Fundamentos Matemáticos em Modelagem Computacional
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) - UESC

FILTRAGEM DE IMAGENS

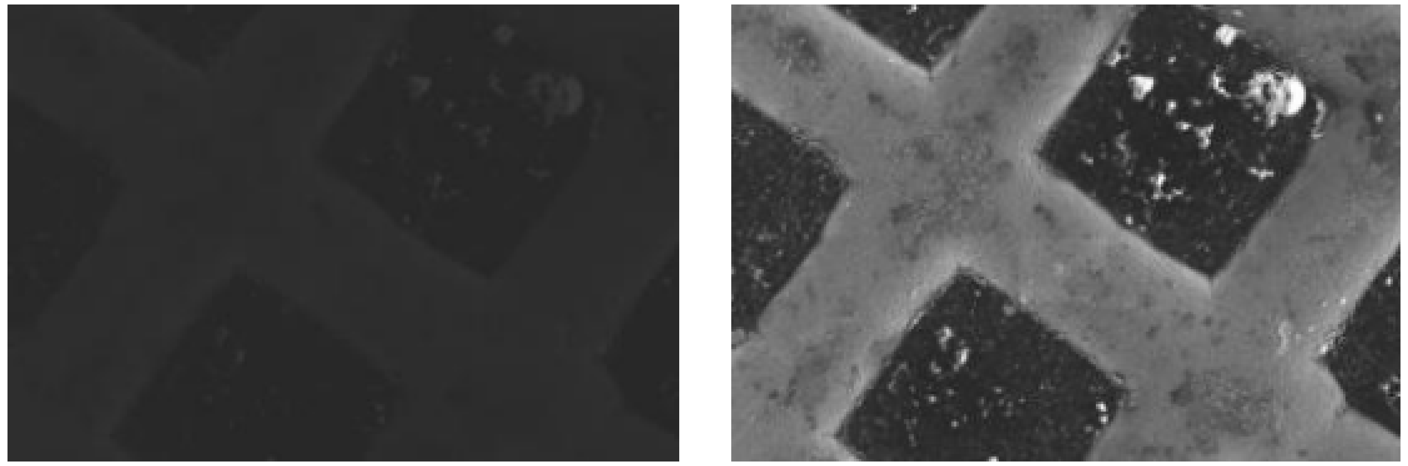
ESTUDO DA TRANSFORMADA BIDIMENSIONAL DE FOURIER
CONCEITO E PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

Docente: Eduardo Silva Palmeira

Discentes: Everaldina Guimarães Barbosa
João Victor Leite da Silva Almeida

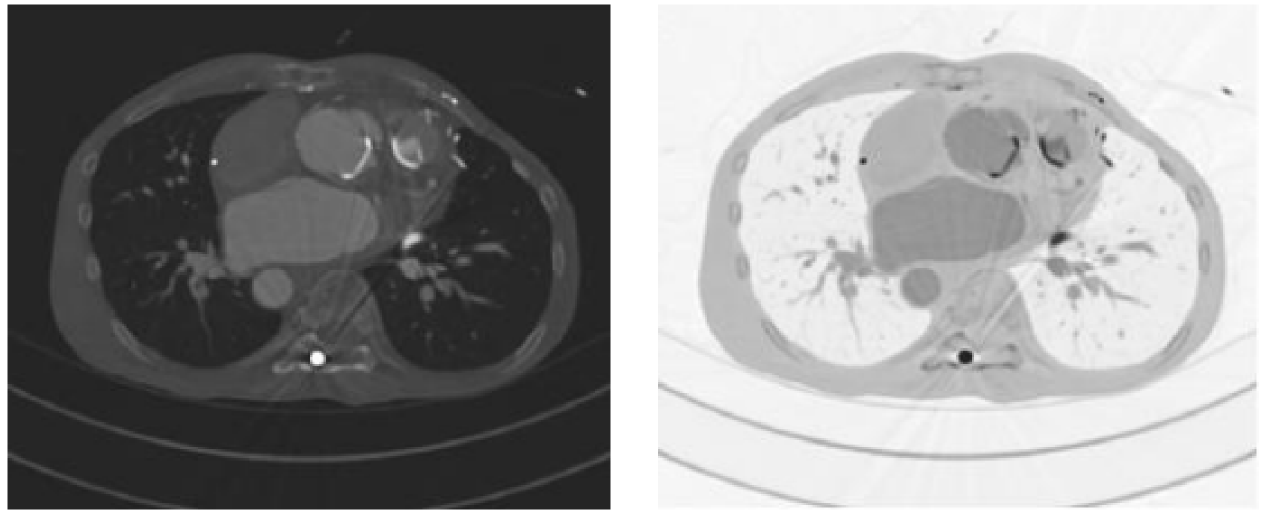
O PAPEL DA FILTRAGEM DIGITAL E TRANSFORMADA DE FOURIER

Exemplos de filtragens



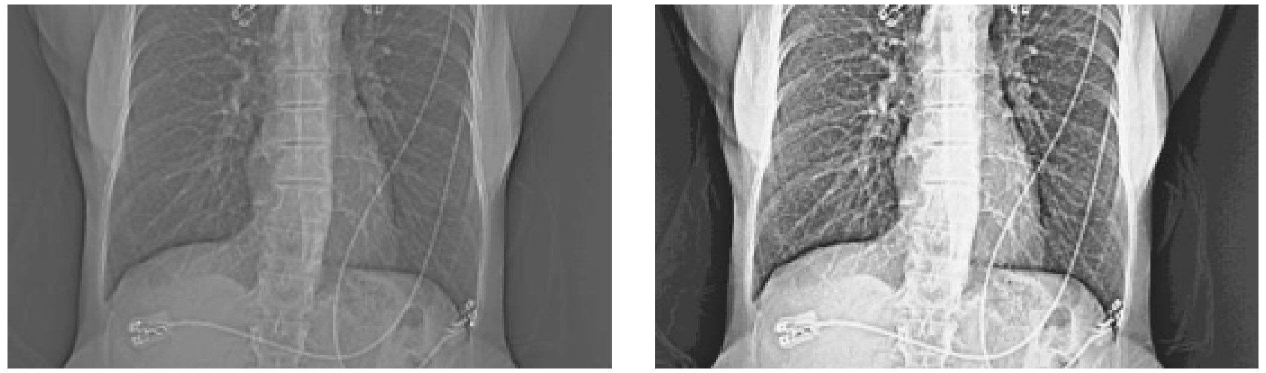
(a) Input image. (b) Output image.

