

---

# 一维波动问题的谱元解法及其有限元比较

成晟<sup>1</sup>, 周进华<sup>1</sup>, 倪富健<sup>2</sup>

1, 泰州市公路管理处, 泰州, 江苏, 225300. Email: [greatchengsheng@gmail.com](mailto:greatchengsheng@gmail.com)

2, 东南大学交通学院, 南京, 江苏, 210096

**摘要:** 随技术进步, 许多动态加载方法引入到了材料试验中, 但目前还缺少与之对应的准确的力学解释方法。本文根据波动传播方程, 通过傅立叶变换和刚度矩阵叠加, 推导出了一维波动问题的谱元求解方法。该方法可以精确计算材料在荷载作用下的时空响应, 对动态模量试验进行模拟, 从而用于材料模型的推导。通过将谱元法与有限单元法两种计算方法进行比较, 显示谱元法计算速度更快, 精度更高, 更适合求解高频振动问题。谱元法在频域内进行矩阵运算, 能够处理频率相关特性, 因此可用于粘弹型材料的动态分析, 动态模量模拟试验结果显示加载频率对粘弹性材料的位移响应影响很大。

**关键词:** 波动; 谱元法; 有限单元法; 粘弹性

## Spectral Element Solution for 1D Wave Propagation and Its Comparison with Finite Element Method

Cheng Sheng<sup>1</sup>, Zhou Jinhua<sup>1</sup>, Ni Fujian<sup>2</sup>

1, Taizhou highway management department, Taizhou, Jiangsu, 225300.

Email: [greatchengsheng@gmail.com](mailto:greatchengsheng@gmail.com)

2, School of Transportation, Southeast University, Nanjing, Jiangsu, 210096

**Abstract:** With the development of technology more and more dynamic testing methods have been introduced into the laboratory evaluation of material properties. However, there's no corresponding exact mechanical interpretation methods for these tests. In this contribution the spectral element solution for one dimensional wave propagation was derived. It was based on the wave motion equations, fourier transform and assembly procedure for stiffness matrices. The solution can calculate the accurate response of materials under dynamic load, so it can be used for the simulation of dynamic tests and the derivation of material models. By comparing the spectral element method with the finite element method the results show that the spectral element method requires less computing time and has higher accuracy, therefore it is more suitable for the solution of high frequency vibrations. Because of the evaluation of system response in frequency domain, this approach allows for adjustment of frequency dependent properties, such as the viscoelastic material. The numerical implementations show that the loading frequency has a great influence on the displacement response of the viscoelastic material.

**Keywords:** wave propagation; spectral element; finite element; viscoelastic

## 1 引言

随仪器科学的发展, 材料试验中动态加载的使用越来越广泛。动态加载可以模拟冲击或者移动荷载, 以考察结构和材料在运动荷载下的响应, 但目前仍缺少与之相对应的准确的解释方法。传统的静态试验可通过平衡方程求解, 而动态试验必须考虑材料的动态响应, 应通过波动方程求解。

本文分为三部分: 首先介绍谱元法的推导, 包括单元刚度矩阵的推导, 总刚矩阵的组装, 以及不同边界条件的处理; 然后针对一维杆中应力波的传导问题, 分别用谱元法和有限单元法计算, 并进行比较; 最后为粘弹性材料模型在谱元法中的应用和数值实现。

## 2 谱元法

### 单元刚度矩阵

一维线弹性杆中波动传播的 Navier 方程为<sup>[1]</sup>:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

其中:  $c = \sqrt{E/\rho}$ , 为波的传播速度。

方程两边进行傅立叶变换得到:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u} = 0 \quad (2)$$

变量上的“帽子”表示位于频域空间内。该方程的通解为:

$$\hat{u} = A e^{\frac{-i\omega x}{c}} + C e^{\frac{-i\omega(h-x)}{c}} \quad (3)$$

