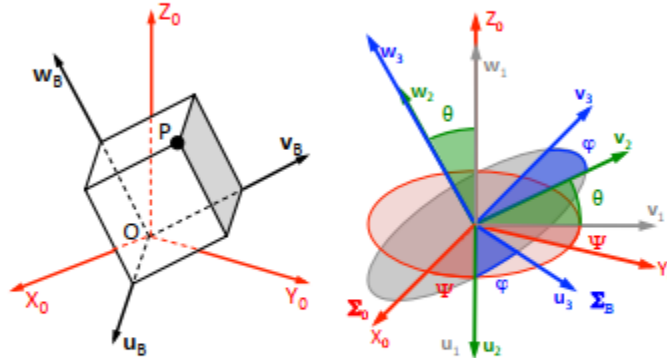


Figura 1. Parametrización de las rotaciones mediante Ángulos de Euler

Para los desplazamientos euclídeos SE(3) lo más habitual es emplear la matriz de transformación y representar las coordenadas de los puntos en coordenadas homogéneas ( $p_x, p_y, p_z, 1$ ):

$$T_B^O = \begin{bmatrix} R_B^O & d \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde  $d$  es el vector que va del origen del sistema  $\Sigma_B$  al origen del sistema  $\Sigma_0$ . Una sistematización muy extendida para la aplicación a cadenas cinemáticas es la de Denavit-Hartenberg.

El análisis de los problemas cinemáticos en sistemas mecánicos resulta en sistemas de ecuaciones que contienen funciones de las magnitudes de diseño del mecanismo y de los parámetros empleados para describir su movimiento. En el caso de que los parámetros empleados para describir el movimiento de rotación sean ángulos, estas funciones son trigonométricas. Los sistemas computacionales de álgebra tienen más dificultades para manejar de forma simbólica funciones trigonométricas que funciones algebraicas.

El empleo del cambio de variable de la tangente del ángulo mitad es muy habitual para convertir las funciones trigonométricas en polinomios racionales:

$$t = \tan \frac{\theta}{2}; \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (3)$$

y así poder emplear las herramientas matemáticas de resolución de polinomios. El problema es que las posiciones en que  $\theta$  sea  $\pi$  se corresponden con un valor  $\infty$  de  $t$ , y los sistemas de álgebra computacional tienen dificultades para manejarlas.

Para afrontar este doble problema, el de la singularidad de la representación con ángulos de Euler y el de la generación de sistemas de ecuaciones con funciones trascendentes en los problemas cinemáticos, es para lo que se desarrollaron otras parametrizaciones, tanto de la rotación como de los desplazamientos generales. En este trabajo se va a exponer lo que se viene denominando "kinematic mapping". Lo que se pretende es representar cada desplazamiento de sólido rígido (6 dimensiones) con puntos de un espacio proyectivo de dimensión 7, cuyas 7 coordenadas se denominan parámetros de Study [1-2]. Esta redundancia evita las singularidades antes citadas, y la expresión de las transformaciones tiene por términos polinomios cuadráticos. Los antecedentes de la parametrización de Study se encuentran en los trabajos de Hamilton que desembocaron en la definición de los

cuaterniones [3]. En esos trabajos se determinó una parametrización redundante de las rotaciones que usa cuatro parámetros y da lugar a una matriz de rotación con términos polinomiales. Esta parametrización tiene a su vez antecedentes en los trabajos de Euler [4] y de Rodrigues [5].

## 2. CUATERNIONES

Euler expuso su teorema de la rotación introduciendo los conceptos de eje de rotación  $u$  y ángulo girado  $\theta$  (1775), que dan lugar a la matriz de rotación a través de la fórmula de rotación de Rodrigues (1815). Rodrigues (1840) planteó cuatro escalares:

$$e_0 = \cos \frac{\theta}{2}; \quad e = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]^T = u \sin \frac{\theta}{2} \quad (4)$$

que cumplen la ecuación de restricción:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (5)$$

Y permiten expresar la matriz de rotación como:

$$R_B^O = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 - e_0e_3) & 2(e_0e_2 + e_1e_3) \\ 2(e_1e_2 + e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 - e_0e_1) \\ 2(-e_0e_2 + e_1e_3) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Hamilton dedujo, de forma independiente, esencialmente el mismo resultado también en 1840. Hamilton buscaba la forma de describir la posición relativa de dos vectores en el espacio tridimensional. En el caso plano esto se puede realizar con los números complejos, la extensión al caso espacial generó los cuaterniones. Los cuaterniones tienen una parte escalar  $q_0$  y otra vectorial  $q$  y admiten varias formas de representación matemática:

$$q = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3] = q_0 + q; \quad q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (7)$$

