

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

# Desenvolvimento de um Compilador de BRDFs em LATEXpara linguagem de shading GLSL, através da técnica Pratt Parsing

Trabalho de Conclusão de Curso

Everton Santos de Andrade Júnior



São Cristóvão – Sergipe

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

#### Everton Santos de Andrade Júnior

# Desenvolvimento de um Compilador de BRDFs em LATEXpara linguagem de shading GLSL, através da técnica Pratt Parsing

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Computação da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador(a): Dra. Beatriz Trinchão Andrade Coorientador(a): Dr. Gastao Florencio Miranda Junior

# Resumo

O presente trabalho propõe o desenvolvimento de um compilador de funções de distribuição de reflexão bidirecional (BRDFs) expressas em LaTeX para a linguagem de shading GLSL, utilizando a técnica de Pratt *Parsing* e linguagem de programação Odin. O objetivo é automatizar o processo de tradução de funções complexas de materiais, frequentemente descritas em equações LaTeX, para o código GLSL utilizado em programação de *shaders* para OpenGL. Ao fornecer essa ferramenta, pretende-se não apenas simplificar o trabalho dos desenvolvedores e pesquisadores na área de computação gráfica, mas também democratizar o acesso e compreensão de modelos de materiais complexos. Além disso, ao permitir que as BRDFs sejam expressas em uma forma mais familiar e acessível, como a notação matemática, o compilador reduz a barreira de entrada para aqueles que não estão familiarizados com linguagens programação, de modo a facilitar a colaboração interdisciplinar entre profissionais de diferentes áreas. A validação dos shader de saída do compilador proposto será feita através da ferramenta Disney BRDF Explorer, que possibilita a visualização e análise de BRDF.

Palavras-chave: Compilador, BRDFs, LaTeX, GLSL, Shading, Pratt Parsing.

# Sumário

1	Introdução 5						
	1.1	Motiva	ação	5			
	1.2	Objeti	vo	$\epsilon$			
	ura do Documento	$\epsilon$					
2	Conceitos						
3	Con	ceitos 2	2	8			
	3.1	Radio	metria	8			
		3.1.1	Energia Radiante e Fluxo	ç			
		3.1.2	Radiância e BRDF	10			
	3.2	Model	los de BRDFs	12			
		3.2.1	BRDF Pura Especular				
		3.2.2	BRDF Difusa Ideal	13			
		3.2.3	BRDF Glossy	14			
		3.2.4	BRDF Retro-Refletora				
	3.3	Introd	ução ao Shading e ao <i>pipeline</i> de GPU	15			
		3.3.1	Shader de Vértice	16			
		3.3.2	Shader de Fragmento	17			
	3.4	Compi	iladores	18			
		3.4.1	Cadeia de Símbolos e Alfabeto	18			
		3.4.2	Definições de Linguagens	18			
		3.4.3	Compilador como um Transformação				
		3.4.4	Gramática				
			3.4.4.1 Gramáticas Livres de Contexto (GLCs)				
		3.4.5	Análise Léxica				
		3.4.6	Análise Sintática ou <i>Parsing</i>				
		3.4.7	Pratt Parsing				
			3.4.7.1 Pseudo-código para Análise de Expressões				
		3.4.8	Geração da Linguagem Alvo	21			
4	Revi	isão Bil	oliográfica	23			
-	4.1		amento Sistemático	23			
		4.1.1	Seleção das Bases	23			
		4.1.2	Questões de Pequisa	24			
		4.1.3	Termos de Busca				
				_			

	4.1.4	Critérios	
		4.1.4.1 Critérios de Inclusão	
		4.1.4.2 Critérios de Exclusão	
	4.1.5	Descrição dos Trabalhos Relacionados	
		4.1.5.1 genBRDF: Discovering New Analytic BRDFs with Ge	enetic
		Programming	
		4.1.5.2 Slang: language mechanisms for extensible real-time shape	ading
		systems	
		4.1.5.3 Tree-Structured Shading Decomposition	
		4.1.5.4 A Real-Time Configurable <i>shader</i> Based on Lookup Tab	oles .
4.2	Pesqui	isa por Repositórios online	
5 Me	todologi	io.	
5.1	Anális	ia	
5.1		se	
5.3	1	n de Casos de Teste	
5.4	_	mentação do Compilador	
	Impici	mentação do Compilador	
	Exper	imentos de Renderização	
5.5	_	rimentos de Renderização	
	_	de Continuação	
5.5 5.6	Plano		
5.5 5.6	Plano sultados	de Continuação	· · · ·
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano sultados	de Continuação	· · · · ·
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano sultados Parser	de Continuação	
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano sultados Parser 6.1.1	de Continuação	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2	de Continuação	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2	de Continuação  Iniciais  e Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos  6.1.3.2 Gerenciamento de Escopo	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2	de Continuação  Iniciais  e Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2	de Continuação  Iniciais  e Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos  6.1.3.2 Gerenciamento de Escopo	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2 6.1.3	de Continuação  Iniciais  Le Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos  6.1.3.2 Gerenciamento de Escopo  6.1.3.3 Estrutura da Árvore de Sintaxe	
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2 6.1.3	de Continuação  Iniciais  e Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos  6.1.3.2 Gerenciamento de Escopo  6.1.3.3 Estrutura da Árvore de Sintaxe  Implementação do Padrão de Visitante	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2 6.1.3	de Continuação  Iniciais  e Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos  6.1.3.2 Gerenciamento de Escopo  6.1.3.3 Estrutura da Árvore de Sintaxe  Implementação do Padrão de Visitante  Testes	
5.5 5.6 <b>Re</b> s	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2 6.1.3	de Continuação  Iniciais  Le Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos  6.1.3.2 Gerenciamento de Escopo  6.1.3.3 Estrutura da Árvore de Sintaxe  Implementação do Padrão de Visitante  Testes  6.1.5.1 Geração de Árvore de Sintaxe	
5.5 5.6 <b>Res</b> 6.1	Plano Sultados Parser 6.1.1 6.1.2 6.1.3	de Continuação  Iniciais  Le Lexer em Odin  Parser  Gramática  Tabela de Símbolos  6.1.3.1 Estrutura de Símbolos  6.1.3.2 Gerenciamento de Escopo  6.1.3.3 Estrutura da Árvore de Sintaxe  Implementação do Padrão de Visitante  Testes  6.1.5.1 Geração de Árvore de Sintaxe  6.1.5.2 Interpretação Semântica	

# Introdução

Na computação gráfica, a representação realista de cenas tridimensionais depende fortemente da modelagem da luz e dos materiais que compõem os objetos na cena. A interação da luminosidade incidente com esses materiais é crucial para a geração de imagens fiéis à realidade. Uma abordagem fundamental para modelar essa interação é por meio das funções de distribuição de refletância bidirecional, conhecidas como BRDFs (do inglês, *Bidirectional Reflectance Distribution Functions*).

As BRDFs, essencialmente, calculam a proporção entre a energia luminosa que atinge um ponto na superfície e como essa energia é refletida, transmitida ou absorvida (PHARR; JAKOB; HUMPHREYS, 2016). Na renderização, essas funções são implementadas por meio de programas especializados nas unidades de processamento gráfico (GPUs), chamados de *shaders*. Cada interface de programação, do inglês *Application Programming Interface* (API), disponibiliza etapas diferentes onde esses executáveis podem ser programados durante o processo de renderização. Esses *shaders* concedem a capacidade de cada objeto renderizado ter sua aparência configurada por meio de um código que implementa uma BRDF.

## 1.1 Motivação

Existem linguagens específicas para a programação de *shaders*, as quais permitem a modificação de procedimentos que representam uma BRDF. No entanto, essa aplicação requer conhecimento especializado em programação. Essa barreira técnica pode restringir a exploração dos efeitos visuais por profissionais de áreas não relacionadas à programação. Diante disso, surge a necessidade de ferramentas mais acessíveis para a criação de *shaders*.

No meio acadêmico, as BRDFs são comumente descritas por fórmulas escritas em LATEX, Desta forma, uma abordagem promissora para simplificar a criação de *shaders* é o desenvolvimento de um compilador capaz de traduzir BRDFs escritas em LATEX para *shaders*. Isso

permitiria uma maior acessibilidade e democratização na criação de efeitos visuais complexos.

