



## 第二章 矩阵

---



# 线性方程组

[illegible]

的系数可以排成行列的数表:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

这种数表即称为矩阵。

定义 1. 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) 排成  $m$  行  $n$  列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

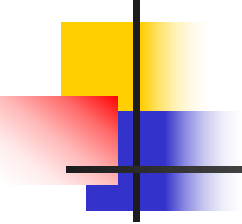
叫做  $m$  行  $n$  列矩阵，简称  $m \times n$  矩阵。其中  $a_{ij}$  称为该矩阵第  $i$  行第  $j$  列的元素。

元素均为实数的矩阵称为实矩阵，  
元素是复数的矩阵称为复矩阵。矩  
阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

也可以简记为

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad \text{或} \quad A = (a_{ij})$$



---

$m = n$  时，称矩阵  $A$  为  $n$  阶方阵；

只有一行的矩阵

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵，或行向量；为避免元素间的混淆，行矩阵也可记为

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

只有一列矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，或列向量。

元素都是零的矩阵称为零矩阵，  
记作  $\mathbf{0}$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

如果  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  都是  $m \times n$  矩阵，  
并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相等，记作

$$A = B$$



在  $n$  阶方阵中，如果主对角线以下的元素全为零，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称为上三角矩阵。

在  $n$  阶方阵中，如果主对角线以上的元素全为零，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称为下三角矩阵。

在  $n$  阶方阵中，如果主对角线以外的元素全为零，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称为对角矩阵。

在  $n$  阶对角矩阵中，如果对角线上的元素全为 1，记为  $E$ ，则称

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

为单位矩阵。

矩阵与行列式的区别，矩阵是一个数表，而行列式则是一个数。

在许多实际问题中,经常遇到一组变量要用另一组变量线性表示如

[illegible]

这种从一组变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  到另一组变量  $y_1, y_2, \dots, y_m$  的变换叫作线性变换。

线性变换与矩阵一一对应。上述线性变换对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

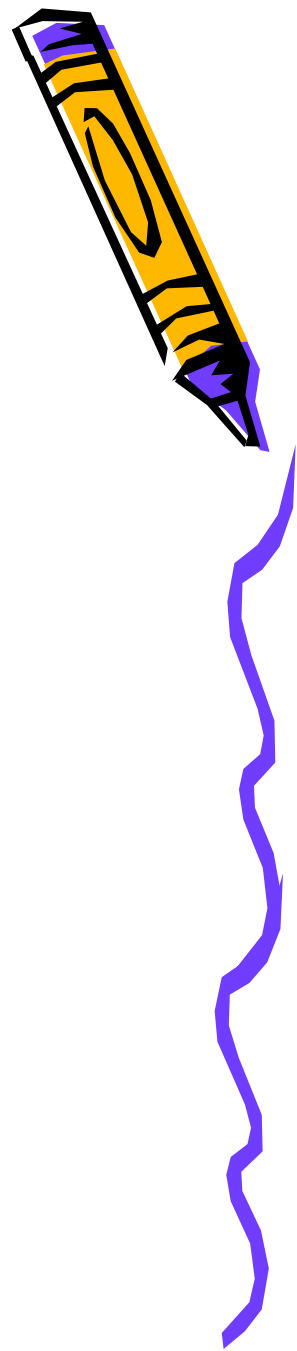
由矩阵  $A$  可写出上述线性变换。

# 例 1 线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

对应矩阵

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

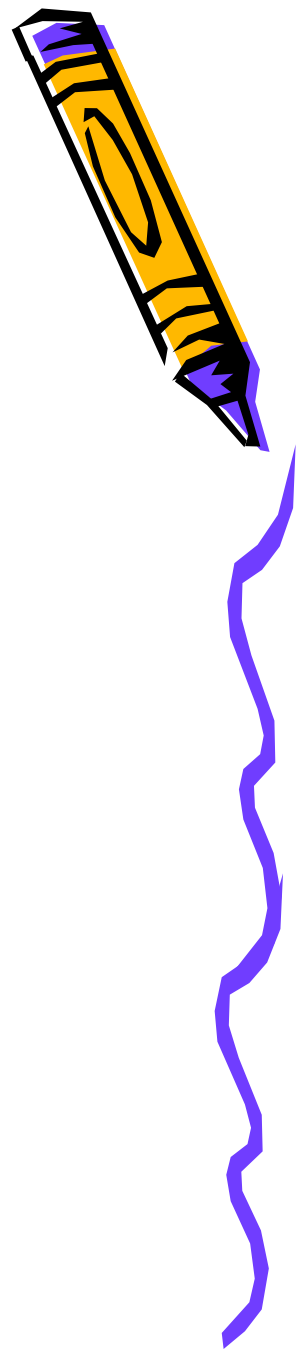


## 例 2 线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \lambda_2 x_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

对应矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$





---

矩阵作为数表本身无运算含义，为使矩阵有广泛的应用。应赋予它某些运算。

---



## § 2.2 矩阵的运算

---

### 一、加法

定义 2. 设  $A$  与  $B$  都是  $m \times n$  矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

则 定 义

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

并 称 它 为 矩 阵  $A$  与 矩 阵  $B$  之 和。

运算规律：( 设  $A$  与  $B$  都是矩阵 )

1) 交换律  $A + B = B + A$

2) 结合律  $(A + B) + C = A + (B + C)$



## 二、数乘

---

定义 **3.** 数  $\lambda$  与矩阵  $A$  的乘积规定为

$$\begin{aligned}\lambda A &= A\lambda \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

记作  $\lambda A$  或  $\lambda A$

于是有

$$-A = (-1)A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

称为  $-A$  的负矩阵，由此可定义矩阵的减法。

矩阵的减法定义为

$$A - B = A + (-1)B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

---

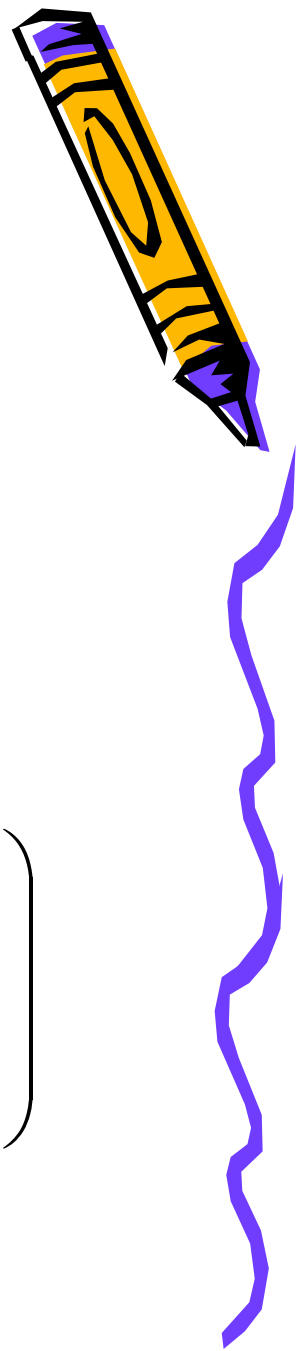
运算规律：(设  $A, B$  均为  $m \times n$  矩阵,  $\lambda$  为数)

**1**      $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

**2**      $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

**3**      $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

---



例 1 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 1-1 & 1-2 & -1+4 \\ 1+0 & -1+5 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$







### 三、乘法

---

定义 4. 设  $A$  是一个  $m \times s$  矩阵,  
 $B$  是一个  $s \times n$  矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

规定  $A$  与  $B$  的乘积是一个  $m \times n$  矩阵  $C$ ,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n)$$

记作  $C = AB$ , 并称  $A$  与  $B$  为可乘矩阵。

运算规律：(假定运算都是可以进行的)

**1**  $(AB)C = A(BC)$

**2**  $A(B + C) = AB + AC$

$$(B + C)A = BA + CA$$

**3**  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

例 2. 设 矩 阵

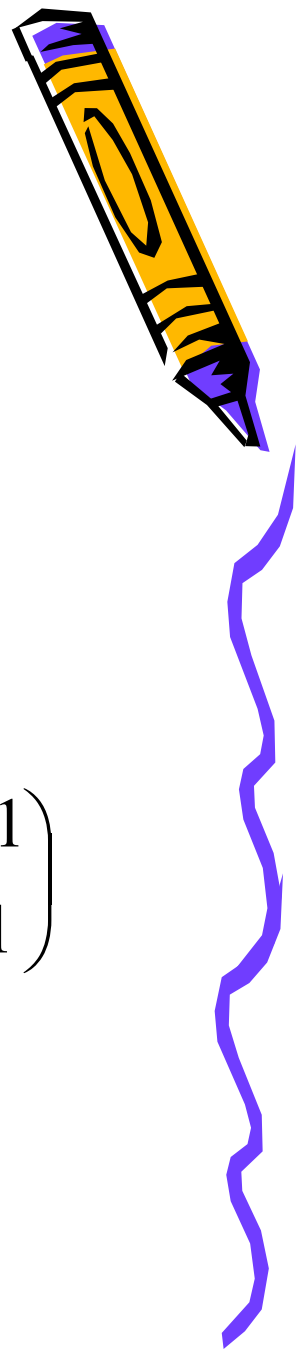
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

求  $AB$   
解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$BA$  无 意 义。



设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $k$  ( $k$  为自然数) 个  $A$  的乘积称为  $A$  的  $k$  次幂, 记作  $A^k$ , 即  $A^k$

$$A^k = AA \cdots A$$

幂满足运算规律:

$$1 \quad A^k A^l = A^{k+l}$$

$$2 \quad (A^k)^l = A^{kl}$$

其中  $k, l$  为自然数。

例 3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $AB, BA, A^2$  。

解:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



本 例 中

$$1. AB \neq BA$$

$$2. A^2 = 0, A \neq 0$$

$$3. AB = A^2, A \neq B$$

矩 阵

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}$$

称 为 数 量 矩 阵。

例 4. 设

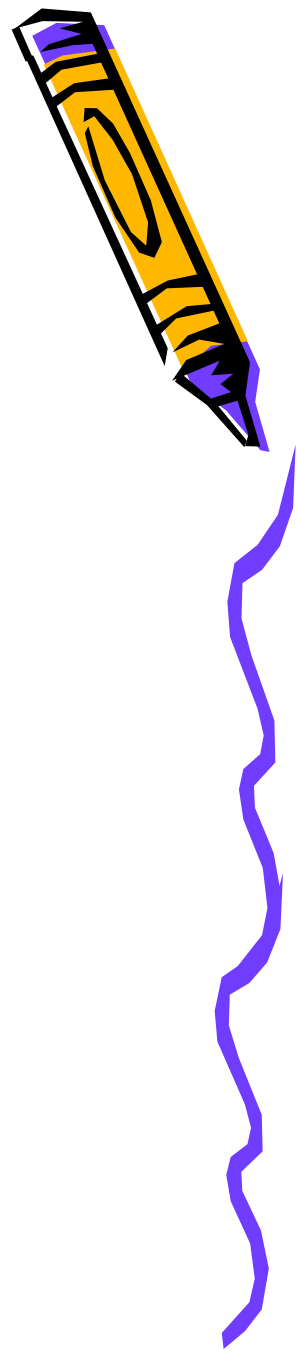
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