其中  $A$ 、 $C$  为常数, 由边界条件确定;  $h$  为单元厚度。

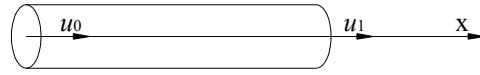


图 1 2 结点杆单元

令  $x=0$  结点处的位移为  $u_1$ ,  $x=h$  结点处位移为  $u_2$ , 如图 1, 代入式(3), 可得到结点位移的矩阵表达为:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{\frac{-i\omega h}{c}} \\ e^{\frac{-i\omega h}{c}} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $\hat{u}_1$ 、 $\hat{u}_2$  为频域空间内的结点位移。

一维弹性空间内的应力与位移关系为:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

令  $x=0$  结点处的应力为  $\hat{\sigma}_1$ ,  $x=h$  结点处应力为  $\hat{\sigma}_2$ , 将式(5)代入式(3), 可得到结点应力的矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-i\omega E}{c} & \frac{i\omega E}{c} e^{\frac{-i\omega h}{c}} \\ \frac{-i\omega E}{c} e^{\frac{-i\omega h}{c}} & \frac{i\omega E}{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} \quad (6)$$

上述推导是在单元坐标内完成的。在单元坐标内应力方向以受拉为正。将式(6)从单元坐标转换到系统坐标后, 矩阵形式成为:

$$\begin{Bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\omega E}{c} & \frac{i\omega E}{c} e^{\frac{-i\omega h}{c}} \\ \frac{-i\omega E}{c} e^{\frac{-i\omega h}{c}} & \frac{i\omega E}{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $\hat{T}_1$ 、 $\hat{T}_2$  为系统在频域空间的结点力。

设式(4)中的矩阵为  $[DS]$ , 式(7)中矩阵为  $[DT]$ , 则结点应力与结点位移的关系可表示为:

$$\{\hat{T}\} = [DT][DS]^{-1}\{\hat{u}\} = [K]\{\hat{u}\} \quad (8)$$

$[K]$  为均质杆的单元刚度矩阵。

## 总刚矩阵

层状体系由材料属性各不相同的多层拼合而成，可通过矩阵叠加的方法求得系统总刚矩阵。

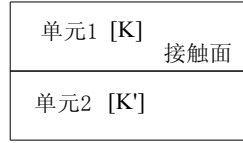


图2 层状体系

假设单元1和单元2的刚度矩阵分别为

$$\begin{Bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ Sym & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \hat{T}'_1 \\ \hat{T}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ Sym & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}'_1 \\ \hat{u}'_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

接触面上有平衡方程：

$$\begin{aligned} K_{21} \cdot \hat{u}_1 + K_{22} \cdot \hat{u}_2 &= \hat{T}_2 \\ K'_{11} \cdot \hat{u}'_1 + K'_{12} \cdot \hat{u}'_2 &= \hat{T}'_1 \end{aligned} \quad (10)$$

两相邻单元接触面上的变形连续条件为

$$\hat{u}_2 = \hat{u}'_1 \quad (11)$$

接触面上若无外力作用，则有力平衡方程

$$\hat{T}_2 + \hat{T}'_1 = 0 \quad (12)$$

将方程(10)、(11)和(12)代入单元刚度矩阵(9)，即得到总刚矩阵的组装方法为

$$\begin{Bmatrix} \hat{T}_1 \\ 0 \\ \hat{T}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ & K_{22} + K'_{11} & K'_{12} \\ SYM & & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}'_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

## 边界条件

设结构刚度矩阵为：

$$\begin{Bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

随边界条件的改变，有不同的求解方法。

(1)一端固结，一端位移控制

令  $\hat{u}_1 = u_0$ ， $\hat{u}_2 = 0$ ，代入式(14)，可求得

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &= K[1,1] \hat{u}_0 \\ \hat{T}_2 &= K[2,1] \hat{u}_0 \end{aligned}$$

(2)一端固结，一端应力控制

令  $\hat{T}_1 = T_0$ ， $\hat{u}_2 = 0$ ，代入式(14)，可求得

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= T_0 / K[1,1] \\ \hat{T}_2 &= K[2,1] \hat{u}_1 \end{aligned}$$