Exemplo de alongamento de contraste



(a) Input (b) Output

Exemplo de transformação inversa



(a) Input image. (c) Output image.

Exemplo de equalização

O PAPEL DA FILTRAGEM DIGITAL E TRANSFORMADA DE FOURIER

Importância da transformada de Fourier

- Decompõe a imagem em frequências, separando variações lentas (suaves) e rápidas (bordas/ruído).
- Facilita a filtragem, permitindo aplicar filtros como simples multiplicações no domínio da frequência.
- Aumenta a eficiência em filtros grandes e operações complexas.
- Reduz artefatos e ruídos estruturados, removendo padrões indesejados no espectro.
- Fundamental em imagens médicas, sendo usada em reconstrução de CT e RM.
- Permite análise profunda da estrutura da imagem, destacando detalhes que o domínio espacial não revela.

FUNDAMENTOS DA TRANSFORMADA DE FOURIER (TF)

Transformada de Fourier (TF):

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

Transformada Inversa de Fourier (ITF):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{j2\pi\mu t}\, d\mu$$

- A TF expressa funções como combinação contínua de senos e cossenos, variando apenas a frequência.
- Propriedade Fundamental
  - **Par de transformadas**: qualquer função *f(t)* pode ser reconstruída sem perda de informação a partir de *F(μ)*
  - A inversa garante reconstrução perfeita → a TF não destrói dados.

FUNDAMENTOS DA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-j2\pi kn/N}$$

Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDTF):

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{j2\pi kn/N}$$

- Versão discreta da TF → usada em imagens e sinais digitais.
- Trabalha com amostras finitas e gera um espectro discreto e periódico.

TRANSFORMADA CONTÍNUA DE FOURIER 2D

Transformada 2D:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

Trasformada Inversa 2D:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\, e^{j2\pi(ux+vy)}\, du\, dv$$

- Estende a TF para superfícies bidimensionais (como imagens).
- Permite analisar:
  - variações horizontais (frequência u)
  - variações verticais (frequência v)
- Essencial para filtragem frequencial e para entendimento do espectro de imagens

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT) 2D

DFT 2D:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

IDFT 2D:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

- Usada para imagens digitais, com número finito de amostras.
- *x, y*: variáveis espaciais (pixels).
- u, *v*: variáveis de frequência.
- A DFT 2D é aplicável a **qualquer matriz finita de intensidades**, ideal para processamento em computador.

CENTRALIZAÇÃO DA DFT 2D

Modulação no domínio espacial → Deslocamento no domínio da frequência

$$f(x,y)e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)} \iff F(u-u_0,\, v-v_0)$$

Deslocamento no domínio espacial → Modulação na frequência

$$f(x-x_0,\; y-y_0) \iff F(u,v)\,e^{-j2\pi\left(\frac{x_0 u}{M}+\frac{y_0 v}{N}\right)}$$

Escolhemos deslocar o espectro em M/2 e N/2 unidades:

- Para deslocar F(u,v) para

$$F(u-M/2,\; v-N/2)$$

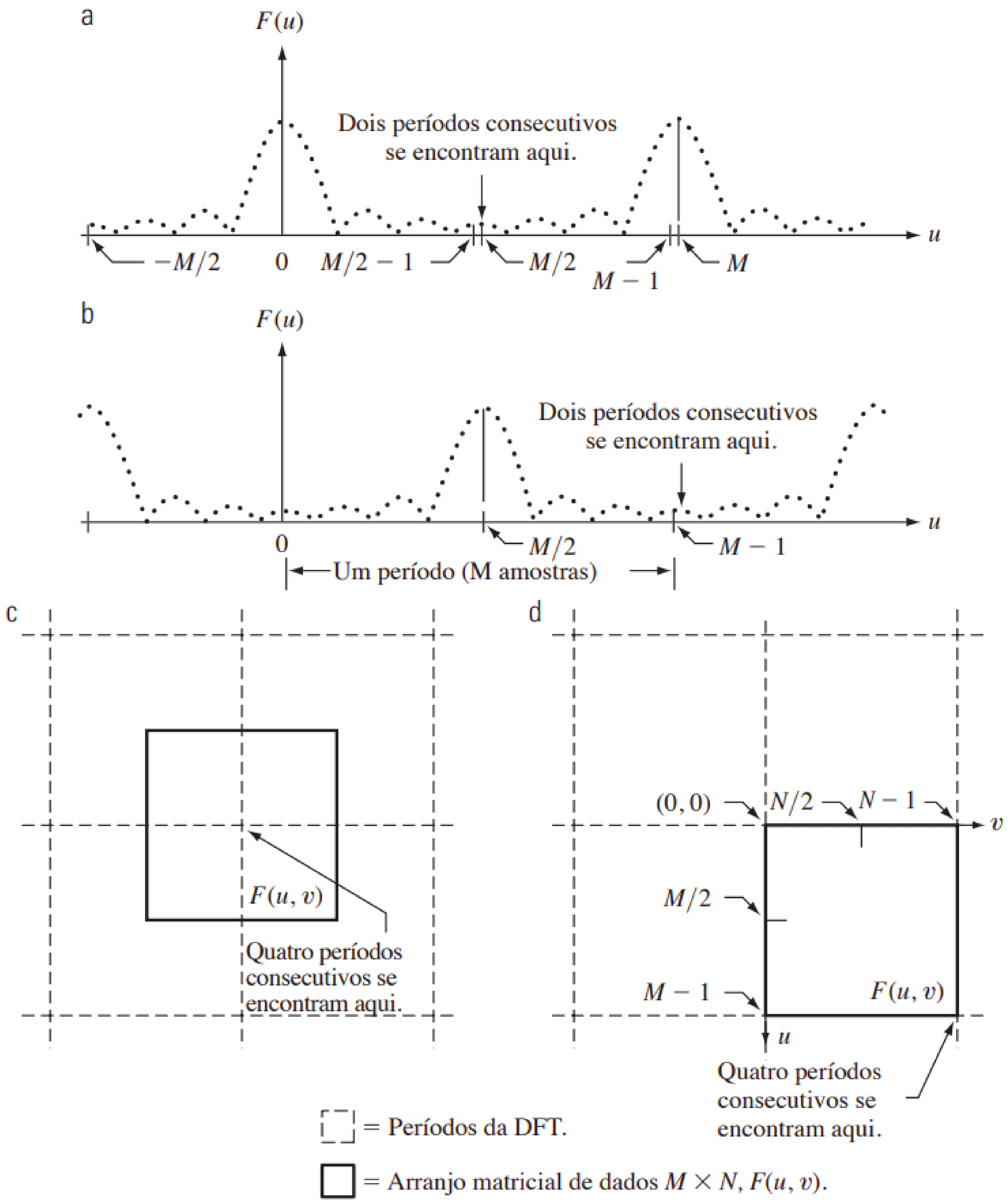
- Basta multiplicar a imagem por:

$$(-1)^{x+y}$$

Resultado:

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-M/2,\, v-N/2)$$

CENTRALIZAÇÃO DA DFT 2D



CENTRALIZAÇÃO DA DFT 2D

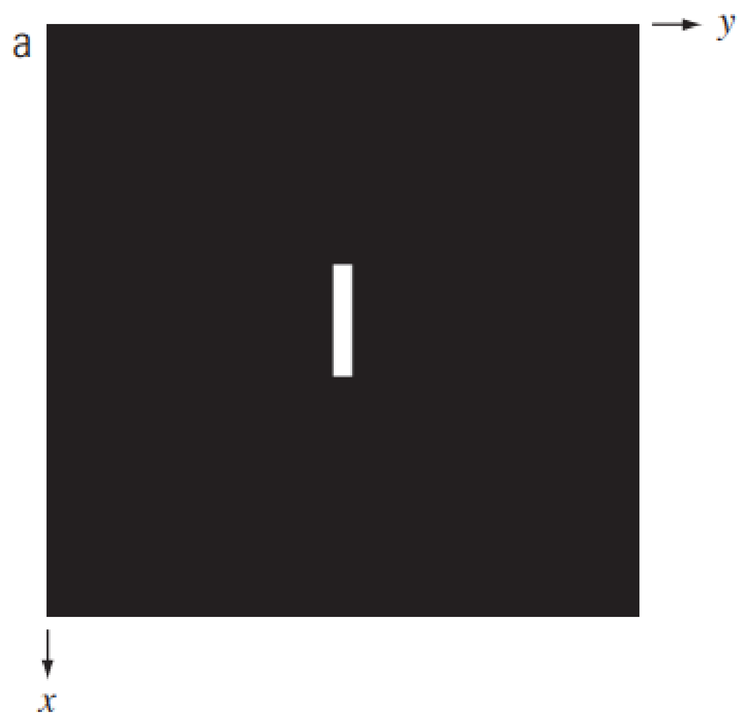
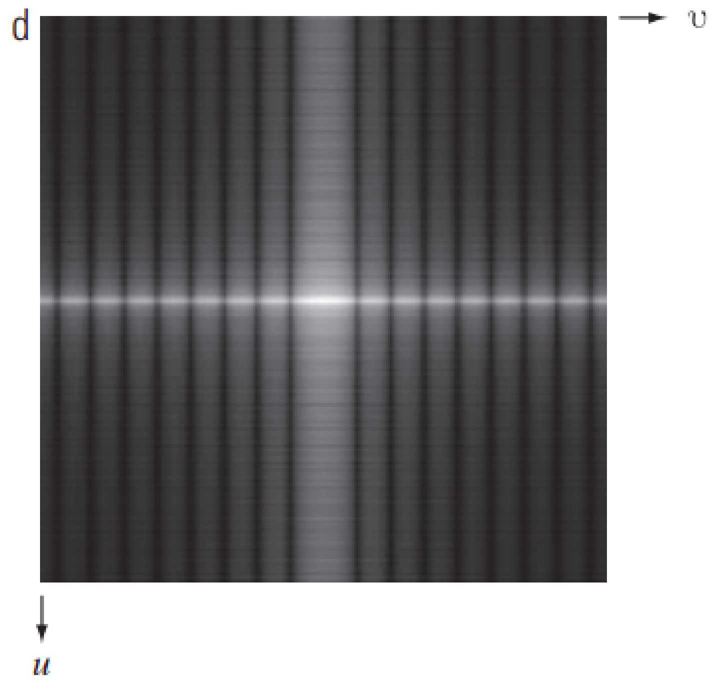
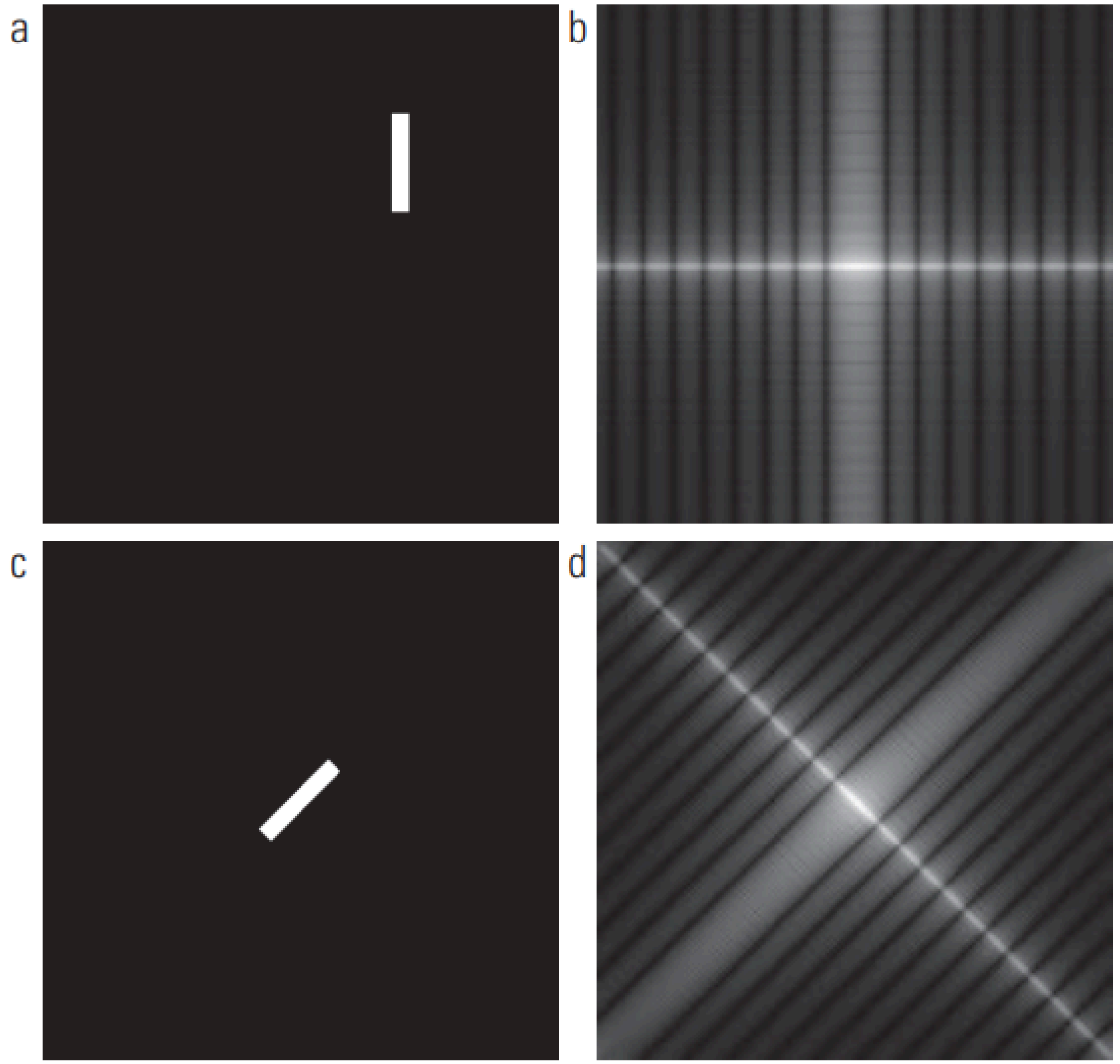