试求与  $A$  可交换的所有二阶方阵。

解：设所求二阶方阵为

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

则  $AX = XA$ , 即





$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a-b \\ c-d & 2c-d \end{pmatrix}$$

由矩阵相等的定义知：

$$a+2c=a-b, \quad b+2d=2a-b$$

$$-a-c=c-d, \quad -b-d=2c-d$$

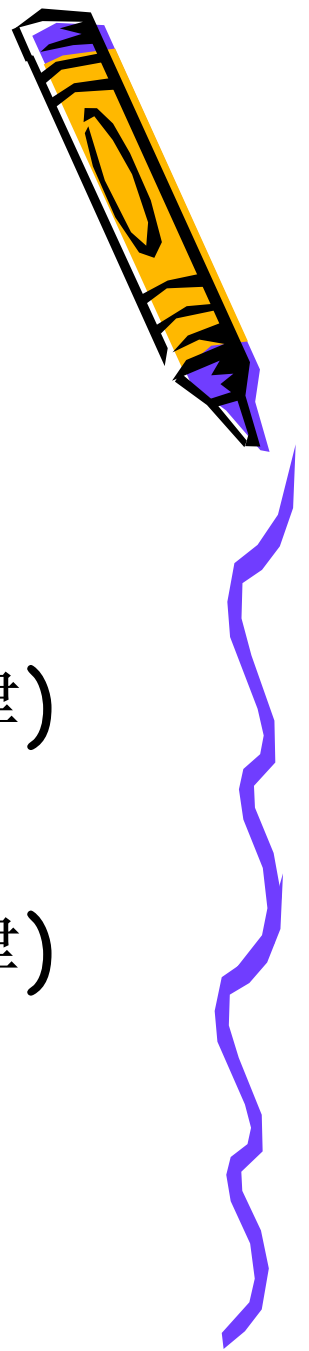
即

$$b = -2c, d = a + 2c$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a + 2c \end{pmatrix}$$

(其中  $a, c$  是任意常数)。



例 5. 设方阵  $A$  满足  $A^3 = 0$  , 则

$$(E + A + A^2)(E - A) = E$$

证 明:

$$\text{左 边} = E(E - A) + A(E - A) + A^2(E - A)$$

(右分配律)

$$= E - A + AE - A^2 + A^2E - A^3$$

(左分配律)

$$= E - A^3 = E - 0 = E = \text{右 边}$$





## 四、矩阵的转置

---

定义 5. 把矩阵  $A$  的行列式互换所得的矩阵称为原矩阵  $A$  的转置矩阵，并记作  $A^T$ 。即：若

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则  $A$  的转置矩阵  $A^T$  为

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若  $A$  为  $m \times n$  矩阵，则  $A^T$  为  $n \times m$  矩阵，而且  $A$  中第  $i$  行第  $j$  列元素在  $A^T$  中位于第  $j$  行第  $i$  列。

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

则

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

运算规律:

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3) (\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \text{ 是数};$$

$$4) (AB)^T = B^T A^T$$

证明：只证 (4)。设  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$   
矩阵  $(AB)^T$  和  $B^T A^T$  都是  $n \times m$  矩阵。

矩阵  $M$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素记为  $[M]_{ij}$

由于

$$[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{t=1}^s a_{jt} b_{ti} = \sum_{t=1}^s b_{ti} a_{jt}$$



即为  $B^T$  的第  $i$  行  $(b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni})$  与  $A^T$  的第  $j$  列  $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})^T$  对应元素的乘积之和，即

$$[(AB)^T]_{ij} = \sum_{t=1}^s b_{ti} a_{jt} = [B^T A^T]_{ij}$$

从而 (4) 成立。

## 例 6. 设 矩 阵

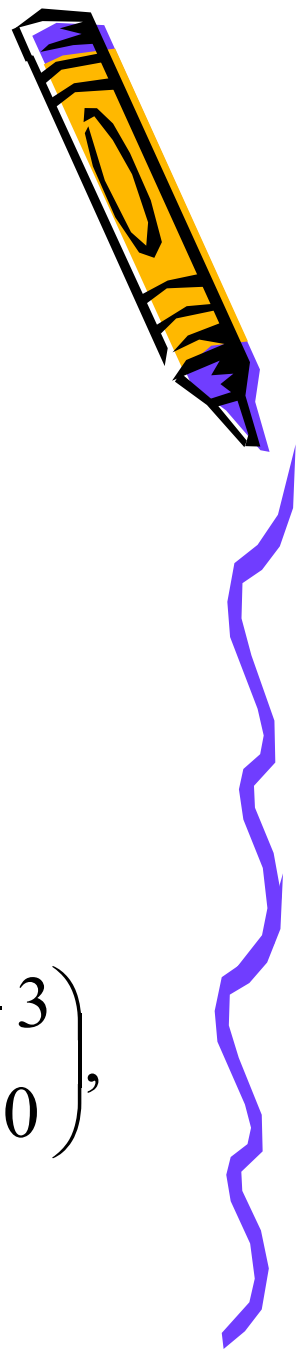
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求  $(AB)^T$

解 法 1

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix},$$

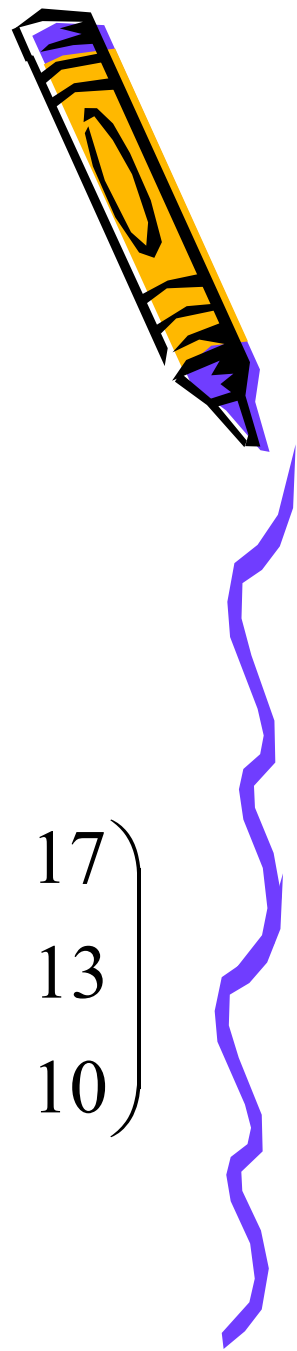


所以

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

解法 2

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$



性质 (4) 也可以推广为：

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T A_{k-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$$

定义 6. 设  $A$  为一个  $n$  阶方阵，若

$$A = A^T ,$$

则称  $A$  为对称矩阵。若

$$A^T = -A ,$$

则称  $A$  为反对称矩阵。

$A = (a_{ij})$  为对称矩阵，则

$$A = A^T \iff a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

特点：主对角线为对称轴。

显然，单位矩阵，对角矩阵，数量矩阵都是对称矩阵。两个对称矩阵的和差，对称矩阵与数相乘都是对称矩阵。

$A = (a_{ij})$  为反对称矩阵，则

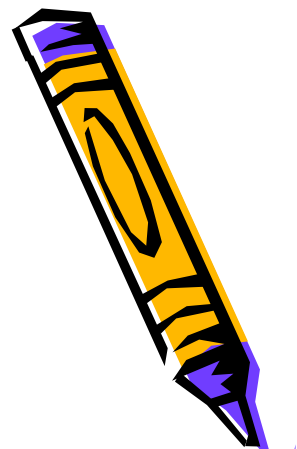
$$A = -A^T \iff a_{ij} = -a_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

特点：主对角线上的元素全部为 0。

例7 若方阵  $A$  为实对称矩阵,  
且  $A^2=0$ 。证明  $A=0$ 。

证明: 设  $A=(a_{ij})_{n \times n}$ , 由于  $A=A^T$

$$\begin{aligned} A^2 &= AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} \right)_{n \times n} = 0 \end{aligned}$$



由矩阵相等的定义得:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

取  $i = j$  则 
$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$a_{ik} \ (i, k = 1, 2, \dots, n)$  均为实数, 所以

$$a_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

即  $A = 0^\circ$



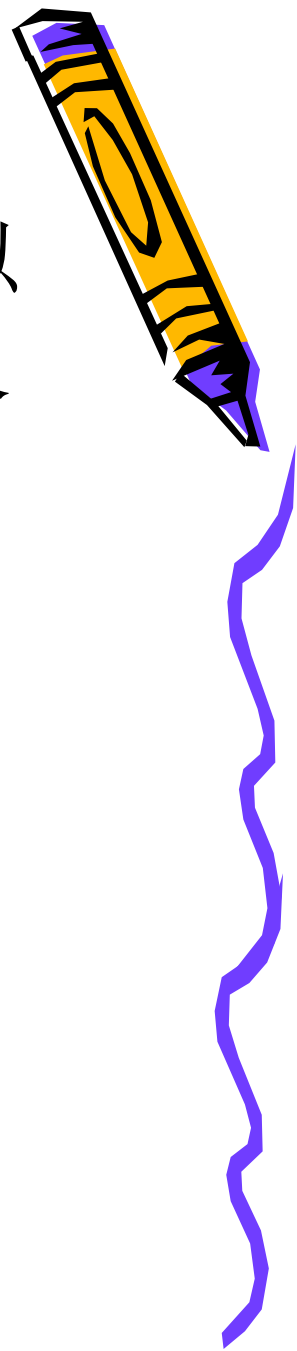
例8. 任一  $n$  阶方阵  $C$  , 都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和。

证明: 作方阵

$$A = \frac{1}{2}(C + C^T), \quad B = \frac{1}{2}(C - C^T)$$

显然

$$A = A^T, \quad B = -B^T \quad \text{且} \quad C = A + B$$



例9. 设列矩阵  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  满足  $X^T X = 1$ ,  $E$  为单位矩阵,  
 $H = E - 2XX^T$ , 证明  $H$  是对称矩阵,  
且  $HH^T = E$