Con la ayuda de cuaterniones unitarios, se puede describir la rotación de un sólido un ángulo  $\theta$  alrededor de un eje de rotación  $u$ .

$$q = [e_0 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3] = e_0 + e; \quad e_0 = \cos \frac{\theta}{2}; \quad e = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]^T = u \sin \frac{\theta}{2} \quad (8)$$

pues permite representar la matriz de rotación igual que en la ecuación (6). Esta transformación es 2 a 1, es decir, que una misma rotación viene dada por dos cuaterniones que difieren en un factor  $\pm 1$ .

La principal ventaja de esta parametrización del grupo  $SO(3)$  es que la composición de rotaciones se puede realizar mediante la multiplicación de cuaterniones (con sus reglas específicas), lo cual es numéricamente más estable que la combinación de muchas transformaciones matriciales. Además, la necesidad de almacenaje de datos es menor y por lo tanto el coste computacional de su manejo es mucho más rentable. Por el contrario, la visualización de la rotación es menos intuitiva. Por todo ello se emplean con mucha profusión en sistemas computerizados tales como control de orientación, robótica, software, etc...

## 3. PROYECCIÓN CINEMÁTICA DE STUDY

Para obtener la parametrización del grupo de los desplazamientos generales  $SE(3)$ , es necesario introducir los cuaterniones duales [6]. Un número dual se puede escribir como:

$$a = a_0 + \varepsilon a_1; \quad \varepsilon^2 = 0 \quad (9)$$

Los cuaterniones duales se obtienen cuando se sustituyen los coeficientes duales  $a_i$  por cuaterniones, por ejemplo  $x = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3]$  e  $y = [y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3]$ . Estos cuaterniones duales son elementos de un espacio de dimensión 8. Cuando se emplean cuaterniones duales normalizados se debe verificar que:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (10)$$

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \quad (11)$$

y permiten representar el desplazamiento general mediante una matriz de transformación como la de la ecuación (2), donde:

$$R_B^O = \begin{bmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1 x_2 - x_0 x_3) & 2(x_0 x_2 + x_1 x_3) \\ 2(x_1 x_2 + x_0 x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) \\ 2(-x_0 x_2 + x_1 x_3) & 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$d = \begin{bmatrix} 2(-x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_3 + x_3 y_2) \\ 2(-x_0 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_0 - x_3 y_1) \\ 2(-x_0 y_3 - x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0) \end{bmatrix} \quad (13)$$

A estas 8 coordenadas se ha venido denominándolas: coordenadas Soma, o de Study, o parámetros de Study. Si se omite la condición de normalización de la ecuación (5), y simplemente se asume que la suma de los cuadrados es distinta de 0, se obtendría la matriz de transformación:

$$T_B^O = \frac{1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \begin{bmatrix} R_B^O & d \\ 0^T & x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Como ocurría anteriormente, esta transformación es 2 a 1, es decir existen dos sets de 8 coordenadas ( $P$  y  $-P$ ) que describen la misma posición. Para eliminar esta doble relación se puede construir un espacio proyectivo de 7 dimensiones, donde las 8 coordenadas sean vistas como coordenadas homogéneas de puntos. Los puntos que satisfacen la ecuación (11) están en una cuádrica, si se eliminan los puntos en que  $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$  por representar posiciones inexistentes, lo que queda se denomina "Study quadric"  $S_6^2$  y se cumple que  $P$  y  $-P$  describen el mismo punto en esta cuádrica con lo que existe una correspondencia 1 a 1 entre los puntos de esa cuádrica y posiciones en el espacio SE(3). Al espacio proyectivo se le denomina "kinematic image space".

