# 线性代数与几何

刘吉佑 莫骄 编

北京邮电大学出版社

张鹏

北京邮电大学理学院

zhangpeng@bupt.edu.cn

# 课程概述

- 学习周数　　16周
- 计划学时　　48学时

课程任务紧，需全力以赴。

# 内容提要

# 课程要求

- 成绩：30%平时成绩+70%期末卷面成绩

  20%平时作业成绩+10%课堂知识拓展报告

- 作业要求：

  公众号：教学云平台（拍照上传）

  作业纸、姓名、班级学号、日期（周）、大小题号、按时、按量、工整。

# 学习方法

自主学习：预习-听课-复习-习题

课堂教学：课下自学时间　1:3

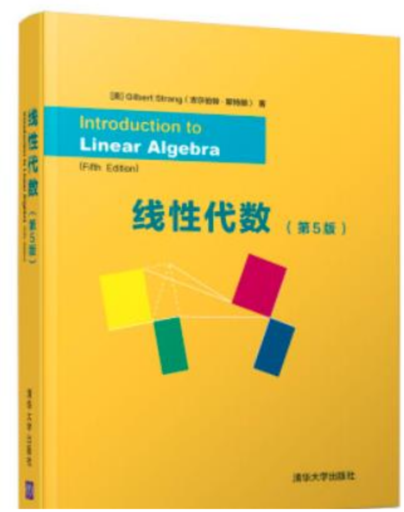
课程特点：高度抽象、应用极广

用心揣摩、以求自悟

删繁就简、以简驭繁

# 参考书目

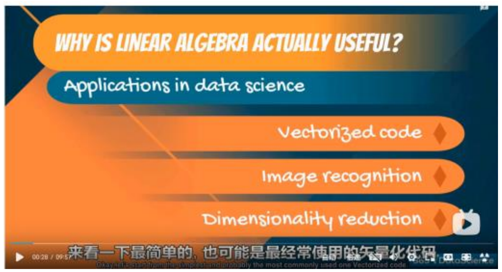

- 《线性代数》，陈建龙等，科学出版社
- 《马同学图解线性代数》，马同学，电子工业出版社
- Introduction to Linear Algebra (Fifth Edition)，Gilbert Strang，清华大学出版社

# 网络资源-系列视频

- B站：3Blue1Brown——线性代数的本质
- B站：MIT麻省理工线性代数，Gilbert Strange

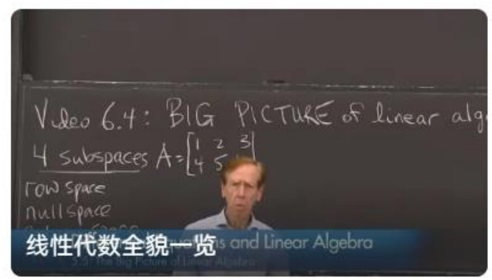
# 网络资源-短视频




手机扫码观看/分享

1

2





3

# 第一章 N 阶行列式

# 内容提要

- 行列式是线性代数的重要内容之一，起源于对线性方程组的求解。
- 通过二、三阶行列式给出n阶行列式的定义。
- 掌握行列式的性质和计算方法。
- 会用克拉默法则求解n元线性方程组。

# 第一节 二、三阶行列式

## 一、二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法求解该线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

$(1)\times a_{22}$ - $(2)\times a_{12}$（消去）$x_2$， 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$(2)\times a_{11}$ - $(1)\times a_{21}$（消去）$x_1$， 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

(上式可作为求解公式)

为了便于记忆上面的求解公式，下面引进二阶行列式的概念

将方程组的未知数的系数 $a_{11}$ ，$a_{12}$ ，$a_{21}$，$a_{22}$ 排成一个方阵

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

并定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式

由于

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

因此方程组的解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \qquad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

可表示为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D}\quad, \quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

# 例题

例 1. 计 算 行 列 式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ （2）$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