证明: 由于

$$H^T = (E - 2XX^T)^T = E^T - 2(XX^T)^T = E - 2XX^T = H$$

所以  $H$  是对称矩阵。



$$\begin{aligned} HH^T &= H^2 = (E - 2XX^T)^2 \\ &= E - 4(XX^T) + 4(XX^T)(XX^T) \\ &= E - 4XX^T + 4X(X^TX)X^T \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} X^TX &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} HH^T &= E - 4XX^T + 4X(X^T X)X^T \\ &= E - 4XX^T + 4XX^T = E \end{aligned}$$



## 五、方阵的行列式

---

定义 7. 设  $A$  为一个  $n$  阶方阵，将其元素按原所在的位置构成的一个  $n$  阶行列式称为方阵  $A$  的行列式，并记为  $|A|$  或  $\det(A)$ 。

运算规律：(  $A, B$  为  $n$  阶方阵,  $k$  为常数)

$$1) \quad |A^T| = |A|$$

$$2) \quad |kA| = k^n |A|$$

$$3) \quad |AB| = |A| |B|$$

注：对方阵而言，一般  $AB \neq BA$  ，

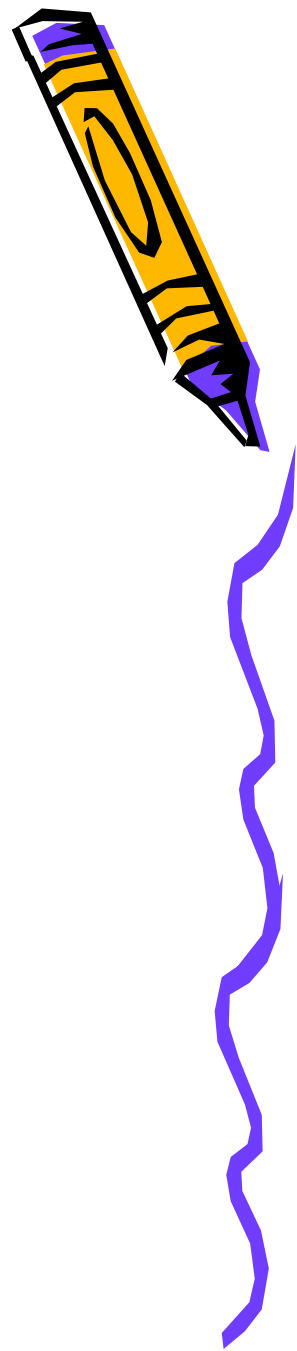
但总有  $|AB| = |BA|$

例 10 设 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

求  $|AB|$



解法 1 由于

所以 
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

解法 2 
$$|AB| = \begin{vmatrix} 11 & 17 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 56$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-8)(-7) = 56$$

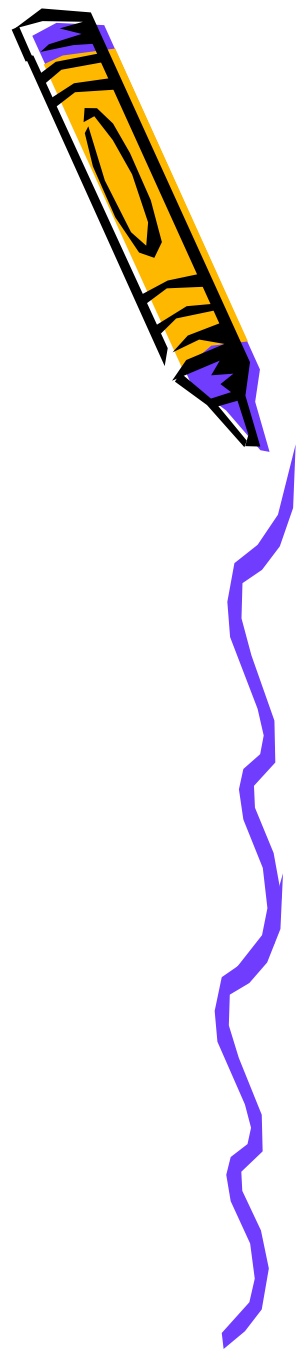


例 11 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 满足  
且  $AA^T = E$   $|A| = -1$ , 求  $|A + E|$

解 由于

$$\begin{aligned}|A + E| &= |A + AA^T| = |A(E + A^T)| \\&= |A||E + A^T| = |A|(E + A)^T| \\&= -|E + A|\end{aligned}$$

所以  $2|A + E| = 0$ , 即  $|A + E| = 0$





## § 2.3 逆矩阵

---

### 一、逆矩阵的概念

对于数, 若  $ab = ba = 1$ ,  
则  $b = a^{-1}$ 。

定义 8 设  $A$  为一个  $n$  阶方阵, 如果存在一个矩阵  $B$ , 使

$$AB = BA = E$$

则  $B$  为  $A$  的逆矩阵。并称  $A$  为可逆矩阵。

---

由定义可知：可逆矩阵是方阵，如果  $B$  是  $A$  的逆矩阵，则  $A$  也是  $B$  的逆矩阵。

如果方阵  $A$  可逆，则它的逆矩阵是唯一的。

设  $B, C$  都是  $A$  的逆矩阵，则

---

$$AB = BA = E$$

从而  $AC = CA = E$

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = C$$

由于矩阵  $A$  的逆矩阵是唯一的，通常记作  $A^{-1}$ ，从而有

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

因为线性变换与矩阵一一对应，有了逆矩阵的概念，也可以引入逆变换的概念。

设给定一个线性变换

[illegible]

若 记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

则 线 性 变 换 就 可 以 写 成

$$Y = AX \quad (2)$$

---

如果  $A$  可逆，则称线性变换为可逆线性变换。如用  $A^{-1}$  左乘 (2) 式两端

$$A^{-1}Y = A^{-1}AX$$

即得

$$X = A^{-1}Y$$

---

若

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

[illegible]

线性变换 (3) 称为线性变换 (1) 的逆变换。



定理 1 若方阵  $A$  可逆，则  $|A| \neq 0$

证明：设  $A$  可逆，则存在逆矩阵  $A^{-1}$ ，使得

$$AA^{-1} = E ,$$

从而

$$|AA^{-1}| = |A| |A^{-1}| = 1$$

所以

$$|A| \neq 0$$



## 二、逆矩阵的求法

设  $A$  为一个  $n$  阶方阵，它的行列式  $|A|$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式为  $A_{ij}$ ，以这些代数余子式为元素按下面方式构成的矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵。

注意： $A^*$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素是  $A_{ji}$ 。

定理 2 若  $n$  阶方阵  $A$  的行列式  $|A| \neq 0$ ，则  $A$  可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

其中  $A^*$  为矩阵  $A$  的伴随矩阵。

证明：先证  $AA^* = A^*A = |A|E$

由矩阵的乘法和行列式的展开定理及其推论可知

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

同样可证

$$A^*A = |A|E$$

由于 $|A| \neq 0$ ，所以

$$A \frac{A^*}{|A|} = E \qquad \frac{A^*}{|A|} A = E$$

即  $A$  可逆，且

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

推论 设  $A$  为  $n$  阶方阵，若有  $n$  阶方阵  $B$  使  $AB = E$  (或  $BA = E$ )，则  $B$  就是  $A$  的逆矩阵，即  $B = A^{-1}$ 。

证明：由  $AB = E$  得

$$|AB| = |A||B| = |E| = 1$$

所以  $|A| \neq 0$ ，由定理 2 可知  $A$  可逆，故存在  $A^{-1}$ ，而

$$B = EB = A^{-1}AB = A^{-1}E = A^{-1}$$

设  $A$  为  $n$  阶方阵，若  $|A|=0$ ，则称  $A$  为奇异矩阵，若  $|A|\neq 0$ ，则称  $A$  为非奇异矩阵。

设  $A$  为  $n$  阶方阵，则下面三个命题是等价的：

- (1)  $A$  为可逆矩阵
- (2)  $A$  为非奇异矩阵
- (3)  $A$  的行列式  $|A|\neq 0$

例 1 设 矩 阵

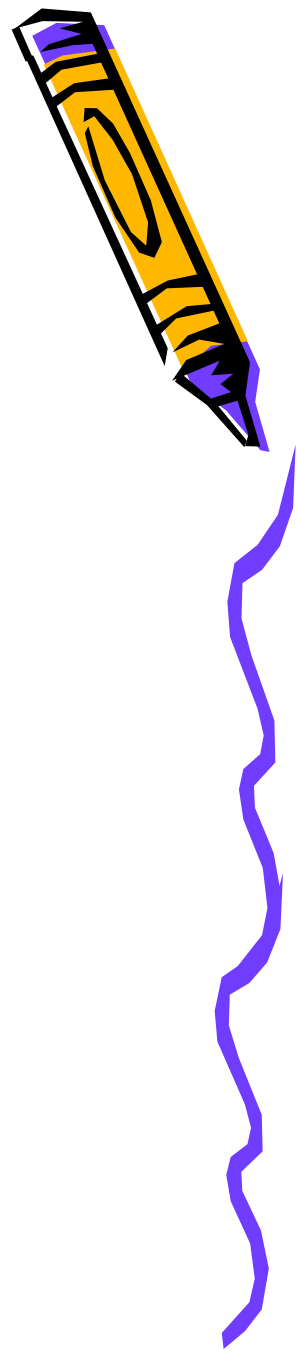
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $A$  的 逆 矩 阵

解 由 于

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

所 以 矩 阵  $A$  可 逆。





$$A_{11} = (-1)^{1+1} 2 = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} 0 = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} 1 = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} 3 = 3$$

从而

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

一般地，若矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (ad - bc \neq 0)$$

则矩阵  $A$  可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (ad - bc \neq 0)$$

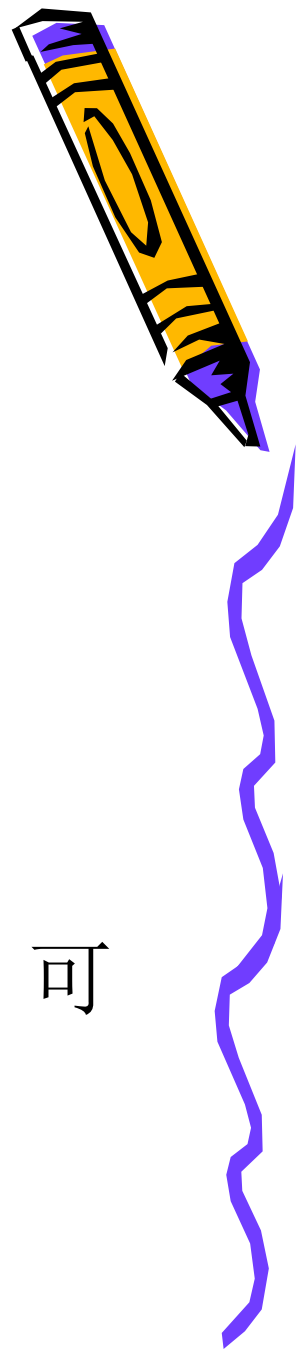
例 2 设 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