Imagem original



Espectro da figura original



(a) O retângulo transladado
(b) o espectro correspondente
(c) Retângulo rotacionado
(d) o espectro correspondente

ESPECTRO E ÂNGULO DE FASE

Forma Polar da DFT

A DFT produz valores complexos. Cada ponto pode ser representado por:

Magnetude do Espectro:

$$|F(u,v)| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$$

Fase (Ângulo):

$$\theta(u,v) = \tan^{-1}\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

- O espectro de magnitude aponta a força das frequências presentes.
- O ângulo de fase determina o posicionamento espacial das estruturas.
- A fase é crucial para reconstruir a geometria da imagem.

Componente DC

O ponto central do espectro (após centralização) representa:

- o valor médio das intensidades da imagem
- é a frequência zero (variação nula)

IMPLEMENTAÇÃO

Visualização de espectro

CONCEITO DE CONVOLUÇÃO

Convolução no domínio espacial

A convolução é o processo de mover uma máscara pela imagem e calcular a soma dos produtos em cada posição. O filtro deve ser rotacionado a 180°.

w rotacionado

$$
\begin{array}{ccccccccc}
9 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Resultado da convolução completa

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Resultado da convolução após recorte

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\
0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\
0 & 7 & 8 & 9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

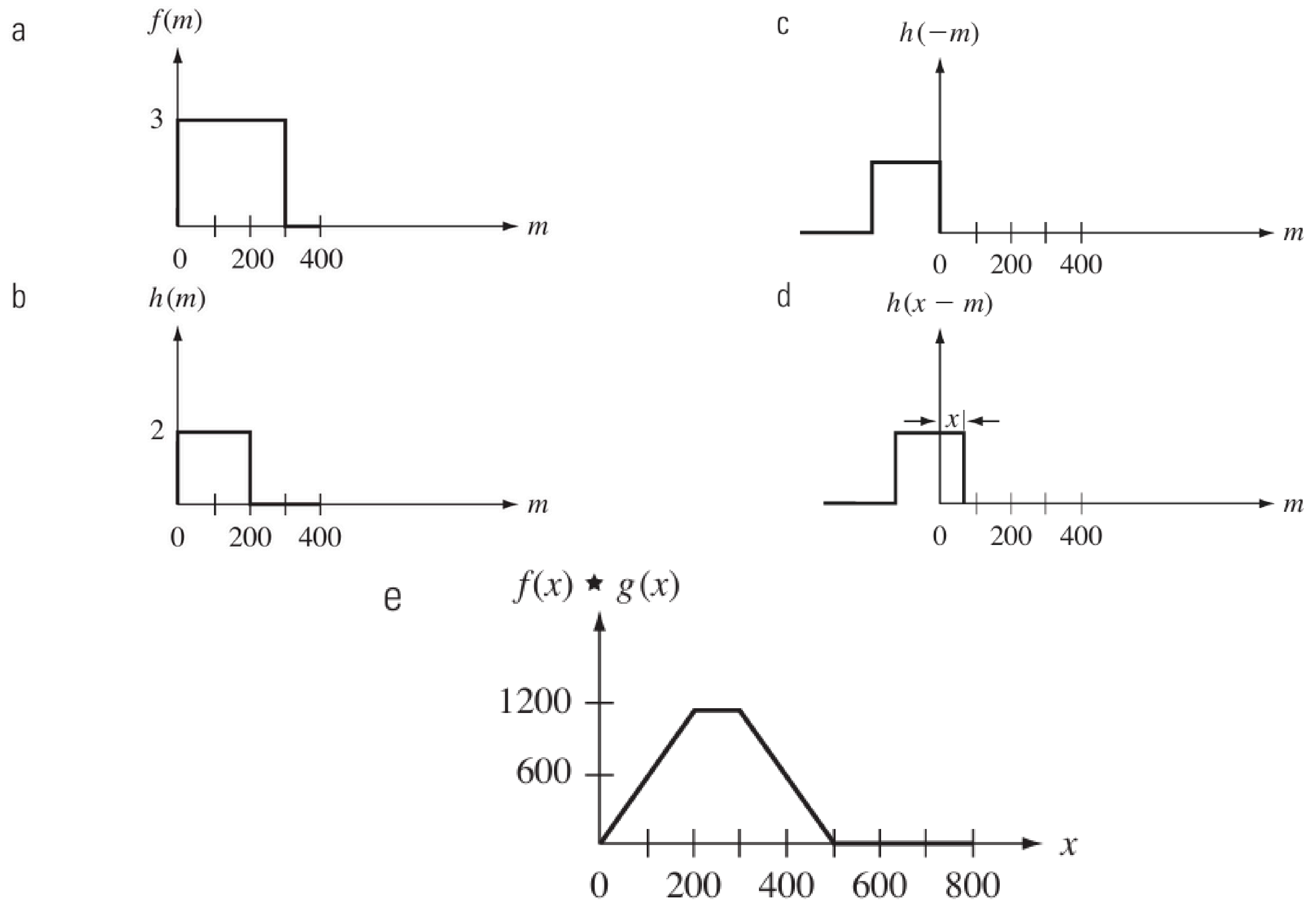
$$w(x,y) \star f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$$

