Aula 2
PORTAS LÓGICAS E ÁLGEBRA BOOLEANA

Projeto de Ensino

Material didático para lógica digital I: circuitos combinacionais

Bolsista: Everaldina Guimarães Barbosa

Orientador: César Alberto Bravo Pariente

Sumário

Sumário

Portas Lógicas – Porta NOT ou NÃO

A porta NOT retorna o inverso do valor de entrada.

É uma operação unária com apenas uma entrada.

A operação NOT A pode ser representada algebricamente como $\bar{A}$ ou A’.

- Representação

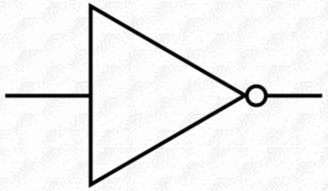


Tabela verdade

A	**S =** $\bar{A}$
0	1
1	0

Portas Lógicas – Porta AND ou E

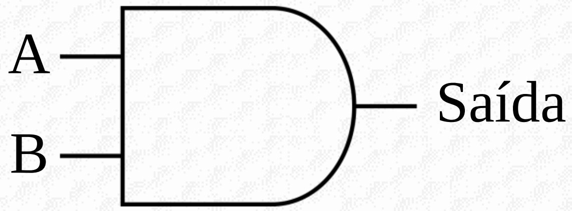
A porta AND retorna verdadeiro se todos os valores de entrada são verdadeiros.

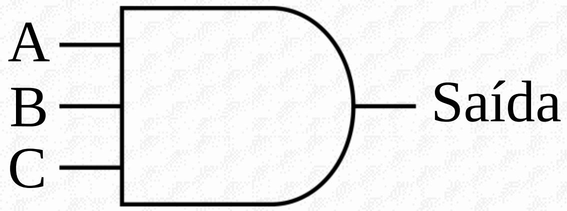
A operação A AND B pode ser representada algebricamente como A.B ou AB.

Tabela verdade

A	B	S = AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Representação





Portas Lógicas – Porta NAND ou NAO-E

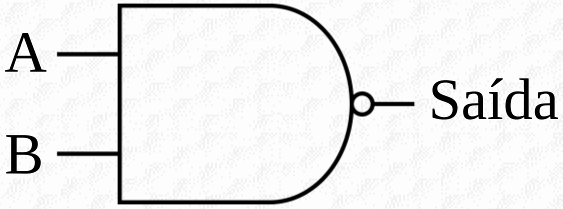
A porta NAND retorna falso apenas quando todas as entradas são verdadeiras. É o inverso do AND.

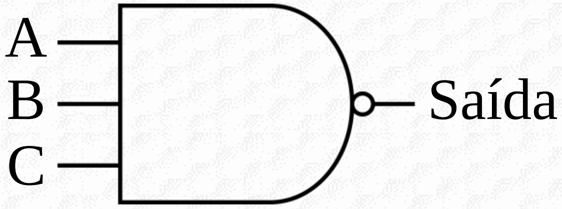
A operação de A NAND B pode ser representada algebricamente como $\overline{A.B}$.

Tabela verdade

A	B	S = $\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Representação





Portas Lógicas – Porta OR / OU

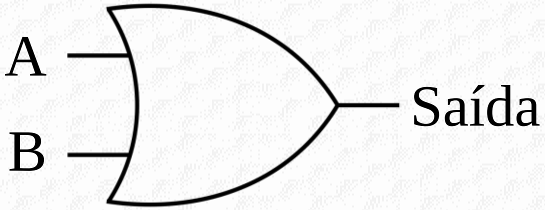
A porta OR retorna verdadeiro se algum dos valores de entrada é verdadeiro.

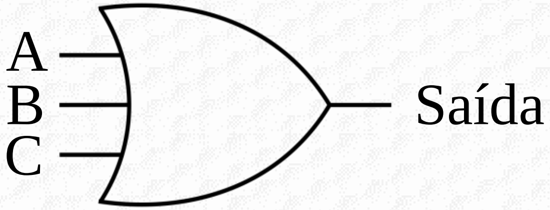
A operação de A OR B pode ser representada algebricamente como A + B.

Tabela verdade

A	B	S = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Representação





Portas Lógicas – Porta NOR / NAO-OU

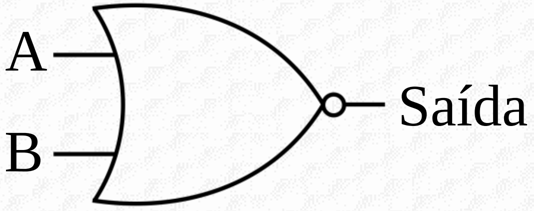
A porta NOR retorna verdadeiro se nenhuma entrada for verdadeira. É o inverso do OR.

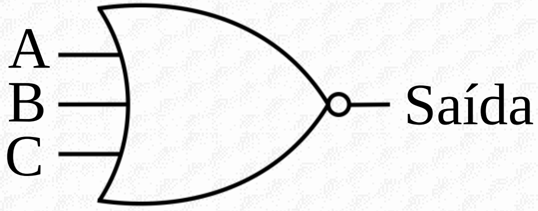
A operação de A NOR B pode ser representada algebricamente como $\overline{A + B}$.

