第二章 矩阵

§2.1 矩阵的基本概念

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数可以排成 行 列的数表:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

这 种 数 表 即 称 为 矩 阵。

定 义 1. 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$
排成 m 行 n 列 的 数 表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫 做 m 行 n 列 矩 阵， 简 称 $m\times n$ 矩 阵。 其 中 a_{ij} 称 为 该 矩 阵 第 i 行 第 j 列 的 元 素。

元素均为实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵。矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

也可以简记为

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n} \quad \text{或} \quad A=\left(a_{ij}\right)$$

$m=n$ 时，称矩阵 A 为 n 阶方阵；

只有一行的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为行矩阵，或行向量；为避免元素间的混淆，行矩阵也可记为

$$A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

只有一列矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，或列向量。

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作0

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

如果 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记作

$$A=B$$

在 n 阶方阵中，如果主对角线以下的元素全为零，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称为上三角矩阵。

在 n 阶方阵中，如果主对角线以上的元素全为零，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称为下三角矩阵。

在 n 阶方阵中，如果主对角线以外的元素全为零，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称为对角矩阵。

在 n 阶对角矩阵中，如果对角线上的元素全为 1，记为 E，则称

$$E=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

为单位矩阵。

矩阵与行列式的区别，矩阵是一个数表，而行列式则是一个数。

在许多实际问题中，经常遇到一组变量要用另一组变量线性表示如

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

这种从一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到另一组变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的变换叫作线性变换。

线性变换与矩阵一一对应。上述线性变换对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

由矩阵 A 可写出上述线性变换。

例 1 线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

对应矩阵

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

例 2 线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \lambda_2 x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

对应矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

矩阵作为数表本身无运算含义，为使矩阵有广泛的应用。应赋予它某些运算。

§2.2 矩阵的运算

一、加法

定义2. 设 A 与 B 都是 $m\times n$ 矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

则定义

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

并称它为矩阵 A 与矩阵 B 之和。

运算规律：（设 A与 B都是矩阵）

1) 交换律 $$A+B=B+A$$

2) 结合律 $$(A+B)+C=A+(B+C)$$

二、数乘

定义3. 数 λ 与矩阵 A 的乘积规定为

$$\lambda A = A\lambda$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

记作 λA 或 λA

于是有

$$-A=(-1)A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

称为 $-A$ 的负矩阵，由此可定义矩阵的减法。

矩阵的减法定义为

$$A-B=A+(-1)B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

运 算 规 律 ：(设 A, B均 为 $m \times n$矩 阵，λ为 数)

1 $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

2 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

3 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

例 1 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$A+B=\begin{pmatrix}1+1 & 1+2 & 1+3\\ 1-1 & 1-2 & -1+4\\ 1+0 & -1+5 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

三、 乘法

定义 4. 设 A 是一个 $m\times s$ 矩阵，B 是一个 $s\times n$ 矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

规定 A 与 B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵C，

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n)$$

记作 $C = AB$，并称 A与 B为可乘矩阵。

运 算 规 律 : (假 定 运 算 都 是 可 以 进 行 的)

1 $$(AB)C = A(BC)$$

2 $$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

3 $$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

例 2. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

求 AB

解

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & -1\\ 9 & 9 & 11\end{pmatrix}$$

BA 无意义。

设 A 为 n 阶方阵，则 k（k为自然数)个 A 的乘积称为 A 的 k 次幂，记作 ，即 A^k

$$A^k = AA\cdots A$$

幂满足运算规律：

1 $A^k A^l = A^{k+l}$

2 $(A^k)^l = A^{kl}$

其中 k,l 为自然数。

例 3. 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$$

求 AB, BA, A^2 。

解:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ -20 & -10\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

本 例 中

$$1.\ AB \neq BA$$

$$2.\ A^2 = 0, A \neq 0$$

$$3.\ AB = A^2, A \neq B$$

矩 阵

$$\begin{pmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{pmatrix}$$

称 为 数 量 矩 阵。

例 4. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

试求与 A 可交换的所有二阶方阵。

解：设所求二阶方阵为

$$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

则 $AX=XA$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a-b \\ c-d & 2c-d \end{pmatrix}$$

由 矩 阵 相 等 的 定 义 知：

$$a+2c=a-b, \quad b+2d=2a-b$$

$$-a-c=c-d, \quad -b-d=2c-d$$

即

$$b=-2c,\ d=a+2c$$

所 以

$$X=\begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a+2c \end{pmatrix}$$

(其 中 a, c 是 任 意 常 数)。

例 5. 设方阵 A 满足 $A^3=0$，则

$$(E+A+A^2)(E-A)=E$$

证明:

左边 $=E(E-A)+A(E-A)+A^2(E-A)$

(右分配律)

$$=E-A+AE-A^2+A^2E-A^3$$

(左分配律)

$=E-A^3=E-0=E=$ 右边

四、矩阵的转置

定义5. 把矩阵A的行列式互换所得的矩阵称为原矩阵A的转置矩阵，并记作A^{T}。即：若

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则 A 的转置矩阵A^{T}为

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A^{T}为 $n\times m$ 矩阵，而且 A 中第 i 行第 j 列元素在 A^{T} 中位于第 j 行第 i 列。

