

路面结构的动态谱元分析

倪富健¹ 成 晟² 顾兴宇¹ 马 翔¹

(¹ 东南大学交通学院, 南京 210096)

(² 泰州市公路管理处, 泰州 225300)

摘要: 结合层单元刚度矩阵和有限单元法, 基于快速傅里叶变换和傅里叶-贝塞尔理论, 根据层间连续和光滑 2 种接触状态分别进行系统矩阵组装, 推导出了—种精确性和鲁棒性很好的谱元计算方法, 可以对轴对称层状体系的动态行为进行分析, 并开发了计算程序. 从两方面对该算法的准确性进行了验证: 静态过程与 BISAR3 进行比较; 动态计算结果直接与实测数据比较. 该方法计算速度快, 能够精确计算路面结构的动态响应, 有广泛的工程应用价值. 由于谱元法在频率-波数空间内进行运算, 因此还可方便导入材料黏弹性模型, 以考察结构的流变属性.

关键词: 道路工程; 动态响应; 层刚度矩阵; 波动; 谱元法; 黏弹性

中图分类号: U416.01 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-0505(2010)03-0575-06

Spectral element analysis of dynamic pavement structure response

Ni Fujian¹ Cheng Sheng² Gu Xingyu¹ Ma Xiang¹

(¹ School of Transportation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(² Taizhou Highway Management Department, Taizhou 225300, China)

Abstract: Combining a layer stiffness matrix and a spectral element in the analysis of the dynamic behavior of axially symmetric multi-layered media, an accurate and computationally robust algorithm for solving dynamic problems is developed, based on Fourier-Bessel theory and the fast Fourier transform. When assembling the system stiffness matrix, the interface bonding conditions between layers are also considered. Numerical implementation is presented. The accuracy of the spectral element method is verified by comparing it with what of BISAR3 for quasi-static processes, when the pulse duration is long enough, and with the measured FWD (falling weight deflectometer) deflections data for dynamic processes. Because of the evaluation of system response in frequency domain, this approach allows for adjustment of frequency dependent properties. The method is fast and can accurately calculate the dynamic response of pavement structure, there is a wide range of engineering applications. As the spectral element method in the frequency-wave number space for operation, so can easily import the viscoelastic material model to study the rheological properties of the structure.

Key words: road engineering; dynamic response; layer stiffness matrix; wave approach; spectral element method; viscoelastic

落锤弯沉仪(FWD)作为一种路面无损检测手段在世界范围内得到了广泛应用,许多国家正是基于 FWD 检测结果制定养护方案. 目前用得较多的 FWD 分析方法都是基于弹性层状体系的静态分析,由于 FWD 实质上是动态荷载,其弯沉盆和静

态弯沉并不相同,因此,有必要引入动态分析方法以配合 FWD 检测. 近年来许多方法被用于层状体系动态响应的研究,包括解析和数值方法. 文献[1]求出了层传递矩阵;文献[2]对传递矩阵进行修改后得到了轴对称的层刚度矩阵,这和有限元中

的刚度矩阵很相似,由于其对称性,便于数值计算,但因为涉及到复杂的积分变换和含奇点的无穷积分,该方法在数值实现上仍有不少困难;文献[3]将单元中的波动描述为入射波和反射波的叠加;文献[4]研究了 2D 层状固体中波的传播.谱元法将精确的波动方程和有限元刚度矩阵结合在一起,通过在有限的频域和波数上的双重求和,避免了解析法中在无穷区域上计算数值积分的难点.每一层只需要一个元素就可以精确描述,而一个元素只有 2 个结点,因而动态方程的计算量比有限元小,提高了运算速度.本文在文献[5-6]层刚度矩阵基础上,将其和有限单元法结合,推导出了针对半无限层状体系的谱元计算方法,并用程序加以实现.该算法能够精确计算路面结构在动态荷载下的弯沉响应,同时,也能在路面结构设计和检测等其他领域发挥作用.