Tabela verdade

A	**B**	**S =** $\overline{\mathbf{A + B}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Representação



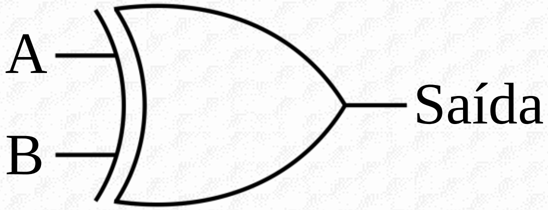


Portas Lógicas – Porta XOR / OU EXCLUSIVO

A porta XOR retorna verdadeiro quando um número ímpar de entradas são verdadeiras. Para duas entradas o XOR é verdadeiro se as entradas forem diferentes.

A operação de A XOR B pode ser representada algebricamente como A ⊕ B.

- Representação



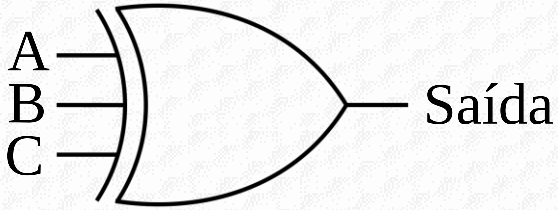


Tabela verdade

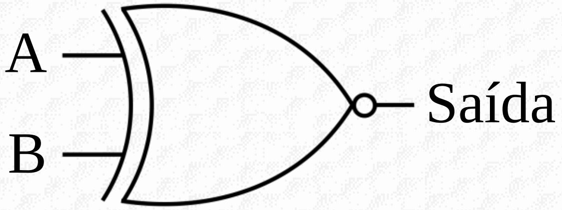
A	B	S = A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Portas Lógicas – Porta XNOR / COINCIDENCIA

A porta XNOR retorna verdadeiro quando há um número par de entradas verdadeiras. Com duas entradas o XNOR é verdadeiro quando as entradas são iguais.

A operação de A XNOR B pode ser representada algebricamente como A ʘ B.

- Representação



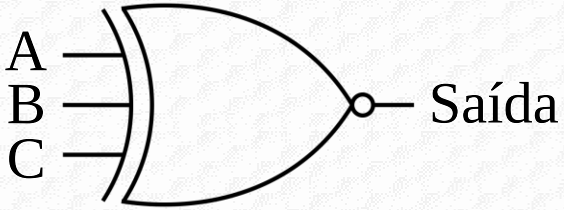


Tabela verdade

A	B	S = A ʘ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra Booleana – Introdução

- A álgebra booleana correlaciona teoremas algébricos comuns para manipulação de expressões booleanas.
- Expressão booleana é uma sentença matemática na qual os termos são variáveis booleanas, de forma que essas variáveis (representadas por letras) podem ter apenas valores binários 0 ou 1.
- Além disso, a álgebra booleana por definição é um sistema fechado, complementar e distributivo. Tendo como operadores: **.** e **+**, que representam respectivamente o AND e o OR.
- O uso de teoremas e postulados da álgebra booleana ajuda na simplificação de expressões booleanas na eletrônica.

Álgebra Booleana – Postulados da complementação

- Esse postulado mostra a existência do complemento e também demonstra as regras de complementação desse sistema algébrico.
- $\overline{A}$ será o complemento de A.

$$\text{Se } A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$$

$$\text{Se } A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$$

- O negado corresponde à porta lógica NOT.

Álgebra Booleana – Postulados da complementação

- Desse postulado podemos ainda concluir a seguinte identidade:

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$$

- Essa identidade pode ser percebida ao analisar a seguinte tabela verdade:

$\mathbf{A}$	$\bar{\mathbf{A}}$	$\bar{\bar{\mathbf{A}}}$
0	1	0
1	0	1

Álgebra Booleana – Postulados da adição

- A adição de variáveis booleanas representa a porta lógica OU.
- Na adição, em álgebra booleana temos que:

1) $0 + 0 = 0$
2) $0 + 1 = 1$
3) $1 + 0 = 1$
4) $1 + 1 = 1$

- Através dessas regras é possível estabelecer algumas outras identidades.

Álgebra Booleana – Postulados da adição

- A adição de qualquer variável booleana A à zero, resulta no próprio A.

$$A + 0 = A$$

- Como o '+' equivale a operação OR, se A for falso:

$$A \text{ OR } 0 = 0 \text{ OR } 0 = 0 = A$$

- Se A for verdadeiro:

$$A \text{ OR } 0 = 1 \text{ OR } 0 = 1 = A$$

- De mesma forma se vale para a operação 0 + A = A.

Álgebra Booleana – Postulados da adição

- Já a adição de uma variável booleana à 1, resulta em 1. Visto que, na tabela verdade do OR basta um dos operandos ser verdadeiro para um resultado verdadeiro.

$$\mathbf{A + 1 = 1}$$

- Para A igual a 0 temos:

$$\mathbf{A \ OR \ 1 \quad = \quad 0 \ OR \ 1 \quad = \ 1}$$

- Se A for igual a 1:

$$\mathbf{A \ OR \ 1 \quad = \quad 1 \ OR \ 1 \quad = \ 1}$$

- A identidade também vale para 1 + A.