解：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\times(-2)-3\times 5=-17$

（2）$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = (-3)\times 7-4\times 0=-21$

例 2. 解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

解：由于

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-2) \times 3 = 7 \neq 0$$

所以方程组有唯一解。

方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\times 1 - (-2)\times 5 = 7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - (-3)\times 3 = 14$$

方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2$$

例3. 解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 10y = 0 \end{cases}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = 2 \times (-10) - 3 \times (-5) = -5 \neq 0$$

所以方程组有唯一解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

# 二、三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

若定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

用三阶行列式可以求解三元线性方程组

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

例4. 解 线 性 方 程 组

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot 4\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot(-2)\cdot(-3)$$

$$- 0\cdot 2\cdot 4 - (-2)\cdot(-1)\cdot 2 - (-3)\cdot 1\cdot(-3)$$

$$= -24 + 12 - 4 - 9 = -25 \neq 0$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16-6+6}{-25} = -\frac{16}{25}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-12+4+9}{-25} = -\frac{1}{25}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12-2-16+2}{-25} = \frac{4}{25}$$

例5. 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解：　因为

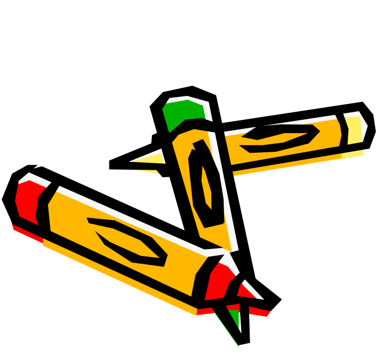
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

由　$x^2 - 5x + 6 = 0$　解得

$x = 2$ 或 $x = 3$ .



# 第二节 全排列及其逆序数

## 一、 逆序数的定义：

自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 按一定次序排成一排，称为一个$n$元排列，记 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 。

$n$ 个自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 共有

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

个排列。

排列 $1\,2\,3\cdots n$ 称为自然排列。我们将自然排列规定为标准次序。

例如 自然数 $1, 2, 3$ 共有 $3! = 6$个排列，它们是

123，231，312，132，213，321

其中123为标准次序。

$n$

**定义1.** 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是由 $n$个自然数1，2，3,$\cdots$, $n$ 组成的一个 $n$ 元排列，如果在此排列中有一个大数排在一个小数前面，就称为出现了一个**逆序**，排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中逆 序的总个数称为此排列的**逆序数**，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 。

逆序数的计算方法：

在计算一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数时，可以令 $t_i$ 表示数 $p_i$ 前面 $i-1$ 个数中比 $p_i$ 大的数的个数，称 $t_i$ 为 $p_i$ 元素的逆序数，这样排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

例1 计算逆序数

(1) $\tau(542163)$

(2) $\tau(n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1)$

解：

(1)

$$\tau(542163)$$
$$=0+1+2+3+0+3$$
$$=9$$

(2)

$$\tau(n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1)$$

$$=0+1+2+\cdots(n-1)$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

# 二、逆序数的性质

定义2. 逆序数为奇数的排列称为奇排 列；逆序数为偶数的排列称为偶排列。

例如：排列 $\tau(53421)=9$ ，此排列为奇排列；

排列 $\tau(43521)=8$ ，此排列为偶排列；

定义3. 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的位置不变，得到一个新排列，则称这样的变换为对换，将相邻两个数对换称为相邻对换。

例如：将12345中2，4位置对换得14325。

将12345中2，3作对换（相邻对换）得13245。

定理1. 对排列进行一次对换则改变其奇偶性。即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

## 证明 (1). 相邻对换情形

设有两个排列

$$T_1 \quad a_1\ a_2\ \cdots a_{i-1}aba_{i+2}\cdots a_n$$

$$T_2 \quad a_1\ a_2\ \cdots a_{i-1}baa_{i+2}\cdots a_n$$

$T_2$是由经过相邻两个数 $a$, $b$ 的对换而得到的 。

显然元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+2}, \cdots, a_n$的逆序数没有改变。只有元素 $a, b$ 的逆序数改变了