## 1.2 Objetivo

Este trabalho visa projetar e implementar um compilador que, a partir de BRDFs escritas como equações em LATEX, seja capaz de gerar código de *shading* na linguagem alvo da API OpenGL. O resultado será um *shader* capaz de reproduzir as características de reflexão da BRDF original ou, ao menos, alcançar uma aproximação satisfatória dessas características, levando em conta as limitações da linguagem de *shading* da API, principalmente as representações de dados de forma discreta.

#### 1.3 Estrutura do Documento

No Capítulo 3, descrevemos os conhecimentos necessários para entender BRDFs, incluindo quantificação de luminosidade e radiação, e conceitos de compiladores, como tokenização e construção da árvore sintática.

O Capítulo 4 faz um mapeamento sistemático, utilizando termos de busca para identificar trabalhos relevantes sobre o desenvolvimento de compiladores para traduzir BRDFs de LAT<sub>E</sub>Xpara *shaders*. Os critérios de inclusão e exclusão são definidos para filtrar os resultados. Além disso, são descritos os resultados encontrados em diversas bases de dados, como IEEE Xplore, BDTD, CAPES, ACM Digital Library e Google Scholar, bem como a análise de repositórios online como GitHub e SourceForge.

No Capítulo 5 é descrito o método para desenvolver o compilador proposto. São definidas etapas para alcançar os objetivos especificados neste trabalho e casos de teste são projetados para validação. Este capítulo também inclui o plano de continuação deste trabalho, que detalha as etapas futuras com datas previstas.

O Capítulo 6 descreve os resultados preliminares deste trabalho, que consistem na implementação de um analisador léxico, sintático e interpretador na linguagem de programação Odin <sup>1</sup>, incluindo o método de análise sintática de Pratt. A linguagem desenvolvida possui uma gramática simplificada em comparação com LATEX, de forma a garantir o funcionamento dos algoritmos de análise léxica e sintática antes de avançar para uma linguagem mais complexa. O capítulo também descreve os testes elaborados para validar a implementação. Além disso, o capítulo apresenta o desenvolvimento de um *ray tracer* em Odin, que modela raios e materiais para a renderização de imagens, utilizando a biblioteca Raylib <sup>2</sup> para exibir as imagens renderizadas.

<sup>1 &</sup>lt;https://odin-lang.org/>

<sup>2 &</sup>lt;https://www.raylib.com/>

# **Conceitos**

Neste capítulo, são abordamos os conceitos fundamentais da interação da luz com os materiais na computação gráfica. Destacamos a importância da reflexão da luz, explorando as BRDFs e modelos comuns. Além disso, discutimos elementos-chave na criação de compiladores e o processo de *shading* na GPU.

Especificamente na seção 3.1, tratamos dos conceitos fundamentais relacionados à luz, como a capacidade de um material refletir raios de luz e sua importância na computação gráfica e renderização. Destacamos a relação entre a intensidade de um pixel de imagem, a iluminação, a orientação da superfície e a definição de funções de refletância, as BRDFs. Já na seção 3.2, destacamos alguns modelos comuns de BRDFs.

A seção 3.4 fornece uma visão abrangente dos elementos essenciais na criação de compiladores. Ela começa com a definição de conceitos fundamentais, como cadeias de símbolos e alfabetos, necessários para entender linguagens formais. Além disso, a seção discute a importância das gramáticas na definição de linguagens e descreve o processo de compilação, incluindo a análise léxica, a análise sintática e o Pratt *Parsing*.

Na seção 3.3, é abordado o processo de *shading* e o funcionamento do *pipeline* de renderização da GPU.

# **Conceitos 2**

Neste capítulo, abordam-se os conceitos fundamentais da interação da luz com os materiais na computação gráfica. Destaca-se a importância da reflexão da luz, explorando as BRDFs e modelos comuns. Além disso, são discutidos elementos-chave na criação de compiladores e no processo de *shading* na GPU.

Especificamente na seção 3.1, são apresentados os conceitos fundamentais relacionados à luz, como a capacidade de um material refletir raios de luz e sua importância na computação gráfica e renderização. Destaca-se a relação entre a intensidade de um pixel de imagem, a iluminação, a orientação da superfície e a definição de funções de refletância, as BRDFs. Já na seção 3.2, são destacados alguns modelos comuns de BRDFs.

A seção 3.3 aborda o processo de *shading* e o funcionamento do *pipeline* de renderização na GPU. Nela, são introduzidos os processos de transformação de vértices e de determinação da cor dos fragmentos, mostrando exemplos de código.

Na seção 3.4, é fornecida uma visão abrangente dos elementos essenciais na criação de compiladores. Ela começa com a definição de conceitos fundamentais, como cadeias de símbolos e alfabetos, necessários para entender linguagens formais. Além disso, é discutido a importância das gramáticas na definição de linguagens e é descrito o processo de compilação, incluindo a análise léxica, a análise sintática, o Pratt *Parsing* e análise semântica.

#### 3.1 Radiometria

A radiometria trata de conceitos fundamentais relacionados à luz. Ela abrange a capacidade de um material de superfície receber raios de luz de uma direção e refleti-los em outra (WOLFE, 1998). No contexto da computação gráfica, a radiometria desempenha um papel crucial na compreensão do comportamento da luz em uma cena.

Na renderização, a intensidade de um pixel da imagem depende de vários fatores, como iluminação, orientação e refletância da superfície. A orientação da superfície é determinada pelo vetor normal em um dado ponto, enquanto a refletância da superfície diz respeito às propriedades materiais da mesma.

Para compreender e interpretar a intensidade de um pixel em uma imagem, é essencial compreender os conceitos radiométricos. A radiometria quantifica o brilho de uma fonte de luz, a iluminação de uma superfície, a radiância de uma cena e a refletância da superfície.

Renderizar uma imagem envolve mais do que capturar cor (DISNEY; LEWIS; NORTH, 2000); requer conhecimento da intensidade de luz em cada ponto da imagem, isto é, a quantidade de luz incidente na cena que alcança a câmera. A radiometria ajuda na criação de sistemas e unidades para quantificar a radiação eletromagnética, considerando um modelo simplificado no qual a luz é tratada como fótons que viajam em linha reta.

#### 3.1.1 Energia Radiante e Fluxo

Vários processos físicos convertem energia em fótons, como radiação de corpo negro e fusão nuclear em estrelas (PROKHOROV; HANSSEN; MEKHONTSEV, 2009). Quantificar a energia radiante total de uma cena é necessário para quantificar o brilho da imagem, que envolve entender a energia dos fótons colidindo com objetos (JUDICE; GIRALDI; KARAM-FILHO, 2019).

A Equação 3.1 expressa a energia radiante Q (PHARR; JAKOB; HUMPHREYS, 2016), que considera a energia total de todos os fótons atingindo a cena durante toda a duração, onde:  $c \approx 3,00 \times 10^8$  m/s (metros por segundo) é a velocidade da luz;  $\lambda$  representa o comprimento de onda, uma variável que abrange o espectro visível, aproximadamente entre  $389 \times 10^{-3}$  m e  $700 \times 10^{-3}$  m; h denota a constante de Planck, aproximadamente 6,  $626 \times 10^{-34}$  J·s (joule-segundo).

$$Q = \frac{hc}{\lambda} \tag{3.1}$$

É interessante observar a evolução da energia radiante (Q) ao longo do tempo. Isso dá origem ao conceito de fluxo radiante  $\phi$ , que é medido em impactos de cada fóton por segundo em uma superfície. Sua unidade é joules por segundo.

$$\phi = \frac{dQ}{dt}$$
[J/s]

A irradiância quantifica o número de impactos dos fótons em uma superfície por segundo por unidade de área. Mais precisamente, podemos definir a irradiância E ao considerar o limite do fluxo radiante  $\phi$  diferencial por área A diferencial em um ponto p (PHARR; JAKOB; HUMPHREYS, 2016, 5.4.1). Assim, temos uma métrica mais específica para renderizar imagens com precisão.

$$E(p) = \frac{d\phi(p)}{dA} \left[ \frac{J}{s \cdot m^2} \right]$$

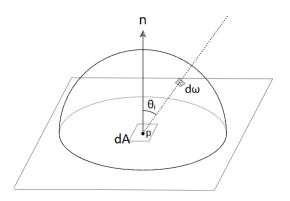
#### 3.1.2 Radiância e BRDF

A radiância, denotada como L, caracteriza a densidade de fluxo por unidade de área A, por ângulo sólido  $\omega$  (ver Figura 1 para representação visual). Os ângulos sólidos representam a projeção da região no espaço sobre uma esfera unitária centrada em p, como ilustrado na Figura 2. Ângulo sólido é a medida da área ocupada por uma região tridimensional conforme vista de um ponto específico p. Seu valor é expresso em esterradianos (sr), e são frequentemente representados pelo símbolo  $\omega$ .