Para el caso de desplazamientos en el plano, se emplean 4 coordenadas de Study en un espacio proyectivo de dimensión 3 donde aquellas se toman como coordenadas homogéneas. Estas coordenadas se definen a partir del hecho de que las rotaciones se producen en el eje  $u=k$  por lo que  $x_1 = x_2 = 0$ , y las traslaciones se producen en el plano XY, por lo que  $y_0 = y_3 = 0$ . Si se toman las coordenadas cartesianas ( $a, b, \phi$ ) del movimiento plano de la figura 2, y las coordenadas de Study para el plano  $[x_0 \ x_3 \ y_1 \ y_2]$ , la matriz de transformación se puede expresar como:

$$T_B^O = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & a \\ \sin \phi & \cos \phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$T_B^O = \frac{1}{x_0^2 + x_3^2} \begin{bmatrix} x_0^2 - x_3^2 & -2x_0 x_3 & 2(-x_0 y_1 + x_3 y_2) \\ 2x_0 x_3 & x_0^2 - x_3^2 & 2(-x_0 y_2 - x_3 y_1) \\ 0 & 0 & x_0^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

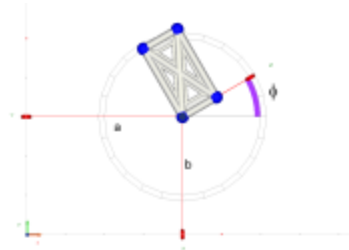


Figura 2. Coordenadas cartesianas de posición en el plano

#### 4. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Como aplicación de lo anteriormente expuesto tomemos el clásico ejemplo del análisis cinemático del mecanismo cuadrilátero articulado de la figura 3. La posición y orientación del elemento acoplador se puede plantear mediante la matriz de transformación de la ecuación (16). Las coordenadas homogéneas de un punto del acoplador en el sistema de referencia fijo situado con origen en A se obtienen a partir de:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = T_B^O \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + x_3^2} \begin{bmatrix} x_0^2 - x_3^2 & -2x_0x_3 & 2(-x_0y_1 + x_3y_2) \\ 2x_0x_3 & x_0^2 - x_3^2 & 2(-x_0y_2 - x_3y_1) \\ 0 & 0 & x_0^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

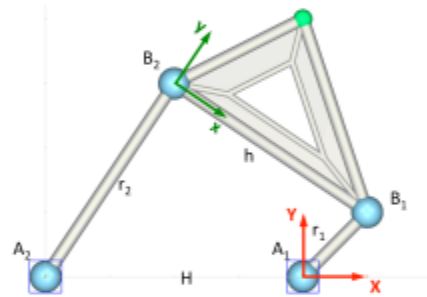


Figura 3. Mecanismo plano de un grado de libertad

Por tanto, las coordenadas de los puntos B<sub>1</sub> y B<sub>2</sub> del acoplador son:

$$\begin{bmatrix} X_{B_1} \\ Y_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} = T_B^O \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + x_3^2} \begin{bmatrix} h(x_0^2 - x_3^2) + 2(-x_0y_1 + x_3y_2) \\ h(2x_0x_3) + 2(-x_0y_2 - x_3y_1) \\ x_0^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} X_{B_2} \\ Y_{B_2} \\ 1 \end{bmatrix} = T_B^O \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + x_3^2} \begin{bmatrix} 2(-x_0y_1 + x_3y_2) \\ 2(-x_0y_2 - x_3y_1) \\ x_0^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Si se considera que el acoplador está sometido a dos ecuaciones de restricción, a saber, que B<sub>1</sub> está unido a A<sub>1</sub> por una barra de longitud constante r<sub>1</sub> y análogamente con la barra A<sub>2</sub> B<sub>2</sub>, el movimiento del mecanismo viene determinado por esas ecuaciones, y una ecuación que normaliza los parámetros de Study. En este último caso podría usarse la ecuación en el plano análoga a la ecuación (10),  $x_0^2 + x_3^2 = 1$ , pero también otras variantes mientras no se cumpla  $x_0 = x_3 = 0$ . De cara a obtener una representación gráfica adecuada y una simplificación importante del problema puede usarse  $x_0 = 1$ . Las ecuaciones que se obtienen son:

$$4(y_1^2 + y_2^2) - 4h(x_0y_1 + x_3y_2) + (h^2 - r_1^2)(x_0^2 + x_3^2) = 0 \quad (20)$$

$$4(y_1^2 + y_2^2) + 4H(-x_0y_1 + x_3y_2) + (H^2 - r_2^2)(x_0^2 + x_3^2) = 0 \quad (21)$$

$$x_0 = 1 \quad (22)$$

Para resolver la localización del acoplador en un instante, bastaría sustituir las coordenadas conocidas del punto  $B_1$  en la ecuación (18) para tener la ecuación de la entrada, que constituye otra superficie, la cual corta a la curva en los puntos solución  $x = [x_0 \ x_3 \ y_1 \ y_2]$ , por ejemplo:

$$\frac{Y_{B_1}}{X_{B_1}} = \frac{h(2x_0x_3) + 2(-x_0y_2 - x_3y_1)}{h(x_0^2 - x_3^2) + 2(-x_0y_1 + x_3y_2)} \quad (23)$$