例 如 ：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

运 算 规 律：

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$；

2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$；

3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$，$\lambda$ 是 数；

4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

证 明： 只 证 （4） 。设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$； $B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$

矩 阵$(AB)^{\mathrm{T}}$和$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$都 是 $n\times m$ 矩 阵。

矩 阵 M 的 第 i 行 第 j 列 的 元 素 记 为 $[M]_{ij}$

由 于

$$[(AB)^{\mathrm{T}}]_{ij}=[AB]_{ji}=\sum_{t=1}^{s}a_{jt}b_{ti}=\sum_{t=1}^{s}b_{ti}a_{jt}$$

即为 B^{T} 的第 i 行 $(b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni})$ 与 A^{T} 的第 j 列 $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})^{\mathrm{T}}$ 对应元素的乘积之和，即

$$[(AB)^{\mathrm{T}}]_{ij} = \sum_{t=1}^{s} b_{ti} a_{jt} = [B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}]_{ij}$$

从而（4）成立。

例 6. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

求 $(AB)^{\mathrm{T}}$

解法 1

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

所 以

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

解 法 2

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

性质（4）也可以推广为：

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{\mathrm{T}} = A_k^{\mathrm{T}} A_{k-1}^{\mathrm{T}} \cdots A_2^{\mathrm{T}} A_1^{\mathrm{T}}$$

定义6. 设 A为一个n阶方阵，若

$$A = A^{\mathrm{T}} ,$$

则称A为对称矩阵。若

$$A^{\mathrm{T}} = -A ,$$

则称A为反对称矩阵。

$A=(a_{ij})$ 为对称矩阵，则

$$A=A^{\mathrm{T}} \iff a_{ij}=a_{ji} \quad i,\ j=1,2,\ldots,n$$

特点：主对角线为对称轴。

显然，单位矩阵，对角矩阵，数量矩阵都是对称矩阵。两个对称矩阵的和差，对称矩阵与数相乘都是对称矩阵。

$A=(a_{ij})$为反对称矩阵，则

$$A=-A^{\mathrm{T}} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij}=-a_{ji} \quad i,\ j=1,2,\ldots,n$$

特点：主对角线上的元素全部为0。

例7　若方阵 A 为实对称矩阵，且 $A^2=0$。证明 $A=0$ 。

证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，由于 $A=A^{\mathrm{T}}$

$$A^2=AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}\right)_{n\times n}=0$$

由矩阵相等的定义得：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0 \qquad (i,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

取 $i = j$ 则 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}{}^{2} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

$a_{ik}\ (i, k = 1, 2, \ldots, n)$ 均为实数，所以

$$a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

即 $A = 0$。

例8. 任一 n 阶方阵 C，都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和。

证明：作方阵

$$A=\frac{1}{2}(C+C^{\mathrm{T}}),\quad B=\frac{1}{2}(C-C^{\mathrm{T}})$$

显然

$$A=A^{\mathrm{T}},\quad B=-B^{\mathrm{T}} \text{ 且 } C=A+B$$

例9. 设列矩阵 $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$满足 $X^{\mathrm{T}}X=1$， E 为单位矩阵， $H=E-2XX^{\mathrm{T}}$，证明 H 是对称矩阵，且 $HH^{\mathrm{T}}=E$。

证明：由于

$$H^{\mathrm{T}}=(E-2XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}-2(XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2XX^{\mathrm{T}}=H$$

所以 H 是对称矩阵。

$$HH^{\mathrm{T}} = H^2 = (E - 2XX^{\mathrm{T}})^2$$

$$= E - 4(XX^{\mathrm{T}}) + 4(XX^{\mathrm{T}})(XX^{\mathrm{T}})$$

$$= E - 4XX^{\mathrm{T}} + 4X(X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}}$$

由 于

$$X^{\mathrm{T}}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

所以

$$HH^{\mathrm{T}} = E - 4XX^{\mathrm{T}} + 4X(X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}}$$

$$= E - 4XX^{\mathrm{T}} + 4XX^{\mathrm{T}} = E$$

五、方阵的行列式

定义7. 设A为一个 n 阶方阵，将其元素按原所在的位置构成的一个 n 阶行列式称为方阵 A 的行列式，并记为 $|A|$ 或 $\det(A)$。

运算规律：(A, B 为 n 阶方阵, k 为常数)

1） $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$

2） $|kA| = k^n |A|$

3） $|AB| = |A||B|$

注： 对方阵而言，一般 $AB \neq BA$ ，

但总有 $|AB| = |BA|$

例 10 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

求 $|AB|$

解 法 1 由 于

所 以

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 11 & 17 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 56$$