Assim, é possível definir radiância conforme a Equação 3.2. Ao invés de usar diretamente a área *A*, a convenção estabelecida nessa definição é utilizar a projeção da área em um plano perpendicular à direção da câmera (WEYRICH et al., 2009).

$$L = \frac{d\Phi}{d\omega \, dA_{\perp}} \left[ W \cdot m^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \right] \tag{3.2}$$

Figura 1 – Visualização da radiância em uma direção específica do hemisfério

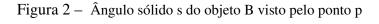


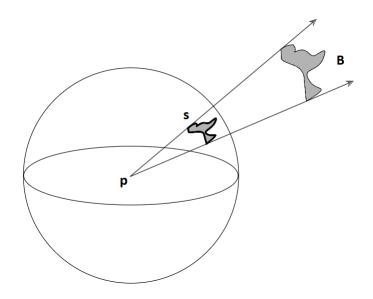
Fonte: (PHARR; JAKOB; HUMPHREYS, 2016). Adaptada

Equivalentemente, podemos definir radiância para diferentes orientações da superfície e direção do raio ao introduzir o fator  $\cos(\theta)$ , tal que  $\theta$  é o ângulo entre a normal da superfície e a direção do  $\omega$  (PHARR; JAKOB; HUMPHREYS, 2016, 5.4.1). Essa definição é dada pela Equação 3.3.

$$L(p,\omega) = \frac{d^2\phi(p)}{dAd\omega\cos(\theta)} = \frac{dE(p)}{d\omega\cos(\theta)}$$
(3.3)

A radiância pode fornecer informação sobre o quanto um ponto específico está iluminado na direção da câmera. Ela depende não apenas da direção do raio que incide, mas também das propriedades de refletância da superfície. E, no contexto de renderização, a radiância de





Fonte: (PHARR; JAKOB; HUMPHREYS, 2016)

uma superfície na cena se correlaciona com a irradiância de um pixel em uma imagem pela Equação 3.3. Isolando o termo E(p), encontramos essa relação de maneira explícita:

$$E(p) = \int_{H^2} L(p, \omega) \cos(\theta) d\omega$$

 $H^2$  é o hemisfério no plano tangente à superfície no ponto p

A principal funcionalidade de um renderizador fotorrealista é estimar a radiancia em um ponto p numa dada direção  $\omega_o$ . Essa radiância é dada pela equação de renderização apresentada por (KAJIYA, 1986). Note que essa equação envolve um termo de radiância recursivo, o caso base ocorre quando não há mais o termo recursivo, isto é, um fonte de luz na qual sua radiância é contribuída apenas por radiância emitida  $L_e$ .

$$L_o(p,\omega_o) = L_e(p,\omega_o) + \int_{H^2} f(p,\omega_i,\omega_o) L_i(p,\omega_i) \cos(\theta_i) d\omega_i$$

 $L_o$  é radiância de saída (*outgoing*)

 $L_e$  é radiância emitida pela superfície (i.e. fonte de luz)

 $L_i$  é radiância incidente na superfície

 $\omega_i$  é a direção incidente

 $\omega_o$  é a direção de saída

 $H^2$  são todas as direções no hemisfério no ponto p

 $\theta_i$  ângulo entre direção incidente e a normal da superfície

f função de refletância

A Função de Distribuição Bidirecional de Reflectância (BRDF) descreve como a luz reflete de uma superfície em diferentes direções afetando a radiância de saída (MONTES; UREÑA, 2012). Assim, BRDFs encapsulam as propriedades de reflexão de um material, considerando fatores como a rugosidade da superfície, o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão. Formalmente uma BRDF pode ser definida por  $f(\omega_i, \omega_o)$ , onde  $\omega_i$  é a direção incidente de luz e  $\omega_o$  é a direção de saída. Para BRDFs fisicamente realistas algumas propriedades devem ser respeitadas (PHARR; JAKOB; HUMPHREYS, 2016, 5.6).

- A propriedade de positividade,  $f(\omega_i, \omega_o) \ge 0$ , que garante não existência de energia negativa.
- A reciprocidade de Helmhotz, f(ω<sub>i</sub>, ω<sub>o</sub>) = f(ω<sub>o</sub>, ω<sub>i</sub>), é o princípio que indica que a função de refletância de uma superfície permanece inalterada quando os ângulos de incidência e reflexão da luz são trocados. Isso é utilizado na otimização do traçado de raios durante a renderização, permitindo traçar os raios da câmera para a fonte de luz. Essa abordagem evita o desperdício computacional em raios que não contribuem significativamente para a intensidade de um pixel na imagem final.
- A conservação de energia, expressa por  $\forall \omega_i, \int_{H^2} f(\omega_i, \omega_o) cos(\theta_o) d\omega_o \leq 1$ , implica que parte da energia pode ser absorvida, transformando-se em outras formas de energia, como calor. Portanto, a soma infinitesimal pode atingir no máximo 1, mas nunca ultrapassá-la.

#### 3.2 Modelos de BRDFs

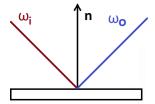
As próximas seções apresentam alguns modelos comuns de BRDFs na literatura (MONTES; UREÑA, 2012).

#### 3.2.1 BRDF Pura Especular

Uma superfície puramente especular reflete a luz apenas em uma direção, seguindo a lei física da reflexão (ZEYU et al., 2017), ela produz reflexões nítidas, semelhantes a espelhos. A BRDF para essa superfície é frequentemente representada pela Equação 3.4, onde  $\omega_i$  é a direção da luz incidente,  $\omega_o$  é a direção refletida e  $\delta$  é a função delta de Dirac que garante que toda a luz incidente seja refletida na direção perfeitamente espelhada como na Figura 3. Esse tipo de superfície é comum em materiais como metal polido ou vidro.

$$f(\omega_i, \omega_o) = k_s \cdot \delta(\omega_i - \omega_o) \tag{3.4}$$

Figura 3 – Reflexão especular.



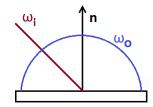
Em vermelho está o raio incidente, e em azul o raio de saída. Fonte: Autor

#### 3.2.2 BRDF Difusa Ideal

Uma BRDF difusa ideal reflete a luz incidente uniformemente em todas as direções, sem preferência por ângulos específicos. É representada pela função f na Equação 3.5, onde  $\rho_d$  é o albedo da superfície e  $\theta$  é o ângulo entre a direção da luz incidente e a normal da superfície. O termo cosseno garante que a radiância refletida seja proporcional ao cosseno do ângulo entre a direção da luz incidente e a normal da superfície como na Figura 4. Esse modelo pode representar superfícies como tinta fosca ou papel.

$$f(\omega_i, \omega_o) = \frac{\rho_d}{\pi} \cdot \cos \theta \tag{3.5}$$

Figura 4 – Reflexão Difusa.

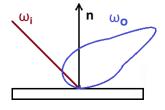


Note que os raios refletidos não dependem do ângulo de entrada. Fonte: Autor

#### 3.2.3 BRDF Glossy

Uma superfície pode exibir propriedades de reflexão tanto especulares quanto difusas, como na Figura 5. Uma BRDF para uma superfície brilhante é frequentemente representada por uma combinação de termos especulares e difusos, como o modelo de Blinn-Phong (TAN, 2020)

Figura 5 – Reflexão glossy.