1 层单元刚度矩阵

谱元法的层刚度矩阵基于轴对称体系波动方程的求解.各向同性线弹性材料中波的传播可以用 Navier 方程表示,即

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$$

令 $z = 0$ 结点处的径向及纵向位移分别为 u_1 和 w_1 ,径向和纵向应力分别为 P_1 和 R_1 ; $z = h$ 结点处相应位移为 u_2 和 w_2 ,相应应力为 P_2 和 R_2 (见图 1(a)),则双结点单层单元刚度矩阵可表示为

$$\begin{Bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{R}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{R}_2 \end{Bmatrix} = \frac{(1 + t^2)kG^*}{D} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & -K_{14} & K_{24} \\ & & K_{11} & -K_{12} \\ & & & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{t}Q_sN_t + sN_sQ_t, \\ K_{12} &= \frac{3 - t^2}{1 + t^2}(1 - Q_sQ_t) + \frac{1 + 2s^2t^2 - t^2}{st(1 + t^2)}N_sN_t, \\ K_{13} &= -sN_s - \frac{1}{t}N_t, K_{14} = Q_s - Q_t, \\ K_{22} &= \frac{1}{s}N_sQ_t, K_{24} = -\frac{1}{s}N_s - tN_t, N_s = \sin(ksh) \\ N_t &= \sin(kth), Q_s = \cos(ksh), Q_t = \cos(kth) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 2(1 - Q_sQ_t) + \left(st + \frac{1}{st}\right)N_sN_t, \\ s &= -i\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{(c_p k)^2}}, t = -i\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{(c_s k)^2}} \\ G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

其中, G^* 为材料剪切模量; c_p 为层内压缩波波速; c_s 为剪切波波速; h 为层厚.

单结点半无限单元刚度矩阵是双结点单层单元的特殊形式(见图 1(b)),即

$$\begin{Bmatrix} \hat{P}_0 \\ \hat{R}_0 \end{Bmatrix} = kG^* \begin{bmatrix} \frac{is(1 + t^2)}{1 + st} & 2 - \frac{1 + t^2}{1 + st} \\ \frac{it(1 + t^2)}{1 + st} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{w}_0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

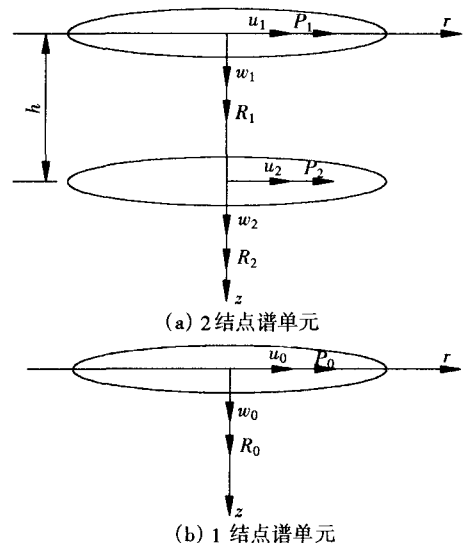


图 1 二维谱单元

2 多层体系总刚度矩阵

总刚度矩阵可通过矩阵叠加得到(见图 2).按照层间接触条件的不同,有 2 种组装方法.

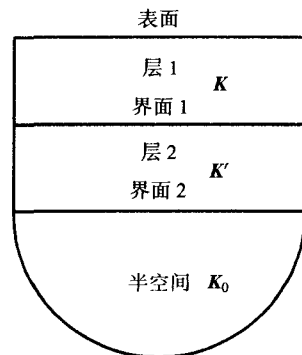


图 2 层状体系

1) 层间完全连续. 设相邻2层的单元刚度矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{R}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{R}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} & K'_{14} \\ & K'_{22} & K'_{23} & K'_{24} \\ & & K'_{33} & K'_{34} \\ & & & K'_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}'_1 \\ \hat{w}'_1 \\ \hat{u}'_2 \\ \hat{w}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{P}'_1 \\ \hat{R}'_1 \\ \hat{P}'_2 \\ \hat{R}'_2 \end{Bmatrix}$$

在接触面上平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} K_{31}\hat{u}_1 + K_{32}\hat{w}_1 + K_{33}\hat{u}_2 + K_{34}\hat{w}_2 &= \hat{P}_2 \\ K_{41}\hat{u}_1 + K_{42}\hat{w}_1 + K_{43}\hat{u}_2 + K_{44}\hat{w}_2 &= \hat{R}_2 \\ K'_{11}\hat{u}'_1 + K'_{12}\hat{w}'_1 + K'_{13}\hat{u}'_2 + K'_{14}\hat{w}'_2 &= \hat{P}'_1 \\ K'_{21}\hat{u}'_1 + K'_{22}\hat{w}'_1 + K'_{23}\hat{u}'_2 + K'_{24}\hat{w}'_2 &= \hat{R}'_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

