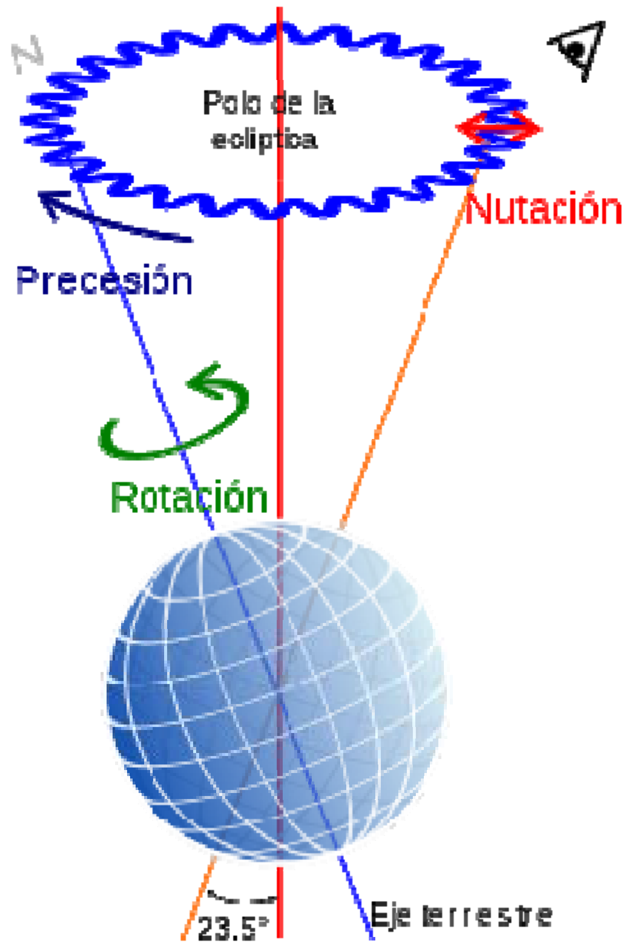
Matrices de Rotación. Ángulos de Euler

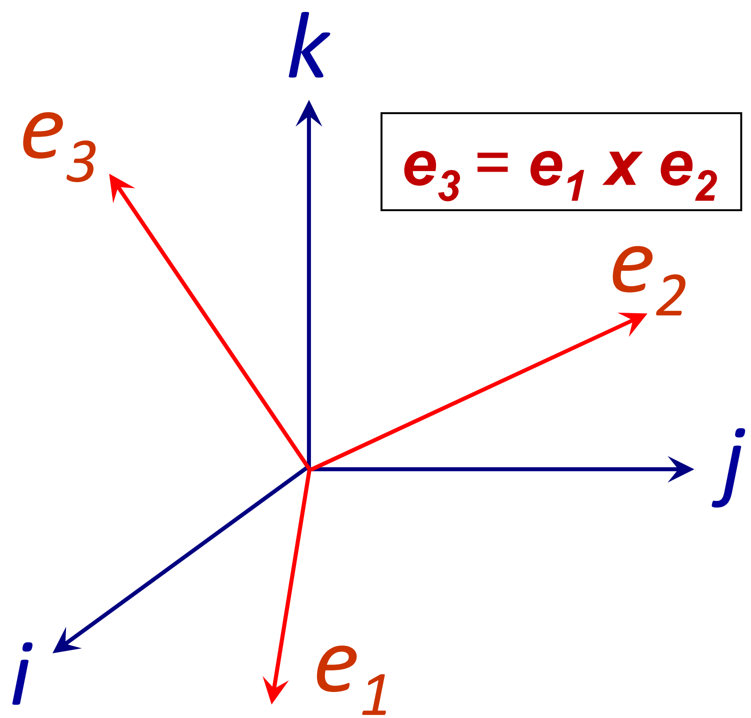


Transformaciones Ortogonales

($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) *base del cuerpo, solidaria o ligada*

($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$)*base fija o del espacio*

$$\vec{e_1} = e_{11}\vec{i} + e_{12}\vec{j} + e_{13}\vec{k}$$
$$\vec{e_2} = e_{21}\vec{i} + e_{22}\vec{j} + e_{23}\vec{k}$$
$$\vec{e_3} = e_{31}\vec{i} + e_{32}\vec{j} + e_{33}\vec{k}$$



$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$

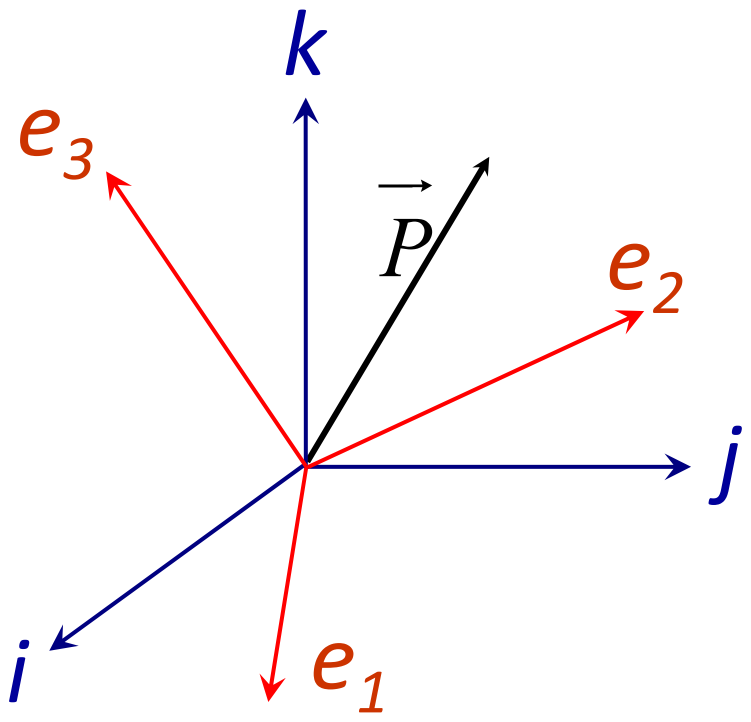
$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

E ortonormal de determinante = 1

Transformaciones Ortogonales

Cambio de base

$$\vec{P} = p_x \cdot \vec{i} + p_y \cdot \vec{j} + p_z \cdot \vec{k} = p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + p_3 \cdot \vec{e_3}$$



$$\vec{P} = p_x \cdot \vec{i} + p_y \cdot \vec{j} + p_z \cdot \vec{k} =$$

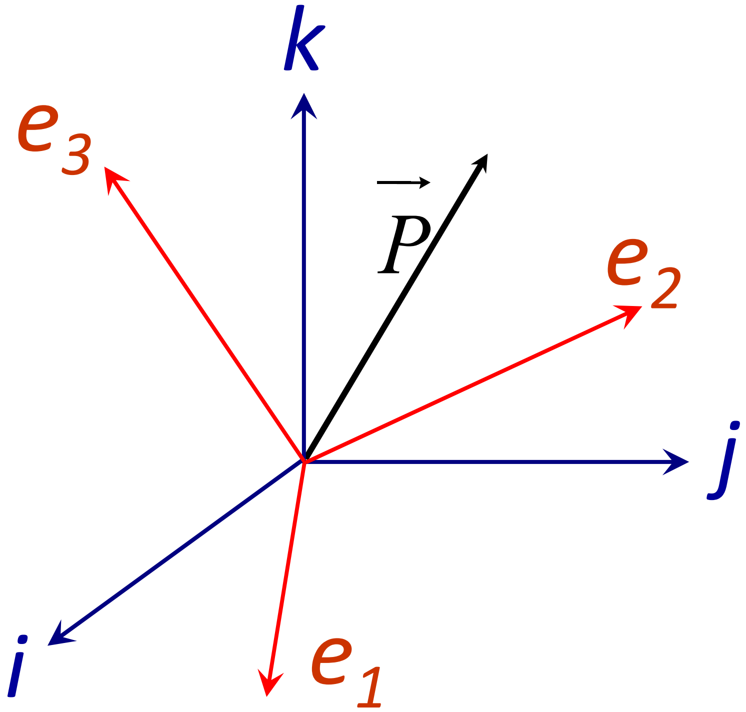
$$= p_1 \cdot \left(e_{11}\vec{i} + e_{12}\vec{j} + e_{13}\vec{k}\right) +$$

$$+ p_2 \cdot \left(e_{21}\vec{i} + e_{22}\vec{j} + e_{23}\vec{k}\right) +$$

$$+ p_3 \cdot \left(e_{31}\vec{i} + e_{32}\vec{j} + e_{33}\vec{k}\right)$$

Transformaciones Ortogonales

Cambio de base



$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_{xyz}} = E^t \cdot \overrightarrow{P_{123}}$$

