Aula 7
MEIO SOMADOR E SOMADOR COMPLETO

Projeto de Ensino

Material didático para lógica digital I: circuitos combinacionais

Bolsista: Everaldina Guimarães Barbosa

Orientador: César Alberto Bravo Pariente

Sumário

Aritmética binária: Adição

- No sistema decimal, é possível fazer 100 operações de adição distintas, já que possui 10 dígitos. Se levado em conta a comutatividade, esse número cai para 55.
- O quadro ao lado ilustra o resultado das somas entre os 10 dígitos do sistema decimal.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Aritmética binária: Adição

- No sistema numérico binário há apenas quatro combinações possíveis na adição, são elas:

  - 0 + 0 = 0
  - 0 + 1
  - 1 + 0
  - 1 + 1

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Aritmética binária: Adição

- No sistema numérico binário há apenas quatro combinações possíveis na adição, são elas:
  - 0 + 0 = 0
  - 0 + 1 = 1
  - 1 + 0
  - 1 + 1

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

Aritmética binária: Adição

- No sistema numérico binário há apenas quatro combinações possíveis na adição, são elas:
  - 0 + 0 = 0
  - 0 + 1 = 1
  - 1 + 0 = 1
  - 1 + 1

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

Aritmética binária: Adição

- No sistema numérico binário há apenas quatro combinações possíveis na adição, são elas:
    - 0 + 0 = 0
    - 0 + 1 = 1
    - 1 + 0 = 1
    - 1 + 1 = 10

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1 \\ +\ 1 \\ \hline 1\,0 \end{array}$$

- Na adição $1_2 + 1_2$ o resultado é zero e "vai um" para a casa logo à esquerda. Esse "um" é chamado de transporte (carry).

Meio Somador – Introdução

- Utilizando essas noções de adição entre dois bits, é possível criar um circuito combinacional que corresponda a tal operação.
- Na tabela ao lado estão as possíveis combinações aditivas de dois bits A e B, a saída (S) e o transporte de saída (T_s).
- O transporte de saída representa o bit carry da soma. Ele só é verdadeiro na soma $1_2 + 1_2$.

A	B	S	T_s
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Meio Somador – Circuito Combinacional

- Analisando a tabela verdade da operação é possível obter a expressão para cada saída.
- A saída (S) possui a mesma tabela verdade da operação A XOR B. Logo:

$$\mathbf{S = A \oplus B}$$

- O T_s só é verdadeiro quando os dois bits de entrada são verdadeiros, então podemos concluir que:

$$\mathbf{T_s = A.B}$$

A	B	S	T_s
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Meio Somador – Circuito Combinacional

- Isso também poderia ser percebido com a ajuda dos mapas de Karnaugh correspondentes.

S	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	0

$$S = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$S = A \oplus B$$

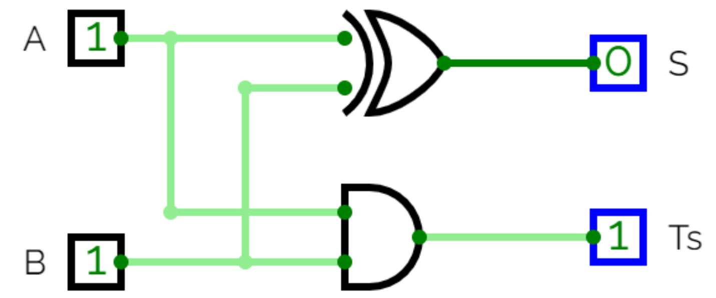
T_s	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	0
A	0	1

$$T_s = A.B$$

A	B	S	T_s
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Meio Somador – Simulação

- Abaixo a simulação do circuito “Meio Somador” e sua versão encapsulada.



$$S = A \oplus B \qquad T_s = A.B$$

Componente encapsulado

- Disponível em: https://circuitverse.org/users/166835/projects/somador-929841eb-6954-4a67-8643-d3a1ac3b5c3c

Somador Completo – Introdução

- O "Meio Somador" faz a adição de dois bits. Porém, para um caso geral, em uma soma são necessárias três entradas: os dois bits que serão somados e o transporte de entrada.
- Caso não haja carry, o transporte de entrada (T_e) será igual a "zero". Se houver, o T_e será igual "um".
- Ao lado a tabela verdade da adição de A, B e T_e .

A	B	T_e	S	T_s
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Somador Completo – Circuito Combinacional

- É possível obter a expressão de saída com o auxílio do mapa de Karnaugh abaixo:

S	$\overline{B}\,\overline{T_e}$	$\overline{B}\,T_e$	$B\,T_e$	$B\,\overline{T_e}$
$\overline{A}$	0	1	0	1
A	1	0	1	0

$$\mathbf{S} = \overline{A}\,\overline{B}T_e + \overline{A}B\overline{T_e} + A\overline{B}\,\overline{T_e} + ABT_e$$
$$\mathbf{S} = \overline{A}(\overline{B}T_e + B\overline{T_e}) + A(\overline{B}\,\overline{T_e} + BT_e)$$
$$\mathbf{S} = \overline{A}(B \oplus T_e) + A(B \odot T_e)$$
$$\mathbf{S} = A \oplus B \oplus T_e$$

A	B	T_e	S	T_s
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Somador Completo – Circuito Combinacional

- O mapa de Karnaugh abaixo é utilizado para se obter a expressão do "Transporte de saída" da tabela.