解 法 2

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-8)(-7) = 56$$

例 **11** 设 A 为 n 阶方阵，满足

且 $AA^{\mathrm{T}} = E$ $|A| = -1$，求 $|A+E|$

解 由于

$$|A+E| = |A + AA^{\mathrm{T}}| = |A(E + A^{\mathrm{T}})|$$

$$= |A||E + A^{\mathrm{T}}| = |A||(E+A)^{\mathrm{T}}|$$

$$= -|E + A|$$

所以 $2|A+E| = 0$，即 $|A+E| = 0$

§2.3 逆矩阵

一、逆矩阵的概念

对于数，若 $ab = ba = 1$，

则 $b = a^{-1}$。

定义8 设 A 为一个 n 阶方阵，如果存在一个矩阵 B，使

$$AB = BA = E$$

则 B 为 A 的逆矩阵。并称 A 为可逆矩阵。

由定义可知：可逆矩阵是方阵，如果B是A的逆矩阵，则A也是B的逆矩阵。

如果方阵A可逆，则它的逆矩阵是唯一的。

设B, C都是A的逆矩阵，则

$$AB = BA = E$$

从而 $$AC = CA = E$$

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = C$$

由于矩阵 A 的逆矩阵是唯一的，通常记作 A^{-1}，从而有

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

因为线性变换与矩阵一一对应，有了逆矩阵的概念，也可以引入逆变换的概念。

设给定一个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

若记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad （1）$$

则线性变换就可以写成

$$Y = AX \qquad (2)$$

如果A可逆，则称线性变换为可逆线性变换。如用 A^{-1}左乘(2)式两端

$$A^{-1}Y = A^{-1}AX$$

即得

$$X = A^{-1}Y$$

若

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ x_1 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases} \qquad （3）$$

线性变换（3）称为线性变换(1)的逆变换。

定理 1 若方阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

证明：设 A 可逆，则存在逆矩阵 A^{-1}，使得

$$AA^{-1} = E \quad ,$$

从而

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1$$

所以

$$|A| \neq 0$$

二、逆矩阵的求法

设 A 为一个 n 阶方阵，它的行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，以这些代数余子式为元素按下面方式构成的矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{23} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称 A 为 的伴随矩阵。

注意：A^* 的第 i 行第 j 列的元素是 A_{ji}。

定理2 若 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$，则 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵。

证 明： 先 证 $AA^* = A^*A = |A|E$

由矩阵的乘法和行列式的展开定理及其推论可知

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{23} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

同 样 可 证

$$A^{*}A = |A|E$$

由 于$|A| \neq 0$， 所 以

$$A\frac{A^{*}}{|A|} = E \qquad \frac{A^{*}}{|A|}A = E$$

即 A 可 逆 ， 且

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{|A|}$$

推论 设 为 A 阶 n 方阵，若有 n 阶方阵 B 使 $AB = E$ (或 $BA = E$)，则 B 就是 A 的逆矩阵，即 $B = A^{-1}$。

证明：由 $AB = E$ 得

$$|AB| = |A||B| = |E| = 1$$

所以 $|A| \neq 0$，由定理 2 可知 A 可逆，故存在 A^{-1}，而

$$B = EB = A^{-1}AB = A^{-1}E = A^{-1}$$

设 A 为 n 阶方阵，若 $|A|=0$，则称 A 为奇异矩阵，若 $|A|\neq 0$，则称 A 为非奇异矩阵。

设 A 为 n 阶方阵，则下面三个命题是等价的：

(1) A 为可逆矩阵

(2) A 为非奇异矩阵

(3) A 的行列式 $|A|\neq 0$

例 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

求 A 的逆矩阵

解 由于

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6\neq 0$$

所以矩阵 A 可逆。

$$A_{11}=(-1)^{1+1}2=2, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}0=0$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}1=-1, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}3=3$$

从 而

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

一 般 地，若 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

则 矩 阵 A 可 逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (ad - bc \neq 0)$$

例 2 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的逆矩阵。

解：先计算 $|A|$ 和 A^{*}

由于 $|A|=2\neq 0$，所以矩阵 A 可逆。

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = 6 \qquad A_{22} = -6 \qquad A_{23} = 2$$

$$A_{31} = -4 \qquad A_{32} = 5 \qquad A_{33} = -2$$

所 以

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 3

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad (\lambda_i\neq 0, i=1,2,\ldots,n)$$

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix} \quad (\lambda_i\neq 0, i=1,2,\ldots,n)$$

三、逆矩阵的运算规律

(1) $E^{-1}=E$

(2) 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$

(3) 若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 也可逆，

且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

(4)若 A 可逆，则也 A^{T} 可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$

(5)若 A, B 为同阶方阵且均可逆，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

证明： 仅证 (4) 和 （5）

（4） 由于

$$\left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A| \neq 0$$

所以 A^{T}可逆， 且

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E = E$$

因此

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

（5）因为

$$B^{-1}A^{-1}(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

所以

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

一般地，若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是 n 阶可逆方阵，则 $A_1A_2\cdots A_k$ 也可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k{}^{-1}A_{k-1}{}^{-1}\cdots A_2{}^{-1}A_1{}^{-1}$$