## 算例

用谱元法对材料试验中常见的轴向加载进行模拟计算，圆柱体试件高 15cm，材料模量介于 50~12000MPa 之间，轴向受振幅 0.3MPa 的正弦周期荷载，周期介于 0.03~30s，加载波形及位移响应见图 3、图 4，计算结果见表 1。

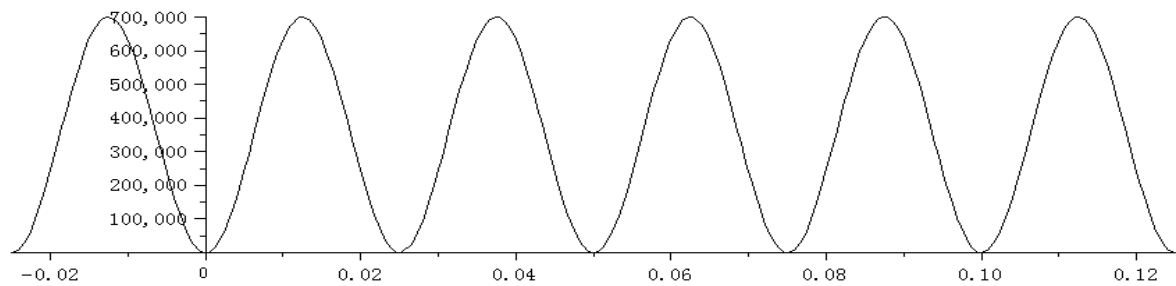


图3 荷载波形(Pa)

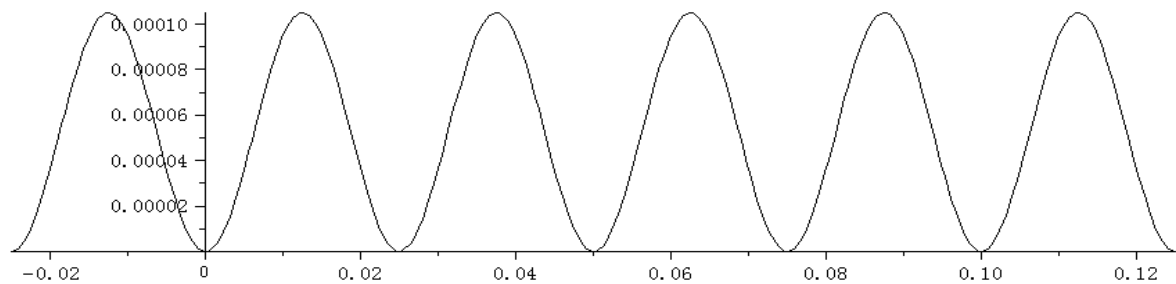


图4 位移响应(m)

表1 位移计算结果( $\mu\text{m}$ )

周期(s)	模量(MPa)					
	50	100	200	1000	4000	12000
0.03	180	90	45	9	2.25	0.75
0.3	180	90	45	9	2.25	0.75
3	180	90	45	9	2.25	0.75
30	180	90	45	9	2.25	0.7

计算结果显示对于试验室内的小尺寸线弹性材料，加载频率对材料位移响应几乎没有影响。

### 3 振动与波动的比较

波动传导问题由于频率很高，很难用传统有限元方法进行分析。这时因为为了得到问题的精确解，有限单元尺寸必须和波长在同一数量级，而高频对应的波长很短，必然导致极大的计算量。然而谱元法原则上的计算消耗和外力频率无关，因此不存在这个问题。本节将这两种计算方法进行了比较。

#### 振动方程

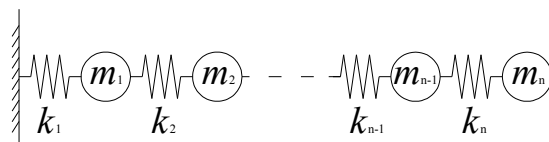


图5 自由振动系统

有限元解波动问题基于对多元振动方程的求解。假设一个一维自由振动系统如图5，其动力方程可写为

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 &= -S_1 + S_2 \\
 m_i \ddot{x}_i &= -S_i + S_{i+1} \\
 &\dots \\
 m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} &= -S_{n-1} + S_n \\
 m_n \ddot{x}_n &= -S_n
 \end{aligned} \tag{15}$$