$$T_1 \quad a_1\ a_2\ \cdots a_{i-1}aba_{i+2}\cdots a_n$$

$$T_2 \quad a_1\ a_2\ \cdots a_{i-1}baa_{i+2}\cdots a_n$$

当 $a<b$ 时，对换后的 $a$ 逆序数增加1，而 $b$ 的逆序数不变。

当 $a>b$ 时，对换后的 $a$ 逆序数不变，而 $b$ 的逆序数减少1。

所以，排列 $T_2$ 和 $T_1$ 的奇偶性不同。

## (2). 一般情形

设有两个排列

$$T_1: a_1 a_2 \cdots a_i a c_1 \cdots c_m b a_{i+m+3} \cdots a_n$$

$$T_2: a_1 a_2 \cdots a_i b c_1 \cdots c_m a a_{i+m+3} \cdots a_n$$

在排列 $T_1$ 中将 $b$ 与 $c_m, \cdots, c_1$ 经过 $m$ 次相邻对换，$T_1$ 变成:

$$T_3: a_1 a_2 \cdots a_i a b c_1 \cdots c_m a_{i+m+3} \cdots a_n$$

$$T_3: a_1 a_2 \cdots a_i a b c_1 \cdots c_m a_{i+m+3} \cdots a_n$$

在排列$T_3$中将$a$与$b, c_1, \cdots, c_m$经过$m+1$次相邻对换，$T_1$变成:

$$T_2: a_1 a_2 \cdots a_i b c_1 \cdots c_m a a_{i+m+3} \cdots a_n$$

这样对换$a$与$b$，可看作经$2m+1$次相邻对换而得到，奇偶性共改变了$2m+1$次，也就 证明了$T_1$与$T_2$的奇偶性相反。

推论1：奇排列调成自然排列的对换次数为奇数，偶排列调成自然排列的对换次数为偶数。

证明：因为自然排列123...n偶排列（逆序数为0），由定理1知，每次对换都改变对换的奇偶性。因而

当排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时，必须经过奇次对换才能变成自然排列123...n；

当排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时，必须经过偶次对换才能变成自然排列123...n。

例 2. 设排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为 $k$ ，试证可经过 $k$ 次对换，把 $p_1p_2\cdots p_n$ 变成标准 排列123…n 。

证：设在 $p_1p_2\cdots p_n$ 中数1前面有 $k_1$ 个数比1大，数2前面有 $k_2$ 个数比 2 大，……，数n-1前面有 $k_{n-1}$ 个数比n-1大，则

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$$

在 $p_1p_2\cdots p_n$ 中将1与前面 $k_1$ 个数依次自 右向左对换(共对换 $k_1$ 次)。便把1排在首 位，类似对换 $k_2$ 次把2排在第2 位，……，如此下去，经过

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=k$$

次对换，把 $p_1p_2\cdots p_n$ 变成 123 …n 。

推论2：所有n!( n>1)个n阶排列中奇 排列与偶排列的个数相同。

证明：因为所有的n元排列都可以从标 准排列123...n开始依次通过对换得到。每次对换都改变对换的奇偶性，这样就交替产生了奇排列和偶排列。

# 第三节 n 阶行列式的定义

三阶行列式的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

1. 每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积；
2. 行标为自然排列，列标为1,2,3的某一排列；
3. 带正号的列标排列123，231，312 为偶排列，
   带负号的列标排列132，213，321为奇排列。

因而，三阶行列式可写作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

推广到n阶行列式

定义4. 将 $n^2$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 $n$ 行 $n$ 列的正方形，再在其左、右两侧加两条竖线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的值等于 $n!$ 个乘积项的 代数和，每一项都是不同行不同列的 $n$ 个数的乘积：$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$, 另外，若 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列，求和时取 “+”; 若 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排 列，求和时取 “—” 号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