T_s

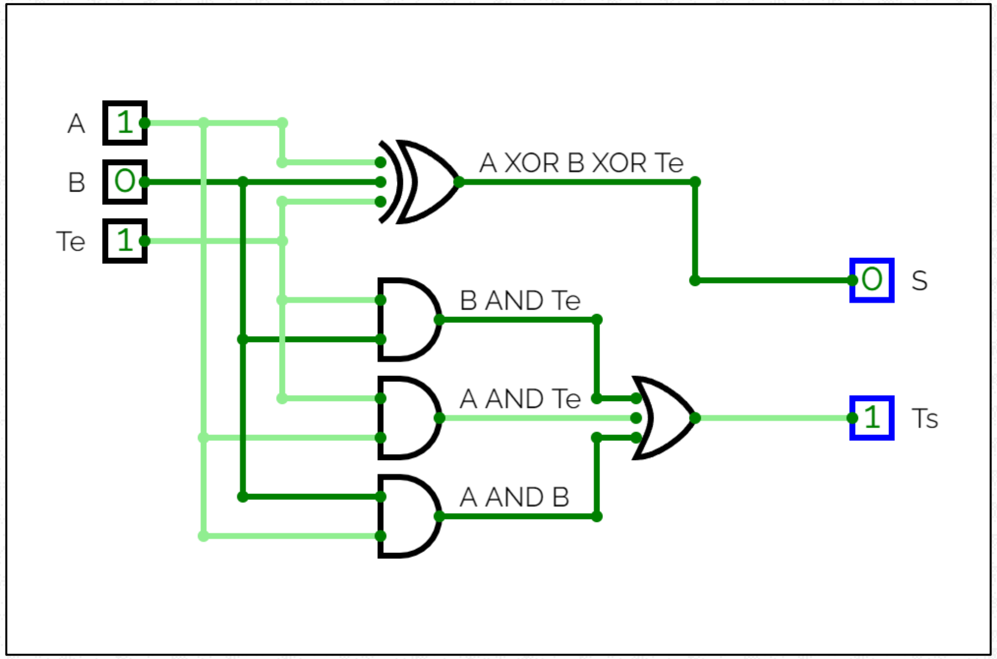
	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	0	0	1	0
A	0	1	1	1
	$\overline{T_e}$	T_e	T_e	$\overline{T_e}$

$$T_s = AT_e + AB + BT_e$$

A	B	T_e	S	T_s
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Somador Completo – Simulação

- A seguir a simulação do circuito combinacional do “Somador Completo”:

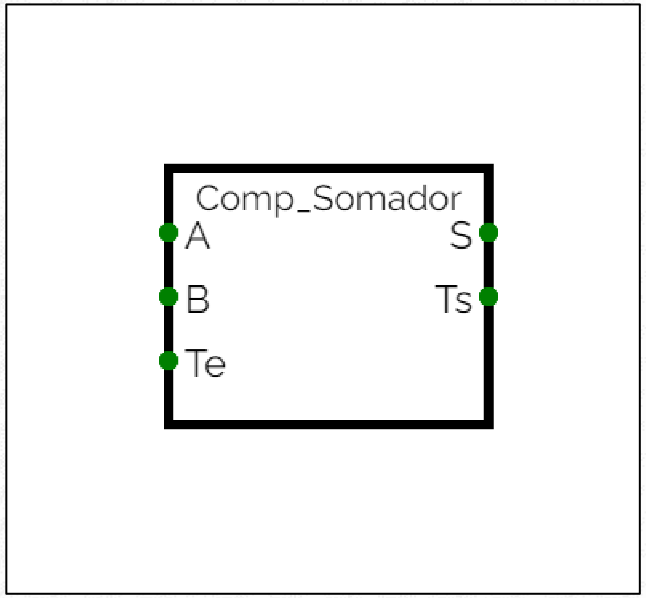


$$\mathbf{T_s} = AT_e + AB + BT_e$$
$$\mathbf{S} = A \oplus B \oplus T_e$$

- Disponível em: https://circuitverse.org/users/166835/projects/somador-929841eb-6954-4a67-8643-d3a1ac3b5c3c

Somador Completo – Simulação

- Versão encapsulada:

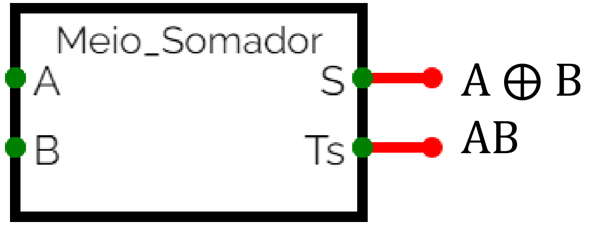


- Disponível em: https://circuitverse.org/users/166835/projects/somador-929841eb-6954-4a67-8643-d3a1ac3b5c3c