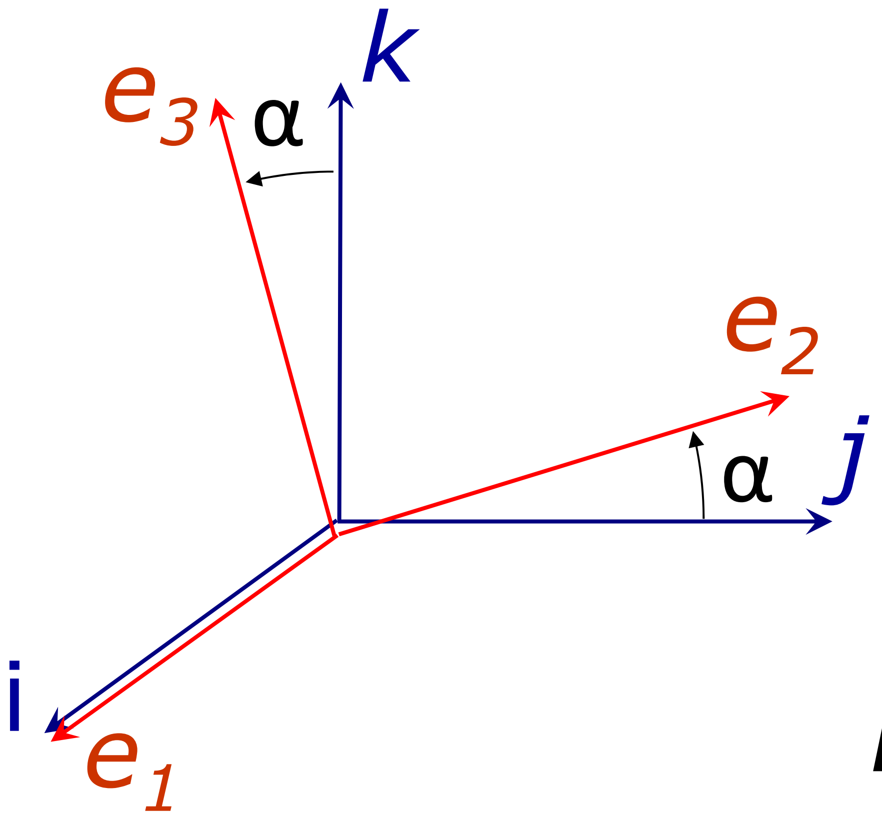
$$\overrightarrow{P_{123}} = E \cdot \overrightarrow{P_{xyz}}$$

$$E^{-1} = E^t$$

por ser E ortonormal

Rotaciones

Giro de un ángulo α alrededor de eje **X**



$$\overrightarrow{e_1} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

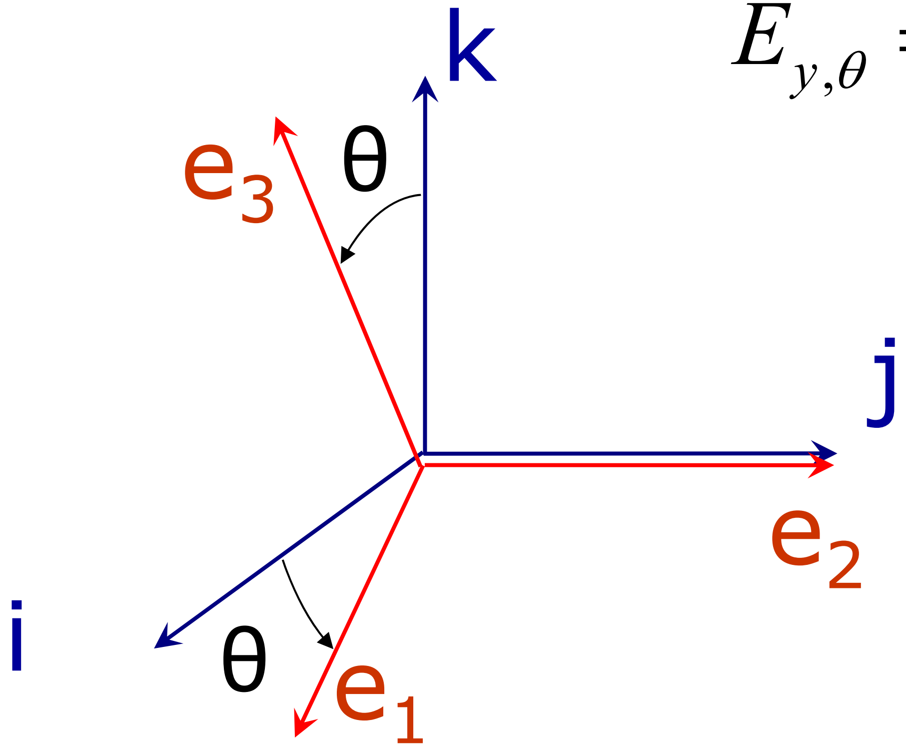
$$\overrightarrow{e_2} = 0\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} + sen\alpha\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{e_3} = 0\vec{i} - sen\alpha\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}$$

$$E_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Rotaciones

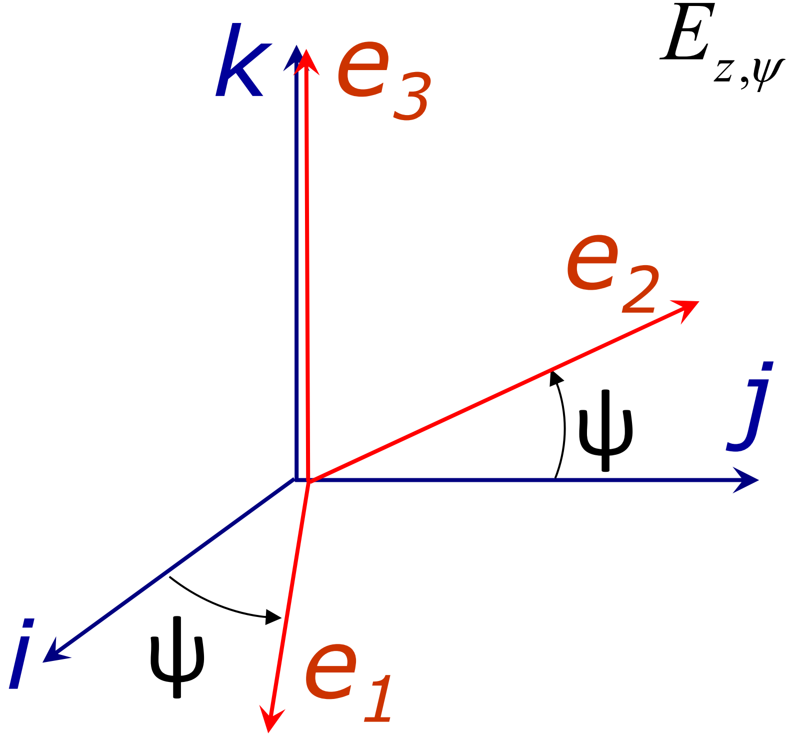
Giro de un ángulo θ alrededor de eje **Y**