CONCEITO DE CONVOLUÇÃO

Convolução no domínio de frequência

A convolução para o dominio da frequência é similar, uma função percorre a outra e o ângulo de 180º pode ser representado pelo -τ.

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$



TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

Convolução no espaço 2D

$$f(x,y) \star h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m, y-n)$$

A convolução no domínio do espaço é equivalente à multiplicação das transformadas no domínio da frequência, e vice-versa.

Teorema

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$$

FILTRAGEM

Com o teorema da convolução fazer a filtragem no domínio da frêquencia é equivalente a fazer a convolução no domínio espacial

$$g(x, y) = \Im^{-1}\left[H(u, v)F(u, v)\right]$$

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

Vantagens da filtragem no domínio da frequência

- Convolução se torna apenas uma multiplicação
- Transformada Rápida de Fourier (FFT) torna o processo de produção da transformada mais rápido O(N log N)

PADDING

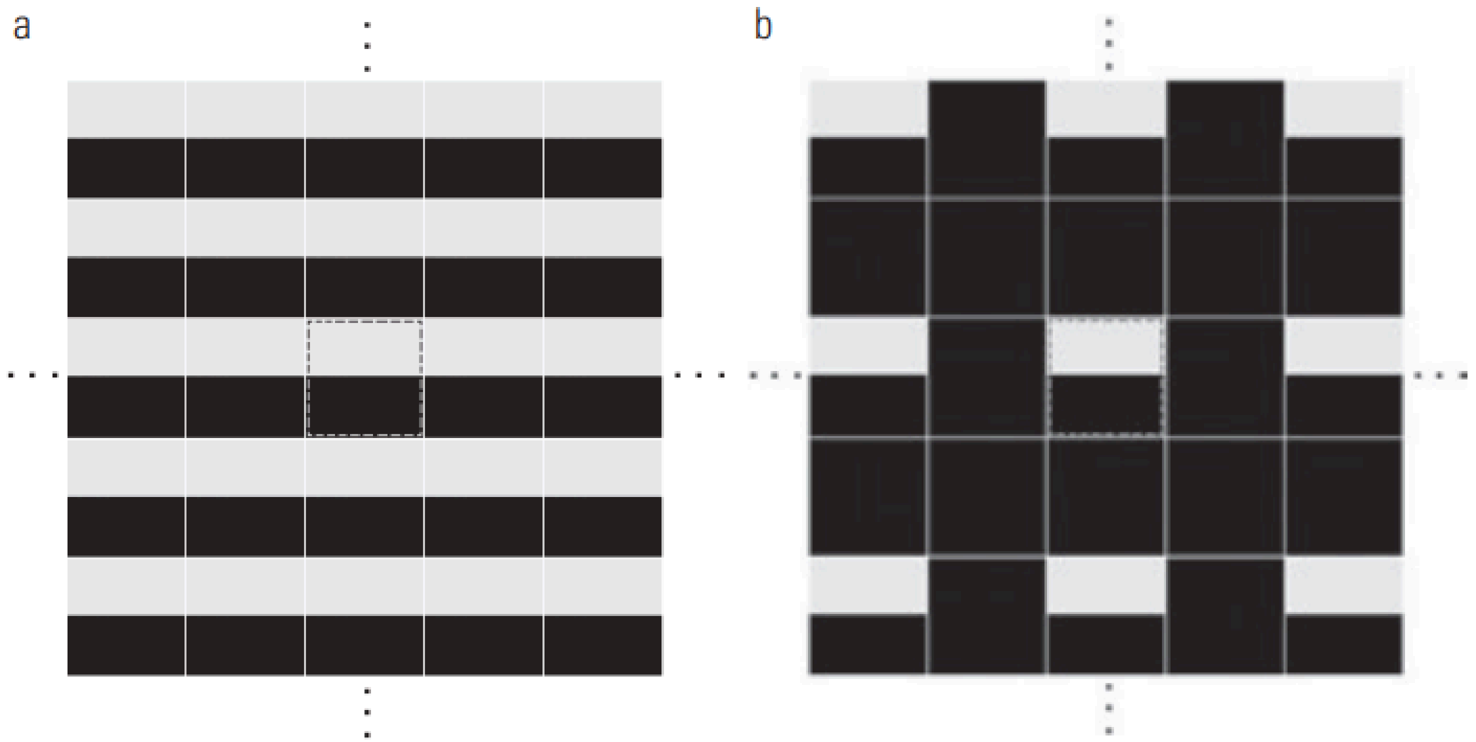
Erro de Wraparound

A natureza matemática da DFT é infinita e periódica, ao realizar a convolução pode ocorrer a mistura de dados do final de um período com o início do outro.