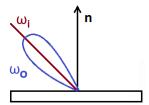


Fonte: Autor

#### 3.2.4 BRDF Retro-Refletora

Uma superfície retro-refletora reflete a luz incidente de volta na direção de onde veio, como na Figura 6. A BRDF para uma superfície retro-refletora envolve tipicamente geometria especializada ou revestimentos projetados para redirecionar a luz de volta para a fonte.

Figura 6 – Reflexão retro-refletora



Fonte: Autor

## 3.3 Introdução ao Shading e ao pipeline de GPU

Shading refere-se ao processo de determinar a cor e o brilho dos pixels em uma imagem renderizada. Isso envolve simular a interação da luz com as superfícies, levando em consideração as propriedades dos materiais, condições de iluminação e orientação da superfície. Isso é alcançado por meio de pequenos programas chamados shaders, que são compilados e executados na unidade de processamento gráfico (GPU).

A interação com as GPUs é facilitada por meio de uma API, sendo o OpenGL uma API padrão para o uso de funções na GPU (OpenGL Architecture Review Board, 2017). O pipeline de renderização do OpenGL é composto por várias etapas, incluindo definição de dados de vértices, shaders de vértice e fragmento, shaders de tesselação e geometria opcionais, configuração de primitivas, recorte e rasterização.

Essas etapas coordenam o fluxo de dados da CPU para a GPU e suas transformações, culminando na geração da imagem final. Uma representação visual desse processo pode ser observada na Figura 7. Nela, é representado o CPU enviando os dados da cena para a GPU, que utiliza essas informações nos *shaders* de vértice e fragmento. O *shader* de vértice manipula os vértices da cena, enquanto o shader de fragmento determina as cores dos pixels. Os fragmentos são unidades de processamento de imagem individuais, correspondendo a pontos discretos na tela onde a cor final será determinada. Além disso, a CPU também pode enviar variáveis uniformes (*uniform variables*) para os shaders, que são essenciais para a etapa de renderização e contribuem para a geração da imagem final.

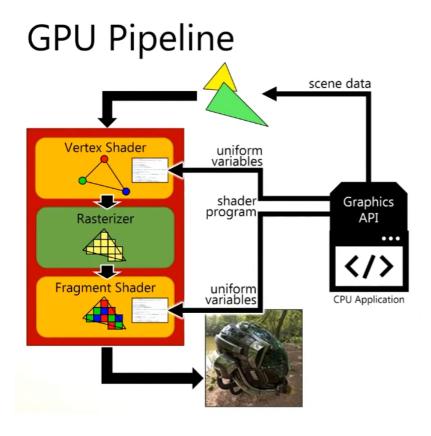


Figura 7 – pipeline Grafico

Fonte: (CEM, 2020)

#### 3.3.1 Shader de Vértice

O *shader* de vértice opera em vértices individuais de primitivas geométricas antes de serem rasterizados em fragmentos. Sua principal tarefa é transformar vértices e passar os dados necessários para o *shader* fragmento. Esses *shaders* geralmente realizam várias transformações nos dados dos vértices, permitindo que objetos sejam posicionados, orientados e projetados em uma tela 2D. Um exemplo desse *shader* está no Código 1, que usa uma matriz para realizar essas transformações. Ao fim dessa etapa, os vértices são normalizados para coordenadas homogêneas, que é útil para realizar a projeção perspectiva e outros cálculos no *pipeline* de renderização.

Código 1 – Exemplo GLSL de shader de vértice

```
#version 330 core
1
   layout(location = 0) in vec3 inPosition;
2
   layout(location = 1) in vec3 inNormal;
3
5
   uniform mat4 modelViewProjection;
6
7
   out vec3 fragNormal;
8
9
   void main() {
10
       vec3 manipulatedPosition = inPosition + (sin(gl_VertexID * 0.1)
          * 0.1);
11
       fragNormal = inNormal;
       gl_Position = modelViewProjection * vec4(manipulatedPosition,
12
          1.0);
13
  }
```

#### 3.3.2 Shader de Fragmento

O *shader* de fragmento opera sobre os fragmentos produzidos pela etapa de rasterização. Sua principal responsabilidade é determinar a cor final de cada fragmento com base na iluminação, texturização e propriedades da superfície. Uma possível interpretação é que esse programa é repetido para todos os pixels da imagem paralelamente. Esse programa recebe dados interpolados, como vértices e normais, ou seja, cada instância deste programa possui entradas potencialmente diferentes uma das outras. Na API OpenGL, valores como normais e cores são interpolados usando coordenadas baricêntrica.

As BRDFs devem ser implementadas nesse estágio do pipeline para atingir um nível de *shading* mais preciso, pois temos mais dados do que os definidos na geometria, devido à interpolação. Isso resulta em um nível de detalhamento potencialmente maior, considerando uma transição mais suave de um ponto para outro dentro de um triângulo, como representado na Figura 8.

Figura 8 – Diferença entre shading a nível de vértice e shading a nível de fragmento

#### Shading para cada vértice

#### Shading para cada fragmento





Fonte: (DAVISONPRO, 2024)

## 3.4 Compiladores

#### 3.4.1 Cadeia de Símbolos e Alfabeto

Um cadeia de símbolos é uma sequência finita de símbolos retirados de um alfabeto  $\Sigma$ . Formalmente, uma cadeia w é representada como  $[w_1, w_2, ..., w_n]$ , onde cada  $w_i$  pertence ao alfabeto  $\Sigma$ . O alfabeto  $\Sigma$  é um conjunto finito de símbolos distintos usados para construir cadeias em uma linguagem. Ele define os blocos de construção a partir dos quais cadeias válidas na linguagem são formadas.

### 3.4.2 Definições de Linguagens

Na ciência da computação, as linguagens são sistemas formais compostos por símbolos e regras que são muito úteis para definir um significado algorítmico. Uma **linguagem** L é definida como um conjunto de cadeias sobre um alfabeto finito  $\Sigma$ ,  $L \subseteq \Sigma^*$ , onde  $\Sigma^*$  denota o conjunto de todas as cadeias possíveis sobre  $\Sigma$  (JÄGER; ROGERS, 2012). A estrutura semântica de uma linguagem inclui seu alfabeto  $\Sigma$ , sintaxe e regras de gramática.

## 3.4.3 Compilador como um Transformação

Um compilador pode ser visto como uma transformação entre linguagens  $L_1$  e  $L_2$  que preserva a estrutura interna dos conjuntos, isto é, deve manter o mesmo significado algorítmico. Assim, o compilador  $C: L_1 \to L_2$  mapeia programas escritos na linguagem de origem  $L_1$  para programas equivalentes na linguagem de destino  $L_2$ . Essa transformação garante a preservação semântica, mantendo o comportamento pretendido do programa original durante a tradução.

#### 3.4.4 Gramática

Para auxiliar na criação de um compilador é necessário entender as regras que auxiliam na validação da linguagem de entrada, esse entendimento pode ser alcançado pela gramática. Uma gramática G é um sistema formal composto por um conjunto de regras de produção que especificam como cadeias válidas na linguagem podem ser geradas (JÄGER; ROGERS, 2012). Ela inclui terminais, não-terminais, regras de produção e um símbolo inicial.

- Terminais: são os símbolos básicos a partir dos quais as cadeias são formadas. Eles representam as unidades elementares da sintaxe da linguagem.
- Não-terminais: são espaços reservados que podem ser substituídos por terminais ou outros não-terminais de acordo com as regras de produção.
- Regras de Produção: definem a transformação ou substituição de não-terminais em sequências de terminais e/ou não-terminais.
- Símbolo Inicial: é um não-terminal especial a partir do qual a derivação de cadeias válidas na linguagem começa.

#### 3.4.4.1 Gramáticas Livres de Contexto (GLCs)

Um tipo comum de gramática usado na definição de linguagens é a gramática livre de contexto (GLC). Uma GLC pode ser descrita formalmente como  $G = (V, \Sigma, R, S)$ :

- *V* é um conjunto finito de símbolos não-terminais.
- $\Sigma$  é um conjunto finito de símbolos terminais disjunto de V.
- R é um conjunto finito de regras de produção, cada regra no formato  $A \to \beta$ , onde A é um não-terminal e  $\beta$  é uma cadeia de terminais e não-terminais.
- *S* é o símbolo inicial, que pertence a *V*.