设 A为 n阶方阵，当$|A| \neq 0$时，定义

$$A^0 = E, \quad A^{-k} = (A^{-1})^k$$

(k为自然数)。所以当$|A| \neq 0$时，对于任意的整数λ, μ均有

$$A^{\lambda} A^{\mu} = A^{\lambda+\mu}$$

$$(A^{\lambda})^{\mu} = A^{\lambda\mu}$$

例 4 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$$

求矩阵 X 使得 $AXB=C$

解

若 A^{-1}，B^{-1}存在，将上式左乘A^{-1}，右乘 B^{-1}，得

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$$

即

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

经 计 算 得 A^{-1}，B^{-1}存 在，且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

则

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

例 5 求解矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解：

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{8} \right) \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 73 & 26 \\ 23 & 6 \end{pmatrix}$$

例 6 求解矩阵方程

$$X\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

解:

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 4 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-14 & 4 & -2\\ -12 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 2 & -1\\ -6 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

对 于 n 元 线 性 方 程 组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

则线性方程组可记为 $AX = B$

若 $D = |A| \neq 0$，则 A^{-1}存在，左乘 A^{-1}有

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

即

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{|A|}A^{*}B = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{k1}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} A_{k2}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{pmatrix}$$

（上式即为克拉默法则）

例 7 利用逆矩阵解下列方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

解 记

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

则

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由 于 $|A| = 3 \neq 0$，A 可 逆，所 以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

又 由 于

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 11/3 & -7/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 7/3 & -5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 8 若矩阵 A 满足 $A^2-2A-4E=0$，试证 $(A+E)$ 是可逆矩阵，并求 $(A+E)^{-1}$。

证明：由 $A^2-2A-4E=0$，得

$$A^2+A-3A-3E=E$$

$$(A+E)A-3(A+E)=E$$

$$(A+E)(A-3E)=E$$

由定义知 $(A+E)$ 可逆，且

$$(A+E)^{-1}=A-3E$$

例 9 A 为 n 阶方阵，n 为奇数，且 $|A|=1$，又 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$，试证 $E-A$ 不可逆。

证明 只要证明 $|E-A|=0$

由 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$，得 $AA^{\mathrm{T}}=E$，从而有

$$|E-A|=|AA^{\mathrm{T}}-A|=|A(A^{\mathrm{T}}-E)|$$

$$=|A||(A-E)^{\mathrm{T}}|=|A-E|$$

$$=(-1)^n|E-A|$$

$$=-|E-A|$$

所 以

$$2|E-A|=0$$

即

$$|E-A|=0$$

例 10 设 $P^{-1}AP=\Lambda$，

其中 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

求 A^{10}。

解 因 P 可逆，且

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$，

从而

$$A^{10}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right)$$

$$=P\Lambda^{10}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{10} & 0\\ 0 & 2^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1+2^{12} & -4+2^{12}\\ 1-2^{10} & 4-2^{10}\end{pmatrix}$$

§2.4 矩阵的秩与矩阵的初等变换

对于一般的矩阵，若行数与列数不相等，则不能构成行列式，为此引入矩阵的子式。

设 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ，在 A 中任取 k 行 $(i_1<i_2<\ldots<i_k)$ ， k 列 $(j_1<j_2<\ldots<j_k)$ 位于这些行和列相交处的 k^2 个元素按原次序构成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

叫 做 A 的 一 个 k 阶 子 式。

例 如 对 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

取第1行、第3行和第2列、第3列，位于这些行和列相交处的4个元素组成一个二阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6 \neq 0$$

一、矩阵的秩

定义9. 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ，若 A 中存在一个 r 阶子式不等于0，而所有 $r+1$ 的阶子式（如果存在的话）全等于零，则称矩阵 A 的秩为 r .记为 $秩(A)=r$ 或 $r(A)=r$. 零矩阵的秩规定为0。

由定义可以看出：

（1）若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A 的秩不会大于矩阵的行数，也不会大于矩阵的列数，即 $r(A)\le\min\{m,n\}$；

（2）若 $r(A)=r$，则 A 中所有的 $r+1$ 阶子式全为0，因而所有的 $r+2$ 阶子式（如果存在的话）全为零，…，即所有大于 r 阶的子式全为零，r 为 A 中不等于零的子式的最大阶数；

（3）$r(A^T)=r(A)$，$r(kA)=r(A)$，k 为非零数;

（4）若 A 的所有 $r+1$ 阶子式都为零，则 $r(A)<r+1$；

（5）若 A 中存在一个 r 阶子式不为零，则 $r(A)\geq r$.