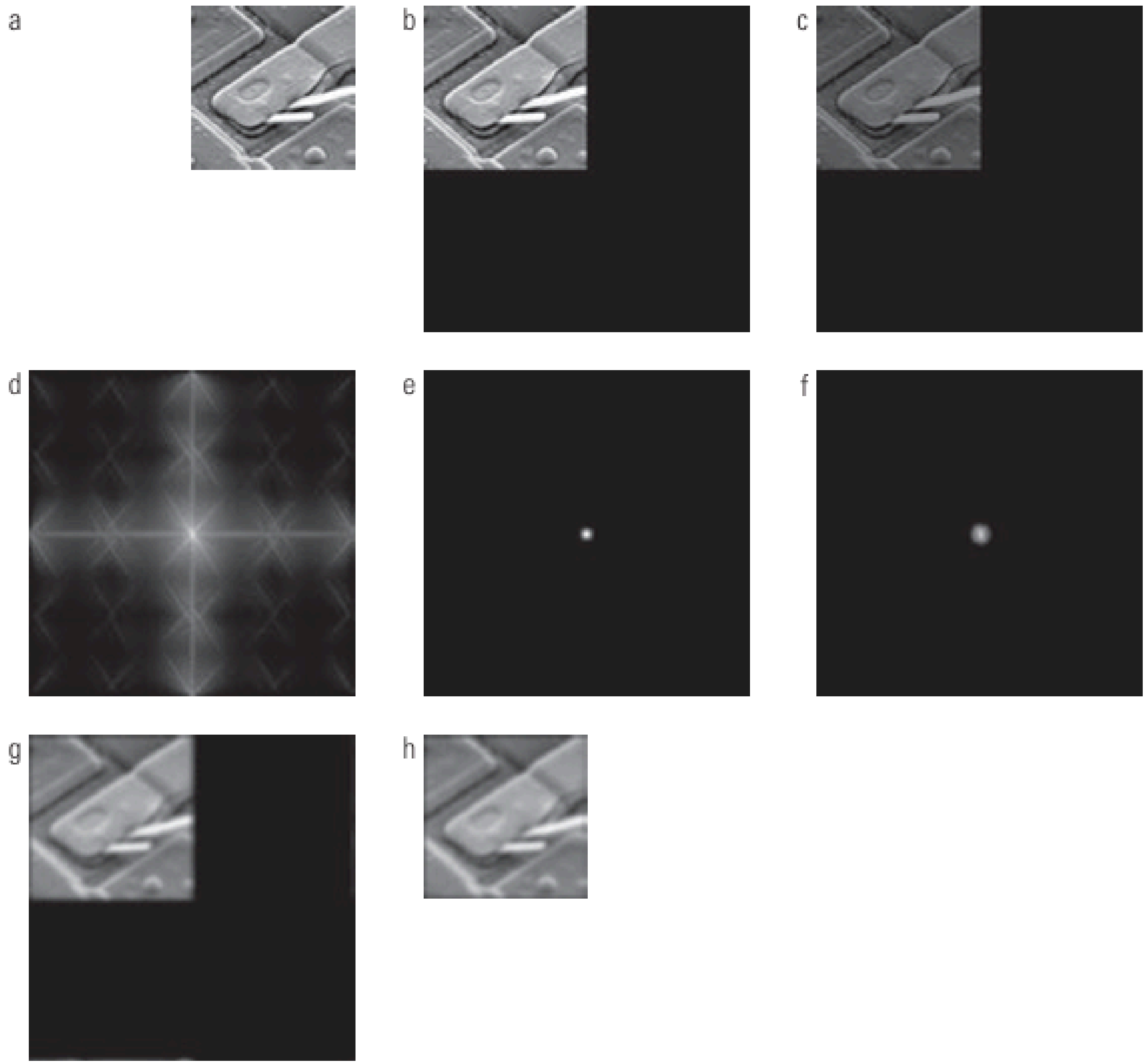
Zero-padding

Para evitar esse erro, se a imagem tem tamanho M e o filtro tem tamanho N, a nova imagem preenchida deve ter um tamanho de, no mínimo, $M+N-1$.

Na prática, costuma-se dobrar o tamanho da imagem (por exemplo, transformar uma imagem $M \times N$ em $2M \times 2N$)



RESUMO DO PROCESSO DE FILTRAGEM



(a) Imagem original
(b) Padding
(c) Centralização da imagem
(d) Espectro da imagem
(e) Filtro passa-baixa gaussiano
(f) Espectro do produto
(g) Imagem inversa filtrada
(h) Remoção do Padding

FILTRO PASSA-BAIXA

Função Principal

- Suaviazar bordas da imagem dando efeito de embaçado (blur).
- Remoção de ruído.
- Preserva componentes de baixa frequência, que correspondem a áreas suaves, fundos homogêneos e iluminação gradual.

Efeitos visuais

- Imagem menos nítida com bordas suavizadas.
- Diminuição de alguns tipos de ruídos.
- Mantem intensidade da imagem ao preservar componente dc.
- Possível introdução de ruído se não for suavizado (por isso o uso de filtros como Gaussiano ou Butterworth é preferido).