O processo de gerar uma cadeia na linguagem definida por uma gramática é chamado de derivação. Isso envolve aplicar regras de produção sucessivamente, começando pelo símbolo inicial *S* até restarem apenas símbolos terminais.

Uma árvore sintática é uma representação gráfica do processo de derivação, onde cada nó representa um símbolo na cadeia. As arestas representam a aplicação de regras de produção. Em código, essa árvore é gerada e usada como representação intermediária auxiliando na geração da linguagem alvo  $L_2$ .

#### 3.4.5 Análise Léxica

A análise léxica, também conhecida como *lexing* ou *tokenization*, é a primeira etapa do processo de compilação, na qual a entrada textual é dividida em unidades léxicas significativas chamadas de *tokens*. Esses tokens representam os componentes básicos da linguagem, como palavras-chave, identificadores, operadores e literais. O analisador léxico percorre o código fonte caractere por caractere, agrupando-os em tokens conforme regras pré-definidas pela gramática da linguagem. Essa linguagem é, geralmente, reconhecível por máquinas de estado (RABIN, 1967).

#### 3.4.6 Análise Sintática ou Parsing

A análise sintática é a segunda fase do processo de compilação, na qual os tokens gerados pela análise léxica são organizados e verificados quanto à conformidade com a gramática da linguagem. Essa etapa envolve a construção de uma árvore sintática, ou estrutura de dados equivalente, que representa a estrutura hierárquica das expressões e instruções do programa. O analisador sintático utiliza regras de produção gramatical para validar a sintaxe do código fonte e identificar possíveis erros.

#### 3.4.7 Pratt Parsing

O Pratt Parsing, introduzido por Vaughan Pratt, é uma técnica de análise sintática recursiva que permite analisar expressões com precedência de operadores de forma eficiente e sem ambiguidades (PRATT, 1973). Uma das suas características distintivas é determinar a ordem de avaliação das expressões. Ao contrário da análise descendente recursiva tradicional, na qual cada não-terminal possui uma função de *parsing*, a análise Pratt associa funções de manipulação (*handlers*) com *tokens*.

A precedência das expressões é definida por meio de uma tabela, na qual cada operador é associado a um valor que permita o *parser* decidir dinamicamente a ordem de avaliação das expressões com base nos operadores encontrados durante a análise. Essa abordagem simplifica significativamente a implementação do parser e elimina a necessidade de criar uma gramática que encapsula a precedência em sua definição. Ela também evita a recursão profunda para lidar com diferentes níveis de precedência.

#### 3.4.7.1 Pseudo-código para Análise de Expressões

O pseudo-código 1, demonstra o Pratt *parsing* para a construção de árvores de expressão. Esse algoritmo também é robusto mesmo quando um operador é tanto infixo quanto prefixo, por exemplo "-" pode ser um *token* de subtração ou de negação. Assim, cada *token* tem uma função de prefixo e infixo associada.

Nesse algoritmo, **proximo\_token()** recupera o próximo elemento da lista de tokens, **token.precedencia()** retorna a procedência do token atual, **token.prefixo()** é a função associada

ao *token* que faz o parsing de uma expressão quando o *token* é o primeiro em uma subexpressão (e.g. o token "-"é o primeiro na expressão "-3"). Já o **token.infixo(esquerda)** é a função associada ao *token* que utiliza outra subárvore já criada como entrada. Por exemplo a subárvore **esquerda** pode ser a expressão "-3", o token atual ser "\*"e o retorno gera a expressão completa "-3 \* 1"

Tanto **token.infixo** quanto **token.prefixo** podem ser indiretamente recursivas, isto é, ambas podem chamar a função **expressão** no algoritmo 1. Por fim, **precedencia\_anterior** representa a precedência do token anterior.

Algoritmo 1 – Função Pratt Parsing de Expressão

```
function expressao(precedencia_anterior:=0):
    token := proximo_token()
    esquerda := token.prefixo()
    while precedencia_anterior < token.precedencia():
        token = proximo_token()
        esquerda = token.infixo(esquerda)
    return esquerda</pre>
```

#### 3.4.8 Geração da Linguagem Alvo

Nesta fase, fazemos a transição da representação intermediária da linguagem origem  $L_1$  para a linguagem de destino  $L_2$ , o processo que envolve traduzir construções de  $L_1$  para equivalentes em  $L_2$ . Podemos realizar essa tradução ao percorrer recursivamente os nós da árvore sintática usando as informações contidas nesses nós para gerar partes do programa final em  $L_2$ .

Dado um programa  $a \in L_1$  existem vários programas  $b_{i=1,2,3,...} \in L_2$  que possui estrutura semanticamente equivalentes à a. Ao explorar esse conjunto, é possível escolher um  $b_j \in L_2$  tal que esse programa seja otimizado em algum sentido, como uso eficiente de memória ou executar menos instruções de *hardware*. Nosso foco neste trabalho está na tradução semanticamente correta, sem envolver exploração das saídas equivalentes.

Como exemplo, considere a tradução de um cálculo matemático de  $L_1$  (LATEX), para  $L_2$  (GLSL). O cálculo abaixo pertence a  $L_1$ . O Código 2 mostra o código fonte do cálculo.

```
\mathbf{v} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{d} \times \mathbf{e})
```

Código 2 – Cálculo vetorial

```
1 \mathbf{v} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot
2 \mathbf{c} - (\mathbf{d} \times \mathbf{e})
```

Após a tradução da expressão matemática para  $L_2$ , o cálculo pode ser convertido para o trecho de programa abaixo. Esse código é válido na linguagem GLSL.

$$vec3 v = dot(a + b, c) - cross(d, e);$$

# Revisão Bibliográfica

Para esta seção, será conduzida uma revisão literária abrangente com o objetivo de explorar trabalhos relacionados ao desenvolvimento de compiladores para tradução de BRDFs expressas em LATeXpara a linguagem de *shading*, empregando, técnicas de *parsing*. O processo de busca será conduzido em duas etapas distintas. Primeiro, será realizado um levantamento dos trabalhos existentes nas bases de dados com relevantes periódicos, anais de eventos, artigos e trabalhos.

Por fim, será realizada uma busca por produtos ou ferramentas similares no mercado, utilizando *strings* de busca específicas em repositórios digitais, especificamente GitHub e SourceForge. Esses processos de busca permitirão identificar referências relevantes e estabelecer um panorama do estado da arte no campo dos compiladores de BRDFs para *shaders*, contribuindo para a compreensão do contexto acadêmico e prático no qual este trabalho se insere.

# 4.1 Mapeamento Sistemático

Com o intuito de obter resultados relevantes para a pesquisa, foram elaboradas frases de busca com base nos termos-chave relacionados ao tema deste trabalho. Assim como foram criadas questões de pesquisa para guiar a seleção dos trabalhos.

### 4.1.1 Seleção das Bases

As bases escolhidas foram: ACM Digital Library <sup>1</sup>, IEEE Xplorer Digital Library <sup>2</sup>, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) <sup>3</sup>, Portal de Periódicos da CAPES

<sup>1 &</sup>lt;https://dl.acm.org/>

<sup>2 &</sup>lt;https://ieeexplore.ieee.org/>

<sup>3 &</sup>lt;https://bdtd.ibict.br/>

<sup>4</sup>, Google Acadêmico <sup>5</sup>. Essas foram escolhidas por serem acessíveis gratuitamente pela afiliação à Universidade Federal de Sergipe, já o Google Scholar foi escolhido para agregar pesquisas em outras bases que possam ter trabalhos relevantes.

#### 4.1.2 Questões de Pequisa

Foram elaboradas questões de pesquisa específicas, que guiam as frases-chave que refletem os principais aspectos do tema em questão. A partir desse processo, foram identificados e selecionados os trabalhos que melhor atendiam às questões propostas, garantindo maior relevância para este estudo.

- 1. Quais são as abordagens mais comuns utilizadas na criação de compiladores para tradução de BRDFs expressas em alguma linguagem de texto, com LATEX, para *shaders*?
- 2. Quais as técnicas de *parsing* que têm sido aplicadas no desenvolvimento de compiladores para linguagens matemáticas como LATEX?
- 3. O trabalho utiliza arvores ou gramáticas livre de contexto para representar uma BRDF?
- 4. Quais são os principais desafios enfrentados ao traduzir funções matemáticas complexas, como as BRDFs, em *shaders*?
- 5. Quais são as ferramentas e recursos disponíveis para auxiliar no desenvolvimento de compiladores para BRDFs e *shaders*, e como elas podem ser integradas ao processo de desenvolvimento?