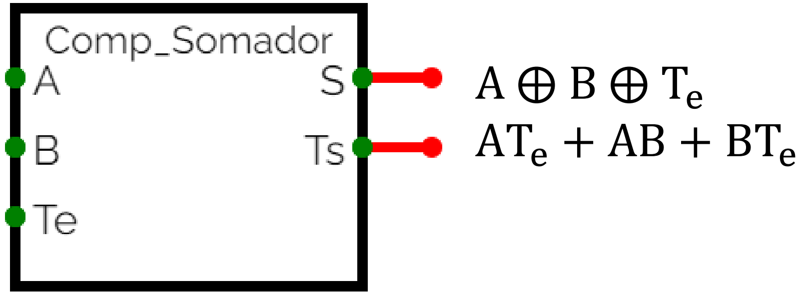
Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

- O “Meio Somador” faz a adição de dois bits, sem a presença do bit de carry, porém é possível combinar mais de um componente “Meio Somador” de forma que ele funcione como “Somador Completo”.
- Para isso podemos analisar as saídas do “Meio Somador” e do “Somador Completo”.

Meio Somador



Somador completo



Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

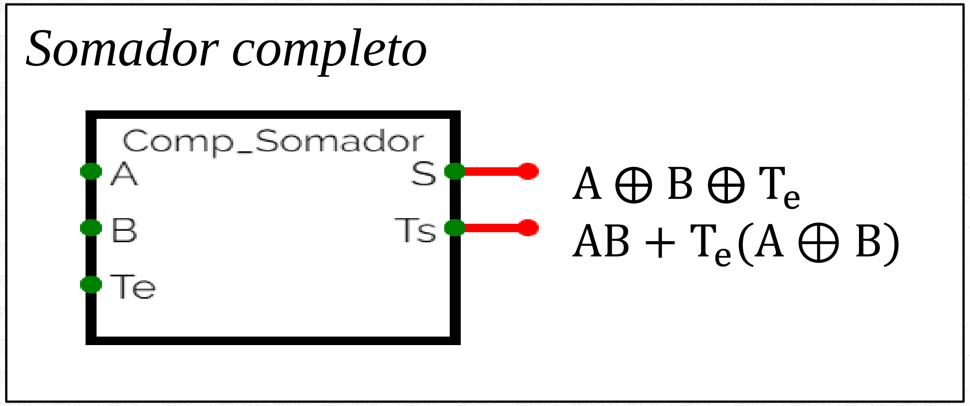
Somador completo

$A \oplus B \oplus T_e$

$AT_e + AB + BT_e$

- Observando o Transporte de saída do “Somador Completo”, é possível fazer algumas operações booleanas.

Somador Completo – A partir de “Meio Somador”



- Observando o Transporte de saída do “Somador Completo”, é possível fazer algumas operações booleanas.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T_s} &= AT_e + AB + BT_e \\
&= A(T_e + B) + BT_e \\
&= A(T_e + B\overline{T_e}) + BT_e \\
&= AT_e + AB\overline{T_e} + BT_e \\
&= AB\overline{T_e} + AT_e + BT_e
\end{aligned}
$$

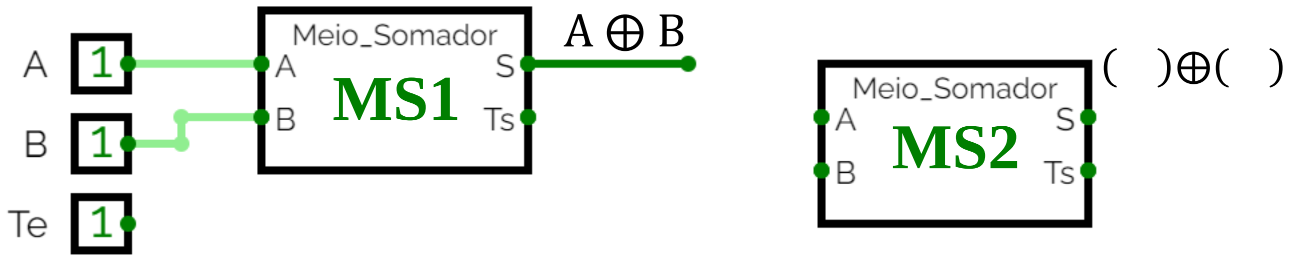
$$
\begin{aligned}
&= AB\overline{T_e} + T_e(A + B) \\
&= AB\overline{T_e} + T_e(A\overline{B} + B) \\
&= AB\overline{T_e} + A\overline{B}T_e + BT_e \\
&= AB\overline{T_e} + A\overline{B}T_e + BT_e.(1) \\
&= AB\overline{T_e} + A\overline{B}T_e + BT_e.(A + \overline{A})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= AB\overline{T_e} + A\overline{B}T_e + ABT_e + \overline{A}BT_e \\
&= AB\overline{T_e} + ABT_e + A\overline{B}T_e + \overline{A}BT_e \\
&= AB(\overline{T_e} + T_e) + T_e(A\overline{B} + \overline{A}B) \\
&= AB(1) + T_e(A\overline{B} + \overline{A}B) \\
&= \mathbf{AB + T_e(A \oplus B)}
\end{aligned}
$$

Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

- A saída S, equivale à operação XOR das duas entradas.
- Tendo dois Meio Somadores, MS1 e MS2. Se alimentarmos no MS2, a entrada A, com a saída de MS1 e, a entrada B, com o Transporte de Entrada, teremos:

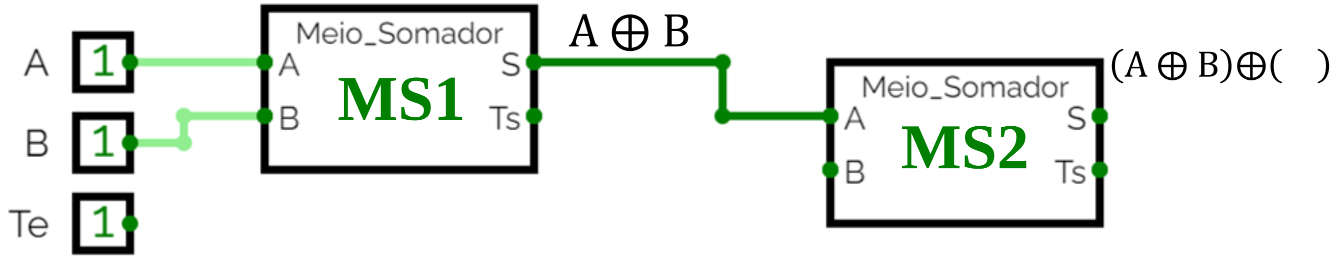
$$\mathbf{S_{MS2}} = A_{MS2} \oplus BMS_2 = (A \oplus B) \oplus B_{MS2} = (A \oplus B) \oplus T_{\mathbf{e}}$$



Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

- A saída S, equivale à operação XOR das duas entradas.
- Tendo dois Meio Somadores, MS1 e MS2. Se alimentarmos no MS2, a entrada A, com a saída de MS1 e, a entrada B, com o Transporte de Entrada, teremos:

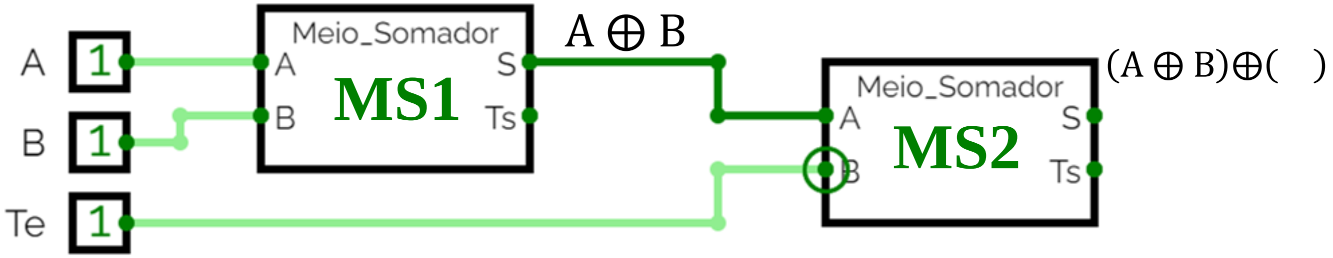
$$\mathbf{S_{MS2}} = A_{MS2} \oplus BMS_2 = (A \oplus B) \oplus B_{MS2} = (A \oplus B) \oplus T_{\mathbf{e}}$$



Somador Completo – A partir de "Meio Somador"

- A saída S, equivale à operação XOR das duas entradas.
- Tendo dois Meio Somadores, MS1 e MS2. Se alimentarmos no MS2, a entrada A, com a saída de MS1 e, a entrada B, com o Transporte de Entrada, teremos:

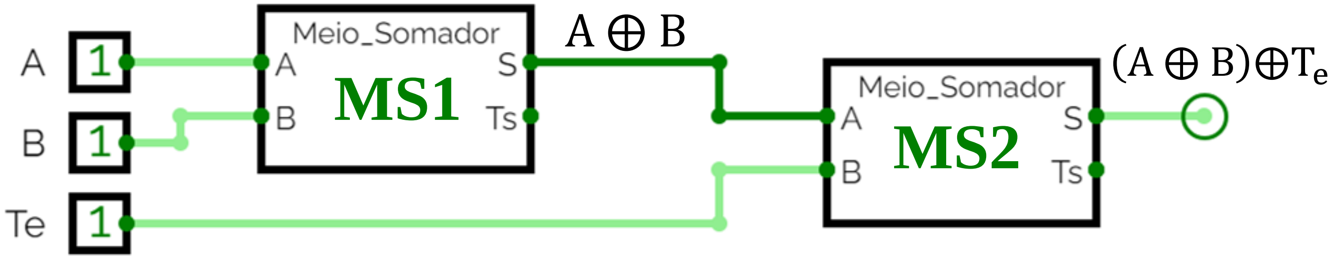
$$\mathbf{S_{MS2}} = A_{MS2} \oplus BMS_2 = (A \oplus B) \oplus B_{MS2} = (A \oplus B) \oplus T_{\mathbf{e}}$$



Somador Completo – A partir de "Meio Somador"