Álgebra Booleana – Postulados da adição

- A adição de uma variável booleana A qualquer a ela mesma, resulta no próprio A.

$$A + A = A$$

- Se A for igual a zero:

A OR A = 0 OR 0 = 0 = A

- Se A for 1:

A OR A = 1 OR 1 = 1 = A

Álgebra Booleana – Postulados da adição

- A adição de uma variável booleana A qualquer ao seu complemento, resulta em 1.

$$\mathbf{A + \overline{A} = 1}$$

- Nessa operação sempre um dos termos será verdadeiro, pelo postulado da complementação. O que resulta em verdadeiro na operação OR.

- Com A igual a 0:

A OR (NOT A) = 0 OR (NOT 0) = 0 OR 1 = 1

- Se A for igual a 1:

A OR (NOT A) = 1 OR (NOT 1) = 1 OR 0 = 1

Álgebra Booleana – Postulados da multiplicação

- A multiplicação na álgebra booleana representa a porta lógica E.
- As regras da multiplicação booleana são as seguintes:

1) $0 \cdot 0 = 0$
2) $0 \cdot 1 = 0$
3) $1 \cdot 0 = 0$
4) $1 \cdot 1 = 1$

Nota-se que essas regras representam a tabela verdade do AND.

- Também é possível estabelecer algumas identidades a partir dessas regras.

Álgebra Booleana – Postulados da multiplicação

- A multiplicação de uma variável booleana A por zero, resulta em 0. Já que na tabela verdade AND, basta um dos operandos ser falso para resultado falso.

$$\mathbf{A \,.\, 0 = 0}$$

- Como o '.' equivale a operação AND, se A for igual a zero:

A AND 0 = 0 AND 0 = 0

- Se A for verdadeiro:

A AND 0 = 1 AND 0 = 0

- Essa identidade também vale para 0 . A.

Álgebra Booleana – Postulados da multiplicação

- Já a multiplicação de uma variável booleana A por 1, resulta em A.

$$\mathbf{A \,.\, 1 = A}$$

- Para A igual a 0:

A AND 1 = 0 AND 1 = 0 = A

- Se A for igual a 1 temos:

A AND 1 = 1 AND 1 = 1 = A

- A identidade também vale para 1 . A.

Álgebra Booleana – Postulados da multiplicação

- A multiplicação de uma variável booleana A com ela mesma, resulta no próprio A.

$$A \, . \, A = A$$

- Se A for igual a zero:

$$A \text{ AND } A = 0 \text{ AND } 0 = 0 = A$$

- Se A for 1:

$$A \text{ AND } A = 1 \text{ AND } 1 = 1 = A$$

Álgebra Booleana – Postulados da multiplicação

- A multiplicação de uma variável booleana A qualquer ao seu complemento, resulta em 0.

$$\mathbf{A \cdot \overline{A} = 0}$$

- Nessa operação um dos termos será falso, de acordo ao postulado da complementação. O que resulta em falso na operação AND.

- Com A igual a 0:

A AND (NOT A) = 0 AND (NOT 0) = 0 AND 1 = 0

- Se A for igual a 1:

A AND (NOT A) = 1 AND (NOT 1) = 1 AND 0 = 0

Álgebra Booleana – Grupo

({0, 1}, +, 0)		
A	**B**	**A + B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

({0, 1}, * , 1)		
A	**B**	**A . B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Em termos de grupo nós temos um conjunto de dois elementos: 0 e 1.

Álgebra Booleana – Grupo

({0, 1}, +, 0)		
A	**B**	**A + B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

({0, 1}, * , 1)		
A	**B**	**A . B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Além disso, na álgebra booleana, temos a presença de dois grupos fechados, tendo como operadores a adição e multiplicação.
- Sendo o elemento neutro, 0 e 1 respectivamente.

Álgebra Booleana – Grupo

- Isso implica que todas as operações resultarão sempre em um elemento do próprio grupo, e que a propriedade associativa e existência do elemento neutro são aplicáveis.
- Uma operação com o elemento neutro faz com que o resultado seja igual ao outro operando.
- Além da associatividade, a álgebra booleana ainda apresenta as propriedades de comutatividade e distributividade.

Álgebra Booleana – Grupo

- É possível ainda fazer a distributividade entre os grupos, o resultado também estará no sistema fechado.

$$A \,.\, (B + C) = AB + AC$$
$$A + (BC) = (A + B).(A + C)$$

- A seguir veremos uma explicação mais detalhada sobre as propriedades comutativa, associativa e distributiva.

Álgebra Booleana – Propriedades

- Na álgebra booleana, assim como na matemática comum, se valem algumas propriedades aritméticas.
- São elas: comutatividade, associatividade e distributividade.
- A utilização dessas propriedades auxilia a manipular expressões algébricas, e até simplificá-las.

Álgebra Booleana – Propriedade comutativa

- Propriedade válida tanto na adição quanto na multiplicação.

- Comutatividade na adição:

$$\mathbf{A + B = B + A}$$

- Comutatividade na multiplicação:

$$\mathbf{A.B = B.A}$$

Álgebra Booleana – Propriedade associativa

- Também é válida na adição e multiplicação.

- Associatividade na adição:

$$\mathbf{A + (B + C) = (A + B) + C}$$

- Associatividade na multiplicação:

$$\mathbf{A\ .\ (BC) = (AB)\ .\ C}$$

Álgebra Booleana – Propriedade distributiva

- Na propriedade distributiva, temos que:

$$\mathbf{A\,.\,(B + C) = AB + AC}$$

- Essa equivalência pode ser percebida pela tabela verdade a seguir.