接触面上变形连续条件为

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_2 &= \hat{u}'_1 \\ \hat{w}_2 &= \hat{w}'_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

若接触面上无外力作用,则边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_2 + \hat{P}'_1 &= 0 \\ \hat{R}_2 + \hat{R}'_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将式(3)~(5)代入单元刚度矩阵,得到相应的总刚度矩阵叠加方法为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 \\ & & K_{33} + K'_{11} & K_{34} + K'_{12} & K'_{13} & K'_{14} \\ & & & K_{44} + K'_{22} & K'_{23} & K'_{24} \\ & & & & K'_{33} & K'_{34} \\ & & & & & K'_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{u}'_1 \\ \hat{w}'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{R}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{P}'_1 \\ \hat{R}'_1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{u}'_1 \\ \hat{w}'_1 \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \hat{P}_1 \\ \hat{R}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{P}'_1 \\ \hat{R}'_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2) 层间完全光滑. 单元刚度矩阵和接触面平衡方程不变,因而变形连续条件变为

$$\hat{w}_2 = \hat{w}'_1 \quad (7)$$

接触面边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_2 &= 0 \\ \hat{P}'_1 &= 0 \\ \hat{R}_2 + \hat{R}'_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将式(3)、(7)、(8)代入单元刚度矩阵,得到相应的总刚度矩阵叠加方法为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{24} & 0 & 0 \\ & & K_{33} & 0 & K_{34} & 0 & 0 \\ & & & K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} & K'_{14} \\ & & & & K_{44} + K'_{22} & K'_{23} & K'_{24} \\ & & & & & K'_{33} & K'_{34} \\ & & & & & & K'_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}'_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{u}'_2 \\ \hat{w}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{R}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}'_2 \\ \hat{R}_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

3 荷载在频率-波数空间的转换

谱元法的刚度矩阵为频率-波数空间内的变量,因此在计算之前,首先需把荷载转换到该空间内. 轴对称冲击荷载如图3所示.

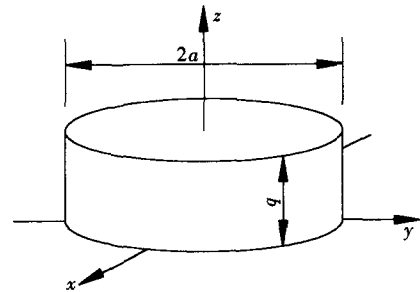


图3 荷载的空间分布

荷载函数 $H(r, t)$ 在柱坐标系中可以用分离函数表示为

$$H(r, t) = S(r)T(t) \quad (10)$$

式中, $S(r)$ 为荷载的空间分布函数; $T(t)$ 为荷载的时间分布函数. $S(r)$ 一般为有限面积上的均布荷载,即

$$S(r) = \begin{cases} q & 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

式中, a 为承载板半径. 该函数的空间-波数变换式为^[7]

$$\left. \begin{aligned} S(r) &= \sum_m \hat{F}_m J_0(k_m r) \\ \hat{F}_m &= \frac{2a}{\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} J_1\left(\frac{\alpha_m}{R} a\right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中, α_m 为零阶贝塞尔函数的第 m 个零点; R 一般取足够大值以满足结构在该处位移为零。

时间到频域的变换可通过快速傅里叶变换 (FFT) 实现^[8], 即

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}_n(n) &= \sum_k F(t_k) e^{-i2\pi nk/N} \\ F(t_k) &= \frac{1}{N} \sum_n \hat{F}_n\left(\frac{n}{N\Delta t}\right) e^{i2\pi nk/N} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中, N 的取值应根据荷载分布的时间范围确定, 在保证精度的同时兼顾计算时间要求。

荷载在时间-空间与频率-波数之间采用式 (12) 和 (13) 进行互换, 而非汉克尔变换与傅里叶变换, 从而避免了无穷积分, 便于数值求解。

4 数值实现

用谱元法进行求解时包含 3 个步骤: ① 将荷载从时间-空间域转换到频率-波数域, 计算出相应的 \hat{F}_m 和 $\hat{F}_n(n)$; ② 对任意频率-波数组合, 构造总刚度矩阵并计算相应位移; ③ 将位移从频率-波数域转换到时间-空间域。

4.1 静态验证

用谱元计算静态过程, 并将计算结果和 BISAR3 进行比较。材料及结构参数见表 1, 假设荷载峰值 50 kN, 承载板半径 150 mm, 作用时间分别为 25 s 和 25 ms (见图 4), 路面结构由 3 个 2 结点单层单元和 1 个单节点半无限单元组合而成, 接触面完全连续。