$$E_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotaciones

Giro de un ángulo ψ alrededor de eje **Z**



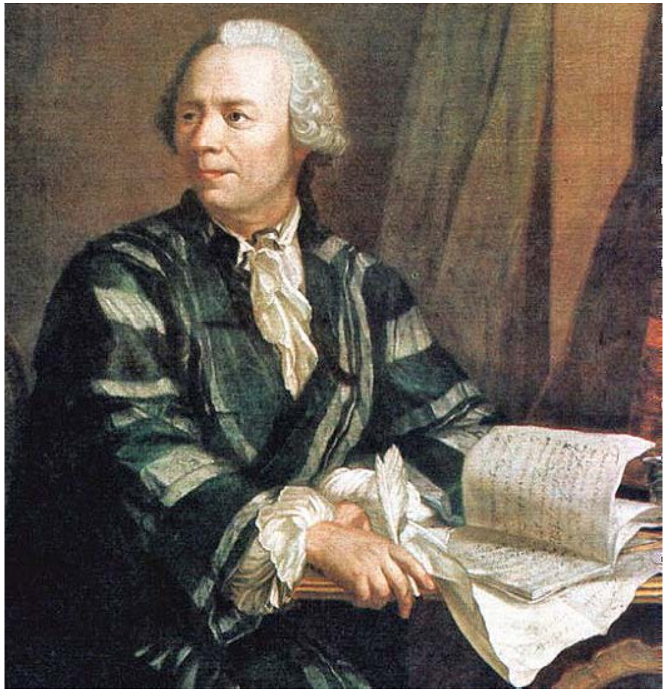
$$E_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema de Euler

Leonhard Paul Euler

(Basilea, Suiza, 15/07/1707 - San Petersburgo, Rusia, 18/09/1783)

"Rotando una esfera de forma arbitraria alrededor de su centro, siempre es posible encontrar un diámetro cuya posición tras la rotación es igual que la inicial"



Teorema de Euler

El movimiento más general de un SR con punto fijo se puede replicar mediante un único giro alrededor de un eje que pasa por el punto fijo

Como las rotaciones con punto fijo son matrices E ortonormales:

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

Toda matriz ortonormal con determinante unidad tiene un autovalor igual a 1 (y solo uno)

- *El eje de la rotación es el autovector del autovalor λ=1:*

*Si **P**ϵ al eje, queda invariante:* $E \cdot \overrightarrow{P} = \lambda \overrightarrow{P} = \overrightarrow{P}$

- *El ángulo de giro **θ** vale:* $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{33} - 1)$

Ángulos de Euler

Expresan la posición más general de un SR con punto fijo mediante 3 ángulos. La posición se alcanza mediante 3 rotaciones sucesivas:

1 - Precesión: *giro alrededor de un eje fijo:* ϕ

2-Nutación: *giro alrededor del eje perpendicular al fijo y a otro solidario:* θ

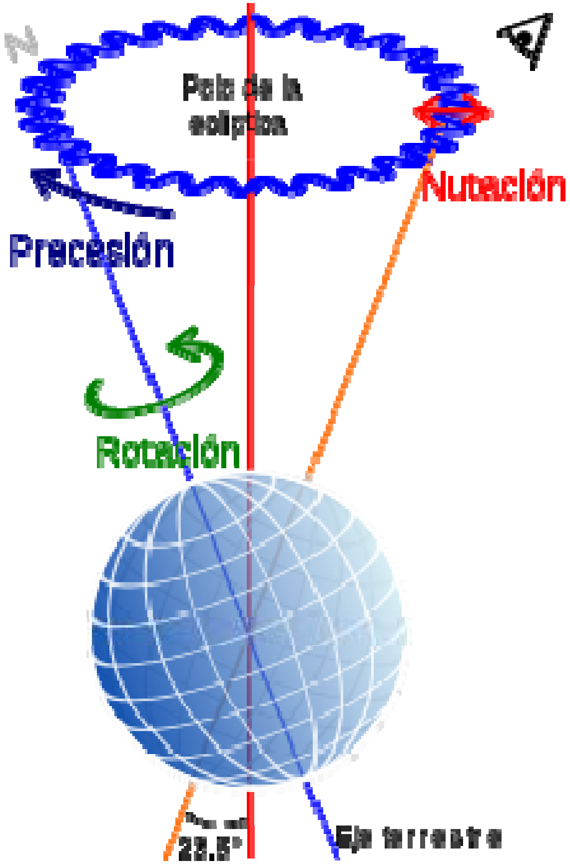
3 - Rotación propia (Spin): *giro alrededor del eje solidario al cuerpo:* ψ