#### 4.1.3 Termos de Busca

As frases foram construidas considerando suas variações equivalentes através de operadores lógicos. Posteriormente, as frases de pesquisa foram adaptadas de acordo com as características individuais de cada base de dados utilizada. Os termos-chave escolhidos foram: "shader", "BRDF", "compiler", "parser"e "grammar", conforme demonstrado na Tabela 1

<sup>4 &</sup>lt;a href="https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/index.php?">https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/index.php?</a>

<sup>5 &</sup>lt;https://scholar.google.com/>

Bases	Termos de Pesquisa	Resultados
IEEE Xplore Digi-	("Full Text & Metadata":brdf) AND (("Full	36
tal Library	Text & Metadata":shader) OR ("Full Text	
	& Metadata":shading)) AND (("Full Text	
	& Metadata":compiler) OR ("Full Text &	
	Metadata":parsing) OR ("Full Text & Me-	
	tadata":parser) OR ("Full Text & Meta-	
	data":grammar))	
BDTD	(Todos os campos:compiler OU Todos os	0
	campos:parsing OU Todos os campos:parser	
	OU Todos os campos:compilador) E (To-	
	dos os campos:shader OU Todos os cam-	
	pos:shading) E (Todos os campos:brdf)	
CAPES Periodico	Qualquer campo contém brdf E Qualquer	0
	campo contém compi* E shad*	
ACM Digital Li-	AllField:((shader OR shading) AND brdf	46
brary	AND (compiler OR compiling) AND (par-	
	ser OR grammar OR parsing))	
Google Acade-	("BRDF"AND ("COMPILER"OR "COM-	69
mico	PILING") AND( "PARSER"OR "PAR-	
	SING") AND ("SHADER"OR "SHA-	
	DING"))	

Tabela 1: Tabela de pesquisa

#### 4.1.4 Critérios

Para garantir relevancia dos resultados obtivos, seguimos os critérios de inclusão e exclusão estabelecidos, de forma a filtrar os resultados. Ao fim desse procedimento, apenas os resultados com maior compatibilidade com este trabalho foram análisados e descritos de maneira detalhada. O resultados se encontram na Tabela 2

#### 4.1.4.1 Critérios de Inclusão

- 1. Foram incluídos artigos relacionados às palavras-chaves;
- 2. Foram incluídos artigos que de alguma forma incluam a criação de um compilador ou um *parser*;
- 3. Foram incluídos artigos que sintetize uma arvóre como representação de BRDFs.

#### 4.1.4.2 Critérios de Exclusão

- 1. Foram excluídos artigos dos quais dispunham de links incorretos e ou quebrados;
- 2. Foram excluídos artigos no quais os projetos são muito similares;
- 3. Foram excluídos artigos que não respodem as questões de pesquisa na subseção 4.1.2;
- 4. Foram excluídos artigos que não têm como entrada uma BRDF no formato de equação, ou seja, está utilizam a representação diretamente como código;

- 5. Foram excluídos artigos que não consideram a geração de *shaders* como saída ou estrutura da BRDF em arvore;
- 6. Foram excluídos artigos que não citam BRDFs e compilador em seu resumo;
- 7. Se após a leitura completa, o artigo não concerne os interesses deste trabalho, esse foi excluído.

Bases	Filtrados
IEEE Xplore Digital Library	2
BDTD	0
CAPES Periodico	0
ACM Digital Library	1
Google Academico	1

Tabela 2: Resultados da Base após aplicar os critérios

#### 4.1.5 Descrição dos Trabalhos Relacionados

#### 4.1.5.1 genBRDF: Discovering New Analytic BRDFs with Genetic Programming

Neste artigo é introduzido uma *framework* chamada genBRDF, a qual aplica tecnicas de programação genética para explorar e descobrir novas BRDFs de maneira analitica (BRADY et al., 2014). O processo inicia utilizando uma BRDF existente, e iterativamente aplica mutações e recombinações de partes das expressões matematicas que compões essas BRDFs a medida que novas gerações surgem. Essas mutações são guiadas por uma função *fitness*, que seria o inverso de uma função de erro, ela é baseada em um *dataset* de materiais já medidos. Por meio da avaliação de milhares de expressões, a *framework* identifica as viávies.

Os autores geraram uma gramática que inclui constantes e operadores matemáticos comuns encontrados em equações BRDF. A gramática é compilada, e a árvore de sintaxe abstrata resultante passa por modificações realizadas pelo algoritmo genético. Nós na árvore podem ser trocados, substituídos, removidos e novos nós podem ser adicionados. Esse processo, após refinamento e análise, resulta em novas BRDFs. Alguns dos novos modelos BRDF apresentados no documento incluem aqueles que superam os modelos existentes em termos de precisão e simplicidade.

Esse artigo se concentra em automaticamente encontrar novos modelos analíticos de BRDF, em vez de compilar diretamente equações BRDF em linguagens de *shading*. Embora a representação das expressões das BRDFs possam potencialmente inspirar o nosso trabalho, o principal objetivo do artigo difere do nosso tema.

#### 4.1.5.2 Slang: language mechanisms for extensible real-time shading systems

O artigo descreve a linguagem Slang, uma extensão da amplamente utilizada linguagem de *shading* HLSL, projetada para melhorar o suporte à modularidade e extensibilidade (HE;

FATAHALIAN; FOLEY, 2018). A abordagem de design da Slang é baseada em dois princípios fundamentais: manter a compatibilidade com o HLSL existente sempre que possível e introduzir recursos com precedentes em linguagens de programação *mainstream* para facilitar a familiaridade e intuição dos desenvolvedores.

O autor enfatiza que cada extensão da Slang busca oferecer uma progressão incremental para a adoção a partir do código HLSL existente, eliminando a necessidade de uma migração completa. Algumas dessas extensões incluem: funções genéricas, estruturas genéricas e tipos que implementam interfaces específicas, semelhantes ao funcionamento das interfaces em Java, mas aplicadas a estruturas. Um exemplo de função genérica escrita em Slang é:

```
float3 integrateSingleRay<B:IBxDF>(B bxdf,
SurfaceGeometry geom, float3 wi, float3 wo, float3 Li)
{ return bxdf.eval(wo, wi) * Li * max(0, dot(wi, geom.n)); }
```

Enquanto o artigo tenta melhorar a eficiência e a extensibilidade dos sistemas de *shading* em tempo real, o nosso trabalho se concentra na compilação de equações BRDF em linguagens de *shading*. Embora ambos os projetos façam uso de *shaders* e compilação, as abordagens e focos são diferentes.

#### 4.1.5.3 Tree-Structured Shading Decomposition

Esse trabalho propõe uma abordagem para inferir uma representação de BRDF estruturada em árvore a partir de uma única imagem para a sombreamento de objetos (GENG et al., 2023). Em vez de usar representações paramétricas, como é comum, é proposta uma abordagem que utiliza uma representação em árvore de *shading*, combinando nós básicos e métodos para decompor o *shading* da superfície do objeto, representado na Figura 9.

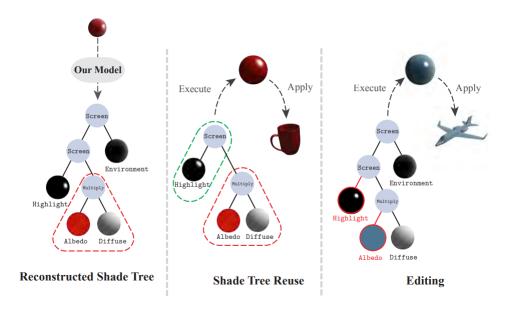


Figura 9 – Exemplo de decomposição de BRDFs em nós de uma arvóre

Fonte: Wolfe (1998)

Assim como o nosso trabalho, esse artigo se concentra em facilitar o processo para usuários inexperientes, pois ambos visam fornecer ferramentas acessíveis para manipular representações de *shading* sem exigir conhecimento avançado em programação. Esse artigo também emprega uma representação em árvore, embora para um propósito diferente.