求 矩 阵  $A$  的 逆 矩 阵。

解： 先 计 算  $|A|$  和  $A^*$

由于  $|A| = 2 \neq 0$ ，所以 矩 阵  $A$  可  
逆。



$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = 6 \quad A_{22} = -6 \quad A_{23} = 2$$

$$A_{31} = -4 \quad A_{32} = 5 \quad A_{33} = -2$$

所 以

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

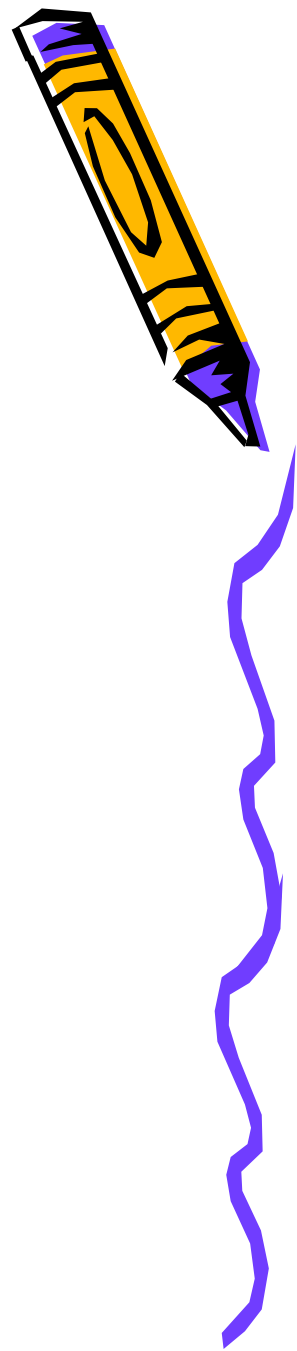
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### 例 3

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n)$$





### 三、逆矩阵的运算规律

---

(1)  $E^{-1} = E$

(2) 若  $A$  可逆, 则  $A^{-1}$  也可逆, 且  $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) 若  $A$  可逆, 数  $\lambda \neq 0$ , 则  $\lambda A$  也可逆,  
且  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

(4) 若  $A$  可逆, 则也  $A^T$  可逆, 且  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(5) 若  $A, B$  为同阶方阵且均可逆, 则  $AB$  也可逆, 且  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

证明：仅证 (4) 和 (5)

(4) 由于

$$|A^T| = |A| \neq 0$$

所以  $A^T$  可逆，且

因此 
$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = E = E$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$



(5) 因为

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

所以

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

一般地，若  $A_1, A_2, \dots, A_k$  都是  $n$  阶可逆方阵，则  $A_1A_2\cdots A_k$  也可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

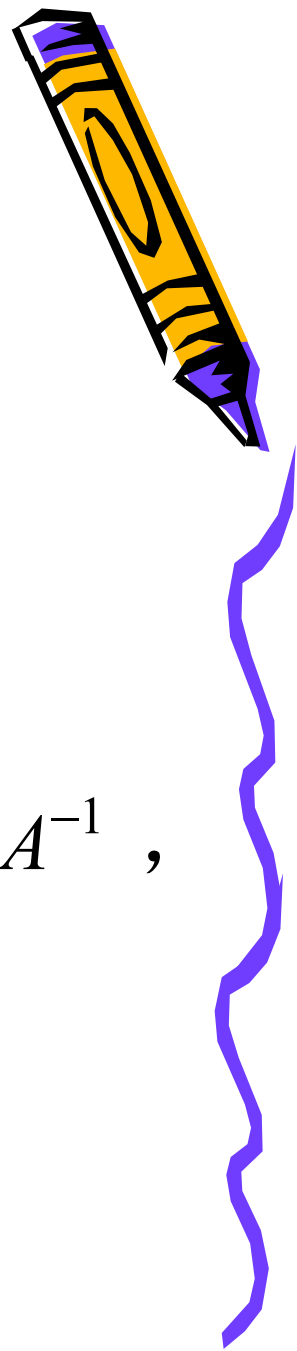
设  $A$  为  $n$  阶方阵, 当  $|A| \neq 0$  时, 定义

$$A^0 = E, \quad A^{-k} = (A^{-1})^k$$

( $k$  为自然数)。所以当  $|A| \neq 0$  时, 对于任意的整数  $\lambda, \mu$  均有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}$$

$$(A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}$$



例 4 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

求矩阵  $X$  使得  $AXB = C$

解

若  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$  存在, 将上式左乘  $A^{-1}$ ,  
右乘  $B^{-1}$ , 得

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$$



即

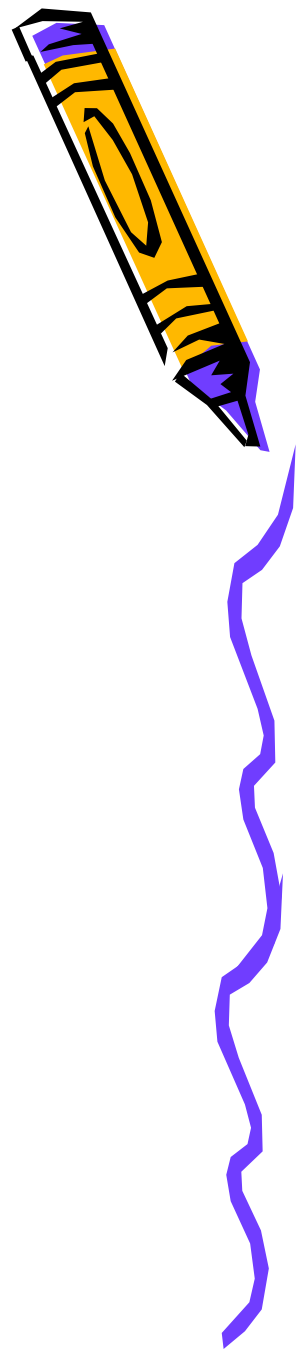
$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

经计算得  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$  存在, 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

则

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$



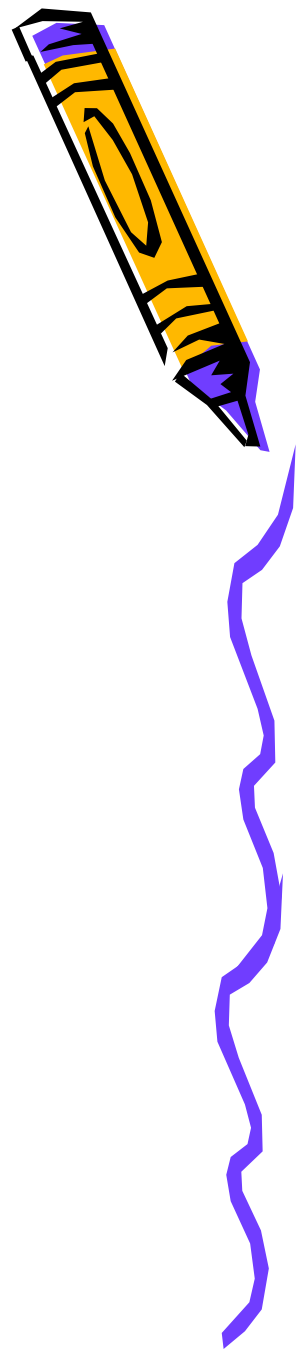
例 5 求解矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 73 & 26 \\ 23 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$





## 例 6 求解矩阵方程

$$X \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

解:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 & 4 & -2 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$





则线性方程组可记为  $AX = B$

若  $D = |A| \neq 0$ ，则  $A^{-1}$  存在，左乘  $A^{-1}$  有

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

即

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{|A|} A^* B = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1} b_k \\ \sum_{k=1}^n A_{k2} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn} b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{pmatrix}$$

（上式即为克拉默法则）

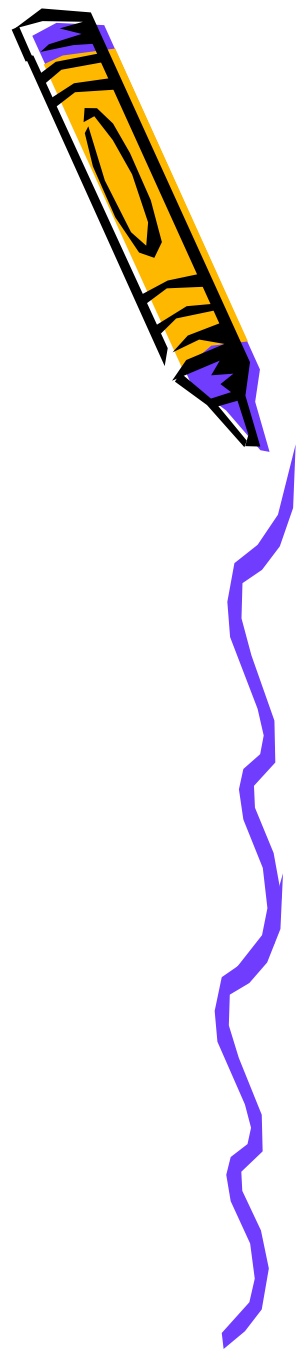


## 例 7 利用逆矩阵解下列方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

解 记

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$



则

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于  $|A| = 3 \neq 0$ ， $A$  可逆，所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

又由于

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/3 & -7/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 7/3 & -5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 8 若矩阵  $A$  满足  $A^2 - 2A - 4E = 0$  ,  
试证  $(A + E)$  是可逆矩阵, 并  
求  $(A + E)^{-1}$  。

证明: 由  $A^2 - 2A - 4E = 0$  , 得

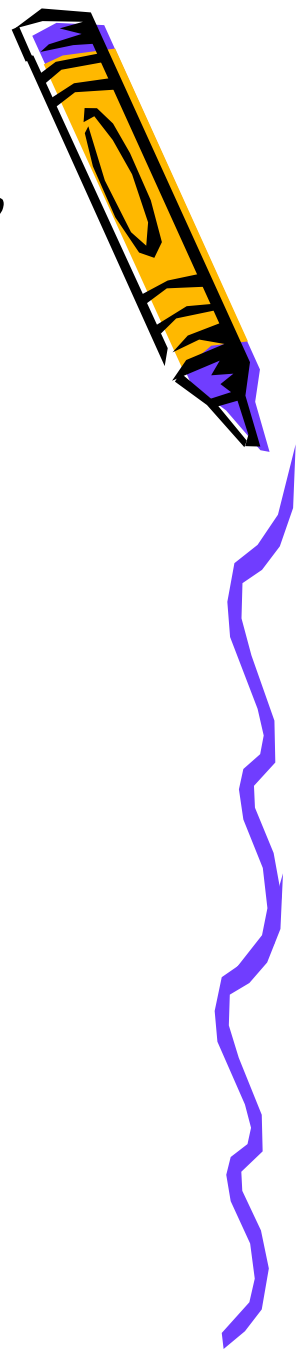
$$A^2 + A - 3A - 3E = E$$

$$(A + E)A - 3(A + E) = E$$

$$(A + E)(A - 3E) = E$$

由定义知  $(A + E)$  可逆, 且

$$(A + E)^{-1} = A - 3E$$



例 9  $A$  为  $n$  阶方阵,  $n$  为奇数,  
且  $|A|=1$  , 又  $A^T = A^{-1}$  , 试证  
 $E - A$  不可逆。