- A saída S, equivale à operação XOR das duas entradas.
- Tendo dois Meio Somadores, MS1 e MS2. Se alimentarmos no MS2, a entrada A, com a saída de MS1 e, a entrada B, com o Transporte de Entrada, teremos:

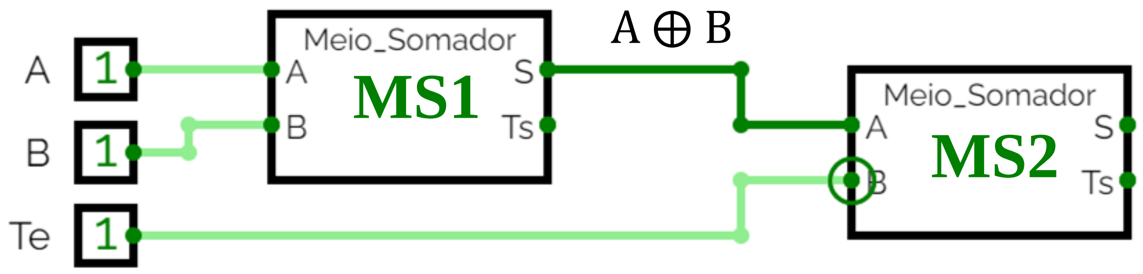
$$\mathbf{S_{MS2}} = A_{MS2} \oplus BMS_2 = (A \oplus B) \oplus B_{MS2} = (A \oplus B) \oplus T_e$$



Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

- Com isso é possível aplicar a equivalência de portas Ts encontrada anteriormente.

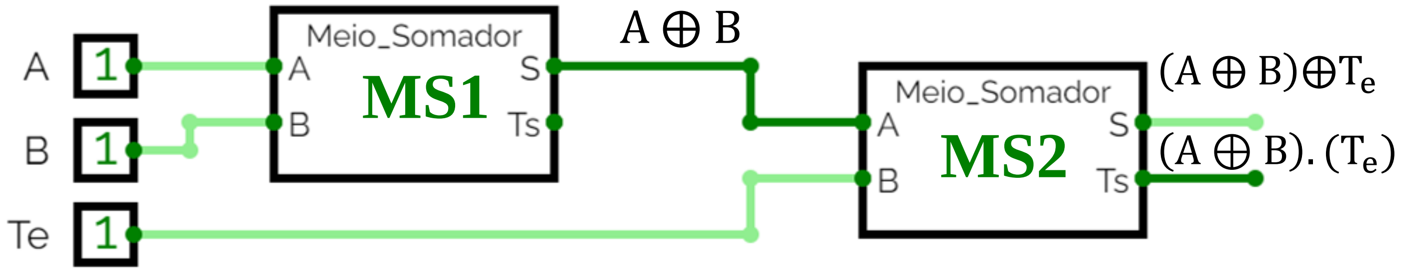
$$T_s = AB + T_e(A \oplus B)$$



Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

- Com isso é possível aplicar a equivalência de portas Ts encontrada anteriormente.

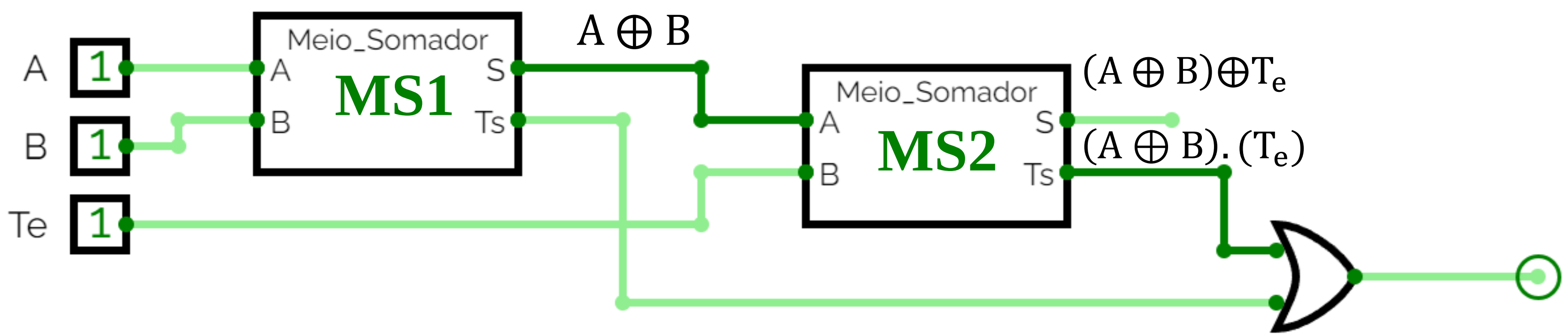
$$T_s = AB + T_e(A \oplus B)$$



Somador Completo – A partir de "Meio Somador"

- Com isso é possível aplicar a equivalência de portas Ts encontrada anteriormente.