表 1 材料和结构参数

路面结构	厚度/cm	弹性模量/GPa	泊松比	密度/ ($10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
沥青面层	18	4.0	0.25	2.3
水泥稳定基层	36	8.0	0.15	2.0
水泥稳定底基层	20	3.0	0.15	2.0
路基	∞	0.08	0.35	1.5

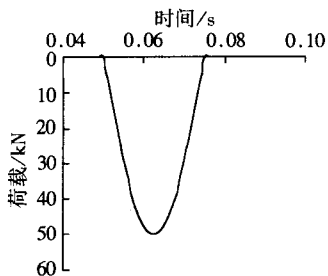


图 4 半正弦冲击荷载

离作用点不同距离的路表位移响应如图 5 所示。当荷载作用时间为 25 s 时 (见图 5(a)), 路表位移和荷载变化完全同步; 当荷载作用时间为 25 ms 时 (见图 5(b)), 各点位移变化有明显的波动

性, 荷载施加前的计算弯沉值不为零, 该误差是由 FFT 引起的, FFT 的目标函数为周期函数, 因此其输出结果也是一个周期过程, 然而实际的冲击荷载为瞬态过程, 系统在荷载作用前后的状态不可能相同, 因而导致误差的产生。延长总的计算时间长度可以减小这种误差。

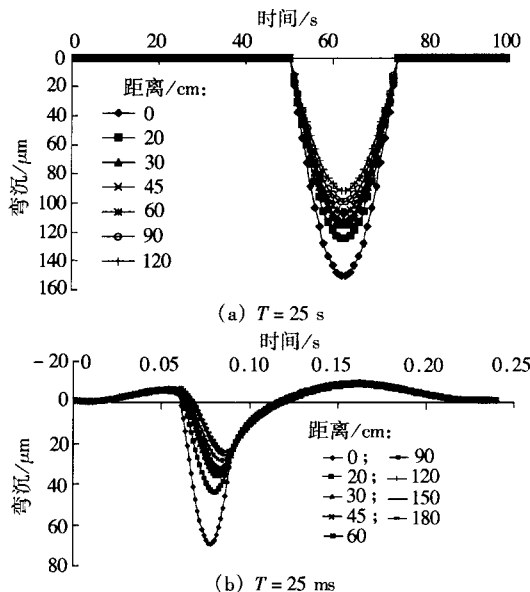


图 5 路表位移

谱元法和 BISAR3 的比较见图 6, 当冲击持续时间为 25 s 时, 二者很接近, 这是因为当荷载作用时间足够长时, 整个过程可以看作准静态, 因此波动方程和平衡方程计算结果相同。虽然全部是线弹性材料, 荷载作用时间对路面表面位移仍有较大影响。

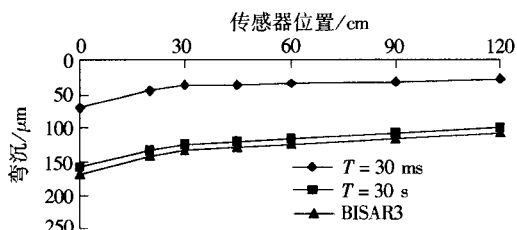


图 6 动载与静载弯沉盆

4.2 动态验证

用谱元法对落锤弯沉仪 (FWD) 和便携式落锤弯沉仪 (PFWD) 的作用过程进行模拟计算, 然后将计算结果与实测弯沉盆对照。

FWD 检测对象为沥青路面面层, 路面结构如表 1 所示, 荷载峰值为 0.7 MPa, 作用时间 25 ms。小范围变动各结构层模量, 计算相应的结构顶面弯沉 (水稳材料模量随水泥剂量改变而变化; 而沥青面层模量受温度影响较大), 假设层间完全连续, 计算弯沉与实测弯沉盆如图 7 所示。