证明 只要证明  $|E - A| = 0$

由  $A^T = A^{-1}$  , 得  $AA^T = E$  , 从而有

$$\begin{aligned}|E - A| &= |AA^T - A| = |A(A^T - E)| \\&= |A| |(A - E)^T| = |A - E| \\&= (-1)^n |E - A| \\&= -|E - A|\end{aligned}$$



---

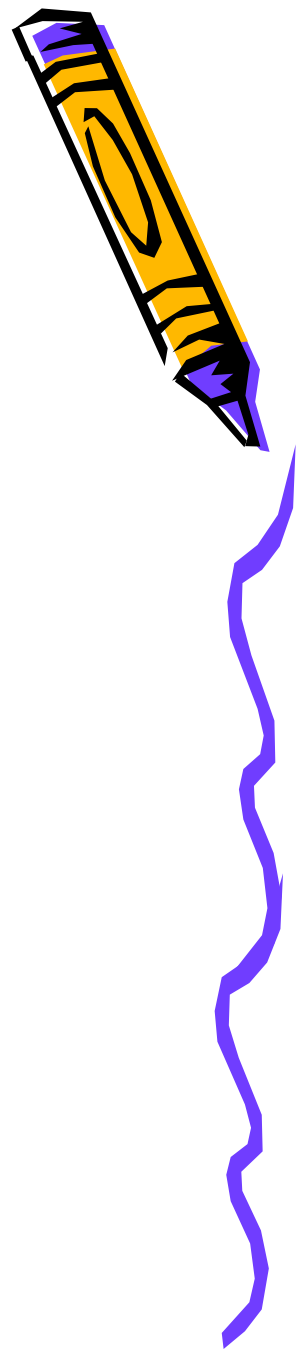
所 以

$$2|E - A| = 0$$

即

$$|E - A| = 0$$

---



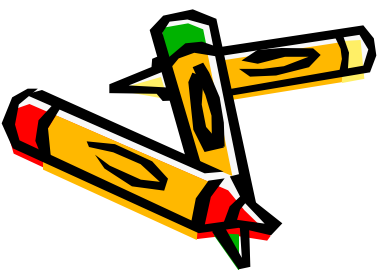
例 10 设  $P^{-1}AP = \Lambda$  ,

其中  $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

求  $A^{10}$  。

解 因  $P$  可逆, 且

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$



由  $P^{-1}AP = \Lambda$  , 得  $A = P\Lambda P^{-1}$  ,  
从而

$$A^{10} = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})$$

$$= P\Lambda^{10}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 + 2^{12} & -4 + 2^{12} \\ 1 - 2^{10} & 4 - 2^{10} \end{pmatrix}$$





## § 2.4 矩阵的秩与矩阵的初等变换

---

对于一般的矩阵，若行数与列数不相等，则不能构成行列式，为此引入矩阵的子式。

设  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，在  $A$  中任取  $k$  行  $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ ， $k$  列  $(j_1 < j_2 < \dots < j_k)$  位于这些行和列相交处的  $k^2$  个元素按原次序构成的  $k$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

叫做  $A$  的一个  $k$  阶子式。

例如对矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

取第 1 行、第 3 行 和 第 2 列、第 3 列，位于这些行和列相交处的 4 个元素组成一个二阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6 \neq 0$$



## 一、矩阵的秩

---

定义9. 矩阵  $A=(a_{ij})_{m \times n}$  , 若  $A$  中存在于一个  $r$  阶子式不等于  $0$ , 而所有  $r+1$  的阶子式 (如果存在的话) 全等于零, 则称矩阵  $A$  的秩为  $r$  . 记为  $\text{秩}(A)=r$  或  $r(A)=r$  . 零矩阵的秩规定为  $0$  .

由定义可以看出：

(1) 若  $A$  为  $m \times n$  矩阵，则  $A$  的秩不会大于矩阵的行数，也不会大于矩阵的列数，即  $r(A) \leq \min\{m, n\}$

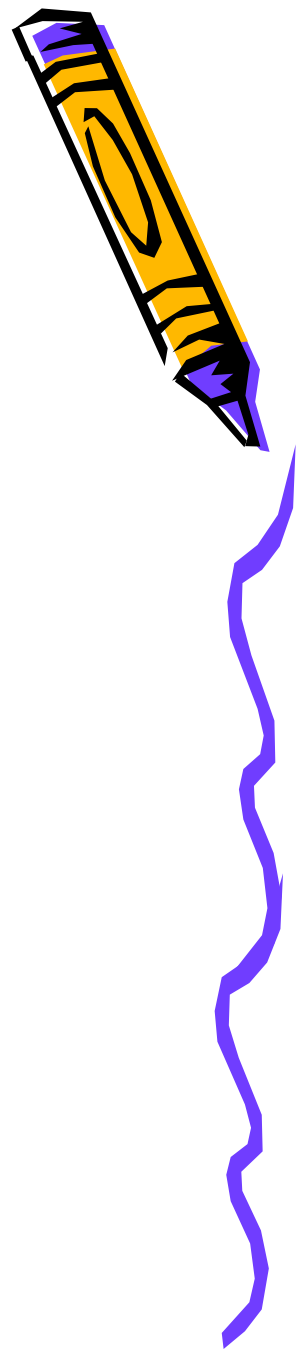
(2) 若  $r(A) = r$ ，则  $A$  中所有的  $r+1$  阶子式全为 0，因而所有的  $r+2$  阶子式（如果存在的话）全为零，...，即所有大于  $r$  阶的子式全为零， $r$  为  $A$  中不等于零的子式的最大阶数；

(3)  $r(A^T) = r(A)$ ,  $r(kA) = r(A)$ ,  $k$  为非零数;

(4) 若  $A$  的所有  $r+1$  阶子式都为零,  
则  $r(A) < r+1$ ;

(5) 若  $A$  中存在一个  $r$  阶子式不为零,  
则  $r(A) \geq r$ .

下面我们定义求矩阵的秩。



例 1. 设 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

求 矩 阵  $A$  的 秩。

解 二阶子式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$



而矩阵  $A$  的所有三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 2 & 12 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 12 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 12 & -2 & 12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

所以  $r(A)=2$ 。



设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 则矩阵  $A$  的所有  $k$  阶子式有  $C_m^k C_n^k$  个。

矩阵的初等变换是线性代数中的基本运算, 它在求矩阵的秩、求矩阵的逆和解线性方程组等方面起着重要的作用。

定义 10 矩阵的初等行变换是指下列三种变换。

(1) 对换变换：对调两行

对调矩阵  $A$  的第  $i, j$  两行记作  $r_i \leftrightarrow r_j$

(2) 数乘变换：以数  $k$  ( $k \neq 0$ ) 乘某一行中的所有元素

用  $k$  乘  $A$  的第  $i$  行，记作  $kr_i$

(3) 倍加变换：把某一行所有元素的倍  $k$  加到另一行对应的元素上去

第  $j$  行乘  $k$  后加到第  $i$  行记作  $r_i + kr_j$

若把定义 10 中的行换成列，即得到矩阵的三种初等列变换

(1) 对调矩阵  $A$  的第  $i, j$  两列记作

$$c_i \leftrightarrow c_j$$

(2) 以数  $k \neq 0$  乘矩阵  $A$  的第  $i$  列记作

$$kc_i$$

(3) 将  $A$  的第  $j$  列乘后  $k$  加到第  $i$  列上去记作

$$c_i + kc_j$$

矩阵的初等行变换和初等列变换统称初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆是同一类型的初等变换。以初等行变换为例，

(1) 变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换就是自身；

(2) 变换  $kr_i$  的逆变换为  $\frac{1}{k}r_i$ ；

(3) 变换  $r_i + kr_j$  的逆变换为  $r_i - kr_j$ 。

定义 11 将矩阵  $A$  经有限次初等变换得到矩阵  $B$ ，则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  等价，记作  $A \leftrightarrow B$ 。

矩阵的等价具有下列性质：

- (1) 自反性：  $A \leftrightarrow A$  ；
- (2) 对称性：若  $A \leftrightarrow B$ ，则  $B \leftrightarrow A$
- (3) 传递性：若  $A \leftrightarrow B$ ，  $B \leftrightarrow C$  则  $A \leftrightarrow C$ 。

**定理 3** 初等变换不改变矩阵的秩。

证 对矩阵  $A$  施行三种初等变换；不会改变  $A$  中是否存在不等于零的  $r$  阶子式和任  $r$  阶子式为零的性质，这是因为

变换 (1) 只会改变行列式的符号；

变换 (2) 只会增加或减少行列式的倍数；

变换 (3) 不改变行列式的值。

所以对矩阵  $A$  施行初等变换不会改变  $A$  的秩。（详细讨论见教材）

定理 3 说明 若  $A \leftrightarrow B$   
则  $r(A) = r(B)$ 。即两等价矩阵必等秩。





### 三、用初等变换求矩阵的秩

---

由于初等变换不改变矩阵的秩，所以可先用初等变换将矩阵化简，然后再求矩阵的秩。

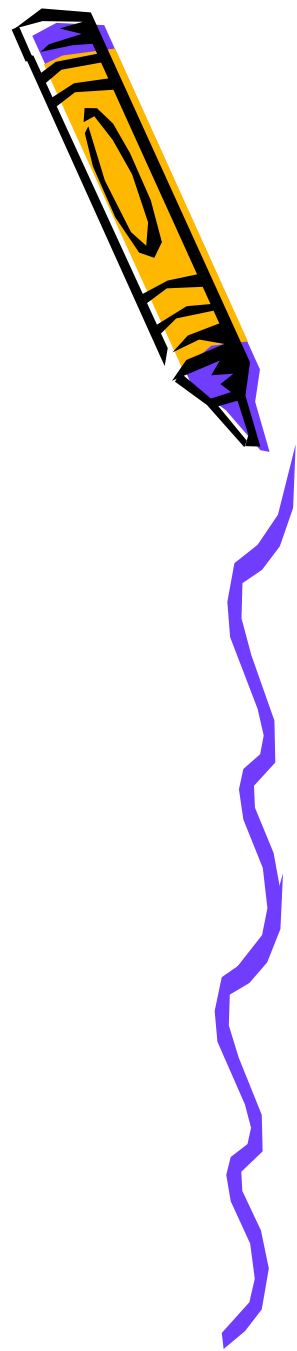
用记号“ $\rightarrow$ ”表示对矩阵做初等变换。

## 例 2. 用初等行变换求矩阵的秩

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

解

$$A \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 3r_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - 5r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