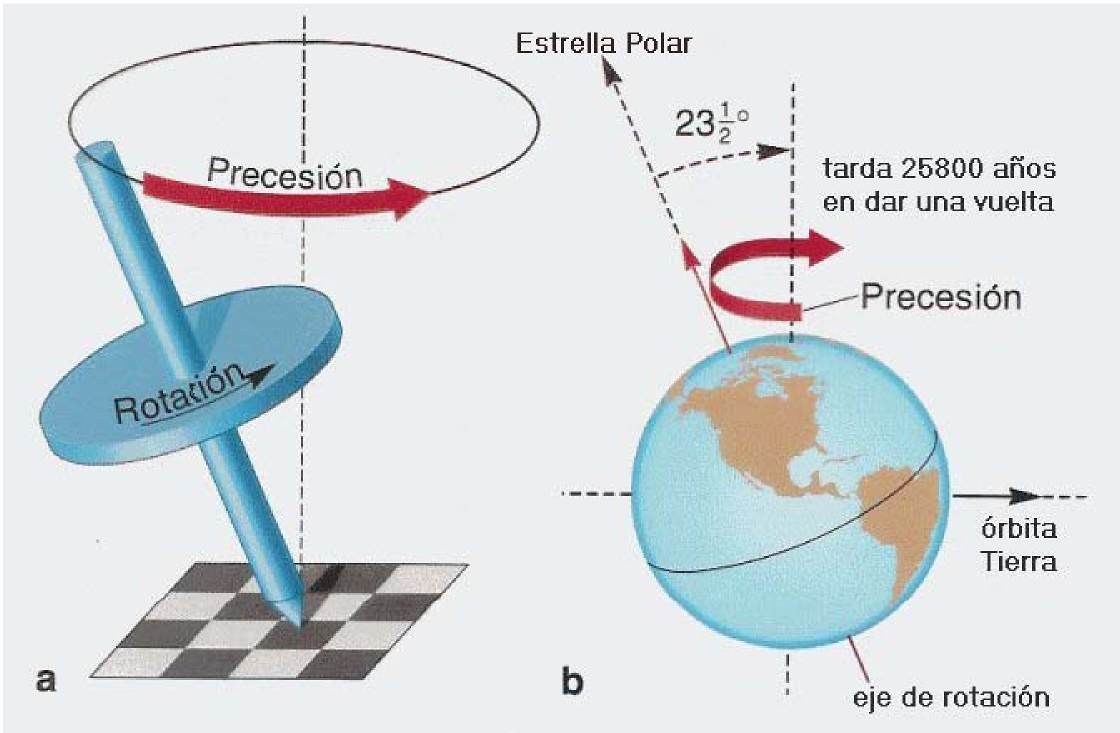
Ángulos de Euler

Precesión : ***T≈25800 años***

Nutación : ***T≈18.6 años***

Spin: ***T≈24 horas***

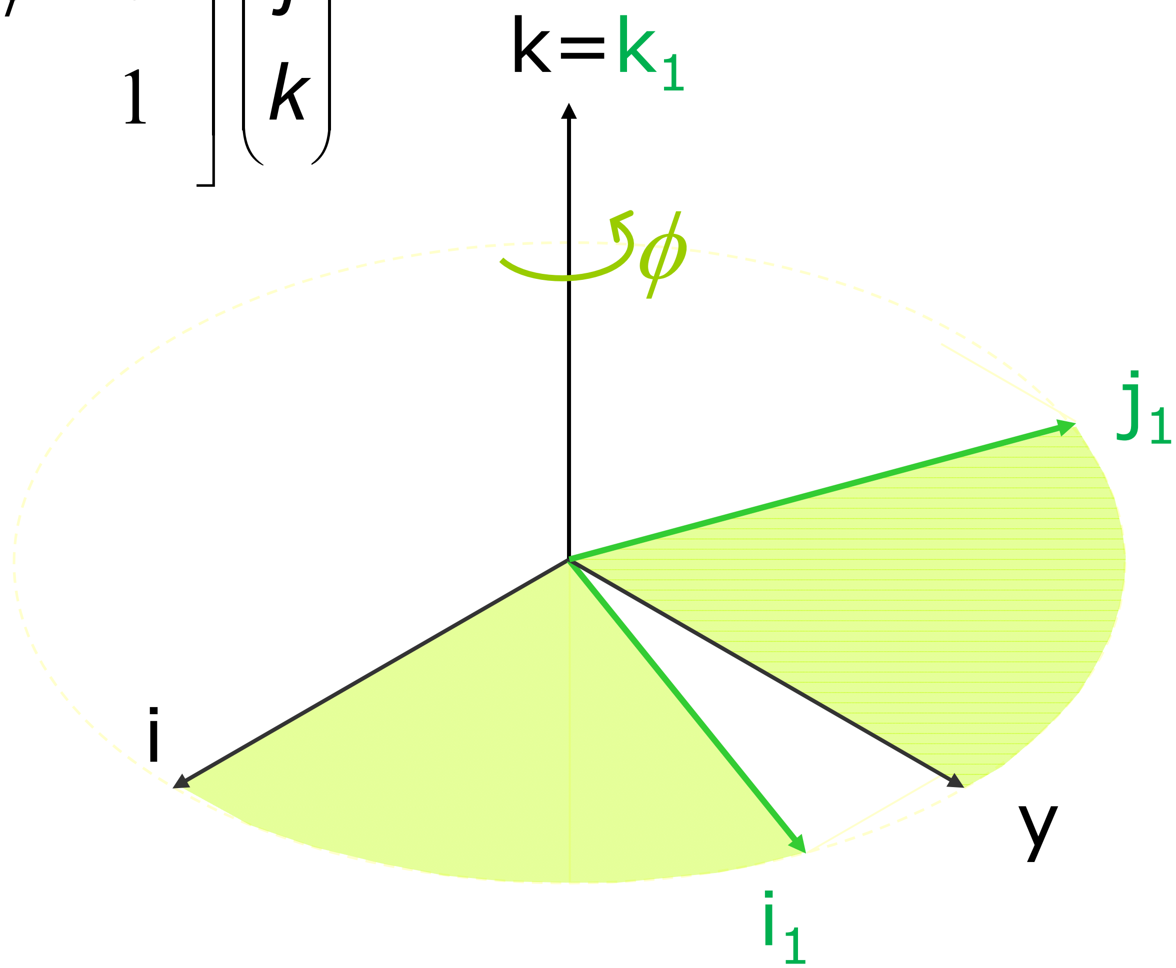




Ángulos de Euler: Primer giro: ángulo de precesión ϕ

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

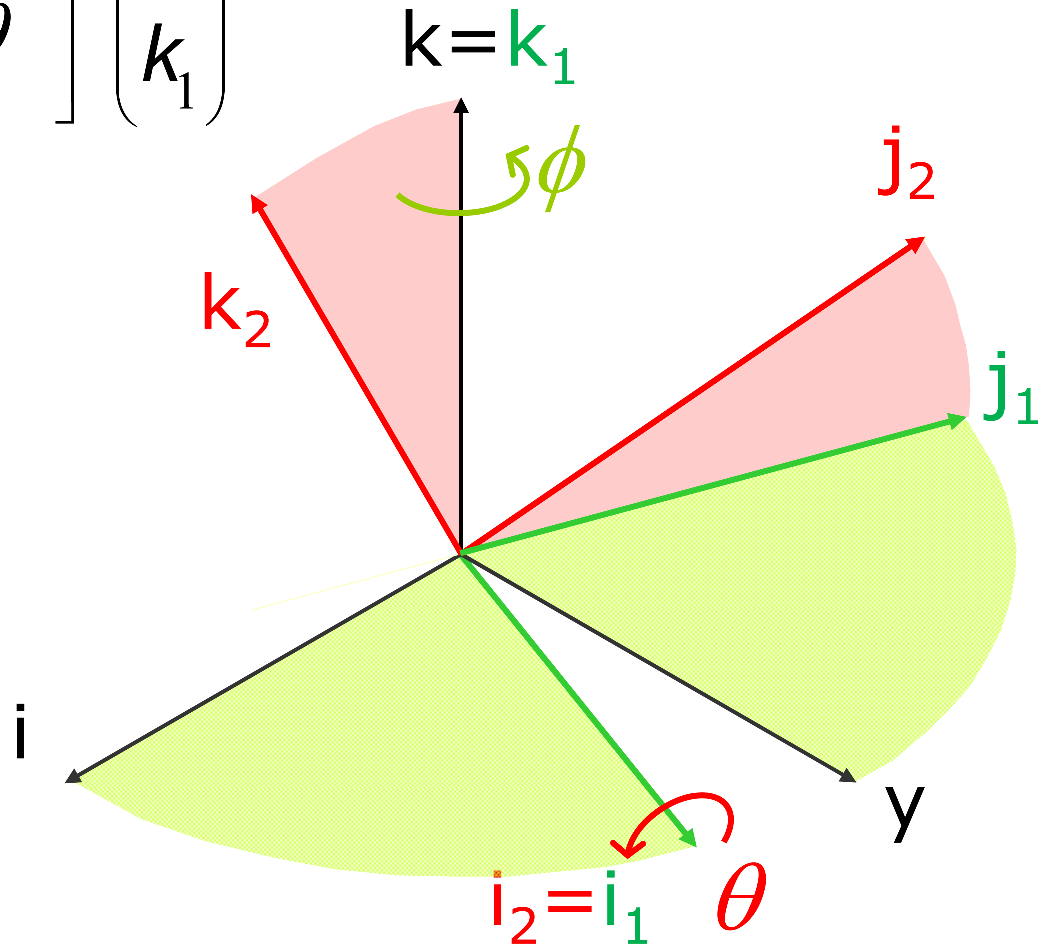
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}z\phi \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$