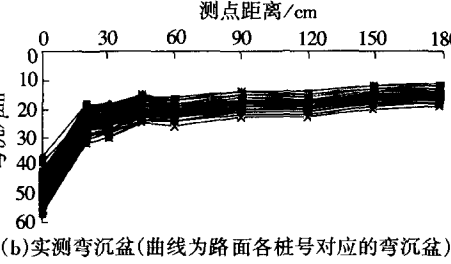
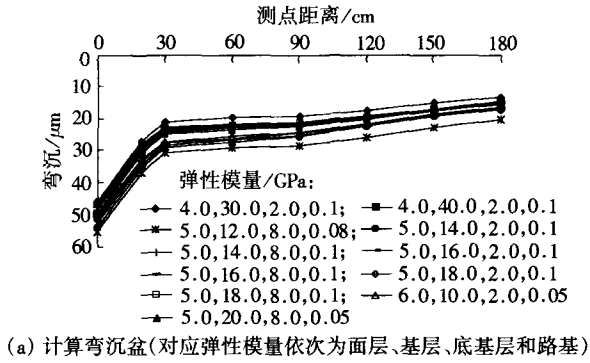


图 7 路面计算与实测弯沉盆比较

使用 PFWD 在水泥路面顶面进行检测,路面结构如表 2 所示,荷载峰值取 0.3 MPa,作用时间为 25 ms,谱元法可算得各模量对应的结构顶面弯沉(见表 3),实测的板中弯沉值如图 8 所示.

表 2 水泥路面结构

路面结构	厚度/cm	弹性模量/GPa	泊松比	密度/(10 ³ kg · m ⁻³)
水泥混凝土	24	3.0 ~ 4.0	0.15	2.0
水泥稳定基层	35	8.0 ~ 12.0	0.15	2.0
路基	∞	0.05 ~ 0.15	0.35	1.5

表 3 水泥路面顶面弯沉计算值

路基模量/MPa	基层模量/GPa	水泥板模量/GPa	中心点弯沉/μm
50	8.0	30.0	13.8
50	8.0	40.0	12.7
50	12.0	30.0	12.0
50	12.0	40.0	11.0
150	12.0	30.0	10.2
150	12.0	40.0	9.2

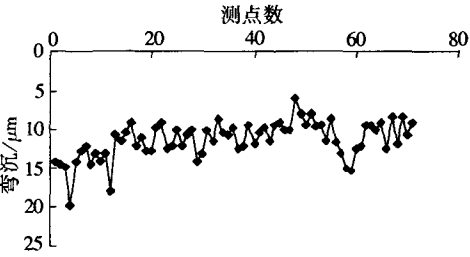


图 8 水泥路面顶面弯沉实测值

分别模拟 FWD 和 PFWD 过程,并将计算弯沉与实测弯沉进行比较,证实谱元法在动态过程计算中也有很高的精度.

4.3 计算时间

谱元法除了计算结果精确外,还有输入输出简单,计算速度快等优点.表 4 为用谱元法计算一般问题的时间消耗 (AMD Athlon (tm) 64 Processor3000 + ,1.81 GHz).

表 4 计算时间

计算模型	网格尺寸(层数)	计算时间/s
层间完全连续	2	35.34
	3	56.18
	4	80.54
层间完全光滑	2	31.11
	3	53.86
	4	82.00

5 黏弹性材料

5.1 线黏弹性材料参数

对于线黏弹性材料,应力-应变关系可以表示为时间的线性微分方程,其导数形式为^[9]

$$\bar{P}\sigma = \bar{Q}\epsilon \tag{14}$$

式中, \bar{P} 和 \bar{Q} 为线性微分算子,即

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \sum_{r=0}^p p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \\ \bar{Q} &= \sum_{r=0}^q q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \end{aligned} \tag{15}$$

式中, p_r 和 q_r 为材料常数,和弹簧劲度系数 E 及黏壶常数 η 有关.

当对黏弹性材料施加周期荷载时,其应变波动通常和应力同频率而异相位,假设应力-应变分别为

$$\sigma = \sigma_0 \exp(i\omega t) \tag{16}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp[i(\omega t - \delta)] \tag{17}$$

则材料复数模量为

$$E_c(\omega) = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \exp(i\delta) = M_1(\omega) + iM_2(\omega) \tag{18}$$

式中, M_1 和 M_2 分别为复数模量的实部和虚部,与荷载频率有关.

研究者们曾试图寻找一种合适的流变模型,以表达土工材料的黏弹特性^[10].一般而言,黏弹性材料的流变模型可以通过一系列弹簧和黏壶以串联或者并联的形式组合而成,其中一种最常用的模型为 Burger's 模型,被用来对沥青材料进行描述. Burger's 模型由一个 Maxwell 模型和一个 Kelvin 模型串联而成,如图 9 所示.