FILTRO PASSA-BAIXA: EXPRESSÕES

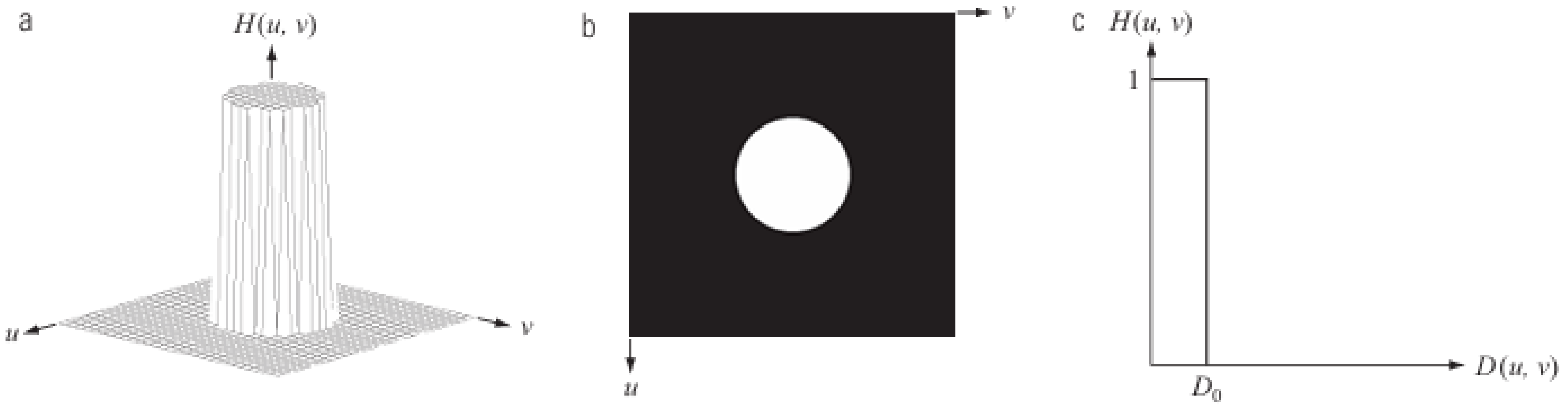
Ideal	Butterworth	Gaussiano
$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$	$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

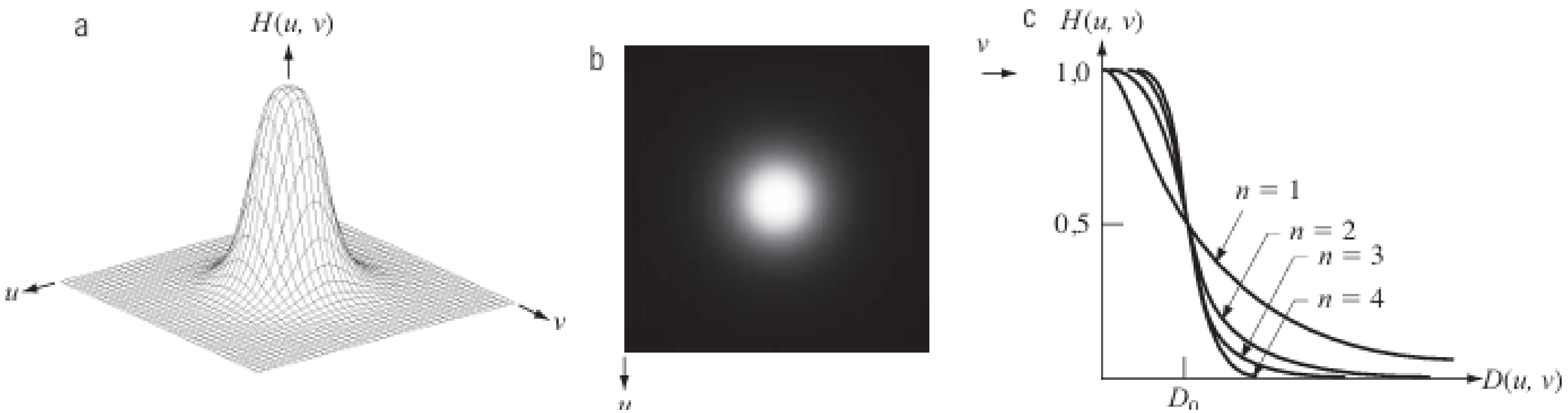
- Zera completamente altas frequências.
- Preserva as frequências abaixo de D0.
- Gera ringing (artefatos) pela descontinuidade abrupta.

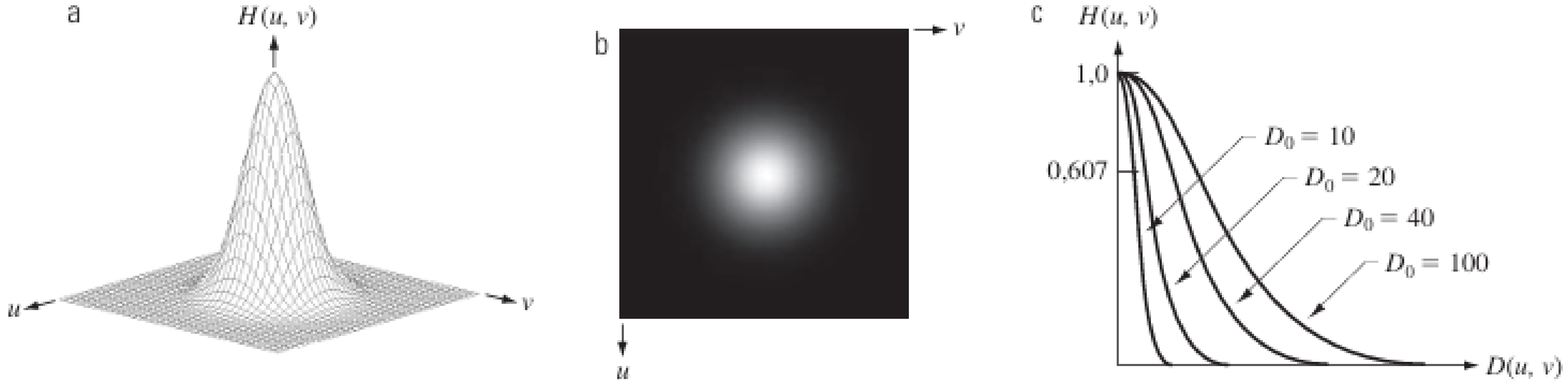
- Atenuação suave das altas frequências.
- Quanto maior a ordem n, mais o filtro se aproxima do Ideal.
- Evita artefatos fortes e mantém transição controlada.

- Transição extremamente suave.
- Poucos artefatos.