Ángulos de Euler: Segundo giro: ángulo de nutación θ

$$\begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

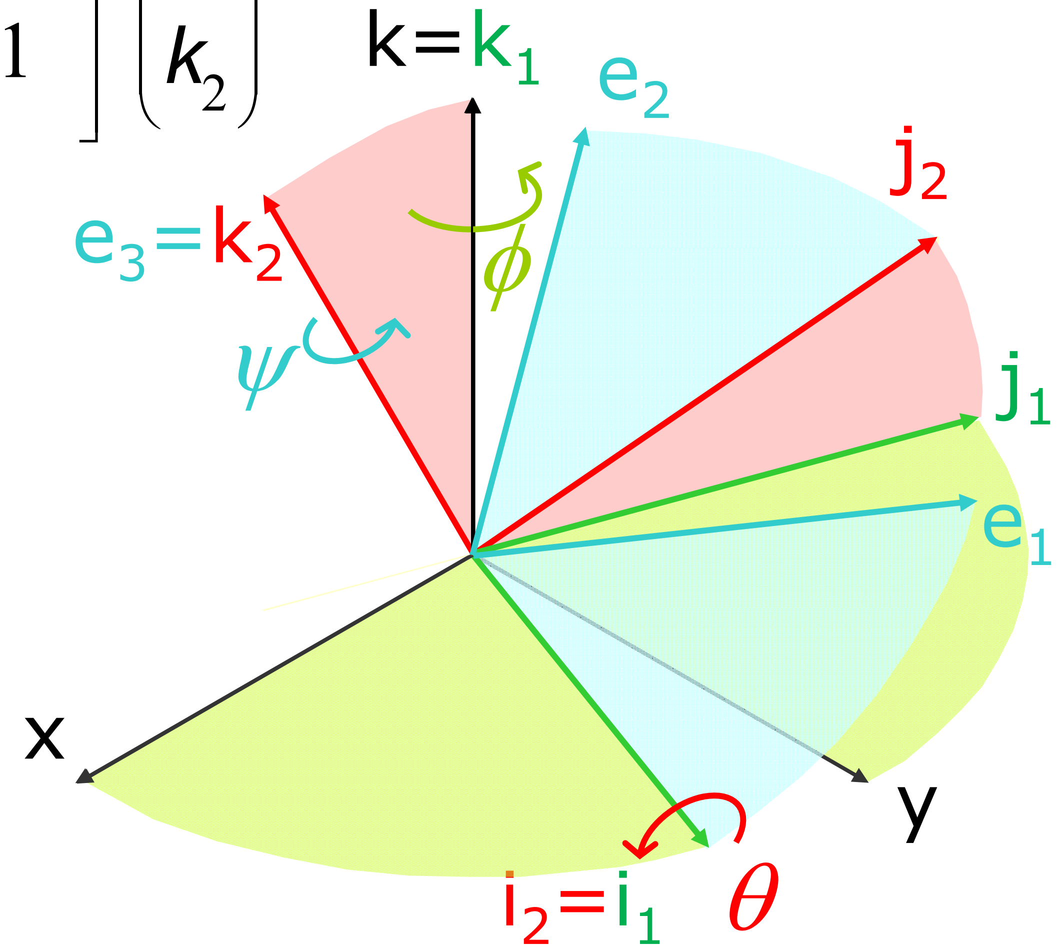
$$\begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathrm{E}x\theta \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$



Ángulos de Euler: Tercer giro: ángulo de spin ψ

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \mathrm{E}z\psi \cdot \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$



Ángulos de Euler. Matriz de rotación de los 3 giros

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}z\phi \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathrm{E}x\theta \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \mathrm{E}z\psi \cdot \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathrm{E}x\theta \cdot \mathrm{E}z\phi \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \mathrm{E}z\psi \cdot \mathrm{E}x\theta \cdot \mathrm{E}z\phi \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \mathrm{E} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

Ángulos de Euler. Matriz de Euler

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{z\psi} \cdot \mathrm{E}_{x\theta} \cdot \mathrm{E}_{z\phi} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \mathrm{E} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\psi & \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\phi + \cos\theta\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\psi & \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi \\ -\mathrm{sen}\,\psi\cos\phi - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\psi & -\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \mathrm{sen}\,\theta\cos\psi \\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & -\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler. Problema Inverso

Los datos de partida, en lugar de ser los 3 ángulos ϕ, θ, ψ son los vectores e_1 e_2 e_3 que representan la posición del SR

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

¿ Cuánto valen ϕ, θ, ψ ?

¿Resolver el sistema de ecuaciones?
(no lineal)

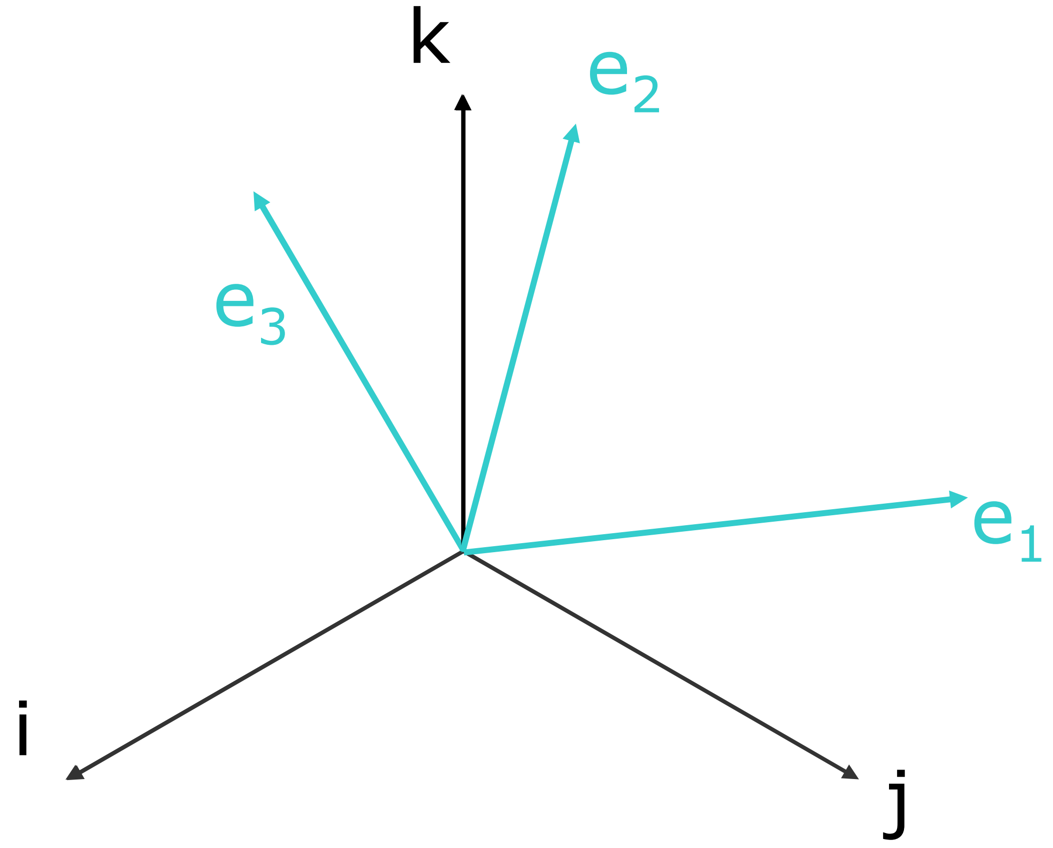
$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\, sen\phi\, sen\psi & \cos\psi\, sen\phi + \cos\theta\cos\phi\, sen\psi & sen\theta\, sen\psi \\ -sen\psi\cos\phi - \cos\theta\, sen\phi\cos\psi & -sen\psi\, sen\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & sen\theta\cos\psi \\ sen\theta\, sen\phi & -sen\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler. Problema Inverso

Conocida la posición del SR dados e_1 e_2 e_3

¿Cuánto valen ϕ, θ, ψ ?