Álgebra Booleana – Propriedade distributiva

A	B	C	B + C	A . (B + C)	AB	AC	AB + AC
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Álgebra Booleana – Propriedade distributiva

- Também temos que:

$$\mathbf{A + (B \,.\, C) = (A + B) \,.\, (A + C)}$$

- Essa equivalência pode ser percebida pela tabela verdade a seguir.

Álgebra Booleana – Propriedade distributiva

A	B	C	B.C	A + (B.C)	A + B	A + C	(A+ B) . (A + C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan

- O teorema de De Morgan define duas leis.
- 1ª) O complemento do produto é igual à soma dos complementos.

$$\overline{(\boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$$

- 2ª) O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

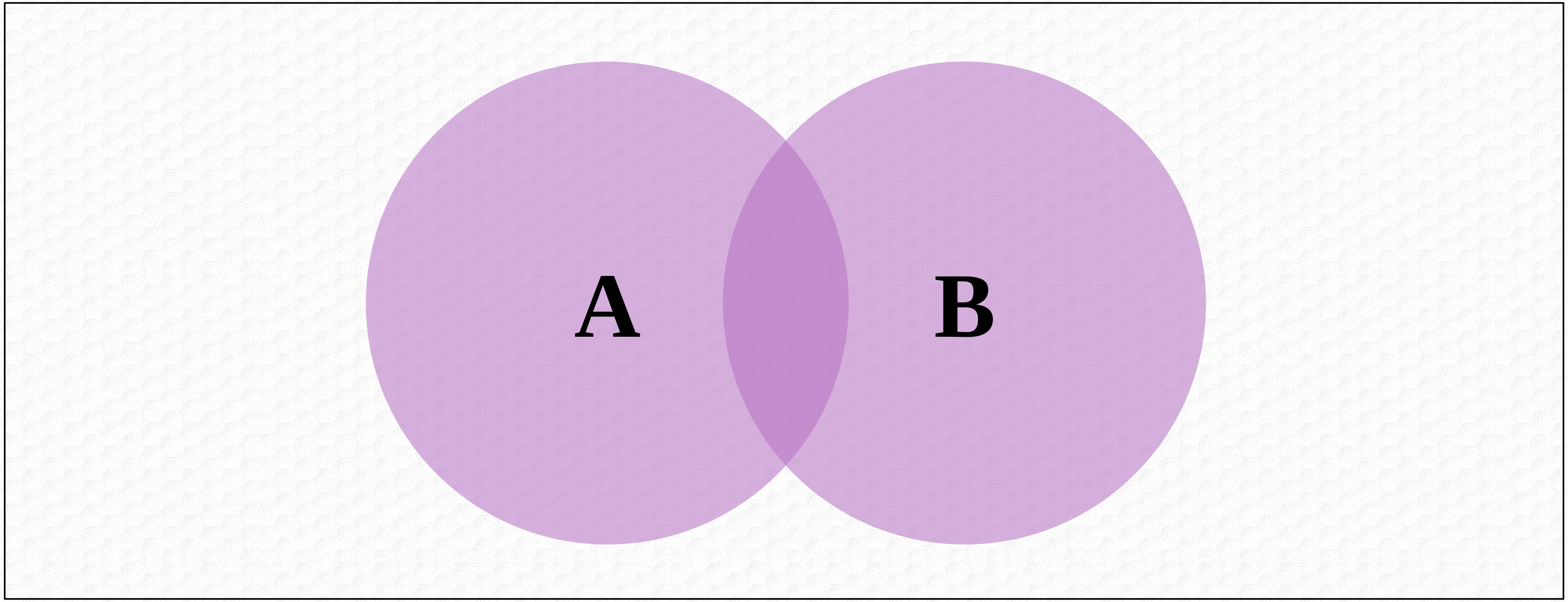
$$\overline{(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}}\,.\,\overline{\boldsymbol{B}}$$

- A aplicação do teorema pode ser feita com duas ou mais variáveis:

$$1^{a})\ \overline{(\boldsymbol{ABC}\ \ldots\ \boldsymbol{Z})} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{C}} + \cdots + \overline{\boldsymbol{Z}}$$

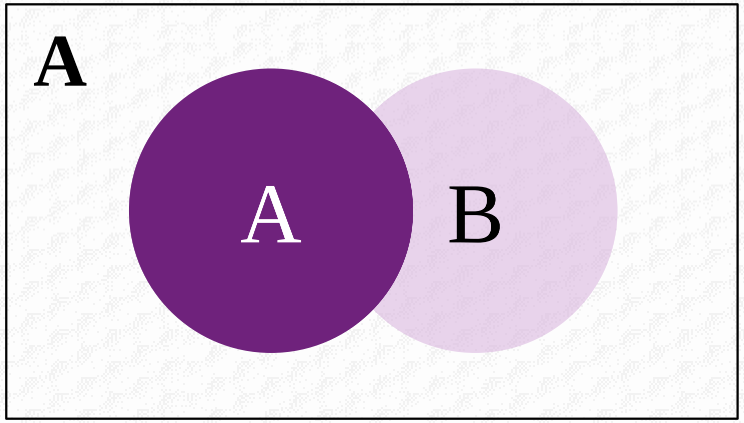
$$2^{a})\ \overline{(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \cdots + \boldsymbol{Z})} = \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{C}}\ldots\overline{\boldsymbol{Z}}$$