其中：

$$\begin{aligned}
S_1 &= k_1 x_1 \\
S_i &= k_i (x_i - x_{i-1}) \\
&\dots \\
S_{n-1} &= k_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2}) \\
S_n &= k_n (x_n - x_{n-1})
\end{aligned} \tag{16}$$

式中  $x_i$  为质点位移,  $k_i$  是弹簧刚度,  $S_i$  是作用在单元上的外力。

将式(16)和(15)整理后得到:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + x_1(k_1 + k_2) + x_2(-k_2) &= 0 \\
m_2 \ddot{x}_2 + x_2(k_2 + k_3) + x_1(-k_2) + x_3(-k_3) &= 0 \\
&\dots \\
m_i \ddot{x}_i + x_i(k_i + k_{i+1}) + x_{i-1}(-k_i) + x_{i+1}(-k_{i+1}) &= 0 \\
&\dots \\
m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} + x_{n-1}(k_{n-1} + k_n) + x_{n-2}(-k_{n-1}) + x_n(-k_n) &= 0 \\
m_n \ddot{x}_n + x_n k_n + x_{n-1}(-k_n) &= 0
\end{aligned} \tag{17}$$

对于均质杆, 所有  $m$  和  $k$  都相同, 振动方程可写成矩阵形式(18):

$$m[I]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \tag{18}$$

其中:  $[I]$  为单元矩阵,

$$[K] = k \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ -1 & 2 & 1 & \\ & & \dots & \\ & & -1 & 2 & 1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{\ddot{x}\} = \{\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n\}^T, \quad \{x\} = \{x_1, \dots, x_n\}^T$$

## 计算方法

系统一端受外力作用, 如图 6, 外力函数为  $P_0 \sin \omega t$ , 振动方程可写为:

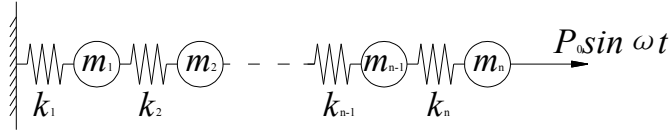


图 6 受迫振动系统

$$m[I]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \sin \omega t \{P\} \tag{19}$$

其中:  $\{P\} = \{0, \dots, 0, P_0\}^T$

为求解该线性方程组, 假设  $x_i = A_i \sin \omega t$ , 则  $\ddot{x}_i = -\omega^2 A_i \sin \omega t$ , 代入式(19), 得到:

$$(-m\omega^2[I] + [K])\{A\} = \{P\} \tag{20}$$

即:

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & k & & \\ -k & 2k - m\omega^2 & k & \\ & & \dots & \\ & & -k & 2k - m\omega^2 & k \\ & & & -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P_0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

解此线性方程组, 求得振幅向量  $\{A\}$ , 即可得到系统的位移响应。

## 结果比较

材料弹性模量介于 20~2000MPa, 高度  $H=5\text{m}$ , 密度  $\rho=1500\text{kg/m}^3$ 。加载时一端固定, 一端作用连续正弦荷载, 荷载振幅 0.35MPa, 周期分别为 0.025、0.25 和 25s, 振动单元个数分别为 3、30、300 和 600 个。

对每个振动单元，设单元个数为  $ncast$ ，则  $m=\rho \times H / ncast$ ， $k=E \times ncast / H$ 。  
振动和波动的计算结果见表 2。