矩阵  $B_1$  称为行阶梯形矩阵，其特点是：

(1) 若有零行，则零行全部在矩阵的下方；

(2) 从第一个起，每行第一个非零元素前面零的个数逐行增加。

对于这样的矩阵，可画出一条阶梯线，线的下方全为 0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行数。

在矩阵

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

中，易见  $B_1$  的所有四阶子式全为零，  
且有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以  $r(B_1)=3$ ，由定理 3 知  $r(A)=3$ 。

可继续对矩阵  $B_1$  施行初等行变换

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_2
 \end{aligned}$$

矩阵  $B_2$  为行阶梯形且非零行的第 1 个元素为 1, 1 所在的列的其它元素全为零, 这样的矩阵称为行最简形矩阵。

再对矩阵  $B_2$  施行初等列变换



$$B_2 \xrightarrow[c_4+2c_1]{c_2+2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 - \frac{1}{2}c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 \leftrightarrow c_5]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_3$$

矩阵  $B_3$  的左上角为单位矩阵，称  $B_3$  为矩阵  $A$  的标准形。

由上面的讨论可知，对于给定矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，若  $r(A) = r$ ，则矩阵  $A$  必可经有限次初等变换化为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

其中  $B$  的主对角线上有  $r$  个  $1$ 。此时称矩阵  $B$  为  $A$  的标准形。

定义 12 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $A \leftrightarrow E$ , 则称  $A$  为满秩矩阵; 否则称为降秩矩阵。

若  $A \leftrightarrow E$ , 则  $r(A) = n$ , 从而  $|A| \neq 0$ , 即满秩矩阵就是可逆矩阵, 又称非奇异矩阵; 降秩矩阵就是不可逆矩阵, 也是奇异矩阵。

---

用初等行变换求矩阵的秩，比用矩阵秩的定义求矩阵的秩要简单的多，一般用这种方法求矩阵的秩。

若只求矩阵的秩，则将矩阵化为行阶梯形即可，阶梯形矩阵中非零行的个数就是矩阵的秩，不必化为行最简形，更不必化为标准形。

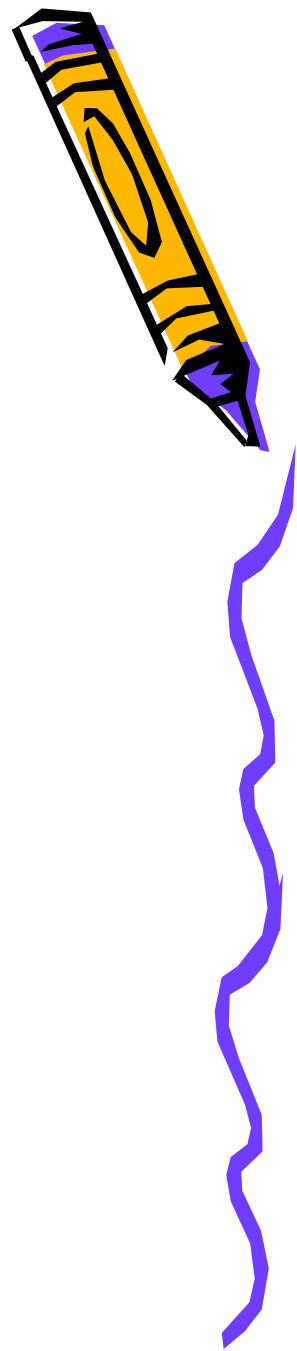
---

若要将矩阵化为标准形，一般须经初等行变换和初等列变换才能完成。

例 3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

求矩阵  $A$  的秩。



解

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 11r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

阶梯形矩阵  $B$  中有两个非零行，所以  $r(B)=2$ ，由定理 3 知  $r(A)=2$ 。

下面的矩阵都是行阶梯形矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$r(B) = 3$$

对于行阶梯形矩阵，它的秩就是它的非零行数。



# 对于线性方程组

[illegible]

若 记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

利用矩阵的乘法, 可将方程组  
写成如下的矩阵方程

$$Ax = b$$

矩阵  $A$  称为该方程组的系数矩阵。

若方程组 (1) 中的常数项全为零, 即  $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$  则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

为齐次线性方程组，用矩阵表示为

$$Ax = 0$$

用消元法求解线性方程组实际上就是对线性方程组进行初等行变换，简化未知量的系数，从而得到与原方程组同解且易直接求解的阶梯形方程组。

下面以齐次线性方程组为例说明其解法。

例 4. 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{(2)-3\times(1) \\ (3)-(1)}]{\quad} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 & (2) \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 & (3) \end{cases} \quad (B_1)$$



$$\begin{array}{l} \xrightarrow[-(3)-(2)]{-1 \times (2)} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & (1) \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \quad (B_2) \\ 0 = 0 & (3) \end{array} \right.$$

得到与原方程组同解的阶梯形方程，为求出方程组的解，将（2）中的  $x_2$  代入（1）

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \left\{ \begin{array}{ll} x_1 - x_3 - x_4 = 0 & (1) \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \quad (B_3) \\ 0 = 0 & (3) \end{array} \right.$$

上面的方程组中为4个未知量，两个独立方程的方程组，可设  $x_3$  为自由取值的未知量（自由未知量），解得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 可取任意值})$$

当  $x_3, x_4$  任取一组值时，代入上式便得到方程的一个解，方程组有无数多个解。

上面的求解过程可用矩阵的初等行变换来实现，其做法更简单。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_2 \quad (\text{阶梯形})$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_3 \text{ (行最简形)}$$

由矩阵  $B_3$  可得到上面用消元法得到的同解最简方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

取  $x_3, x_4$  为自由未知量, 则有

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 可取任意值})$$

令  $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ , 方程组的解可记为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -2c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

即

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

下面利用矩阵的秩给出齐次线性方程组有非零解的充分必要条件。

定理 4.  $n$  元齐次线性方程组  $Ax = 0$  有非零解的充分必要条件是系数矩阵  $A$  的秩  $r(A) < n$ 。

证必要性：

设方程组  $Ax = 0$  有非零解要证  $r(A) < n$  。

(用反证法) 假设  $r(A)=n$ , 则  $A$  中必有一个  $n$  阶子式  $D_n \neq 0$ , 根据克拉默法则,  $n$  阶子式  $D_n$  所对应的  $n$  个方程只有零解。这与原方程组有非零解矛盾, 从而  $r(A)=n$  不成立,  $r(A) < n$ 。



充分性：设  $r(A) < n$ ，则  $A$  的行阶梯形矩阵只有  $r$  ( $r < n$ ) 个非零行，从而方程组  $Ax = 0$  有  $n - r$  个自由未知量，让自由未知量的值都取 1，即可得方程组的一个非零解。

定理 4 所述条件  $r(A) < n$  的必要性是克拉默法则(齐次线性方程组情形)的推广, 克拉默法则只适用于  $m = n$  的情形, 其充分性包含了克拉默法则的逆命题。因而由定理 4 可得:

---

推论 含有  $n$  个方程的  $n$  元齐次线性方程组  $Ax=0$  有非零解的充分必要条件是  $|A|=0$ 。

用矩阵的初等行变换也可以求解非齐次线性方程组。第五章将详细讨论线性方程组的求解问题。

---



## § 2.5 初等方阵

---

**定义 13.** 将  $n$  阶单位方阵施行一次初等变换所得的矩阵称为初等方阵。

三种初等变换对应三种初等方阵。

(1) 对换两行或对换两列

将单位矩阵  $E$  第  $i, j$  行（列）互换，记为

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & \dots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & \dots & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

用  $m$  阶初等方阵  $E_m(i,j)$  左乘矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，则

$$E_m(i,j)A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \leftarrow r_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \leftarrow r_j \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

用  $n$  阶初等方阵  $E_n(i,j)$  右乘矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，则

$$AE_n(i,j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$   
 $c_i$

$\uparrow$   
 $c_j$

(2) 以数  $k \neq 0$  乘  $E$  某行(列)

将  $E$  第  $i$  行(列)乘以数  $k \neq 0$ , 记为

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & \uparrow c_i & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow r_i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$



$$E_m(i(k))A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m2} \end{pmatrix}$$

$$AE_n(i(k)) = ?$$

(3)将数  $k$  乘某行（列）加到另一行（列）上。

将  $E$  的第  $j$  行乘以数  $k$  后加到第  $i$  行上，（可以看作第  $i$  列乘数  $k$  后加到第  $j$  列），记为

$$E(i, j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \\ & c_i & & c_j & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow r_i \\ \leftarrow r_j \\ \\ \end{matrix}$$

可以验证

$E_m(i, j(k))A =$  将  $A$  的第  $j$  行乘以数  $k$  后加到第  $i$  行上;

$AE_n(i, j(k)) =$  将  $A$  的第  $i$  列乘数  $k$  后加到第  $j$  列

定理 5. 若  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵, 则对  $A$  施行一次行初等变换, 相当于对  $A$  左乘一个相应的  $m$  阶初等方阵, 对  $A$  施行一次列初等变换, 相当于对  $A$  右乘一个相应的  $n$  阶初等方阵。

以初等行变换为例

(1) 若  $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} A_1$ , 则  $A_1 = E(i, j)A$  ;

(2) 若  $A \xrightarrow{kr_i} A_1$ , 则  $A_1 = E(i(k))A$  ;

(3) 若  $A \xrightarrow{r_i + kr_j} A_1$ , 则  $A_1 = E(i, j(k))A$  。

初等方阵均为可逆方阵，其逆仍为初等方阵。

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j) \quad E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k))$$

---

由上一节的讨论矩阵的秩为，  
那么经过有限次的初等行变换和初  
等列变换可将矩阵化为标准形

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---



这些初等行变换和初等列变换相当于对矩阵  $A$  左、右乘相应的初等方阵。设行变换所对应的初等方阵和列变换所对应的初等方阵分别为

$$P_1, P_2, \cdots, P_l \quad \text{和} \quad Q_1, Q_2, \cdots, Q_s$$

则

$$P_1 P_2 \cdots P_l A Q_1 Q_2 \cdots Q_s = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