这里$\sum$表示对1，2，...，n这n个数 的所有n元排列求和。$a_{ij}$表示行列式中第 $i$ 行 第 $j$ 列的数。此行列式可记作$\det(a_{ij})$或$\Delta(a_{ij})$。

例1. 下列各乘积是否是四阶行列式中 的一项？若是，则应取什么符号？

(1) $a_{12}a_{23}a_{14}a_{42}$　　(2) $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$

解：

（1）$a_{11}$与 $a_{14}$都是四阶行列式中第一行的元素，所以 $a_{12}a_{23}a_{14}a_{42}$ 不是四阶行列 式中的项。

（2）因乘积 $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 中每个元素的行标互不相同，列标也互不相同，所以 $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 是四阶行列式中的项。

由于

$$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}=a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$

$$\tau(2143)=2$$

所以 $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 前面应该取“＋”号。

下面讨论行列式的另一种定义，对于n阶行列式中的任一项.

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

由于

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{2p_2} a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$$

因而,可通过乘法交换律,把列标调成标准次序.

当把列标的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经N 次对换变成自然排列12…n的同时，相应的行标排列12…n也经 N 次对换变成了某一排列，记为 $q_1q_2\cdots q_n$ ,由于

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

根据定理1的推论1，对换次数N与 $p_1p_2\cdots p_n$ 有相同的奇偶性，而排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也与 N有相同的奇偶性，从而

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)}$$

因而有

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

由上面的讨论知道，行列式也可看作将列标排成标准次序,对所有的行标排列求和,每一项的符号由行标排列的逆序数决定.

定理2.　　n阶行列式也可以定义为:

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

例2. 选择 $k$ 与 $l$ ，使

(1) $a_{62}a_{k5}a_{33}a_{l4}a_{46}a_{21}$在6阶行列式中 取负号；

(2) $a_{47}a_{53}a_{1k}a_{65}a_{7l}a_{24}a_{31}$ 在7阶行列 式中取负号。

解: (1) $k=5$ ， $l=1$ 或 $k=1$ ，$l=5$

若要 $a_{62}a_{k5}a_{33}a_{l4}a_{46}a_{21}$ 在 6 阶行列式中取负号， 由于

$$a_{62}a_{k5}a_{33}a_{l4}a_{46}a_{21}=a_{21}a_{62}a_{33}a_{l4}a_{k5}a_{46}$$

（将列标排成自然排列）则排列为奇排列。

当 $k=5$ ，$l=1$ 时，

$$\tau(263154)=1+3+1+2=7$$

因此，应取 $k=5$ ，$l=1$ 。

(2)类似上面的讨论得 $k=6, l=2$ 。

例3. 计算n阶行列式(对角行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：由于 $i \neq j$ 时，$a_{ij}=0$ 。因此行列式 $D$ 中可能不为零的项只能是 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ，所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例4. 求上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：由于 $j < i$ 时，$a_{ij} = 0$。因此 $D$ 中可能不为零的元素 $a_{ip_i}$，其下标应满足 $p_i \geq i$，即

$$p_1 \geq 1, \quad p_2 \geq 2, \quad \cdots, \quad p_n \geq n.$$

从而有 $p_n = n, \quad p_{n-1} = n-1, \quad \cdots, \quad p_1 = 1.$

即排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 只能是自然排列 12…n, 所以行列式 $D$ 中可能不为零的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$，所以

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

类似有下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

# 第四节　行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把行与列互换，得到新的行列式，称为原行列式的转置行列式。记 为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1. 行列式与它的转置行列式相等。即

$$D = D^{\mathrm{T}}$$

证明：设 $D = \det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$，根据行列式的定义

因为 $D^{\mathrm{T}}$ 中的每一项可写为

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

由行列式的另一种定义，的

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

从而有

$$D = D^{\mathrm{T}}$$

性质1表明行与列有同等的地位，对行成立的性质，对列也成立，反之亦然。

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

性质 2. 交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号。

证明：设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换 $i, j$ 两行，得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$D$ 中的每一项均可写成:

$$(-1)^{\tau(p_1 \cdots k \cdots l \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ik} \cdots a_{jl} \cdots a_{np_n}$$