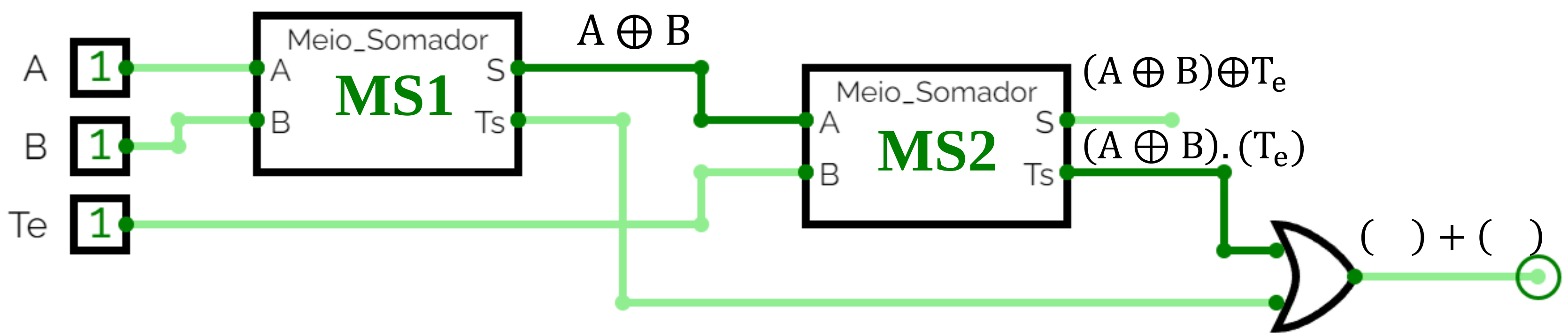
$$T_s = AB + T_e(A \oplus B)$$



Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

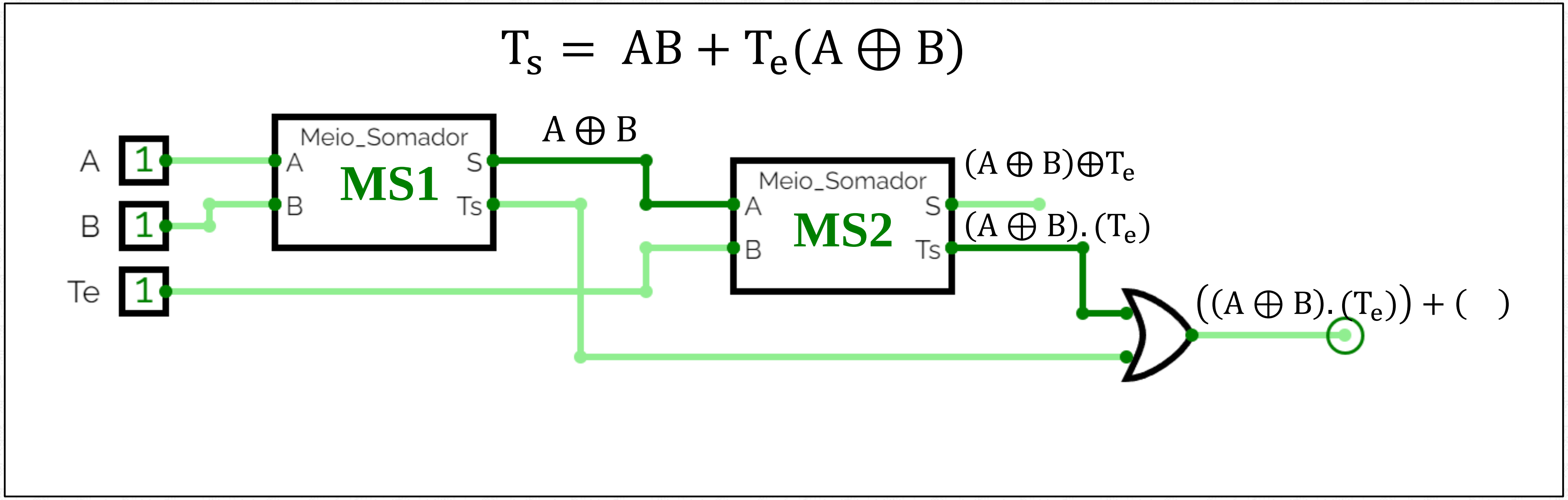
- Com isso é possível aplicar a equivalência de portas Ts encontrada anteriormente.

$$T_s = AB + T_e(A \oplus B)$$



Somador Completo – A partir de "Meio Somador"

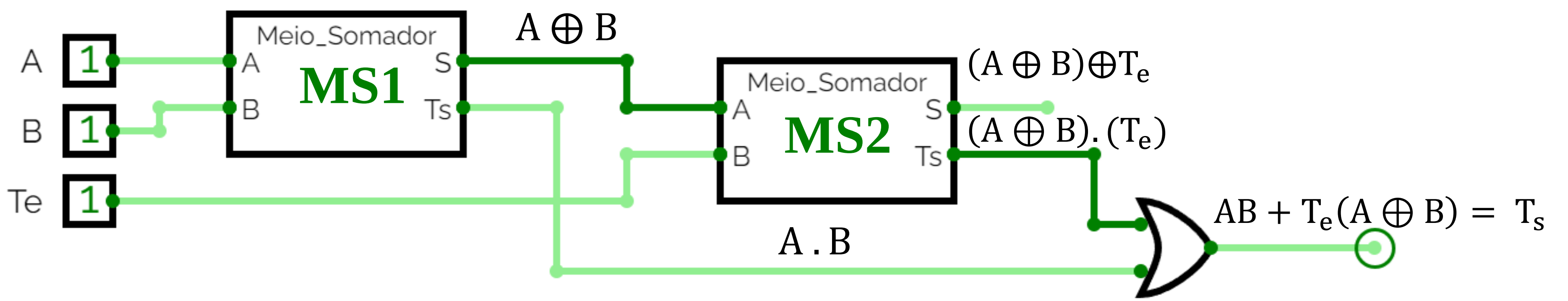
- Com isso é possível aplicar a equivalência de portas Ts encontrada anteriormente.