记

$$P = P_1 P_2 \cdots P_l, \quad Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_s$$

上式可写成

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此得到

定理 6 给定  $m \times n$  矩阵  $A$ , 则存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 7. 任一可逆方阵  $A$  , 均可表为有限个初等方阵的乘积。

证明：因为  $A$  为可逆方阵，则  $A \leftrightarrow E$  。即  $A$  可经过若干次初等变换化为同阶单位方阵  $E$  。所以存在初等方阵

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_l \quad \text{和} \quad S_1, S_2, \cdots, S_k$$

使得

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_l A S_1 S_2 \cdots S_k = E$$

上式两边依次左乘

$$Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \cdots, Q_l^{-1}$$

右乘

$$S_k^{-1}, S_{k-1}^{-1}, \cdots, S_1^{-1}$$

即

$$\begin{aligned} A &= Q_l^{-1} Q_{l-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1} E S_k^{-1} S_{k-1}^{-1} \cdots S_1^{-1} \\ &= Q_l^{-1} Q_{l-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1} S_k^{-1} S_{k-1}^{-1} \cdots S_1^{-1} \end{aligned}$$

其中  $Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \dots, Q_l^{-1}$  和  $S_k^{-1}, S_{k-1}^{-1}, \dots, S_1^{-1}$  均为初等方阵。

由定理 7 可以得到矩阵求逆的一个简便有效的方法 ---- 利用初等变换求逆法。

对于给定的可逆方阵  $A$ ，必存在有限个初等方阵  $P_1, P_2, \dots, P_m$  使  $A = P_1 P_2 \cdots P_m$ ，亦即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_m E$$

上式两边依次左乘初等方阵

$P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_m^{-1}$ , 即

$$P_m^{-1} P_{m-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E$$

上式两边右乘  $A^{-1}$ , 得

$$P_m^{-1} P_{m-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}$$



这说明对  $A$  施行有限次初等行变换得到单位方阵  $E$ 。对  $E$  依次施行与对  $A$  同样的初等行变换, 即得  $A^{-1}$ 。

构造矩阵  $(A : E)$ , 同时施行有限次只对行的初等变换即得  $(E : A^{-1})$ , 即

$$(A : E) \xrightarrow{\text{RowTransform}} (E : A^{-1})$$

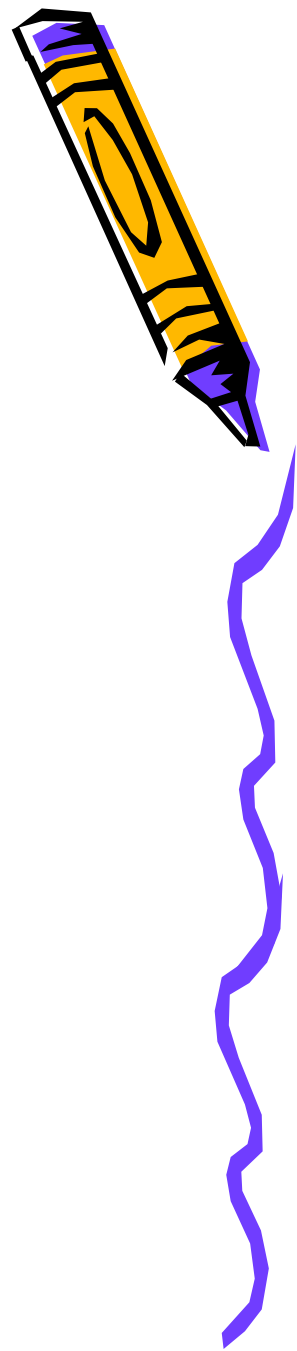
例 1 设 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求  $A^{-1}$

解: 设

$$(A | E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \\ \xrightarrow{r_3 - 3r_1} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7/3 & -1/3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$$

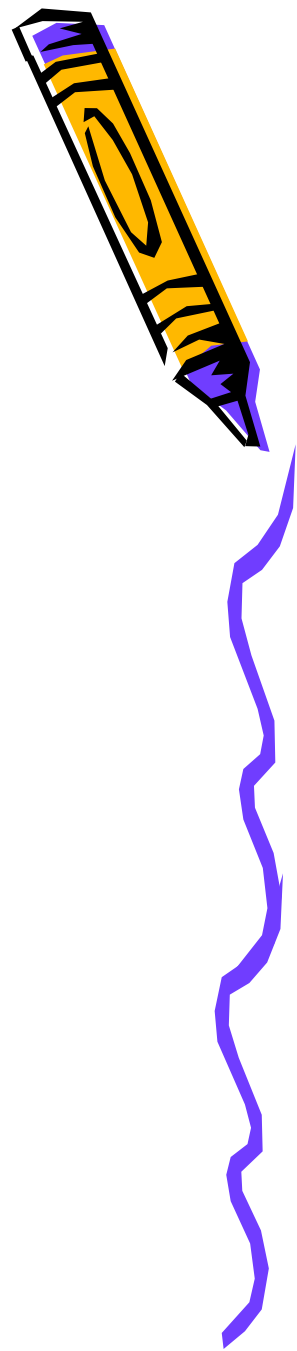
例 2 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

求  $A^{-1}$

解: 设

$$(A | E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \\ \xrightarrow{r_3 - 3r_1} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_1 + r_2} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_1 - 2r_3} \\ \xrightarrow{r_2 - 5r_3} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(-\frac{1}{2})r_2} \\ \xrightarrow{(-1)r_3} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

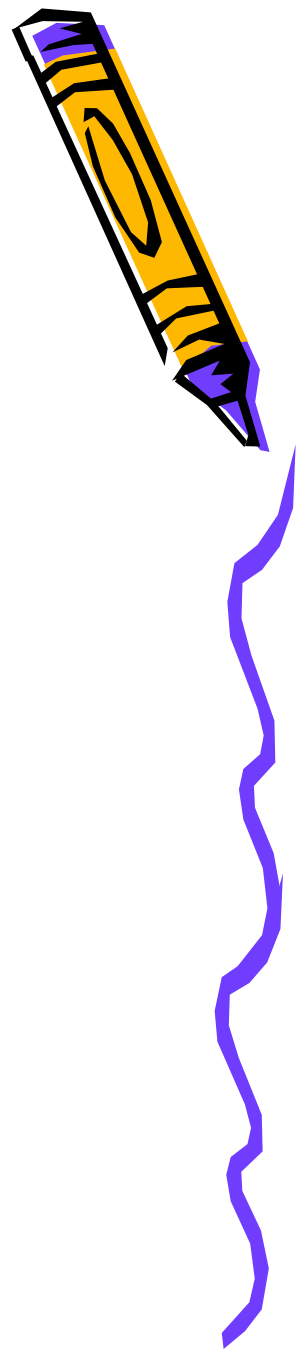


$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 3 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求  $A^{-1}$



解: 设

$$(A|E) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_1+2r_2} \\ \xrightarrow{r_3-4r_2} \\ \xrightarrow{r_4-2r_2} \end{array} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_2 - r_4} \\ \xrightarrow{r_3 - r_4} \end{array} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right)$$

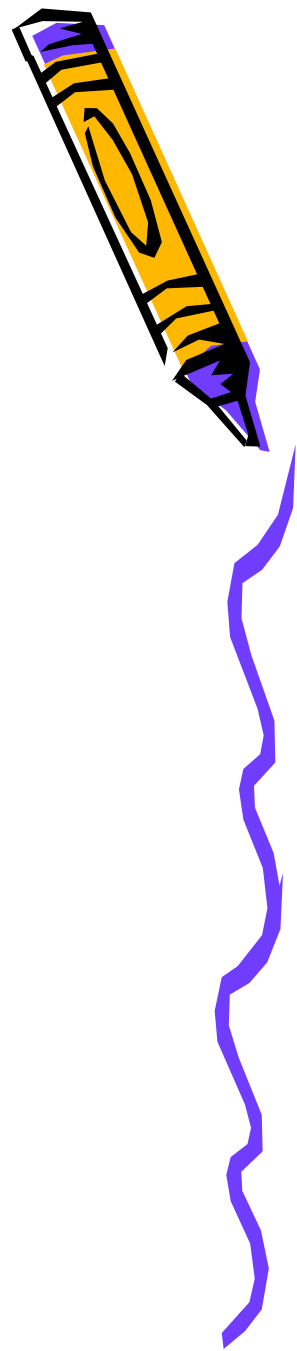
$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_1 - r_3} \\ \xrightarrow{r_2 - 2r_3} \end{array} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

例 4. 求矩阵  $X$  , 使  $AX=B$  , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$





解: 若  $A$  可逆, 则  $X = A^{-1}B$

$$A^{-1}(A \mid B) = (E \mid A^{-1}B)$$

$$(A \mid B) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_1 + r_2} \\ \xrightarrow{r_3 - r_2} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \\ \xrightarrow{r_2 - 5r_3} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)r_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-\frac{1}{2})r_2 \end{smallmatrix}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

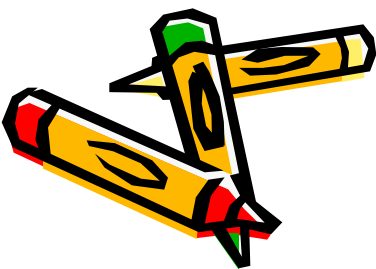
因此

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例 5. 试证: 秩为  $r$  的矩阵  $A$  可表示成  $r$  个秩为 1 的矩阵之和

证明: 设  $R(A) = r$ , 则有非奇异矩阵  $P, Q$  使

$$PAQ = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \Bigg\}^r = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$$



其中  $A_i (i=1,2,\cdots,r)$  为元素  $a_{ii}=1$ ，其余元素全是零的矩阵. 由上可得

$$A = P^{-1}A_1Q^{-1} + P^{-1}A_2Q^{-1} + \cdots + P^{-1}A_rQ^{-1}$$

$$R(P^{-1}A_iQ^{-1}) = R(A_i) = 1 \quad (i=1,2,\cdots,r)$$

即  $A$  可以表示成  $r$  个秩为 1 的矩阵的和。



## § 2.6 矩阵的分块法

---

在一个矩阵中划若干条纵线和横线，将其分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

根据 不同 需要 可以 作 多种 划分, 如

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} \end{pmatrix}$$

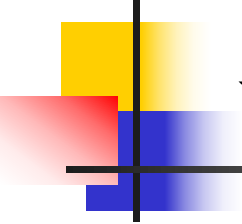
**(2)**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} \\ a_{21} & \vdots & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{31} & \vdots & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} \end{pmatrix}$$