在单轴拉/压应力作用下, Burger's 模型的应力-应变关系为

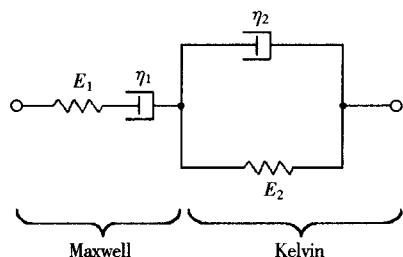


图 9 Burger's 模型

$$\sigma + \left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\epsilon} \quad (19)$$

通过傅里叶变换式(19)可转换为

$$(1 + p_1 i \omega - p_2 \omega^2) \hat{\sigma} = (q_1 i \omega - q_2 \omega^2) \hat{\epsilon} \quad (20)$$

再通过傅里叶逆变换可得到

$$E_c(\omega) = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\omega^2 [p_1 q_1 - q_2 (1 - p_2 \omega^2)] + i \omega [p_1 q_2 \omega^2 - q_1 (1 - p_2 \omega^2)]}{p_1 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2} \quad (21)$$

求出的 $E_c(\omega)$ 为频率的函数. 由于谱元法的主要计算步骤是在频域内实现的, 因此只需直接将 $E_c(\omega)$ 代入谱元公式, 便可对黏弹性材料的动力学响应进行计算.

5.2 算例

沥青路面面层考虑了沥青材料的黏弹性, 使用 Burger's 模型, 材料参数如表 5 所示. 将黏弹性材料参数代入谱元程序进行计算(见图 10).

表 5 沥青混合料黏弹性参数

$E_1 /$ GPa	$E_2 /$ MPa	$\eta_1 /$ (MPa · s)	$\eta_2 /$ (MPa · s)	$\rho /$ ($10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
8.1	4.05	200	150	2.3

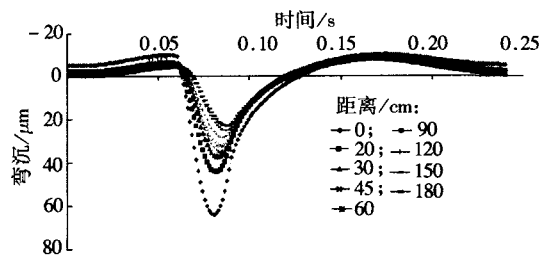


图 10 黏弹性路面动态响应

可以看到, 当考虑材料的黏弹性时, 结构位移会有一定的时间滞后性, 在荷载中心处(0 cm)这种现象尤为明显.

6 结论

1) 数值结果显示本文算法在静态和动态计算中都有很高的精度. 谱元法能够精确考察荷载作用时间和层间接触条件对结构响应的影响, 并有很高的计算速度, 因此可以在工程实践中推广应用.

2) 谱元法计算层状体系的动态响应, 不仅能够对 FWD 检测过程进行模拟, 也可以在路面检测和路面设计中得到应用. 在该方法基础上, 还可以开发针对 FWD 弯沉盆的路面模量反算方法.

3) 由于系统响应在频域内进行计算, 因此可以对频率相关的材料属性进行分析, 这在沥青混合料的力学计算中尤其有用, 沥青材料的力学性质有很强的频率依赖性.

参考文献 (References)

- [1] Haskell N A. The dispersion of surface waves in multi-layered media [J]. *Bulletin of Seismological Society of America*, 1953, **43**(1): 17-43.
- [2] Kausel E, Roesset J M. Stiffness matrices for layered soils [J]. *Bull Seism Soc Am*, 1981, **71**: 1743-1761.
- [3] Doyle J F. *Wave propagation in structures: spectral analysis using fast discrete Fourier transforms* [M]. New York: Springer, 1997.
- [4] Rizzi S A, Doyle J F. A spectral element approach to wave motion in layered solids [J]. *Vibr Acous*, 1992, **114**: 569-577.
- [5] Wolf J P, Oberhuber P. Free-field response from inclined SV-and P-waves and Rayleigh waves [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1982, **10**: 847-869.
- [6] Wolf J P. *Dynamic soil-structure interaction* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1985.
- [7] Kreyszig E. *Advanced engineering mathematics* [M]. New York: Wiley, 1999.
- [8] Brigham E O. *The fast Fourier transform and its applications* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1988.
- [9] Bland D R. *The theory of linear viscoelasticity* [M]. New York: Pergamon Press, 1960.
- [10] Zener C. *Elasticity and anelasticity of metals* [M]. Chicago: University of Chicago Press, 1948.