在 $D_1$ 中相应的有一项为

$$(-1)^{\tau(p_1 \cdots l \cdots k \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jl} \cdots a_{ik} \cdots a_{np_n}$$

由于

$$a_{1p_1}\cdots a_{ik}\cdots a_{jl}\cdots a_{np_n} = a_{1p_1}\cdots a_{jl}\cdots a_{ik}\cdots a_{np_n}$$

由定理1，得

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots k\cdots l\cdots p_n)} = (-1)(-1)^{\tau(p_1\cdots l\cdots k\cdots p_n)}$$

即 $D$ 与 $D_1$ 中对应项的符号都相反，

因此

$$D = -D_1$$

**推论** 如果行列式有两行完全一样，则行列式为零。

**证明**：设行列式$D$中第$s$行与第$t$行完全一样，把行列式$D$中第$s$行与第$t$行对调，由性质2，有

$$D = -D$$

即

$$D = 0$$

性质3. 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数 等于用该数 乘以此行列式。

证明：把行列式 $D=\det(a_{ij})$的第 $i$ 行乘以同一个数 $k$ ，得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式的定义

$$D_1 = \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (k a_{i p_i}) \cdots a_{n p_n}$$

$$= k \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{n p_n}$$

$$= kD$$

**推论1** 行列式中某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

**推论2** 如果行列式中某一行（列）的元素全为零，则此行列式等于零。

性质 4 行列式中如果有两行（列）元素成比例, 则此行列式为零。

证 如果行列式中有两行成比例，那么提出比例系数后则有两行完全相同，故行列式为零。

例 1.

$$D=\begin{vmatrix}10 & 8 & 2\\ 15 & 12 & 3\\ 24 & 32 & 12\end{vmatrix}=2\times3\times4\times\begin{vmatrix}5 & 4 & 1\\ 5 & 4 & 1\\ 6 & 8 & 3\end{vmatrix}=0$$

- 性 质5 如 果 行 列 式 的 某 一 行（列）的 元 素都 是 两 数 之 和，则 该 行 列 式 可 表 示 为 两 行列 式 之 和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 明:

$$\text{左 边}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(a_{ip_i}+a_{ip_i}')\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$+\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}'\cdots a_{np_n}$$

=右 边。

注:

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 3+4 \\ 5+6 & 7+8 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$-32 \neq -8+(-8)$$

性质6 把行列式的某一行（列）的各元素都乘以同一数后加到另一行（列）对应的元素上，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{jn} + ka_{i1} & a_{jn} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{jn} & a_{jn} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 明：

左 边 ＝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{jn} & a_{jn} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ (性 质 5）

=右 边 (性 质 4）　。

注：为书写方便，记

$r_i \leftrightarrow r_j$ (互换第 $i$，$j$ 行)

$c_i \leftrightarrow c_j$ (互换第 $i$，$j$ 列)

$r_i \div k$ (第 $i$ 行提出公因子 $k$)

$c_i \div k$ (第 $i$ 列提出公因子 $k$)

$r_i + kr_j$ (第 $j$ 行的 $k$ 倍加到第 $i$ 行上)

$c_i + kc_j$ (第 $j$ 列的 $k$ 倍加到第 $i$ 列上)

例 2. 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解　利用行列式的性质，将行列式化为上三角（或下三角），再计算。化为上三角行列式

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$=1\times 2\times 8\times \frac{5}{2}=40$$

例3　计算

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

解　化为上三角行列式

$$D\overset{r_1+r_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-4r_1\\ r_4-2r_1}]{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & -3\\ 0 & -8 & 1 & 6\\ 0 & -13 & 7 & 17\\ 0 & -6 & 7 & 7\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_4]{r_2-r_4}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & -3\\ 0 & -2 & -6 & -1\\ 0 & -1 & -7 & 3\\ 0 & -6 & 7 & 7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -7 & 3\\ 0 & -2 & -6 & -1\\ 0 & -6 & 7 & 7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-6r_2]{r_3-2r_2}-\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -7 & 3\\ 0 & 0 & 8 & -7\\ 0 & 0 & 49 & -11\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-6r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-8r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & -255 \end{vmatrix} = 255$$