FILTRO PASSA BAIXA: VISUALIZAÇÃO







FILTRO PASSA ALTA

Função Principal

- Realçar bordas, detalhes finos e transições abruptas da imagem.
- Atenuar componentes de baixa frequência, que correspondem a áreas suaves, fundos homogêneos e iluminação gradual.

Como funciona no domínio da frequência

Multiplica o espectro da imagem *F(u,v)* por uma máscara *H(u,v)* cujo valor:

- é baixo próximo ao centro (baixa frequência),
- é alto nas bordas do espectro (alta frequência).

Efeitos visuais

- Realce de contornos.
- Aumento de nitidez.
- Possível introdução de ruído se não for suavizado (por isso o uso de filtros como Gaussiano ou Butterworth é preferido).

FILTRO PASSA-ALTA: EXPRESSÕES

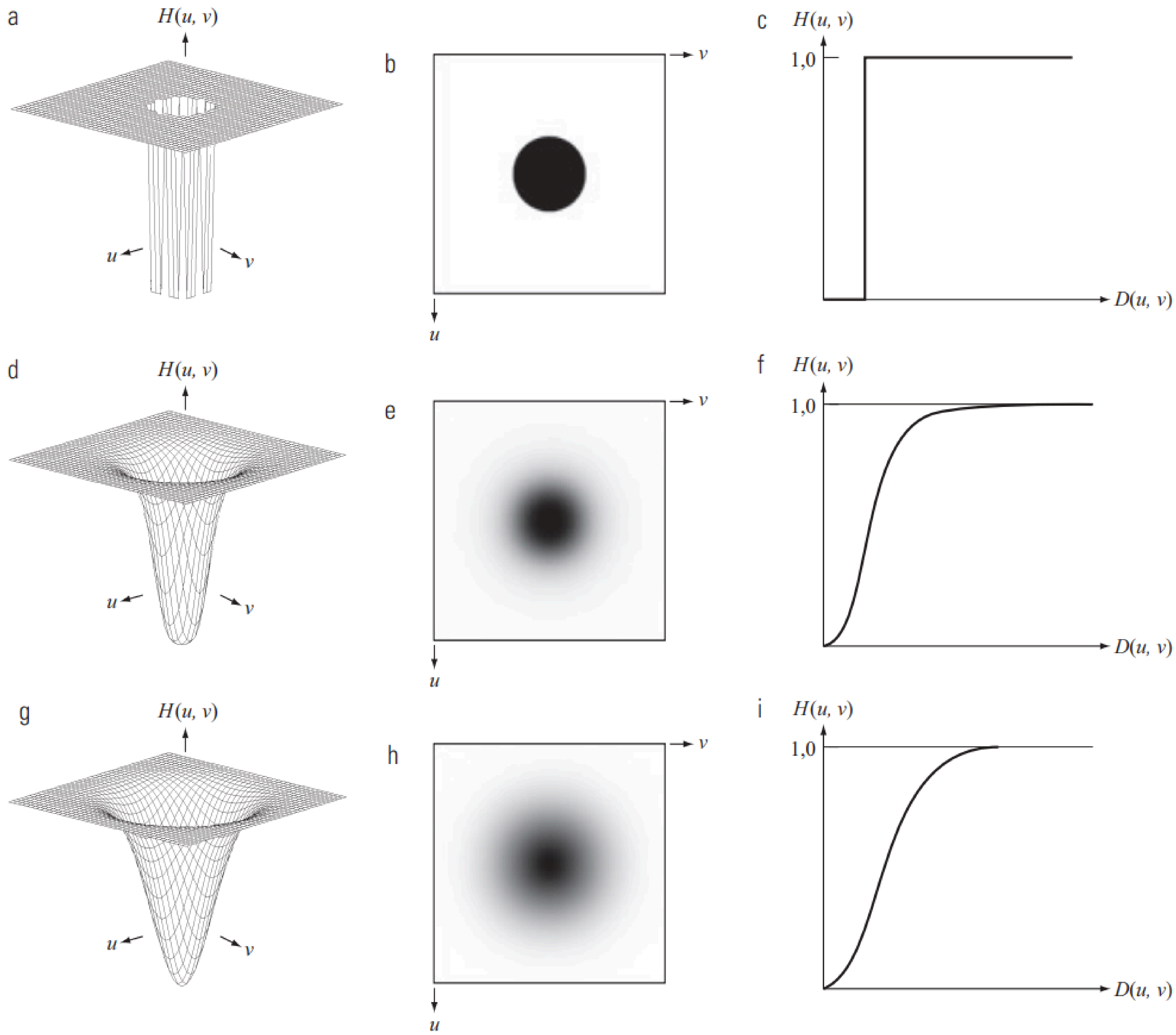
Ideal	Butterworth	Gaussiano
$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{se}\, D(u,v)\leq D_0\\ 1 & \text{se}\, D(u,v)>D_0\end{cases}$	$H(u,v)=\dfrac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$	$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

- Zera completamente baixas frequências.
- Mantém todas as frequências acima de D0.
- Gera ringing (artefatos) pela descontinuidade abrupta.

- Atenuação suave das baixas frequências.
- Quanto maior a ordem n, mais o filtro se aproxima do Ideal.
- Evita artefatos fortes e mantém transição controlada.

- Transição extremamente suave.
- Poucos artefatos.
- Um dos mais estáveis para realce de detalhes em imagens médicas.

FILTRO PASSA-ALTA: VISUALIZAÇÃO



IMPLEMENTAÇÃO

Filtragem

REFERÊNCIAS

GONZALES, R. C.; WOODS, R. E. Processamento digital de imagens. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

CHITYALA, R.; PUDIPEDDI, S. Image processing and acquisition using Python. Boca Raton: CRC Press, 2014.

BRACEWELL, R. The Fourier transform and its applications. New York: McGraw-Hill, 2000.

OBRIGADA PELA ATENÇÃO

Everaldina Guimarães Barborsa - egbarbosa.ppgmc@uesc.br
João Victor Leite da Silva Almeida - jvlsalmeida.ppgmc@uesc.br