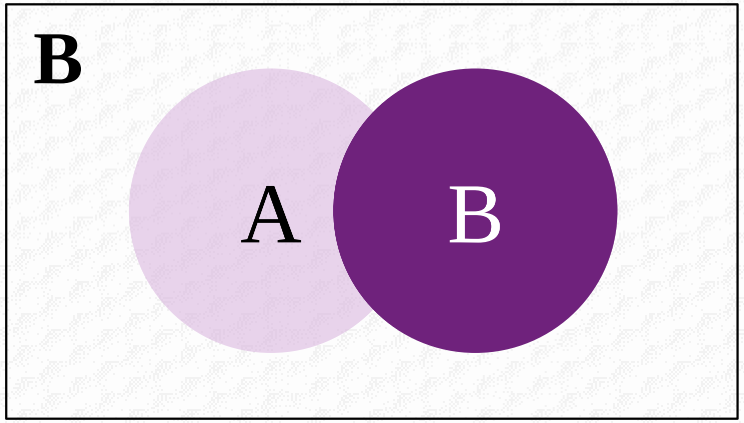
Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan

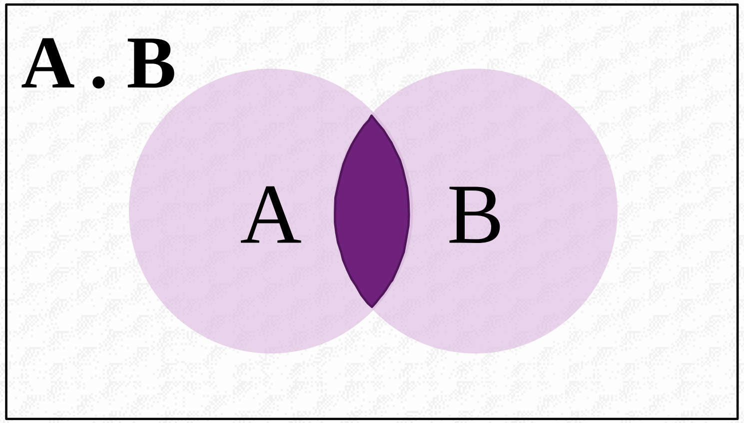


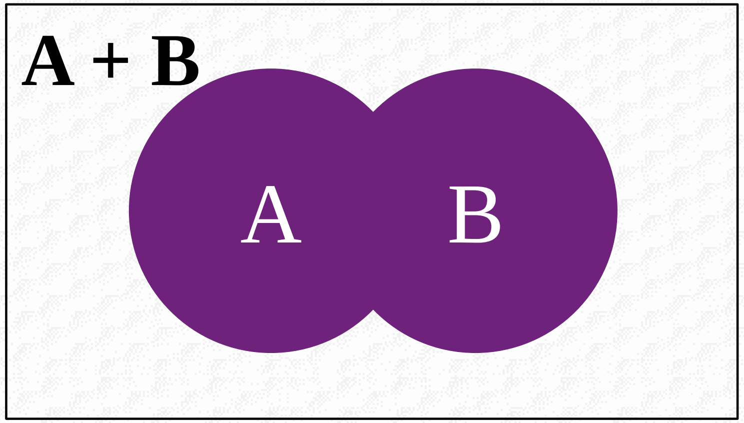
- Podemos ainda fazer um paralelo com teoria de conjuntos, usando o diagrama de Venn.

Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan



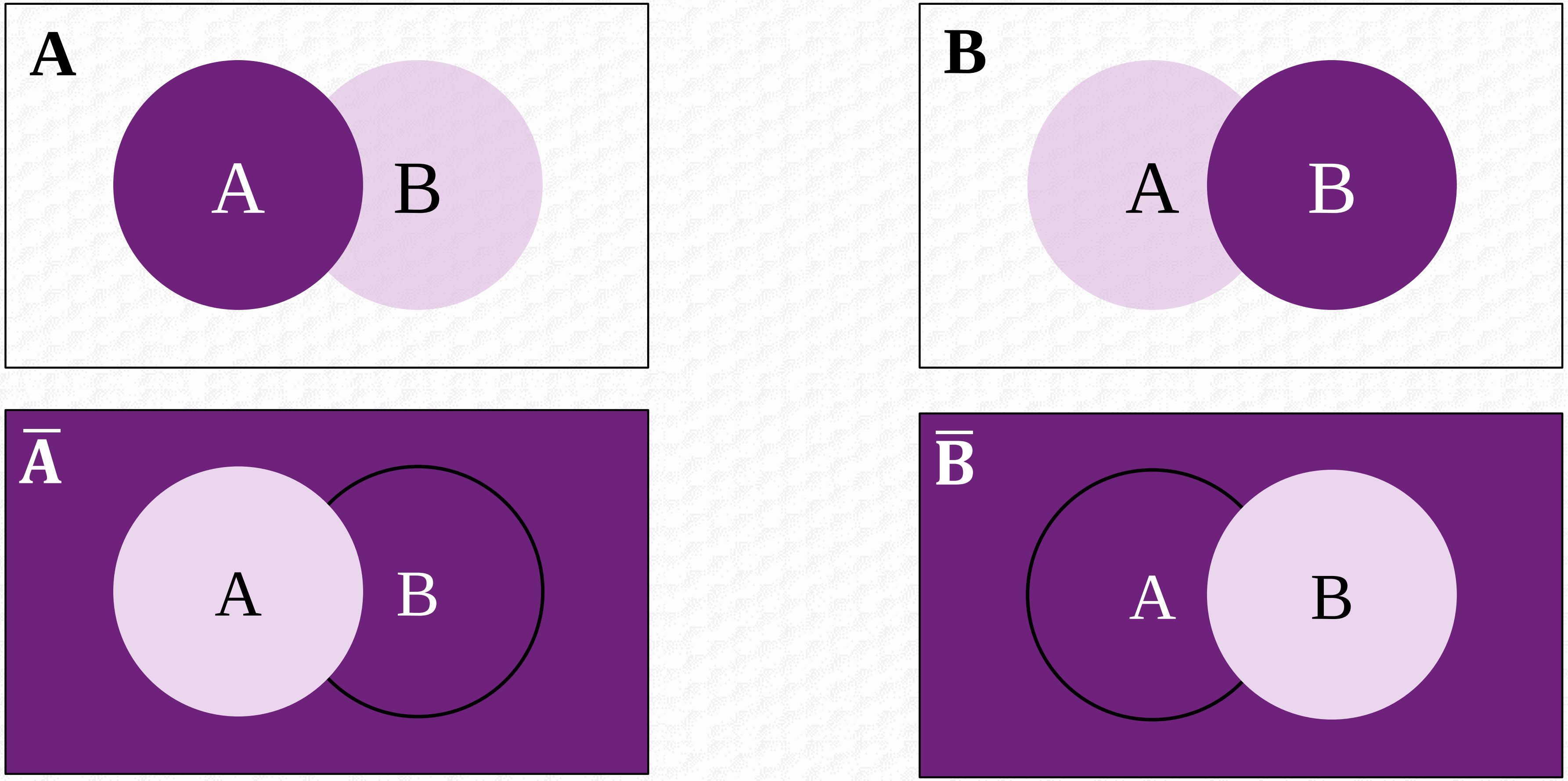






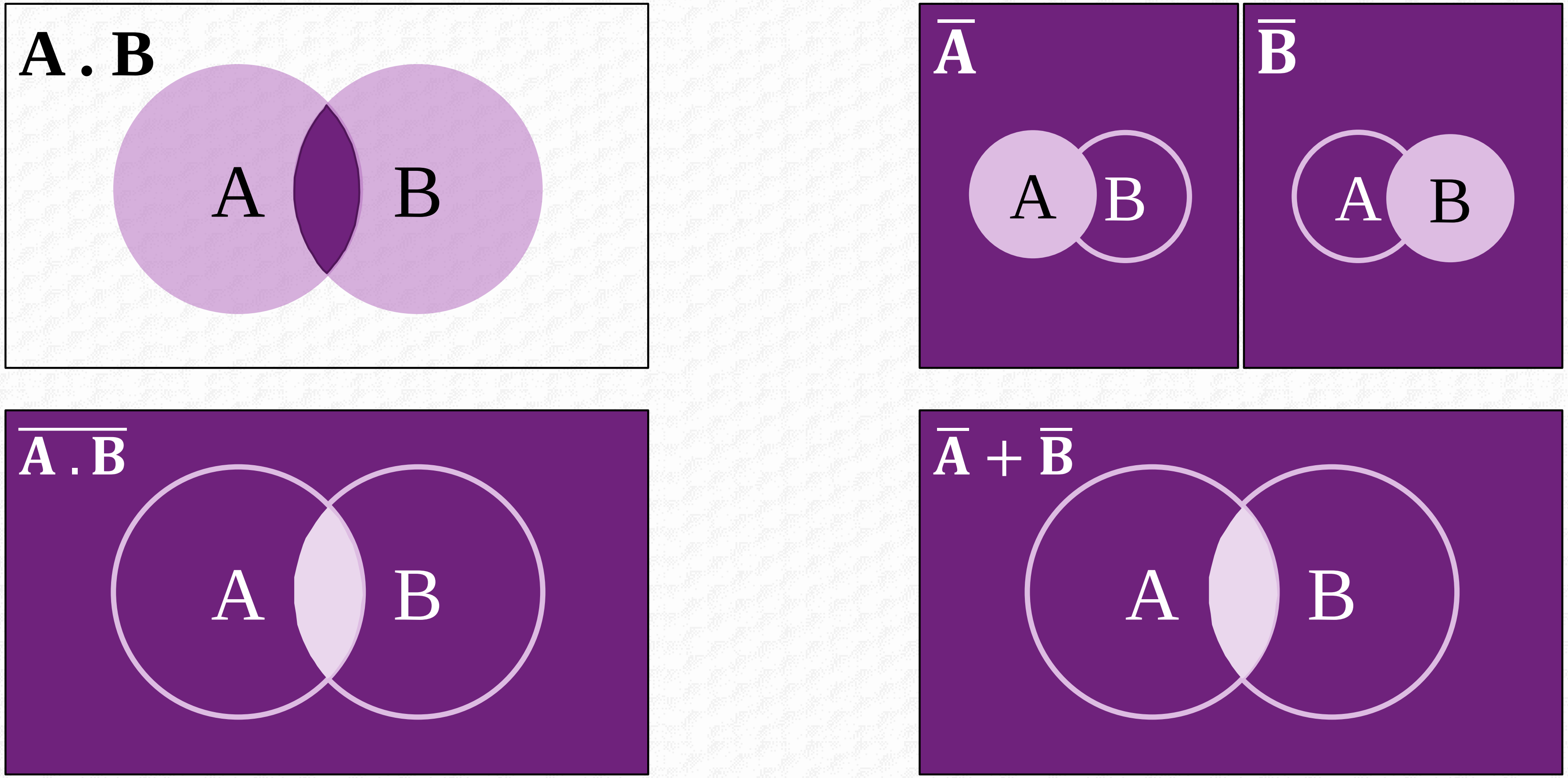
- A operação de multiplicação representa A ∩ B.
- A operação de adição representa A ∪ B.

Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan



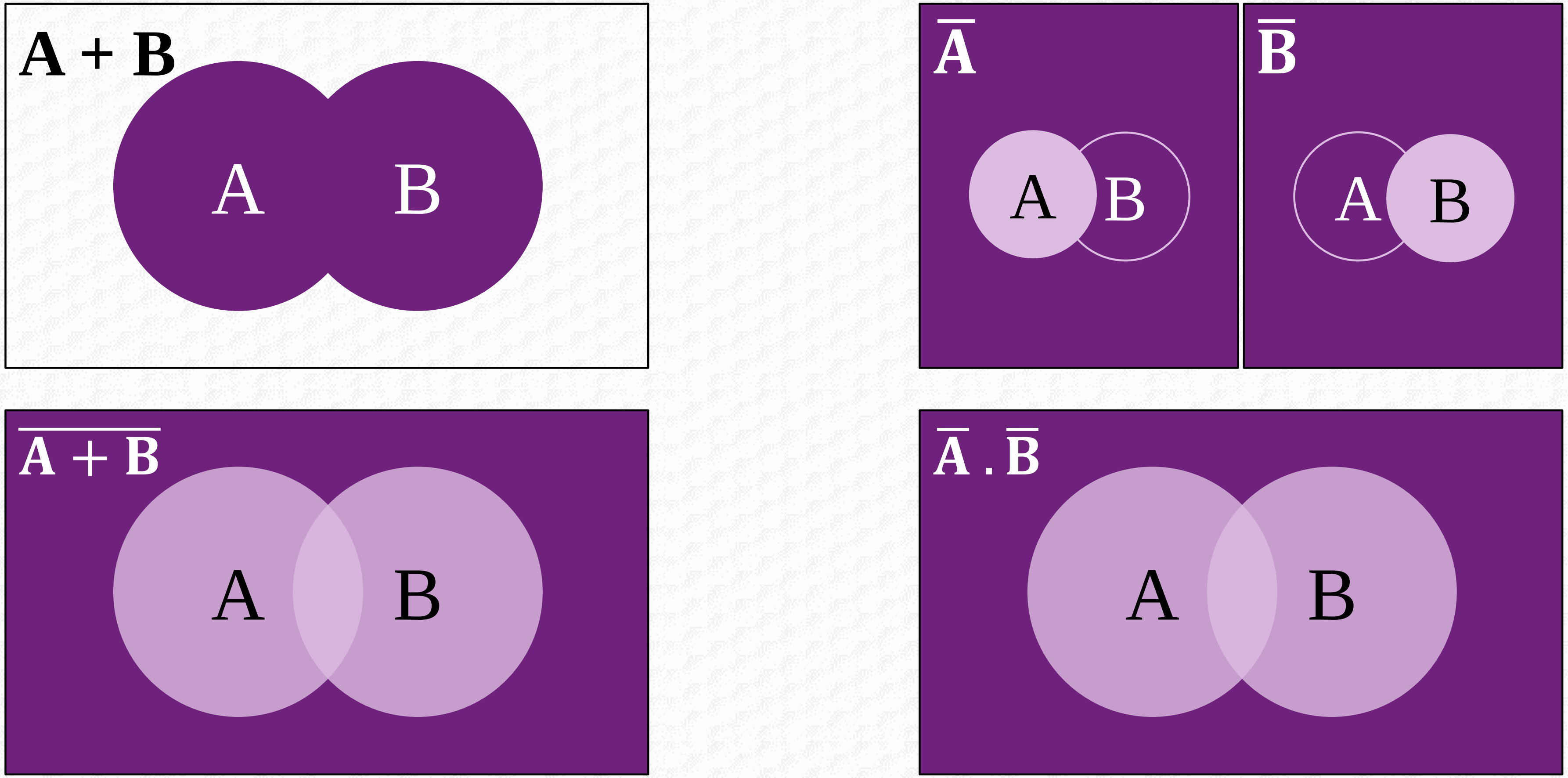
- O complemento de A e B equivale ao ∉.

Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan



- 1ª Lei de De Morgan: $\overline{(\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B})} = \bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{B}}$

Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan



- 2ª Lei de De Morgan: $\overline{(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})} = \overline{\boldsymbol{A}} \,.\, \overline{\boldsymbol{B}}$

Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan

- A primeira lei De Morgan também pode ser observada na seguinte tabela.

A	B	A.B	$\overline{(A\,.\,B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Álgebra Booleana – Teorema de De Morgan

- A segunda lei De Morgan pode ser observada na seguinte tabela.