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

解　各列（行）的4个数之和都是 $a+3$ ，把第2列，第3列，第4列都加到第1列，可提出公因子 $a+3$

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 \div (a+3)} (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)(a-1)^3$$

例 5　计算

$$D=\begin{vmatrix} (a+4)^2 & (a+3)^2 & (a+2)^2 & (a+1)^2 \\ (b+4)^2 & (b+3)^2 & (b+2)^2 & (b+1)^2 \\ (c+4)^2 & (c+3)^2 & (c+2)^2 & (c+1)^2 \\ (d+4)^2 & (d+3)^2 & (d+2)^2 & (d+1)^2 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[c_3-c_4]{\substack{c_1-c_2\\ c_2-c_3}} \begin{vmatrix} 2a+7 & 2a+5 & 2a+3 & (a+1)^2 \\ 2b+7 & 2b+5 & 2b+3 & (b+1)^2 \\ 2c+7 & 2c+5 & 2c+3 & (c+1)^2 \\ 2d+7 & 2d+5 & 2d+3 & (d+1)^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2a+3 & (a+1)^2 \\ 2 & 2 & 2b+3 & (b+1)^2 \\ 2 & 2 & 2c+3 & (c+1)^2 \\ 2 & 2 & 2d+3 & (d+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

例 6 求 证：

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

证 明:

$$左边 = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{Backer: } C_2 - C_1]{\text{Former: } C_3 - C_1} \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Former: } C_2 - C_3}{\underset{\text{Backer: } C_3 - C_2}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Former:} C_2 \leftrightarrow C_3, C_1 \leftrightarrow C_2}{\underset{\text{Backer:} C_1 \leftrightarrow C_2, C_2 \leftrightarrow C_3}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

=右 边。

例 7. 求

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}=0$$

的根。

解：将第1行乘以-1分别加到第2，3，...,n+1行，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)=0$$

所以 $x=a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n$

例8 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

解：从第 n 行开始依次从下面一行减去上面一行，则

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & x_2 - a_{12} & a_{23} - a_{13} & \cdots & a_{2,n-1} - a_{1,n-1} & a_{2n} - a_{1n} \\ 0 & 0 & x_3 - a_{23} & \cdots & a_{3,n-1} - a_{2,n-1} & a_{3n} - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n - a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23})\cdots(x_n - a_{n-1,n})$$

$$= x_1 \prod_{i=2}^{n} (x_i - a_{i-1,i})$$

# 第五节 行列式按行(列)展开

低阶行列式容易计算，因此，下面我们考虑将高阶行列式展开成低阶行列式，然后再计算行列式。

定义5. 在 $n$ 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中将元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列去掉后，余下的元素按原来次序排列成的 $n-1$阶行列式叫做元素$a_{ij}$的余子式，记作 $M_{ij}$ 。第 $i$ 行第 $j$ 列元素的余子式 $M_{ij}$乘以 $(-1)^{i+j}$ 称为 $a_{ij}$ 的代数余子式并记作 $A_{ij}$。即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例 如：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

则元素 $a_{23}$ 的余子式为元素 $a_{23}$ 所在的第 2 行和第 3 列去掉后，余下的元素按原来次序排列成的 3 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$a_{23}$ 的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

又如$a_{21}$的余子式为

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$a_{21}$ 的代数余子式为

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$$

引理　一个 $n$ 阶行列式，如果其中第 $i$ 行的元素除 $a_{ij}$ 外全为零，那么这个行列式等于 $a_{ij}$ 乘以它的代数余子式，即 $D = a_{ij}A_{ij}$