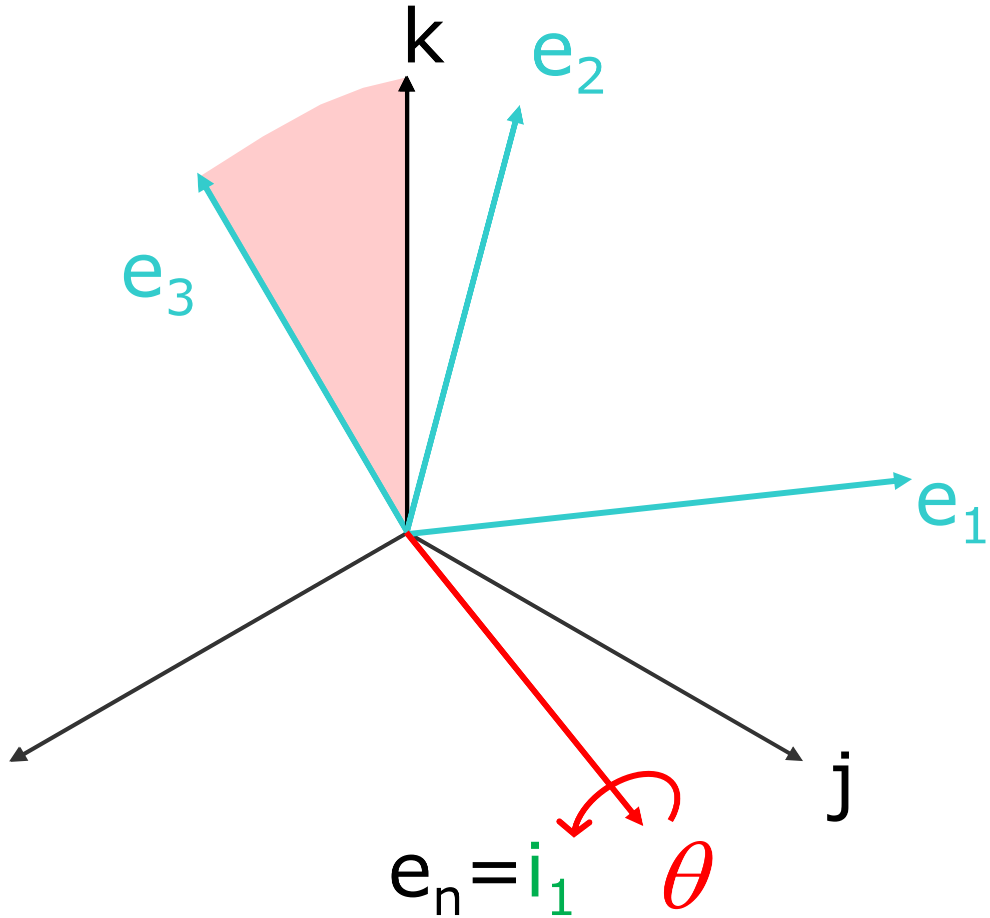


Ángulos de Euler: Problema Inverso

$$\overrightarrow{e_3} \cdot \vec{k} = e_{33} = \cos\theta$$

$$\overrightarrow{e_n} = \frac{\vec{k} \times \overrightarrow{e_3}}{sen\theta}$$

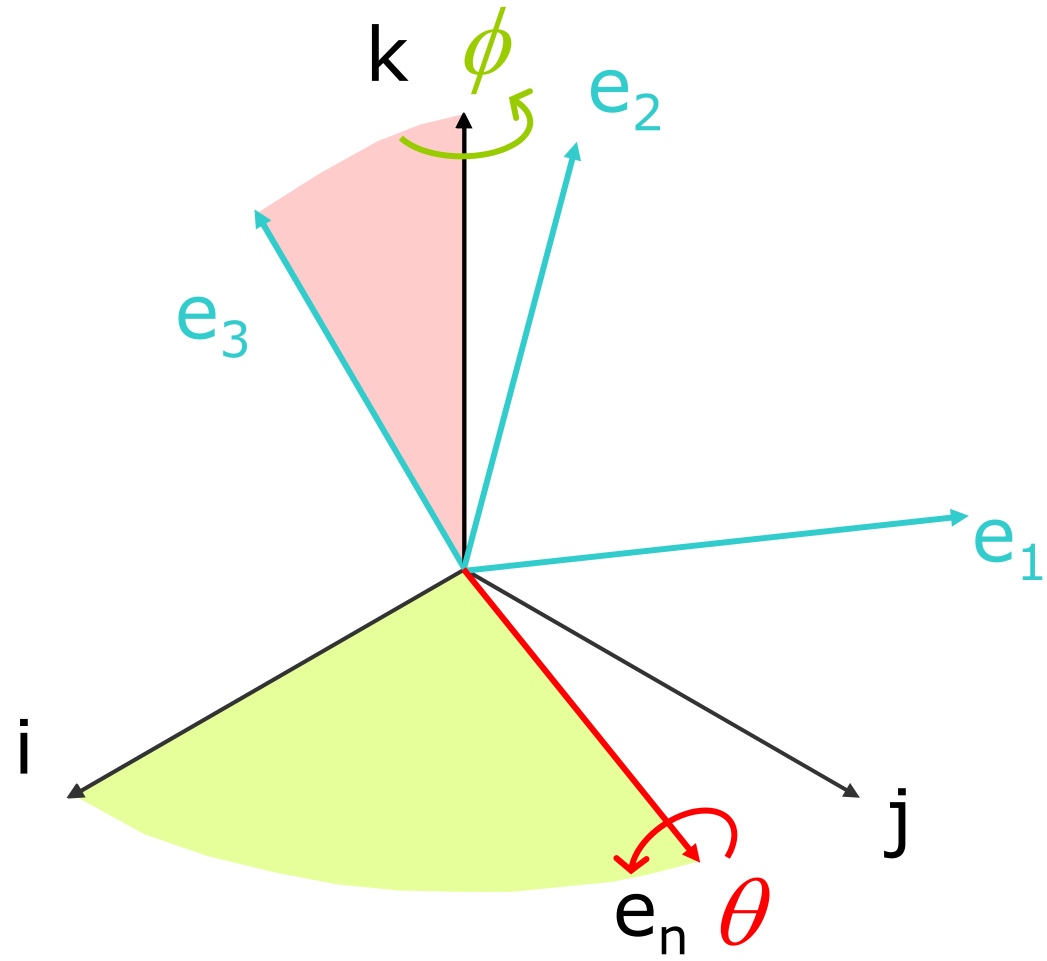
$\overrightarrow{e_n}$ ⇨ Línea nodal



Ángulos de Euler: Problema Inverso

$$\overrightarrow{e_n} \cdot \vec{i} = \cos\phi$$

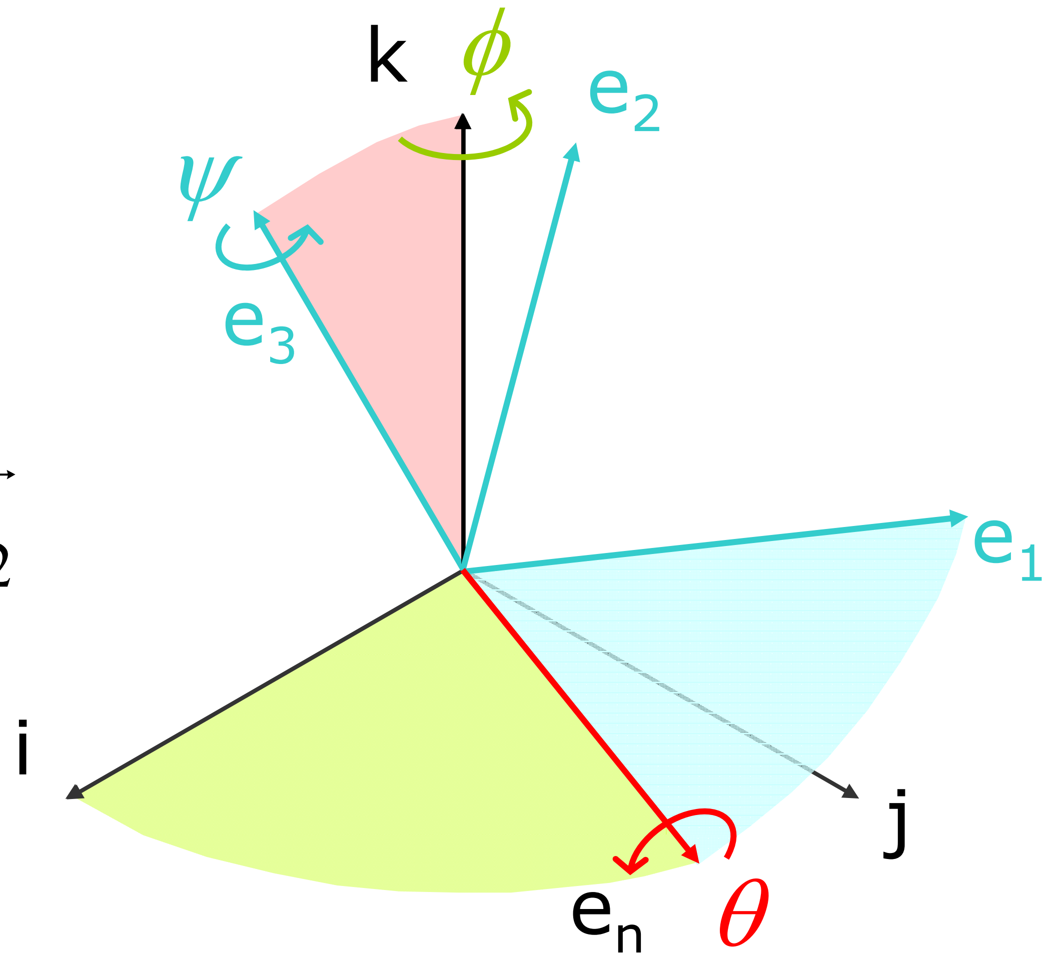
$$\overrightarrow{e_n} = \cos\phi \vec{i} + sen\phi \vec{j}$$