A	B	A + B	$\overline{(A + B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} . \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Álgebra Booleana – Quadro resumo

Postulados		
Complementação	**Adição**	**Multiplicação**
$A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$ $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$	$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$	$0 . 0 = 0$ $0 . 1 = 0$ $1 . 0 = 0$ $1 . 1 = 1$
Identidades		
Complementação	**Adição**	**Multiplicação**
$\overline{\overline{A}} = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A + A = A$ $A + \overline{A} = 1$	$A . 0 = 0$ $A . 1 = A$ $A . A = A$ $A . \overline{A} = 0$

Propriedades	
Comutativa	$A + B = B + A$
	$A . B = B . A$
Associativa	$A + (B + C) = (A + B) + C$
	$A . (BC) = (AB) . C$
Distributiva	$A . (B + C) = AB + AC$
	$A + (BC) = (A + B).(A + C)$

Teorema de De Morgan
1ª) $\overline{(A . B)} = \overline{A} + \overline{B}$
2ª) $\overline{(A + B)} = \overline{A} . \overline{B}$

Álgebra Booleana – Identidades Auxiliares

- Existem também algumas identidades auxiliares que ajudam a simplificar expressões.
- Algumas delas serão deduzidas a seguir, sendo mostrado o caminho de dedução. As deduções podem ser feitas como treino para fixar os conceitos de álgebra booleana.

Álgebra Booleana – Identidades Auxiliares

- **$A + A.B = A$**

$$
\begin{aligned}
A + A \,.\, B &= A + (A.B) \\
&= A(1 + B) && \text{(propriedade distributiva)} \\
&= A \,.\, 1 && \text{(identidade aditiva)} \\
&= A && \text{(elemento neutro multiplicativo)}
\end{aligned}
$$

- Exemplo

$$\mathbf{A + AB + AC \;=\; A + AC \;=\; A}$$

Álgebra Booleana – Identidades Auxiliares

- $\mathbf{A + \bar{A}B = A + B}$

$A + \bar{A}B = \overline{\overline{A + \bar{A}B}}$	(ident. comple.)
$= \overline{\bar{A}.\overline{(\bar{A}B)}}$	(2ª lei De Morgan)
$= \overline{\bar{A}.\overline{\overline{(\bar{\bar{A}} + \bar{B})}}}$	(1ª lei De Morgan)
$= \overline{\bar{A}.\overline{\overline{(A + \bar{B})}}}$	(ident. comple.)
$= \overline{\bar{A}.(A + \bar{B})}$	(ident. comple.)
$= \overline{\bar{A}A + \bar{A}\bar{B}}$	(prop. distributiva)

$A + \bar{A}B = \overline{0 + \bar{A}\bar{B}}$	(ident. mult.)
$= \overline{\bar{A}\bar{B}}$	(elem. neutro adição)
$= \overline{\overline{\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}}}}$	(1ª lei De Morgan)
$= \overline{\overline{A + \bar{\bar{B}}}}$	(ident. comple.)
$= \overline{\overline{A + B}}$	(ident. comple.)
$= A + B$	(ident. comple.)

Álgebra Booleana – Identidades Auxiliares

- $\mathbf{A\,(\bar{A} + B) = AB}$

$$
\begin{aligned}
A\,(\bar{A} + B) &= A\bar{A} + AB && \text{(propriedade distributiva)}\\
&= 0 + AB && \text{(identidade multiplicativa)}\\
&= AB && \text{(elem. neutro adição)}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{AB + A\bar{B} = A}$

$$
\begin{aligned}
AB + A\bar{B} &= A(B + \bar{B}) && \text{(propriedade distributiva)}\\
&= A.1 && \text{(identidade aditiva)}\\
&= A && \text{(elem. neutro multiplicação)}
\end{aligned}
$$

Álgebra Booleana – Identidades Auxiliares

- **$(A + B)(A + \overline{B}) = A$**

$$
\begin{aligned}
(A + B)(A + \overline{B}) &= AA + A\overline{B} + AB + B\overline{B} && \text{(propriedade distributiva)}\\
&= A + A\overline{B} + AB + B\overline{B} && \text{(identidade multiplicativa)}\\
&= A + A\overline{B} + AB + 0 && \text{(identidade multiplicativa)}\\
&= A + A(\overline{B} + B) && \text{(propriedade distributiva)}\\
&= A + A.(1) && \text{(identidade aditiva)}\\
&= A + A && \text{(elemento neutro mult.)}\\
&= A && \text{(identidade aditiva)}
\end{aligned}
$$

Álgebra Booleana – Identidades Auxiliares

- $\mathbf{AB + A\overline{B}C = AB + AC}$

$$
\begin{aligned}
AB + A\overline{B}C &= A(B + \overline{B}C) && \text{(propriedade distributiva)} \\
&= A(B + C) && \text{(identidade auxiliar, slide 46)} \\
&= AB + AC && \text{(propriedade distributiva)}
\end{aligned}
$$

Referências Bibliográficas

- IDOETA, Ivan V.; CAPUANO, Francisco G. **Elementos de Eletrônica Digital.** 40. ed. São Paulo: Érica, 2008.
- TOCCI, R. J.; WIDMER, N. S.; MOSS, G. L. **Sistemas digitais:** princípios e aplicações. 12. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2018. E-book.
- NELSON, Victor P. *et al*. **Digital logic circuit analysis and design.** 1. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995.