Somador Completo – A partir de “Meio Somador”

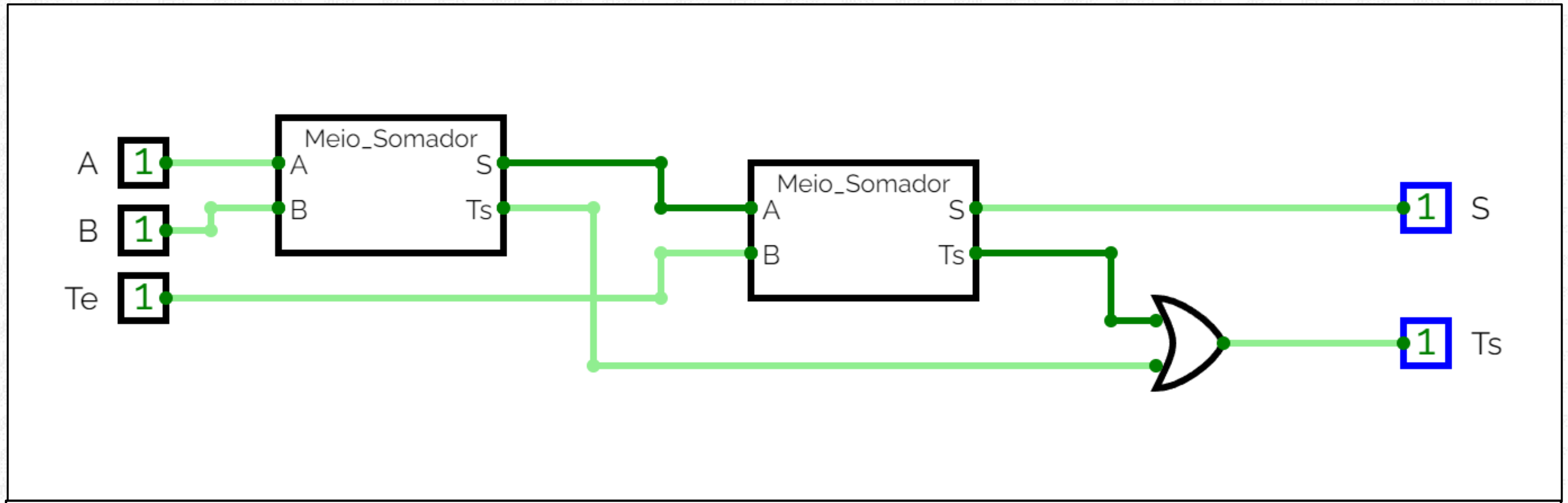
- Com isso é possível aplicar a equivalência de portas Ts encontrada anteriormente.

$$T_s = AB + T_e(A \oplus B)$$



Somador Completo – A partir de "Meio Somador"

- Então temos por fim o "Somador Completo" por meio de "Meio Somador".