Ángulos de Euler: Problema Inverso

$$\overrightarrow{e_n} \cdot \overrightarrow{e_1} = \cos\psi$$

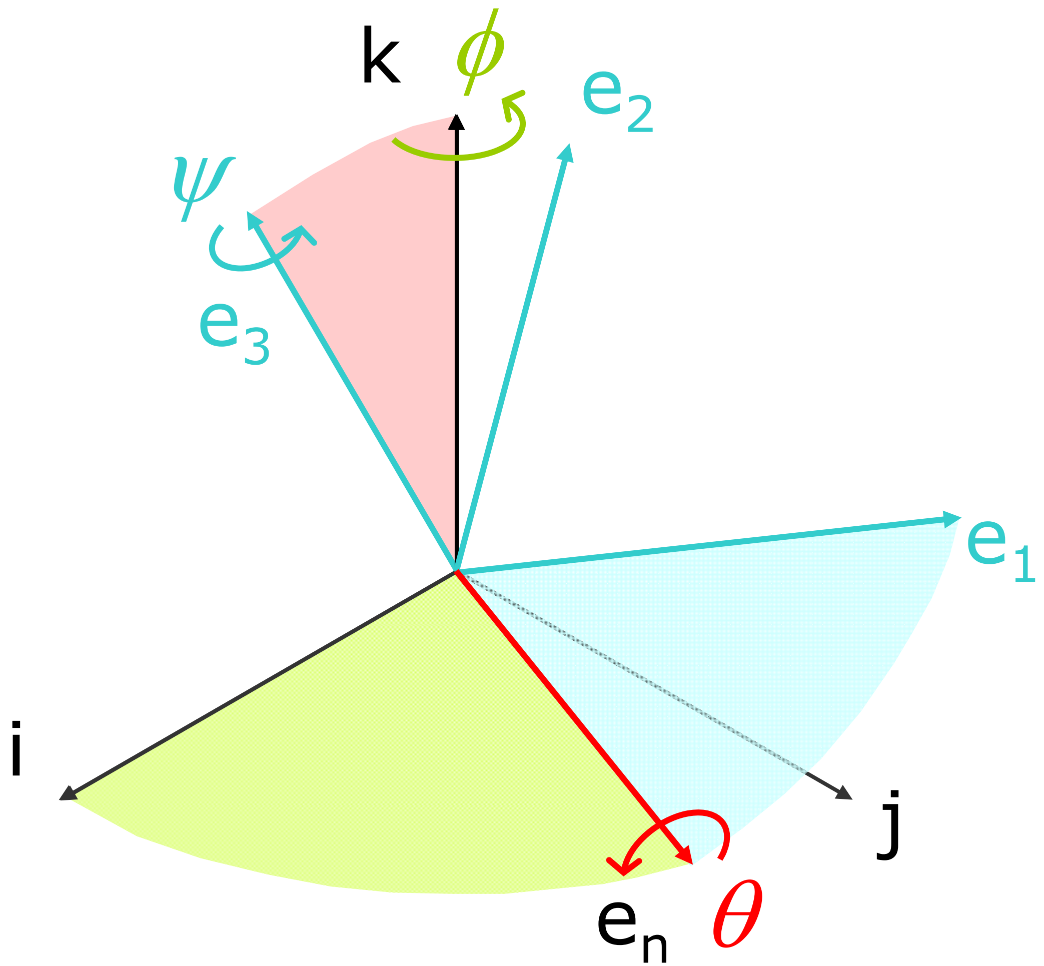
$$\overrightarrow{e_n} = \cos\psi\, \overrightarrow{e_1} - sen\psi\, \overrightarrow{e_2}$$



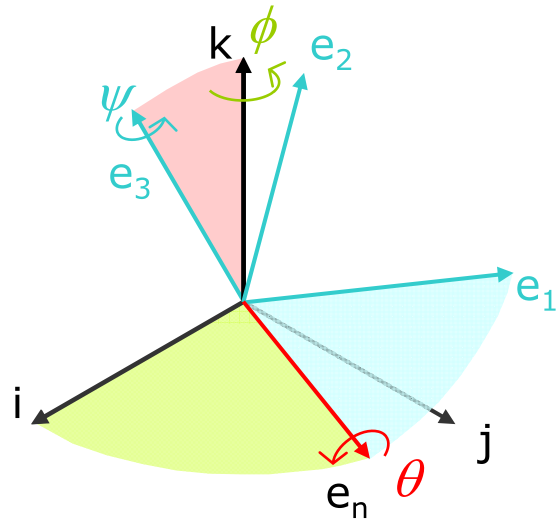
Ángulos de Euler: Velocidad angular

$$\overrightarrow{\omega} = \dot{\phi}\overrightarrow{k} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_n} + \dot{\psi}\overrightarrow{e_3}$$

¡¡no es un triedro ortogonal!!



Ángulos de Euler: Velocidad angular



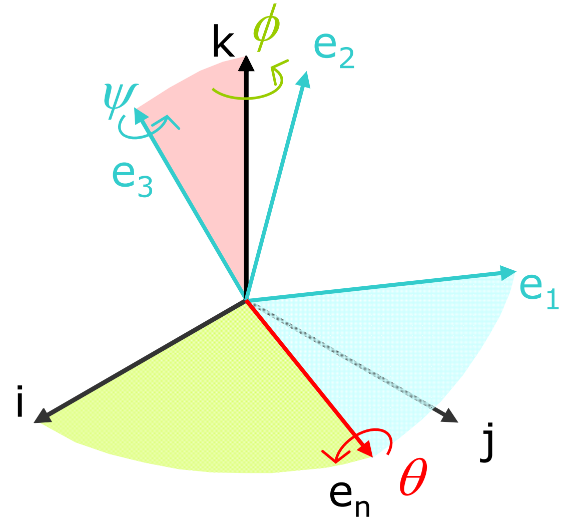
$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_n} + \dot{\psi}\vec{e_3}$$

En base fija

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_0 ; \vec{e_n} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \operatorname{sen}\phi \\ 0 \end{bmatrix}_0 ; \vec{e_3} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix}_0$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cdot \cos\phi + \dot{\psi} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\phi \\ \dot{\theta} \cdot \operatorname{sen}\phi - \dot{\psi} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{bmatrix}_0$$

Ángulos de Euler: Velocidad angular



$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_n} + \dot{\psi}\vec{e_3}$$

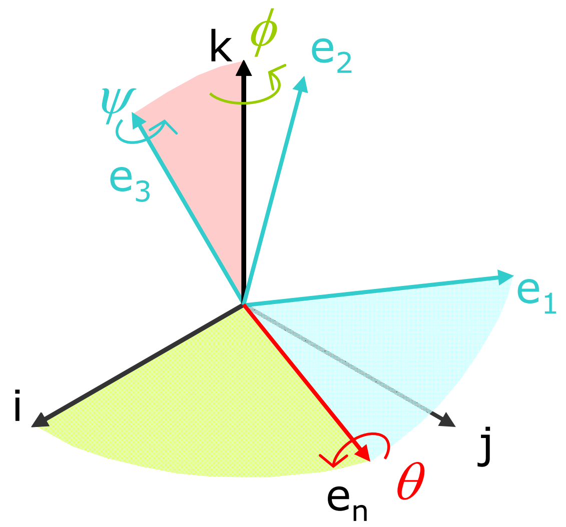
En base del cuerpo sin spin ⇨ (base 2)