下面我们用定义求矩阵的秩。

例 1. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的秩。

解 二阶子式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 12\end{vmatrix}=30\neq 0$$

而矩阵A的所有三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 2 & 12 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 12 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 12 & -2 & 12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

所以$r(A)=2$。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 A 的所有 k 阶子式有 $C_m^k C_n^k$ 个。

矩阵的初等变换是线性代数中的基本运算，它在求矩阵的秩、求矩阵的逆和解线性方程组等方面起着重要的作用。

定义10 矩阵的初等行变换是指下列三种变换。

（1）对换变换：对调两行

对调矩阵 A 的第 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$

（2）数乘变换：以数 k（$k \neq 0$）乘某一行中的所有元素

用 k 乘 A 的第 i 行，记作 kr_i

（3）倍加变换：把某一行所有元素的倍 k 加到另一行对应的元素上去

第 j 行乘 k 后加到第 i 行记作 $r_i + kr_j$

若把定义10中的行换成列，即得到矩阵的三种初等列变换

（1）对调矩阵 A 的第 i,j 两列记作

$$c_i \leftrightarrow c_j$$

（2）以数$k \neq 0$乘矩阵A的第i列记作

$$kc_i$$

(3) 将A的第j列乘后k加到第i列上去记作

$$c_i + kc_j$$

矩阵的初等行变换和初等列变换统称初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆是同一类型的初等变换。以初等行变换为例，

（1）变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是自身；

（2）变换 kr_i 的逆变换为 $\frac{1}{k}r_i$；

（3）变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i - kr_j$。

定义11　将矩阵A经有限次初等变换得到矩阵B，则称矩阵A与矩阵B等价，记作$A \leftrightarrow B$。

矩阵的等价具有下列性质：

（1）自反性：$A \leftrightarrow A$；

（2）对称性：若$A \leftrightarrow B$，则$B \leftrightarrow A$

（3）传递性：若$A \leftrightarrow B$，$B \leftrightarrow C$则$A \leftrightarrow C$。

定理3 初等变换不改变矩阵的秩。

证 对矩阵 A 施行三种初等变换；不会改变 A 中是否存在不等于零的 r 阶子式和任 r 阶子式为零的性质，这是因为

变换（1）只会改变行列式的符号；

变换（2）只会增加或减少行列式的倍数；

变换（3）不改变行列式的值。

所以对矩阵 A 施行初等变换不会改变 A 的秩。（详细讨论见教材）

定理3说明 若 $A \leftrightarrow B$

则 $r(A)=r(B)$。即两等价矩阵必等秩。

三、用初等变换求矩阵的秩

由于初等变换不改变矩阵的秩，所以可先用初等变换将矩阵化简，然后再求矩阵的秩。

用记号“$\rightarrow$ ”表示对矩阵做初等变换。

例 2. 用 初 等 行 变 换 求 矩 阵 的 秩

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

解

$$A \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\substack{\frac{1}{2}r_2 \\ r_3-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

矩阵B_1称为行阶梯形矩阵，其特点是：

（1）若有零行，则零行全部在矩阵的下方；

（2）从第一个起，每行第一个非零元素前面零的个数逐行增加。

对于这样的矩阵，可画出一条阶梯线，线的下方全为0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行数。

在矩阵

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

中，易见 B_1 的所有四阶子式全为零，且有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所 以 $r(B_1) = 3$，由 定 理 3 知 $r(A) = 3$。

可 继 续 对 矩 阵 B_1 施 行 初 等 行 变 换

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_2$$

矩阵B_2为行阶梯形且非零行的第1个元素为1，1所在的列的其它元素全为零，这样的矩阵称为行最简形矩阵。

再对矩阵B_2施行初等列变换

$$B_2 \xrightarrow[c_4+2c_1]{c_2+2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4-\frac{1}{2}c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_5]{c_2\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_3$$

矩阵 B_3 的左上角为单位矩阵，称 B_3 为矩阵 A 的标准形。

由上面的讨论可知，对于给定矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，若 $r(A)=r$，则矩阵 A 必可经有限次初等变换化为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

其中 B 的主对角线上有 r 个1。此时称矩阵 B 为 A 的标准形。

定义12 设 A 为 n 阶方阵，若 $A \leftrightarrow E$，则称 A 为满秩矩阵；否则称为降秩矩阵。

若 $A \leftrightarrow E$，则 $r(A)=n$，从而 $|A| \neq 0$，即满秩矩阵就是可逆矩阵，又称非奇异矩阵；降秩矩阵就是不可逆矩阵，也是奇异矩阵。

用初等行变换求矩阵的秩，比用矩阵秩的定义求矩阵的秩要简单的多，一般用这种方法求矩阵的秩。

若只求矩阵的秩，则将矩阵化为行阶梯形即可，阶梯形矩阵中非零行的个数就是矩阵的秩，不必化为行最简形，更不必化为标准形。

若要将矩阵化为标准形，一般须经初等行变换和初等列变换才能完成。

例 3. 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的秩。

解

$$A=\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&4&-1\\2&1&11&2\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-11r_1}}\begin{pmatrix}1&0&4&-1\\0&1&3&4\\0&4&12&16\\0&-1&-3&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&4&-1\\0&1&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

阶梯形矩阵 B 中有两个非零行，所以 $r(B)=2$，由定理3知 $r(A)=2$。

下面的矩阵都是行阶梯形矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&5\\0&0&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3&0&5\\0&0&3&6&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$r(A)=2\qquad r(B)=3$$