**(3)**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & \vdots & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \vdots & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$





## 一、分块矩阵加法

---

设矩阵  $A, B$  为  $m \times n$  矩阵, 用相同的分法把矩阵  $A$  和  $B$  分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

(其中  $A_{ij}$  的行数、列数均与  $B_{ij}$  的行数、列数相同), 则有

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2s} + B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \cdots & A_{rs} + B_{rs} \end{pmatrix}$$



## 二、数乘分块矩阵

---

设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

$\lambda$  为一常数，则

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{pmatrix}$$



### 三、分块矩阵的转置

---

设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

则

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}$$



## 四、分块矩阵的乘法

---

设矩阵  $A$  为  $m \times l$  矩阵,  $B$  为  $l \times n$  矩阵, 对  $A, B$  作分块, 使得  $A$  的列分法与  $B$  的行的分法一致, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}$$

其中  $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{is}$  的列数分别等于  $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{sj}$  的行数 ( $i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, t$ )，则有

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix}$$

其中

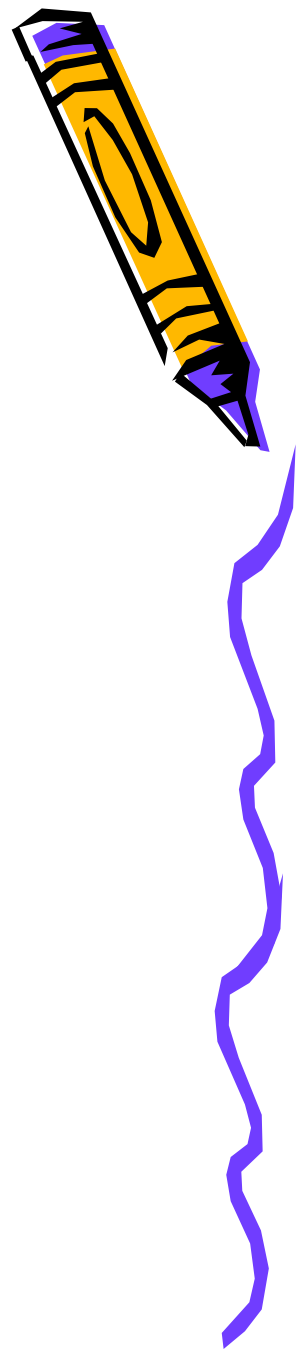
$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj} \\ (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, t)$$

例 1 设 矩 阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

求  $AB$





解 将矩阵  $A, B$  分块成

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_1 & E \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_1 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



## 五、分块对角阵

---

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $A$  的分块矩阵中只有在主对角线上有非零的子方块, 其余子块都为零矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

其中  $A_i (i=1,2,\cdots,s)$  都是方阵, 那么称  $A$  为分块对角阵。

分块对角阵有下列性质：

1) 设 $A, B$  是两个类型完全相同的分

块对角阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

其中  $A_i$  与  $B_i$  为同阶方阵。则有

$$A \pm B = \begin{pmatrix} A_1 \pm B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 \pm B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \pm B_s \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s B_s \end{pmatrix}$$

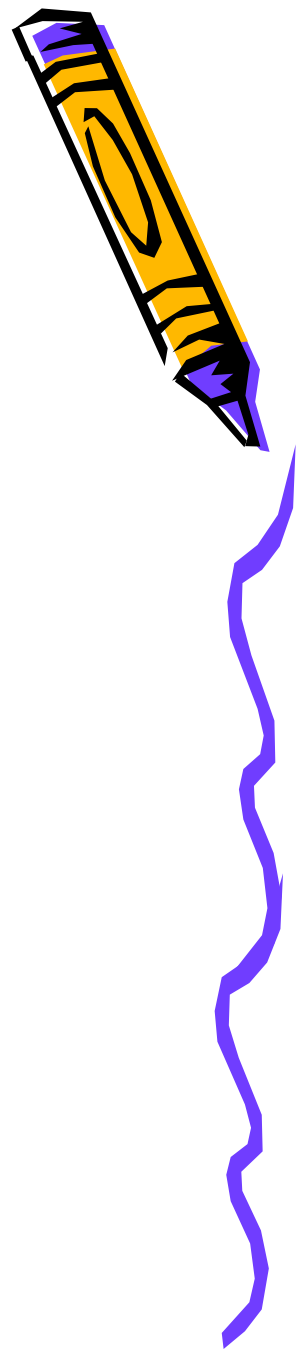
$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|$$

2) 设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

若  $|A_i| \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$ , 则  $A$  可逆且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$



例 2 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

求  $A^{-1}$

解:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} \\ 0 & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$



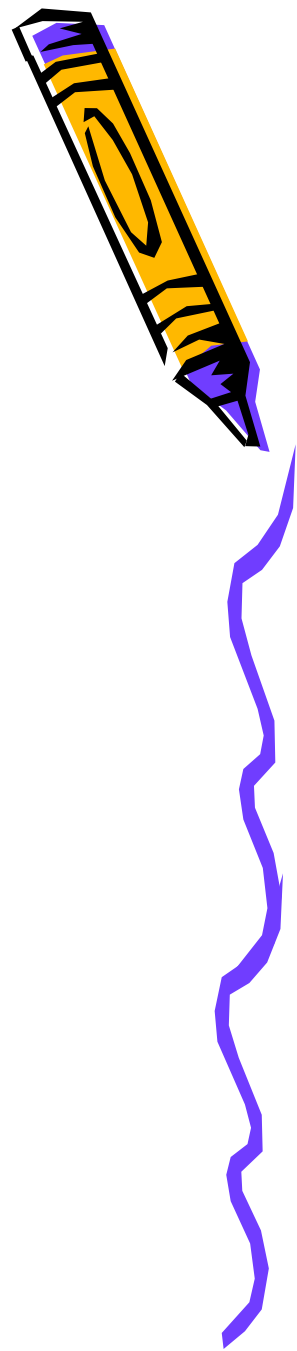
例 3 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $A^{-1}$

解： 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$





则

$$|A| = |A_1| |A_2| = 1 \times 1 = 1$$

所以矩阵  $A$  可逆, 由于

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

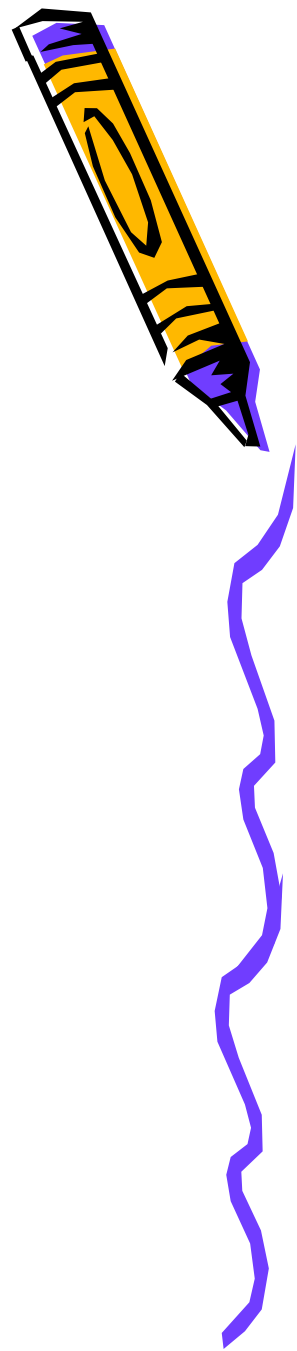
从而

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

例 4 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $A^{2k}$  及  $|A^{2k}|$  ( $k$  为正整数)



解： 设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

则

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} A_1^{2k} & \\ & A_2^{2k} \end{pmatrix}$$

其中

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, \quad A_1^{2k} = \begin{pmatrix} 5^{2k} & 0 \\ 0 & 5^{2k} \end{pmatrix}$$

$$A_2^2 = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由数学归纳法, 可证

$$A_2^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{2k} = 2^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 4k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^k & 4^{k+1}k \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}$$

所 以

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} 5^{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k & 4^{k+1}k \\ 0 & 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix}$$

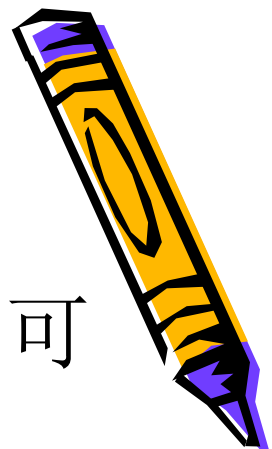
$$|A^{2k}| = 5^{2k} 5^{2k} 4^k 4^k = 10^{4k}$$

例 5 设  $|A| \neq 0$ ,  $|C| \neq 0$  求证:  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  可逆, 并求出逆矩阵。

解: 因为  $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C| \neq 0$

所以矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  可逆, 设逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$



则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = E$$

即

$$\begin{pmatrix} AX_1 + BX_3 & AX_2 + BX_4 \\ CX_3 & CX_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$



所 以

$$\left\{ \begin{array}{ll} AX_1 + BX_3 = E & (1) \\ AX_2 + BX_4 = 0 & (2) \\ CX_3 = 0 & (3) \\ CX_4 = E & (4) \end{array} \right.$$

由于  $|C| \neq 0$  , 所以  $C^{-1}$  存在 , 则  $X_3 = 0, X_4 = C^{-1}$   
 $X_3 = 0$  代入 (1)  $AX_1 = E, X_1 = A^{-1}$   $X_4 = C^{-1}$  代  
入 (2)  $AX_2 = -BC^{-1}, X_2 = -A^{-1}BC^{-1}$   
所以

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵，常把矩阵按列分块：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

其中  $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})^T$  是一列的矩阵，又叫做列向量。

也可以把矩阵  $A$  按行分块:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

其中  $\beta_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{in})$  是一行的矩阵, 又叫做行向量。

## 对于线性方程组

[illegible]

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

其中  $A$  为系数矩阵,  $x$  称为未知量向量,  $b$  称为常数项向量。若记  $\bar{A} = (A:b)$ , 称  $\bar{A}$  为增广矩阵。

若把矩阵  $A$  按列分成  $n$  块, 则方程组可写成

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

即

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b$$

若把矩阵  $A$  按行分成  $m$  块, 则方程组可写成

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} x = b$$



按分块矩阵的乘法有

$$\begin{pmatrix} \beta_1 x \\ \beta_2 x \\ \vdots \\ \beta_m x \end{pmatrix} = b$$

这相当于把每个方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

记作

$$\beta_i x = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

---

上面的分块方法在后面的各章中有重要的作用。

矩阵分块法的应用非常灵活，应根据实际问题的需要及矩阵元素分布的结构特点进行分块。

---