La representación gráfica en el "kinematic image space" se puede observar en la figura 4. La primera ecuación de restricción será el hiperboloide cyan, la segunda el hiperboloide amarillo, la curva de intersección de ambos hiperboloides es el espacio de configuración del acoplador, y el paraboloide gris es la ecuación de entrada. La resolución del problema de posición consiste por tanto en la intersección de las tres superficies, esto es, la resolución del sistema de ecuaciones (20) a (23). Posteriormente se obtendrían las coordenadas cartesianas  $(a, b, \phi)$  que les corresponden con las ecuaciones:

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{x_3}{x_0}; \quad a = \frac{2(-x_0y_1 + x_3y_2)}{x_0^2 + x_3^2}; \quad b = \frac{2(-x_0y_2 - x_3y_1)}{x_0^2 + x_3^2} \quad (24)$$

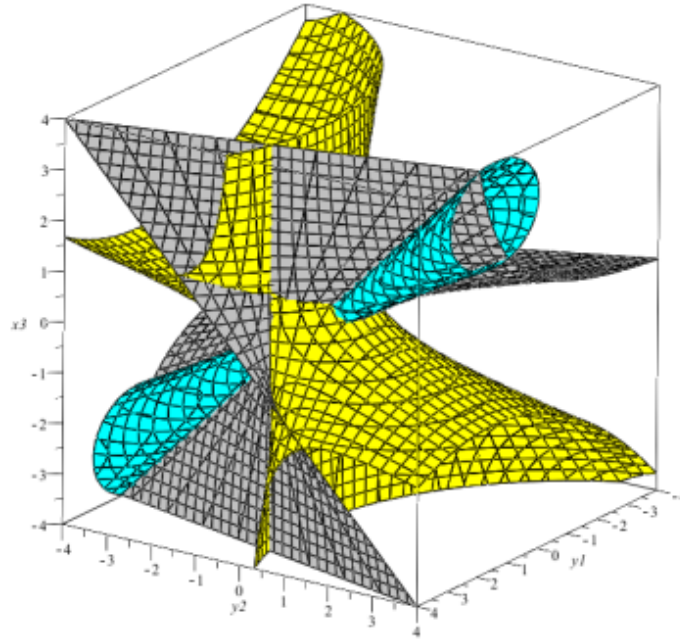


Figura 4. Representación en el "kinematic image space" de las ecuaciones de restricción, el espacio de configuración del acoplador, y la ecuación de entrada

El análisis de singularidades del mecanismo se realiza obteniendo el determinante de Jacobiano de las ecuaciones (20) a (23) e igualándolo a cero. Lo obtenido es nuevamente una superficie en ese "kinematic image space" (ver figura 5). Las posiciones singulares se obtienen por intersección de esa superficie con la curva que representa el espacio de configuración del acoplador.



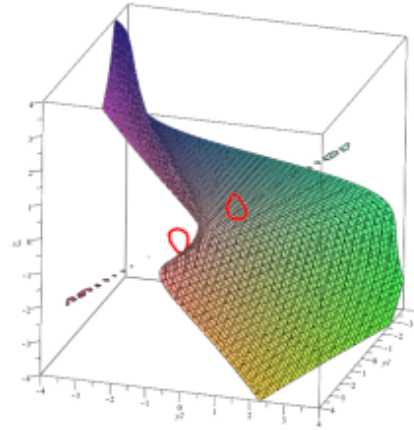


Figura 5. Representación en el "kinematic image space" de la superficie de singularidad

En el ejemplo siguiente se presenta el análisis cinemático de un mecanismo de cadena cerrada de tres grados de libertad, es el clásico mecanismo paralelo 3RPR (ver figura 6). El elemento terminal  $B_1B_2B_3$  está unido por tres émbolos de longitud variable  $r_i$  al elemento fijo en  $A_i$ .

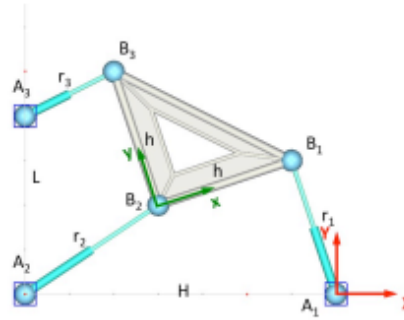


Figura 6. Mecanismo de cadena cerrada plano de tres grados de libertad, 3RPR.