表 2 振动与波动计算结果

材料模量 (MPa)	振动解(振幅: m)					波动解(振幅: m)		
	荷载周期(s)		0.025	0.25	25	0.025	0.25	25
2000	单元数	3	0.00246	0.00088	0.00088	0.00153	0.00088	0.00088
		30	0.00159	0.00088	0.00088			
		300	0.00154	0.00088	0.00088			
		600	0.00154	0.00088	0.00088			
200	单元数	3	0.00301	0.00933	0.00875	0.00079	0.00911	0.00875
		30	0.00081	0.00913	0.00875			
		300	0.00079	0.00911	0.00875			
		600	0.00079	0.00911	0.00875			
20	单元数	3	-0.00242	0.24650	0.08751	0.07099	0.15349	0.08750
		30	-0.06185	0.15905	0.08751			
		300	0.08508	0.15402	0.08750			
		600	0.07728	0.15377	0.08750			

由表 2 可见，只有在准静态情况下( $T=25s$ )，振动解才不受单元个数(网格密度)约束，计算结果始终与波动解相同；动态加载时，单元个数越多，其解越接近于波动解，且当材料弹性模量减小时，为得到精确解所需要的单元个数也会随之增加。

实际振动体系非常复杂，很难都求得解析解。若采用数值解，必然误差更大，需要的单元数更多。因此相比有限单元法，谱元法的计算速度更快，精度更高。

## 4 粘弹性材料

### 线粘弹性材料参数

对于线粘弹性材料，应力-应变关系可以表示为时间的线性微分方程，其导数形式为<sup>[2]</sup>

$$\bar{P} \sigma = \bar{Q} \epsilon \quad (22)$$

其中  $\bar{P}$  和  $\bar{Q}$  是线性微分算子：

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \sum_0^p p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \\ \bar{Q} &= \sum_0^q q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \end{aligned} \quad (23)$$

$p_r$  和  $q_r$  为材料常数，只和弹簧劲度系数  $E$  及黏壶常数  $\eta$  有关。

当对粘弹性材料施加周期荷载时，其应变波动通常和应力同频率而异相位，假设应力应变分别为

$$\sigma = \sigma_0 \exp(i \omega t) \quad (24)$$

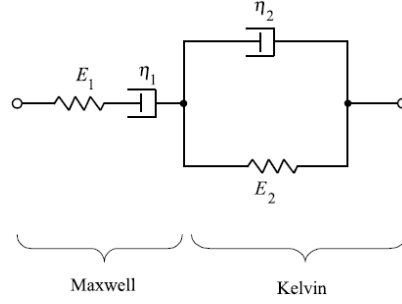
$$\epsilon = \epsilon_0 \exp[i(\omega t - \delta)] \quad (25)$$

则材料复数模量可以写作

$$E_c(\omega) = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \exp(i \delta) = M_1(\omega) + i M_2(\omega) \quad (26)$$

其中  $M_1$  和  $M_2$  分别为复数模量的实部和虚部，它们和荷载频率有关。

研究者们曾试图寻找一种合适的流变模型，以表达土工材料的粘弹特性<sup>[3][4]</sup>。一般而言，粘弹性材料的流变模型可以通过一系列的弹簧和黏壶以串联或者并联的形式组合而成，其中一种最常用的模型为 Burger's 模型，它被用来对沥青材料进行描述。Burger's 模型由一个 Maxwell 模型和一个 Kelvin 模型串联而成，如图 7 所示。



**图 7 Burger's 模型**

在单轴拉/压应力作用下，Burger's 模型的应力-应变关系为

$$\sigma + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\epsilon} \quad (27)$$

通过傅立叶变换式(27)可转换为

$$(1 + p_1 i \omega - p_2 \omega^2) \hat{\sigma} = (q_1 i \omega - q_2 \omega^2) \hat{\epsilon} \quad (28)$$

变量上方的“帽子”表示位于频域空间内， $p_r$  和  $q_r$  对应于式(23)中的材料常数，再利用傅立叶逆变换可得到

$$E_c(\omega) = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\omega^2 [p_1 q_1 - q_2 (1 - p_2 \omega^2)] + i \omega [p_1 q_2 \omega^2 - q_1 (1 - p_2 \omega^2)]}{p_1 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2} \quad (29)$$