#### 4.1.5.4 A Real-Time Configurable *shader* Based on Lookup Tables

Esse trabalho propõe uma arquitetura de *hardware* que permite cálculos de *shading* por pixel em tempo real, utilizando *lookup-tables* (OHBUCHI; UNNO, 2002). Para isso, são projetados circuitos configurávei baseado nessas tabelas, memórias de acesso aleatório (RAMs) e memórias somente leitura (ROMs). Varios circuitos base foram projetados para as operações mais comuns, por exemplo, circuitos para calcular produto interno entre dois vetores e circuitos de rotação de um vetor por um ângulo, um exemplo desses diagramas é representado na Figura 10. Ademais, é usado interpolação em um sistema de coordenadas polares em vez da interpolação vetorial convencional com normalização, com o objetivo de reduzir o tamanho dos circuitos e melhorar o desempenho.

V<sub>1h</sub>

Cos t

ROM

C: A logic circuit to calculate

(1-A)/2 and (1+A)/2

by simple bit operations

V<sub>2h</sub>

V<sub>1v</sub>

Cos t

ROM

Figura 10 – Exemplo de circuito de produto interno entre vetores

Fonte: (OHBUCHI; UNNO, 2002)

Além disso, o circuito suporta diversas BRDFs, como Blinn-Phong, Cook-Torrance, Ward e modelos baseados em microfacetas, com tabelas específicas para cada modelo. O uso de tabelas de pesquisa permite a representação organizada da parametrização das BRDFs, tornando o processo de transformação de BRDF para *shaders* mais acessível. Assim como este trabalho, a abordagem facilita a geração de *shaders* a partir da descrição de BRDFs, apesar da metologia ser diferente.

## 4.2 Pesquisa por Repositórios online

Também foram analisados repositórios no github e SourceForge, cada um com uma *string* de busca especifica. Os repositórios encontrados foram filtrados baseados em seus resumos, caso não haja a menção da criação de um compilador ou não citar uma transformação de BRDF para outra estrutura, esse repositório foi excluido. O resultado se encontra na Tabela 3.

Plataformas	Termos de Pesquisa	Resultados
GitHub	in:readme (GLSL AND BRDF AND (com-	15
	piler OR compilation) AND (shader OR	
	shading))	
SourceForge	compiler bdrf	0

Tabela 3: Resultados da pesquisa nos repositórios

Após ler por completo os resumos dos repostiórios do GitHub, é evidente que nenhum desses projetos é relacionado com o proposto neste trabalhos, apesar de comentarem sobre BRDFs, esses projetos não implementam compiladores, não fazem *parsing* de equações de BRDFs e nem mesmo geram *shaders* a partir de BRDFs.

# Metodologia

A metodologia para desenvolver o compilador proposto envolve uma abordagem prática, as etapas são: uma análise aprofundada das informações pertinentes a BRDFs e compilação de *shaders*; exploração de técnicas existentes dentro do domínio; especificação da linguagem subcojunto LATEX de entrada; a implementação do compilador; a avaliação de seu desempenho por meio de experimentos de renderização.

### 5.1 Análise

O primeiro passo envolve a realização de uma análise detalhada das áreas relacionadas ao desenvolvimento da ferramenta proposta. Isso inclui a revisão da literatura sobre BRDFs, linguagens de *shaders*, *design* de compiladores e técnicas de renderização gráfica. Também envolve estudo de ferramentas e bibliotecas pertinentes.

## 5.2 Especificação da Linguagem

As especificações da linguagem de entrada e saída para o compilador são definidas. A linguagem de entrada é uma versão simplificada do LAT<sub>E</sub>X,na qual as expressões matemáticas nos ambientes equation ou align são suficientes para descrever BRDFs. O LAT<sub>E</sub>Xé um sistema de composição amplamente utilizado para documentos matemáticos e científicos. O ambiente equation é especificamente projetado para exibir equações individuais. A equação 5.2 é um exemplo de código LAT<sub>E</sub>Xusando o ambiente equation:

```
\begin{equation}
  f(x) = ax^2 + bx + c
\end{equation}
```

Este código representa uma equação quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , onde a, b e c são coeficientes, o *shader* GLSL correspondente gerado a partir dessa equação pode ser:

```
float quadratic(float x, float a, float b, float c) {
   return a * x * x + b * x + c;
}
```

### 5.3 Design de Casos de Teste

Os casos de teste devem ser projetados para validar a correção e precisão do processo de tradução do compilador. Eles emparelham equações LATEX de entrada descrevendo BRDFs com o código de *shader* GLSL de saída esperado. Um caso específico que demonstra a capacidade do compilador pode ser criado com a BRDF de Cook-Torrance.

#### **LaTeX Input (Cook-Torrance BRDF):**

```
\label{lem:condition} $$f_{\text{CT}}(\omega_i, \omega_0) = \frac{D(h)F(\omega_i, h)G(\omega_i, \omega_0, \ell_0)}{\operatorname{equation}}$$
```

#### **GLSL Output esperado:**

}

```
float CookTorrance(vec3 normal, vec3 viewDir, vec3 lightDir, float roughness, float
    // halfway vector
    vec3 halfwayDir = normalize(viewDir + lightDir);

    // microfacet distribution function
    float D = ...; // D(h)

    // Calculate Fresnel term
    float F = ...; //F(wi, h)

    // Calculate geometric attenuation factor
    float G = ...; //G(wi, wo, h)

    float denominator = 4.0 * max(dot(viewDir, normal), 0.0) * max(dot(lightDir, normal))

    // Final BRDF value
    return (D * F * G) / denominator;
```

### 5.4 Implementação do Compilador

A implementação do compilador é feita usando a linguagem de programação Odin, escolhida por suas capacidades baixo nível com herança por composição e uma biblioteca padrão satisfatória. Técnicas de análise recursiva são utilizadas, especificamente o Pratt *Parsing*. Inicialmente, um *lexer* e um *parser* foram implementados para uma linguagem mais simples do que o IATEX para garantir que os fundamentos do compilador estejam funcionais, com precedência totalmente testada para a árvore sintática.

## 5.5 Experimentos de Renderização

Por fim, experimentos de renderização são realizados usando os *shaders* gerados pelo compilador. Isso permite a avaliação do desempenho e da qualidade visual das imagens renderizadas produzidas pelos *shaders* compilados. A plataforma escolhida para os testes é a ferramenta Disney BRDF <sup>1</sup>, compilada localmente para modificar e adicionar outros *shaders*. Essa fornece uma interface para definir parâmetros que servem como controles deslizantes para as constantes da BRDF.

@ Imagem para a ferramenta @ Código para o superconjunto GLSL

Seguindo esa metodologia, a ferramenta proposta visa compilar efetivamente descrições de BRDF em *shaders* GLSL, facilitando a geração de gráficos realistas em aplicativos de gráficos por computador.

# 5.6 Plano de Continuação

A continuação deste trabalho envolve várias tarefas-chave destinadas a completar o desenvolvimento do compilador proposto para converter equações LATEX que descrevem BRDFs em código de *shader* GLSL. As tarefas incluem: atualizar o *lexer* e o *parser* escritos em Odin para aceitar equações LATEX; testar o *lexer* para garantir o reconhecimento correto dos *tokens*; testar o *parser* para garantir que a árvore sintática está com precedência correta; definir símbolos predefinidos e constantes matemáticas; implementar o processo de geração de código GLSL usando a árvore sintática com o padrão de visitante; expandir os casos de teste para cobrir uma melhor variedade de BRDFs; testar o código gerado quanto à correção e eficácia, incluindo as visualizações das BRDFs em algumas cenas; preparar a apresentação final; escrever o documento do trabalho (TCC).

1. 06/05/2024 - 20/05/2024: Atualizar o lexer e o parser para aceitar equações LATEX.