En este caso no existen ecuaciones de restricción fijas, sino ecuaciones correspondientes a las entradas dadas al mecanismo. Las correspondientes a los dos primeros émbolos son exactamente las mismas ecuaciones (20) y (21) deducidas antes, salvo que ahora  $r_1$  y  $r_2$  son variables de entrada. La ecuación de entrada del tercer émbolo se puede plantear a partir de las coordenadas de  $B_3$

$$\begin{bmatrix} X_{B_3} \\ Y_{B_3} \\ C \end{bmatrix} = T_B^O \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + x_3^2} \begin{bmatrix} -h(2x_0x_3) + 2(-x_0y_1 + x_3y_2) \\ h(x_0^2 - x_3^2) + 2(-x_0y_2 - x_3y_1) \\ x_0^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

introduciendo la condición de distancia conocida de entrada  $r_3$  a  $A_3$ :

$$4(y_1^2 + y_2^2) + 4h(x_3y_1 - x_0y_2) + 4H(-x_0y_1 + x_3y_2) - 4L(-x_0y_2 - x_3y_1) - 4Hh(x_0x_3) - 2Lh(x_0^2 - x_3^2) + (H^2 + L^2 + h^2 - r_3^2)(x_0^2 + x_3^2) = 0 \quad (26)$$

añadiendo la ecuación de normalización (22), se obtiene el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema de posición. Gráficamente, este problema consiste en la intersección de tres hiperboloides como se aprecia en la figura 7.

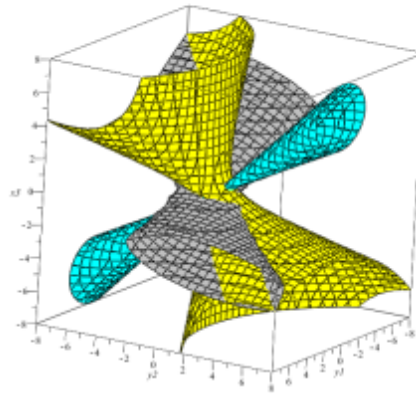


Figura 7. Representación en el "kinematic image space" de las ecuaciones de entrada del 3RPR

El análisis de las singularidades de este mecanismo se puede realizar exactamente igual que antes, construyendo el Jacobiano correspondiente a las ecuaciones (20) a (22) y (26). Su representación gráfica se muestra en la figura 8.

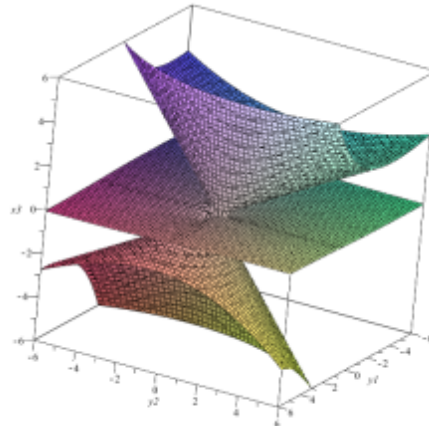


Figura 8. Representación en el "kinematic image space" de la superficie de singularidad del 3RPR

## 5. CONCLUSIONES

Como se ha podido observar en los ejemplos planos, la resolución del problema de posición y la obtención de singularidades empleando la parametrización de Study supone una sistematización importante del problema. En todos los casos se obtienen el mismo número de ecuaciones y de la misma topología geométrica. Esta sistematización supone además que los sistemas de ecuaciones resultantes sean tratables mediante software de análisis matemático empleando técnicas como las bases de Gröbner, u otros métodos como los homotópicos.

## 6. REFERENCIAS

- [1] E. Study. Geometrie der Dynamen. B.G. Teubner, Leipzig, (1903).
- [2] E. Study. Von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Ann., 39 (1891), 441-566.
- [3] W. R. Hamilton. Elements of Quaternions. Cambridge University Press (1899).
- [4] L. Euler. Formulae generales pro translatione quacunque corpum rigidorum. Novi Commentari Acad. Petropolitanae, 20, 189-207, (1776)
- [5] R. N. Jazar, Theory of Applied Robotics. Springer, (2010)
- [6] M. Pfurner, Doctoral Thesis, *Analysis of spatial serial manipulators using kinematic mapping*, University of Innsbruck, Austria, (2006).