对于行阶梯形矩阵，它的秩就是它的非零行数。

四、线性方程组与矩阵的初等变换

对 于 线 性 方 程 组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

若 记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

利 用 矩 阵 的 乘 法, 可 将 方 程 组 写 成 如 下 的 矩 阵 方 程

$$Ax=b$$

矩阵 A 称为该方程组的系数矩阵。

若方程组（1）中的常数项全为零，即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

为齐次线性方程组，用矩阵表示为

$$Ax = 0$$

用消元法求解线性方程组实际上就是对线性方程组进行初等行变换，简化未知量的系数，从而得到与原方程组同解且易直接求解的阶梯形方程组。

下面以齐次线性方程组为例说明其解法。

例 4. 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-3\times(1)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 & (2) \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 & (3) \end{cases} \qquad (B_1)$$

$$\xrightarrow[(3)-(2)]{-1\times(2)}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 & (1) \\ \quad x_2+2x_3+2x_4=0 & (2) \\ \qquad\qquad 0\ \ =0 & (3) \end{cases} \quad (B_2)$$

得到与原方程组同解的阶梯形方程，为求出方程组的解，将（2）中的 x_2 代入（1）

$$\xrightarrow{(1)-(2)}\begin{cases} x_1 \qquad -x_3 \quad -x_4=0 & (1) \\ \quad x_2+2x_3+2x_4=0 & (2) \\ \qquad\qquad 0\ \ =0 & (3) \end{cases} \quad (B_3)$$

上面的方程组中为4个未知量，两个独立方程的方程组，可设 x_3 x_4 为自由取值的未知量（自由未知量），解得

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_3 + \quad x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{可取任意值})$$

当 x_3, x_4 任取一组值时，代入上式便得到方程的一个解，方程组有无数多个解。

上 面 的 求 解 过 程 可 用 矩 阵 的 初 等 行 变 换 来 实 现，其 做 法 更 简 单。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&2&1&1\\1&2&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&1&2&2\end{pmatrix}=B_1$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_2$$ （阶梯形）

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_3$$（行最简形）

由矩阵 B_3 可得到上面用消元法得到的同解最简方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad - x_3 \quad - x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

取 x_3，x_4 为自由未知量，则有

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 可取任意值})$$

令 $x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$，方程组的解可记为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & + & c_2 \\ -2c_1 & - & 2c_2 \\ c_1 & & \\ & & c_2 \end{pmatrix}$$

即

$$x = c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

下面利用矩阵的秩给出齐次线性方程组有非零解的充分必要条件。

定理4. n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩 $r(A)<n$。

证必要性：

设方程组 $Ax=0$ 有非零解要证 $r(A)<n$.

（用反证法）假设 $r(A)=n$，则 A 中必有一个 n 阶子式 $D_n \neq 0$，根据克拉默法则，n 阶子式 D_n 所对应的 n 个方程只有零解。这与原方程组有非零解矛盾，从而 $r(A)=n$ 不成立，$r(A)<n$。

充分性：设 $r(A) < n$，则 A 的行阶梯形矩阵只有 $r\ (r < n)$ 个非零行，从而方程组 $Ax = 0$ 有 $n - r$ 个自由未知量，让自由未知量的值都取1，即可得方程组的一个非零解。

定理4所述条件 $r(A) < n$ 的必要性是克拉默法则(齐次线性方程组情形)的推广，克拉默法则只适用于 $m = n$ 的情形，其充分性包含了克拉默法则的逆命题。因而由定理4可得:

推论　含有n个方程的n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充分必要条件是$|A|=0$。

用矩阵的初等行变换也可以求解非齐次线性方程组。第五章将详细讨论线性方程组的求解问题。

§2.5 初等方阵

定义13. 将 n 阶单位方阵施行一次初等变换所得的矩阵称为初等方阵。

三种初等变换对应三种初等方阵。

（1）对换两行或对换两列

将单位矩阵 E 第 i, j 行（列）互换，记为

$$
E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
$$

用 m 阶初等方阵$E_m(i,j)$左乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则

$$E_m(i,j)A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow r_i \\ \\ \leftarrow r_j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

用 n 阶初等方阵 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则

$$AE_n(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{m1}} & & c_i & & c_j & & \phantom{a_{mn}} \end{array}\end{array}$$

（2） 以数 $k \neq 0$乘 E 某行(列)

将 E 第 i 行(列)乘以数 $k \neq 0$，记为

$$E(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& k &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow r_i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & \quad & \uparrow c_i & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

$$E_m(i(k))A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m2} \end{pmatrix}$$

$$AE_n(i(k)) = ?$$

（3)将数 k 乘某行（列）加到另一行（列）上。

将 E 的第 j 行乘以数 k 后加到第 i 行上，（可以看作第 i 列乘数 k 后加到第 j 列），记为

$$
E(i,j(k)) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & \cdots & k & & \\
& & & \ddots & \vdots & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow r_i \\ \\ \leftarrow r_j \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & c_i & & c_j & &
\end{array} &
\end{array}
$$

可以验证

$E_m(i,j(k))A=$ 将 A 的第 j 行乘以数 k 后加到第 i 行上;

$AE_n(i,j(k))=$ 将 A 的第 i 列乘数 k 后加到第 j 列

定理5. 若A是一个$m\times n$矩阵，则对A施行一次行初等变换，相当于对A左乘一个相应的m阶初等方阵，对A施行一次列初等变换，相当于对A右乘一个相应的n阶初等方阵。