证明　（1）先证 $a_{ij}$ 位于第1行第1列的情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1=1}(-1)^{\tau(1 p_2 \cdots p_n)} a_{11} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$+\sum_{p_1\neq 1}(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (a_{1p_1}=0,\ p_1\neq 1)$$

$$= \sum_{p_1=1} (-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)} a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= a_{11}\sum_{p_1=1} (-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)} a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

由于$\tau(1p_2\cdots p_n) = \tau(p_2\cdots p_n)$，由行列式的定义

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11}$$

又由于

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$$

所以

$$D=a_{11}A_{11}$$

（2）一般情形，$a_{ij}$ 位于第 $i$ 行第 $j$ 列。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 $D$ 的第 $i$ 行依次与第 $i-1$ 行，$i-2$ 行，……，第 1 行对调（每次对调都改变符号），则

$$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再将 $D$ 的第 $j$ 列依次与第 $j-1$ 列，$j-2$ 列，……，第 1 列对调（每次对调都改变符号），则

$$D=(-1)^{i-1+j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由情形（1）的证明知

$$D=(-1)^{i-1+j-1}a_{ij}M_{ij}$$

$$=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$=a_{ij}A_{ij}$$

定理 3. 行列式 $D=\det(a_{ij})$ 等于它的任意一行(列)所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和。即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0 & 0+a_{i2} & 0+a_{i3} & \cdots & 0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= a_{i1}A_{i1} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+0 & a_{i2}+0 & 0+a_{i3} & \cdots & 0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{i1}A_{i1} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3}+0 & \cdots & 0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

**推论：** 行列式$D=\det(a_{ij})$任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于0，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

证 作行列式

$$
D_1 = \begin{array}{c}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow r_i \\ \\ \leftarrow r_j \\ \\ \\
\end{array}
$$

将 $D_1$ 按第 $j$ 行展开

$$D_1 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

又由于 $D_1$ 中第 $i$ 行与第 $j$ 行对应元素相等。所以

$$D_1 = 0$$

即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

类 似 地 可 以 证 明 另 一 式 。

与 定 理 3 联 系 起 来 ， 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

及

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

其 中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

例 1. 计 算 下 列 行 列 式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解　因第2列(或第3行)已有一个零元素,按此展开可少计算一个3阶行列式,可利用性质6再增加0的个数，保留 $a_{12}$

$$D \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(1,2)} 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-8r_2]{r_1+4r_2} -\begin{vmatrix} 0 & 8 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(2,1)} -2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 8 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times[8\times 15-(-10)\times(-10)] = 40$$

例 2. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

解：原式

$$\xlongequal[C_3-2C_4]{\substack{C_1-5C_4\\ C_2-4C_4}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 11 & 5 & -2 \\ -50 & -43 & -21 & 9 \\ -19 & -18 & -9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(1,4)}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -50 & -43 & -21 \\ -19 & -18 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[C_2-2C_3]{C_1-2C_3} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -8 & -1 & -21 \\ -1 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -6 & 0 & -16 \\ -1 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(1,2)} -(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -6 & -16 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = 54-16 = 38$$

例 3. 计算下列 2n 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$$

解 按 第 1 行 展 开

$$D_{2n} = a \cdot \begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & 0 \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c & & & & & d \\ c & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

都 按 最 后 一 行 展 开，有

$$D_{2n} = adD_{2n-2} - bcD_{2n-2}$$
$$= (ad - bc)D_{2(n-1)}$$

以 此 作 为 递 推 公 式，可 得

$$D_{2n} = (ad - bc)D_{2(n-1)} = (ad - bc)^2 D_{2(n-2)}$$
$$= \cdots = (ad - bc)^{n-1} D_2$$
$$= (ad - bc)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
$$= (ad - bc)^n$$

例 4. 计 算 下 列 阶 行 列 式

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

解：(法一) 按最后一行展开

原式

$$=a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots\cdots+$$

$$+a_2(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+a_1(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_2 x^{n-2} + a_1 x^{n-1}$$