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}_2 ; \vec{e_n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_2 ; \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\cdot\operatorname{sen}\theta \\ \dot{\phi}\cdot\cos\theta + \dot{\psi} \end{bmatrix}_2 = \dot{\theta}\vec{e_n} + (\dot{\phi}\cdot\operatorname{sen}\theta)\vec{j_2} + (\dot{\phi}\cdot\cos\theta + \dot{\psi})\vec{e_3}$$

Ángulos de Euler: Velocidad angular

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_n} + \dot{\psi}\vec{e_3}$$

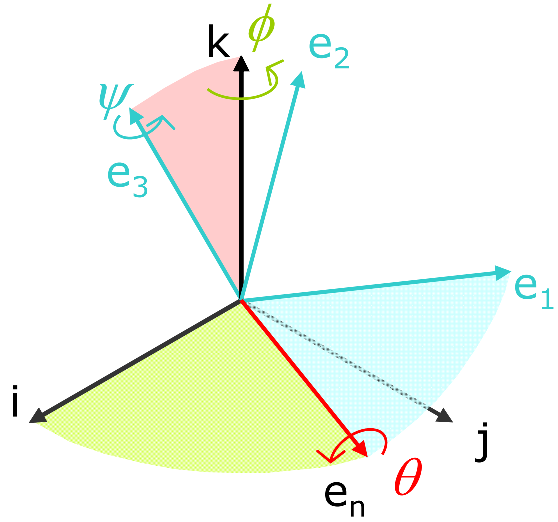


En la base del cuerpo

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix}_3 ; \vec{e_n} = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ -\operatorname{sen}\psi \\ 0 \end{bmatrix}_3 ; \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_3$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\psi + \dot{\theta} \cdot \cos\psi \\ \dot{\phi} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\psi - \dot{\theta} \cdot \operatorname{sen}\psi \\ \dot{\phi} \cdot \cos\theta + \dot{\psi} \end{bmatrix}_3$$

Ángulos de Euler: Aceleración angular



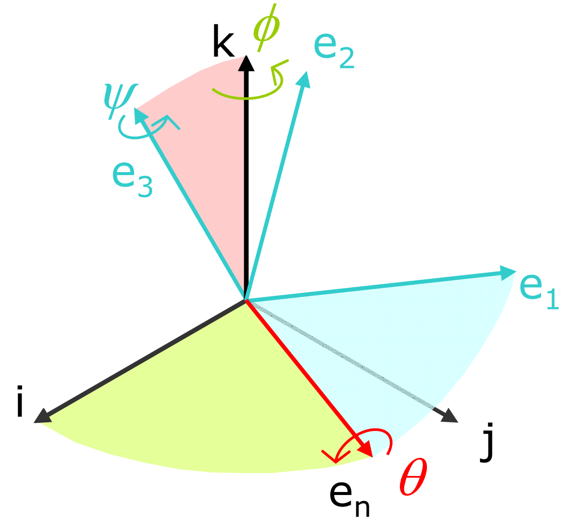
$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_n} + \dot{\psi}\vec{e_3}$$

Derivando la ω expresada en velocidades de Euler

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \ddot{\phi}\cdot\vec{k} + \ddot{\theta}\cdot\vec{e_n} + \dot{\theta}\cdot\left(\dot{\phi}\cdot\vec{k}\times\vec{e_n}\right) + \ddot{\psi}\cdot\vec{e_3} + \dot{\psi}\cdot\left(\dot{\phi}\cdot\vec{k} + \dot{\theta}\cdot\vec{e_n}\right)\times\vec{e_3}$$

Ángulos de Euler: Aceleración angular



$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cdot\cos\phi + \dot{\psi}\cdot\mathrm{sen}\,\theta\cdot\mathrm{sen}\,\phi \\ \dot{\theta}\cdot\mathrm{sen}\,\phi - \dot{\psi}\cdot\mathrm{sen}\,\theta\cdot\cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\cdot\cos\theta \end{bmatrix}_0$$

Si ω en base fija

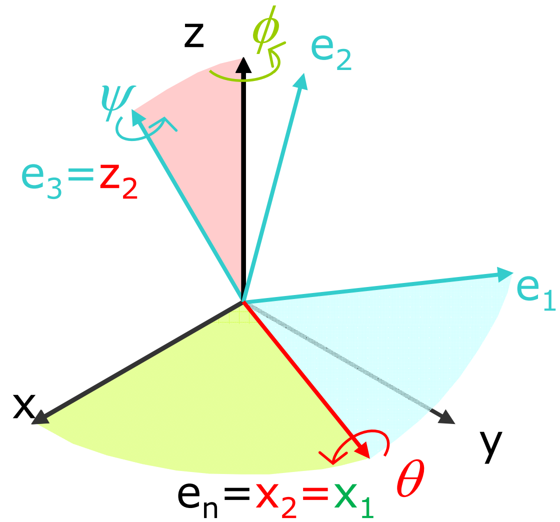
hay que derivar las componentes

Por ejemplo:

$$\alpha_x = \dot{\omega}_x = \frac{d\left(\cos\phi\cdot\dot{\theta} + \sin\theta\cdot\sin\phi\cdot\dot{\psi}\right)}{dt} = -\sin\phi\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\phi} + \cos\phi\cdot\ddot{\theta} + \ldots$$

Ángulos de Euler: Aceleración angular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\cdot \operatorname{sen}\theta \\ \dot{\phi}\cdot\cos\theta + \dot{\psi} \end{bmatrix}_2$$



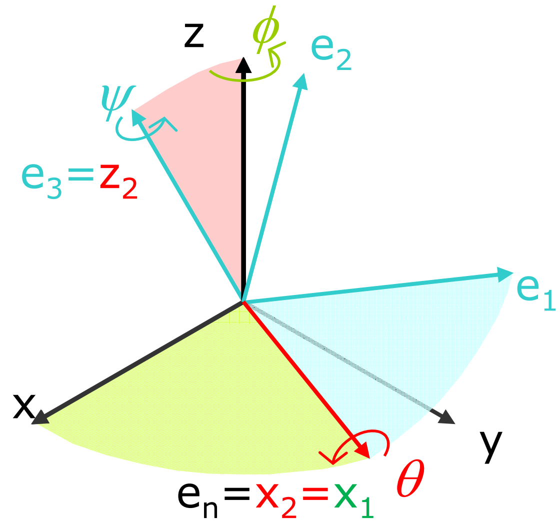
Si ω en base del cuerpo sin spín ⇨ (base 2)

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_2 + \vec{\omega_2}\times\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix}_2 + \begin{vmatrix} \vec{i_2} & \vec{j_2} & \vec{k_2} \\ \dot{\theta} & \dot{\phi}\cdot\operatorname{sen}\theta & \dot{\phi}\cdot\cos\theta \\ \dot{\theta} & \dot{\phi}\cdot\operatorname{sen}\theta & \dot{\phi}\cdot\cos\theta+\dot{\psi} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_2} = \dot{\phi}\cdot\vec{k} + \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{e_n}$$

Ángulos de Euler: Aceleración angular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cdot\cos\psi \\ \dot{\phi}\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\psi - \dot{\theta}\cdot\operatorname{sen}\psi \\ \dot{\phi}\cdot\cos\theta + \dot{\psi} \end{bmatrix}_3$$



Si ω en base del cuerpo

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_3 + \cancelto{0}{\vec{\omega_3}\times\vec{\omega}} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_3$$

$$\vec{\omega_3} = \vec{\omega}$$

hay que derivar las componentes