求出的  $E_c(\omega)$  为频率的函数。由于谱元法的主要计算步骤是在频域内实现的，因此只需直接将  $E_c(\omega)$  代入谱元公式，便可对粘弹性材料的动态力学响应进行计算。

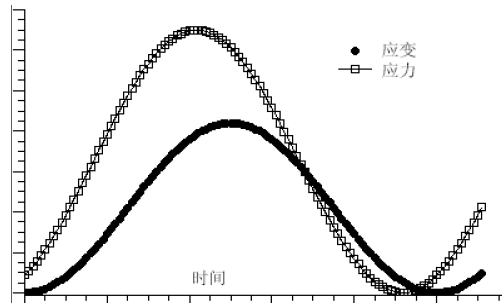
### 动态模量试验模拟

线粘弹性材料，如热拌沥青混合料，在连续正弦荷载下其应力-应变关系可通过复数动态模量( $E^*$ )来描述

$$E^* = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma_0 \exp(i\omega t)}{\epsilon_0 \exp[i(\omega t - \phi)]} = \frac{\sigma_0 \sin(\omega t)}{\epsilon_0 \sin(\omega t - \phi)} \quad (30)$$

其中： $\sigma_0$  — 应力峰值， $\epsilon_0$  — 应变峰值， $\phi$  — 相位角( $^\circ$ )， $\omega$  — 角速度， $t$  — 时间(s)。

如果是纯线弹性材料，则  $\phi = 0$ ，复数模量值就等于它的模；如果是纯粘性材料，则  $\phi = 90^\circ$ 。在动态模量试验中，一般沥青材料的应力-应变加载曲线如图 8 所示。



**图 8 动态模量试验**

热拌沥青混合料试件高度 15cm，材料参数见表 3，对试件施加连续正弦荷载，应力峰值为 0.7MPa，荷载周期介于 25ms~25s，通过谱元法计算，求得各加载周期对应的应变峰值和相位角，列于表 4。

**表 3 材料粘弹性参数**

材料参数	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$\eta_1$ (MPa s)	$\eta_2$ (MPa s)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
------	-------------	-------------	------------------	------------------	-----------------------------

沥青混合料	8100	4050	200	150	2300
-------	------	------	-----	-----	------

**表4 动态响应计算结果**

周期 s)	应变峰值( $\mu m$ )	$\phi$ (°)
0.025	33	29.7
0.25	454	42.2
2.5	358	280.9
25	2104	271.0

从上表可看出，加载周期对粘弹性材料的动态响应有很大的影响。

## 5 结论

本文介绍了谱元法在一维波动问题中的应用，主要有以下结论：

- (1) 推导出频域内的谱元刚度矩阵后，问题的求解就只剩下了一些矩阵运算。谱元法将波动方程的精确解和有限单元刚度叠加结合在一起，在一个单元内就能对所有的波动传导、反射和折射进行描述，鲁棒性很好。
- (2) 谱元法的优势主要体现在计算的精确性和高效性，不管荷载频率如何变化，精确分析所需要的计算量都是相同的，而在传统有限元方法中，网格密度必须随频率增大而加密。
- (3) 由于在频域内进行求解，因此谱元法可以处理所有和频率相关的问题，比如粘弹性材料的求解。将粘弹性材料模型代入谱元刚度矩阵，便可计算其动态响应。动态模量的模拟试验显示，材料变形和加载频率关系很大。

## 参考文献

- [1] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, 1970, Theory of Elasticity, Mc Graw-Hill Companies, Inc..
- [2] Bland, D. R., 1960, The Theory of Linear Viscoelasticity, Pergamon Press, New York.
- [3] Zener, C., 1948, Elasticity and Anelasticity of Metals, University of Chicago Press, Chicago, Illinois.
- [4] Leaderman, H., and Marvin, R. S., 1953, "Dynamic Compliance, Dynamic Modulus, and Equivalent Voigt and Maxwell Models for Polyisobutylene", J. R. Astr. Soc., 47, pp. 41-58.