(法 二) 按 第 一 列 展 开， 可 得 递 推 公 式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + a_n = x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n$$

$$= x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$$

$$= \cdots\cdots\cdots$$

$$= a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

下面介绍另一类重要的行列式。

例 4. 证 明 范 德 蒙 行 列 (Vandermonde)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\,2} & x_2^{\,2} & \cdots & x_n^{\,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\,n-1} & x_2^{\,n-1} & \cdots & x_n^{\,n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$$

$\Pi$ 是 连 乘 符 号 。

证 用数学归纳法

当 $n=2$ 时

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\ge i>j\ge 1}(x_2-x_1)$$

假设对$n-1$ 阶范德蒙行列式有此结论。

现证 $n$ 阶范德蒙行列式。

将 $D_n$ 设法降阶：从第 $n$ 行开始，后行减去前行的 $x_1$ 倍，则有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^{\ 2} - x_2 x_1 & \cdots & x_n^{\ 2} - x_n x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{\ n-1} - x_2^{\ n-2} x_1 & \cdots & x_n^{\ n-1} - x_n^{\ n-2} x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{\ n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{\ n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，并提出每一列的公因子$(x_i - x_1)$，可得

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^{\ 2} & x_3^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{\ n-2} & x_3^{\ n-2} & \cdots & x_n^{\ n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)D_{n-1}$$

由归纳假设，有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n\ge i>j\ge 2}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i - x_j)$$

例 **4.** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & 9 \\ 1 & 8 & 64 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 4^2 & 3^2 \\ 1^3 & 2^3 & 4^3 & 3^3 \end{vmatrix}$$

$$= (2-1)(4-1)(3-1)(4-2)(3-2)(3-4)$$

$$= -12$$

$n$

# 第六节 克拉默(Cramer)法则

$n$ 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 $n$ 个线性方程的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

它的解可以用行列式表示。

$n$

**定理 5**　克拉默法则 ( Cramer )：

设 $n$ 元线性方程组 (1) 的系数行列式不等于 0， 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组 (1) 有唯一的一组解。

$$x_i=\frac{D_i}{D} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

其 中 $D_i$ 是 用 常 数 项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$代 替 $D$ 中第 $\boldsymbol{i}$ 列 元 素 所 得 到 的 行 列 式， 即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i-1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i-1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

证明略（第二章讲）

推论：齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

当它的系数行列式 $D \neq 0$ 时，它仅有零解。

证明： 因为 $D_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 第 $i$ 列元素全部为0，所以 $D_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$，从而由Cramer法则

$$x_i=\frac{D_i}{D}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

**定理6** 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

证明：“ => ”反证，由推论可得。

“ <= ”后面第二章再讲。

例 1. 解方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\
x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 3
\end{cases}
$$

解：因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-14\neq 0$$

所以方程组有唯一解

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 34 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$D_3 = -32, \quad D_4 = 10$$

由Cramer法 则

$$x_1 = -\frac{17}{7}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{16}{7}, \quad x_4 = -\frac{5}{7}$$

例 2. 问  取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (6-\lambda)y = 0 \\ 2x + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

有非零解？

解：若方程组有非零解，则

$$D=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

（按第一行展开）

$$=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-2\cdot 2\cdot(4-\lambda)+2\cdot[-2(6-\lambda)]$$

$$=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-8\cdot(5-\lambda)$$

$$=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-2\cdot 2\cdot(4-\lambda)+2\cdot[-2(6-\lambda)]$$

$$= (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 2\cdot (4-\lambda) + 2\cdot[-2(6-\lambda)]$$

$$= (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) - 8\cdot (5-\lambda)$$

$$= (5-\lambda)[(6-\lambda)(4-\lambda) - 8]$$

$$= (5-\lambda)[24 - 10\lambda + \lambda^2 - 8]$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

由 $D=0$ ，得 $\lambda = 2,$ 5, 或 8