以 初 等 行 变 换 为 例

（1）若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} A_1$，则 $A_1 = E(i,j)A$；

（2）若 $A \xrightarrow{kr_i} A_1$，则 $A_1 = E(i(k))A$；

（3）若 $A \xrightarrow{r_i + kr_j} A_1$，则 $A_1 = E(i,j(k))A$。

初等方阵均为可逆方阵，其逆仍为初等方阵。

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j) \qquad E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$$

由上一节的讨论矩阵 的秩为，那么经过有限次的初等行变换和初等列变换可将矩阵 化为标准形

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这些初等行变换和初等列变换相当于对矩阵A左、右乘相应的初等方阵。设行变换所对应的初等方阵和列变换所对应的初等方阵分别为

$$P_1, P_2, \cdots, P_l \quad 和 \quad Q_1, Q_2, \cdots, Q_s$$

则

$$P_1P_2\cdots P_lAQ_1Q_2\cdots Q_s=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

记

$$P=P_1P_2\cdots P_l,\quad Q=Q_1Q_2\cdots Q_s$$

上 式 可 写 成

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此得到

定理6　给定 $m \times n$ 矩阵 A,则存在可逆矩阵 P, Q，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理7. 任一可逆方阵A，均可表为有限个初等方阵的乘积。

证明：因为A为可逆方阵，则$A \leftrightarrow E$。即A可经过若干次初等变换化为同阶单位方阵E。所以存在初等方阵

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_l \quad 和 \quad S_1, S_2, \cdots, S_k$$

使 得

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_l A S_1 S_2 \cdots S_k = E$$

上 式 两 边 依 次 左 乘

$$Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \cdots, Q_l^{-1}$$

右 乘

$$S_k^{-1}, S_{k-1}^{-1}, \cdots, S_1^{-1}$$

即

$$A = Q_l^{-1} Q_{l-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1} E S_k^{-1} S_{k-1}^{-1} \cdots S_1^{-1}$$

$$= Q_l^{-1} Q_{l-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1} S_k^{-1} S_{k-1}^{-1} \cdots S_1^{-1}$$

其 中 $Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \cdots, Q_l^{-1}$和 $S_k^{-1}, S_{k-1}^{-1}, \cdots, S_1^{-1}$均 为 初 等 方 阵。

由定理7可以得到矩阵求逆的一个简便有效的方法----利用初等变换求逆法。

对于给定的可逆方阵 A，必存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 使 $A = P_1P_2\cdots P_m$，亦即

$$A = P_1P_2\cdots P_mE$$

上式两边依次左乘初等方阵 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_m^{-1}$, 即

$$P_m^{-1} P_{m-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E$$

上式两边右乘 A^{-1}，得

$$P_m^{-1} P_{m-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}$$

这说明对A施行有限次初等行变换得到单位方阵E。对E依次施行与对A同样的初等行变换，即得A^{-1}。

构造矩阵$(A \,\vdots\, E)$，同时施行有限次只对行的初等变换即得$(E \,\vdots\, A^{-1})$，即

$$(A \,\vdots\, E) \xrightarrow{RowTransform} (E \,\vdots\, A^{-1})$$

例 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}

解: 设

$$(A\mid E)=\begin{pmatrix}1&0&1&|&1&0&0\\2&3&2&|&0&1&0\\3&1&1&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2} r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$$

例 2 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

求 A^{-1}

解: 设

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)r_3]{(-\frac{1}{2})r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 3 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A^{-1}

解: 设

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-4r_2\\ r_4-2r_2}]{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_4]{r_2-r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

例 **4**. 求矩阵 X，使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

解: 若 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$

$$A^{-1}(A \mid B) = (E \mid A^{-1}B)$$

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mid & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & \mid & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & \mid & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mid & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & \mid & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & \mid & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)r_3]{(-\frac{1}{2})r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

因此

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例 5. 试证: 秩为 r 的矩阵 A 可表示成 r 个秩为 1 的矩阵之和

证明: 设 $R(A)=r$，则有非奇异矩阵 P,Q 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}r \\ \\ \\ \\ \end{matrix}=A_1+A_2+\cdots+A_r$$

其中$A_i(i=1,2,\cdots,r)$为元素 $a_{ii}=1$，其余元素全是零的矩阵. 由上可得

$$A=P^{-1}A_1Q^{-1}+P^{-1}A_2Q^{-1}+\cdots+P^{-1}A_rQ^{-1}$$

$$R(P^{-1}A_iQ^{-1})=R(A_i)=1\,(i=1,2,\cdots,r)$$

即 A 可以表示成 r 个秩为 1 的矩阵的和。

§2.6 矩阵的分块法

在一个矩阵中划若干条纵线和横线，将其分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

根 据 不 同 需 要 可 以 作 多 种 划 分，如

（1）

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} \end{pmatrix}$$

（2）

$$A=\left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

（3）

$$A=\left(\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

一、分块矩阵加法

设矩阵 A, B 为 $m \times n$ 矩阵，用相同的分法把矩阵 A 和 B 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