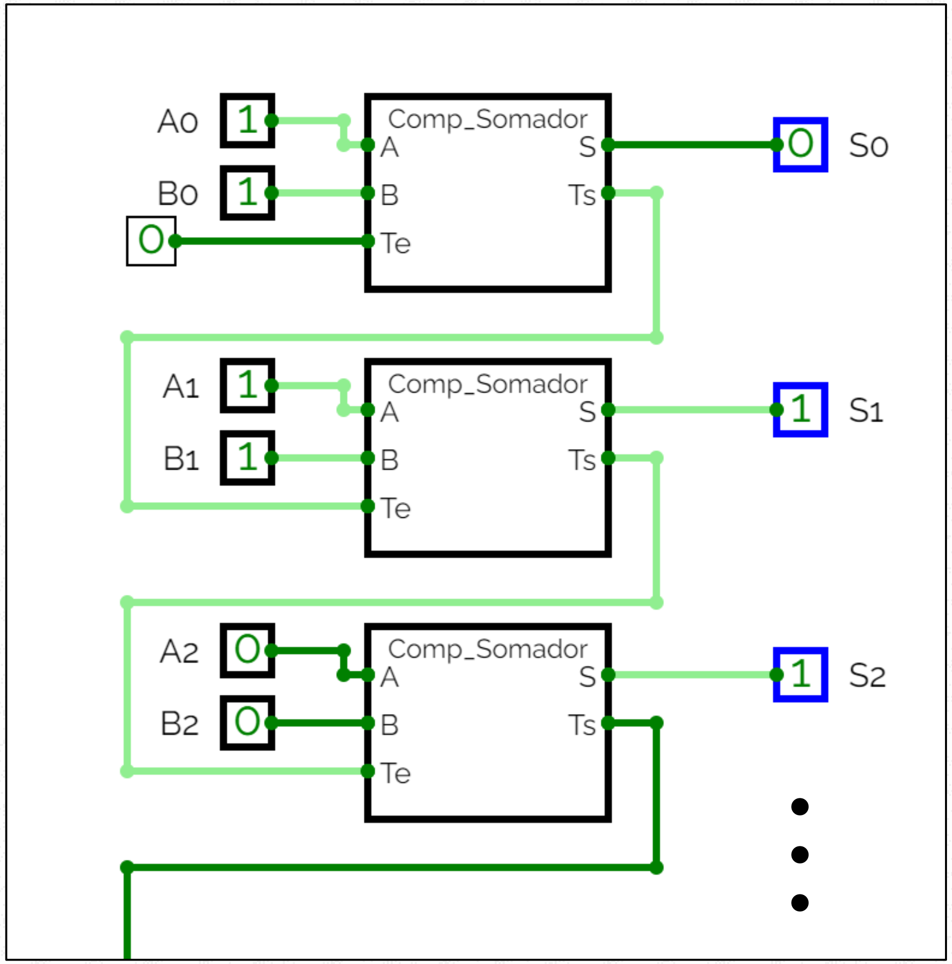


$\mathbf{S = (A \oplus B) \oplus T_e}$ $\mathbf{T_s = AB + T_e(A \oplus B)}$

- Disponível em: https://circuitverse.org/users/166835/projects/somador-929841eb-6954-4a67-8643-d3a1ac3b5c3c

Somador Completo – Adição de 4 bits

- Os circuitos até aqui somam apenas um bit, obtendo a saída e o carry.
- É possível somar mais de um bit, nesse caso o Transporte de entrada recebe o carry de saída de outro “Somador Completo”. Com exceção do primeiro “Somador Completo” que tem 0 como Transporte de entrada.

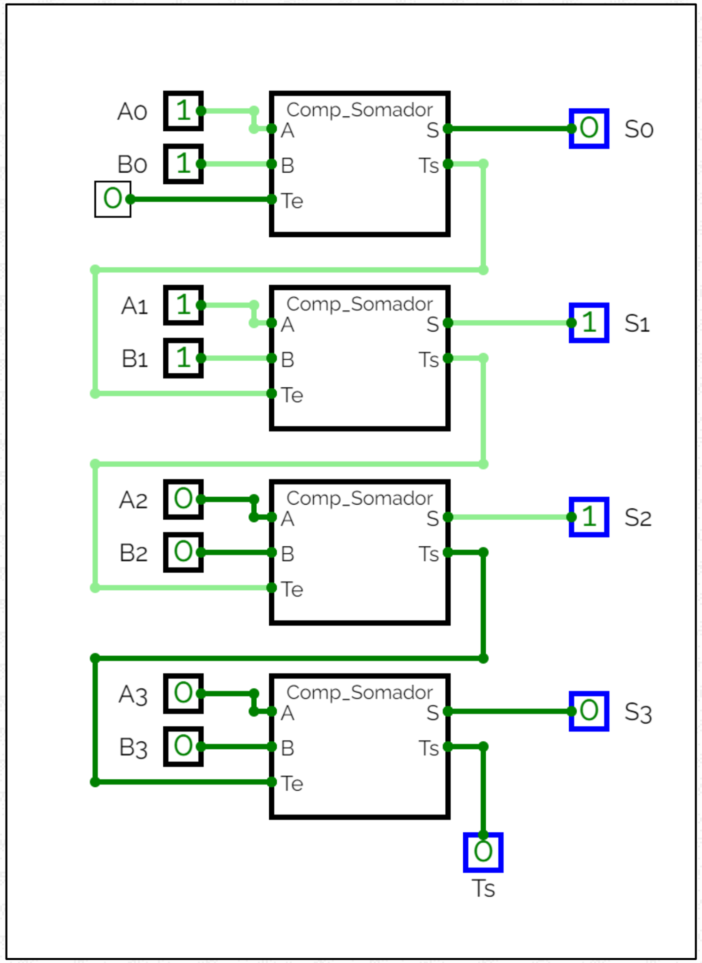


Somador Completo – Adição de 4 bits

- Ao lado, o circuito para a adição de 4 bits.
- Na imagem a soma:

$$
\begin{array}{r}
\mathbf{1}\ \ \mathbf{1}\ \ \\
0\ 0\ 1\ 1 \\
+\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
\hline
0\ 0\ 1\ 1\ 0
\end{array}
$$

- Disponível em: https://circuitverse.org/users/166835/projects/somador-929841eb-6954-4a67-8643-d3a1ac3b5c3c



Referências Bibliográficas

- IDOETA, Ivan V.; CAPUANO, Francisco G. **Elementos de Eletrônica Digital.** 40. ed. São Paulo: Érica, 2008.
- TOCCI, R. J.; WIDMER, N. S.; MOSS, G. L. **Sistemas digitais:** princípios e aplicações. 12. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2018. E-book.
- NELSON, Victor P. *et al*. **Digital logic circuit analysis and design.** 1. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995.