(其中 A_{ij} 的行数、列数均与 B_{ij} 的行数、列数相同)，则有

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

二、数乘分块矩阵

设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

λ 为一常数，则

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{pmatrix}$$

三、分块矩阵的转置

设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

则

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}$$

四、分块矩阵的乘法

设矩阵 A 为 $m \times l$ 矩阵，B 为 $l \times n$ 矩阵，对 A, B 作分块，使得 A 的列分法与 B 的行的分法一致，即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{is}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{sj}$ 的行数 $(i = 1,2,\cdots,r;\ j = 1,2,\cdots,t)$，则有

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix}$$

其中

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}$$

$$(i = 1,2,\cdots,r;\ j = 1,2,\cdots,t)$$

例 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$$

求 AB

解　将矩阵 A, B 分块成

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\A_1&E\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

五、分块对角阵

设 A 为 n 阶方阵，若 A 的分块矩阵中只有在主对角线上有非零的子方块，其余子块都为零矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角阵。

分块对角阵有下列性质：

1）设A,B 是两个类型完全相同的分块对角阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

其中 A_i 与 B_i 为同阶方阵。则有

$$A\pm B=\begin{pmatrix} A_1\pm B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2\pm B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s\pm B_s \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}$$

$$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

2) 设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

若 $\left|A_i\right| \neq 0\ (i=1,2,\ldots,s)$，则 A 可逆且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}

解：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5^{-1}&0&0\\0&\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}^{-1}&\\0&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{4}{10}&\frac{-1}{10}\\0&-\frac{2}{10}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

例 3 设

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}

解： 设

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix}$$

则

$$|A| = |A_1||A_2| = 1\times 1 = 1$$

所 以 矩 阵 A 可 逆，由 于

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

从 而

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

求 A^{2k} 及 $\left|A^{2k}\right|$ （ k 为正整数)

解：　设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

则

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} A_1^{\ 2k} & \\ & A_2^{\ 2k} \end{pmatrix}$$

其 中

$$A_1^{\ 2} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, \quad A_1^{\ 2k} = \begin{pmatrix} 5^{2k} & 0 \\ 0 & 5^{2k} \end{pmatrix}$$

$$A_2^{\ 2} = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{\ 3} = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由 数 学 归 纳 法，可 证

$$A_2{}^{n} = 2^{n}\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2{}^{2k} = 2^{2k}\begin{pmatrix} 1 & 4k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^{k} & 4^{k+1}k \\ 0 & 4^{k} \end{pmatrix}$$

所 以

$$A^{2k}=\begin{pmatrix}5^{2k} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5^{2k} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4^k & 4^{k+1}k\\ 0 & 0 & 0 & 4^k\end{pmatrix}$$

$$\left|A^{2k}\right|=5^{2k}5^{2k}4^k4^k=10^{4k}$$

例 5 设 $|A| \neq 0$, $|C| \neq 0$ 求 证：$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 可逆，并 求 出 逆 矩 阵。

解： 因 为

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C| \neq 0$$

所 以 矩 阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 可 逆, 设 逆 矩 阵 为

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = E$$

即

$$\begin{pmatrix} AX_1 + BX_3 & AX_2 + BX_4 \\ CX_3 & CX_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

所 以

$$\begin{cases} AX_1 + BX_3 = E & (1) \\ AX_2 + BX_4 = 0 & (2) \\ CX_3 \quad = 0 & (3) \\ CX_4 \quad = E & (4) \end{cases}$$

由于 $|C| \neq 0$，所以 C^{-1}存在，则 $X_3 = 0, X_4 = C^{-1}$

$X_3 = 0$代入 (1) $AX_1 = E,\ X_1 = A^{-1}$ $X_4 = C^{-1}$ 代入 (2) $AX_2 = -BC^{-1},\ X_2 = -A^{-1}BC^{-1}$

所以

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，常把矩阵按列分块：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \ \alpha_n)$$

其中 $\alpha_i = (a_{1i}, \ a_{2i}, \ \cdots, \ a_{mi})^T$ 是一列的矩阵，又叫做列向量。

也可以把矩阵 A 按行分块：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

其中 $\beta_i=(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{in})$ 是一行的矩阵，又叫做行向量。

对 于 线 性 方 程 组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

其中 A 为系数矩阵，x 称为未知量向量，b 称为常数项向量。若记 $\overline{A}=(A \vdots b)$，称 $\overline{A}$ 为增广矩阵。

若把矩阵 A 按列分成 n 块，则方程组可写成

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

若把矩阵 A 按行分成 m 块，则方程组可写成

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} x = b$$

按 分 块 矩 阵 的 乘 法 有

$$\begin{pmatrix} \beta_1 x \\ \beta_2 x \\ \vdots \\ \beta_m x \end{pmatrix} = b$$

这 相 当 于 把 每 个 方 程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

记 作

$$\beta_i x = b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

上面的分块方法在后面的各章中有重要的作用。

矩阵分块法的应用非常灵活，应根据实际问题的需要及矩阵元素分布的结构特点进行分块。