<sup>1 &</sup>lt;https://github.com/wdas/brdf>

- 2. 06/05/2024 27/05/2024: Testar o lexer para garantir o reconhecimento correto de todos os tokens LATEXMath.
- 3. 06/05/2024 27/05/2024: Testar o parser para garantir a árvore de sintaxe com a precedência correta.
- 4. 13/05/2024 03/06/2024: Definir símbolos predefinidos como constantes matemáticas e outras quantidades.
- 5. 03/06/2024 10/07/2024: Implementar o processo de geração de código GLSL.
- 6. 10/07/2024 17/07/2024: Expandir os casos de teste para cobrir uma ampla gama de BRDFs.
- 7. 17/07/2024 24/08/2024: Testar o código gerado quanto à correção e eficácia, tanto em código quanto em visualização e corrigir se necessário.
- 8. 17/06/2024 06/09/2024: Escrever o documento da tese.
- 9. 10/06/2024 01/07/2024: Preparar a apresentação final.

	2024				
	May	Jun	Jul	Aug	Sep
1. 44 -121					
1. Atualizar lexer e parser					
2. Testar lexer para todos os tokens					
3. Testar parser para precedência					
4. Definir símbolos matemáticos					
5. Implementar geração de GLSL					
6. Expandir casos de teste para GLSL					
7. Testar correção do código					
8. Escrita do trabalho	Ĺ				
9. Preparar apresentação final					

# **Resultados Iniciais**

#### 6.1 Parser e Lexer em Odin

Desenvolvemos um *lexer*, *parser* e interpretador para uma linguagem simples, juntamente com sua gramática, utilizando a o Pratt *Parsing* na linguagem de programação Odin. O repositório pode ser encontrado em <a href="https://github.com/evertonse/pratt-parser">https://github.com/evertonse/pratt-parser</a>. Esse *parser* é um implemetado por descida recursiva, o que significa que cada regra de produção tem uma função de análise associada. A implementação prioriza a simplicidade e a clareza, com extensos comentários para auxiliar na compreensão, especialmente porque será modificado para aceitar *tokens* de LATEX.

#### 6.1.1 Parser

Ao contrário dos *parser* de descida recursiva tradicionais, que muitas vezes exigem várias chamadas de função aninhadas para cada nível de precedência, o nosso *parser* organiza as funções de análise hierarquicamente com base na precedência do operador, como demonstrado no Algoritmo 2. Os pacotes desse projeto estão definidos na Figura 11.

Algoritmo 2 – Parte principal do parsing de expressão em código Odin, nessa implementação usamos a notação original de @ref(pratt) null\_denotations and left\_denotations que o mesmo que funções de parsing para operadore prefix e infixo respectivamente

```
1
   parse_expr :: proc(prec_prev: i64) -> ^Expr {
2
       /* expressions that takes nothing (null) as left operand */
3
       left := parse_null_denotations()
4
5
       . if current token is left associative or current token has
6
          higher precedence
7
       . than previous precedence then stay in the loop, effectively
          creating a left leaning
       . sub-tree, else, we recurse to create a right leaning sub-tree.
8
       */
9
       for precedence(peek()) > prec_prev + associativity(peek()) {
10
           /* expressions that needs a left operand such as postfix,
11
              mixfix, and infix operator */
           left = parse_left_denotations(left)
12
13
       return left
14
   }
15
```

Figura 11 – estrutura de pacotes do compilador

```
► ~/code/pratt-parser
    src
    * main.odin
    * parser.odin
    * scope.odin
    * test.odin
    * walker.odin
    log.txt
    readme.md
```

#### 6.1.2 Gramática

A gramática é definida em subseção 6.1.2. Utilizamos uma notação leve de sintaxe para descrevê-la, todas as palavras em minúsculas são regras, o símbolo "\*" significa zero ou mais ocorrências, "()" indica agrupamento para aplicar um operador a ele, "|" é o operador ou, palavras entre aspas simples significam literalmente um *token* com esse conteúdo, e todas as letras maiúsculas representam um *token* que pode ter conteúdo diferente, mas possui o mesmo

significado semântico. Por exemplo, NUMBER pode ser 2.0 ou 1.0, mas nas regras de produção eles são tratados da mesma forma. O símbolo "=" indica uma produção. Um exemplos de código fonte válido para essa grammática é dado em Algoritmo 3.

```
start = assign* expr ;
expr = prefix expr
       | expr postfix
       | expr infix expr
       | expr '?' expr ':' expr
       | call
       | NUMBER
       | IDENTIFIER
assign = IDENTIFIER '=' expr ';'
         | IDENTIFIER '=' 'fn' (' params ')' expr ';'
         ;
call = expr '(' args ')';
args = expr
        | expr ',' args
params = IDENTIFIER
         | IDENTIFIER ',' params
postfix = '+' | '-' | '~' | '!';
prefix = '+' | '-' | '~' | '!';
infix = '+' | '-' | '*' | '/' | '^'
            | 'eq' | 'lt' | 'gt' | 'or' | 'and'
```

Essa gramática define regras para expressões, atribuições, chamadas de função e vários operadores, como postfix, prefix e infix com o intuito de criar uma vasta coleção de operadores com diferentes precendecias para facilitar quando for transicionado para sintaxe LATEX.

Algoritmo 3 – Exemplo código da linguagem implementada

```
epsilon = 0.001; # proximidade em float
2
   abs = fn(a) \ a \ lt \ 0 \ or \ a \ lt \ -0 \ ? \ -a : a;
3
4
5
   float_close = fn(a, b)
6
       abs(a - b) lt epsilon ?
7
            1:0;
8
9
   # Classical fibonacci
   fib = fn(n)
10
       float_close(n, 0) ?
11
12
13
        :float_close(n, 1) ?
14
        :fib(n-1) + fib(n-2);
15
16
   fib(10) # Ultima expressao significa retorno do main
17
```

#### 6.1.3 Tabela de Símbolos

Nesse projeto também foi desenvolvido uma tabela de símbolos simples, que será reaproveitado na análise semântica e na geração de código GLSL futuramente. A implementação da tabela de símbolos fornecida aqui é baseada em uma estrutura de escopo hierárquico, onde cada escopo mantém um mapeamento entre os nomes dos símbolos e seus atributos correspondentes. No Código 3 temos a estrutura Scope, que representa um mapeamento de nomes de símbolos para objetos de símbolo dentro de um **único** escopo, e também a estrutura Scope\_Table mantém uma pilha de escopos, permitindo aninhamento.

#### 6.1.3.1 Estrutura de Símbolos

Cada símbolo na tabela de símbolos é representado pela estrutura Symbol, que contém os seguintes atributos:

- name: o nome do símbolo.
- val: o valor associado ao símbolo (para variáveis).
- is\_function: um sinalizador booleano indicando se o símbolo é uma função.
- params: uma lista de tokens representando os parâmetros da função.
- body: um ponteiro para a expressão que representa o corpo da função (se aplicável).

#### Código 3 – Código Odin

```
Scope :: #type map[string]Symbol
2
   Scope\_Table :: [dynamic]Scope
3
4
   Symbol :: struct {
5
       name : string,
6
       val: f64,
7
       is\_function: bool,
8
       params: []Token,
9
       body: ^Expr,
10
  }
```

#### **6.1.3.2** Gerenciamento de Escopo

A tabela de símbolos fornece funções para gerenciar escopos, incluindo:

- scope\_enter: entrar em um novo escopo, anexando-o à pilha de escopos.
- scope\_exit: sai do escopo atual, removendo-o da pilha de escopos e retornando-o.
- scope\_reset: redefine a tabela de símbolos limpando todos os escopos.
- scope\_get: recupera um símbolo da tabela de símbolos pelo seu identificador.
- scope\_add: adiciona um novo símbolo ao escopo atual.

Essa tabela de símbolos será apdatada para a fase de geração de código e tradução adequada do código-fonte em *shaders* GLSL.

#### 6.1.3.3 Estrutura da Árvore de Sintaxe

- Ast: a estrutura base para todos os nós da AST.
- **Start**: representa o ponto de partida do programa, contendo uma sequência de atribuições seguida de uma expressão.
- Assign: representa atribuições de variáveis, incluindo um identificador, operador de atribuição e expressão.
- Assign\_Function: estende Assign e representa definições de funções, incluindo parâmetros.
- Expr: representa expressões, servindo como a estrutura base para diferentes tipos de expressões.
- Expr\_Identifier: representa identificadores dentro de expressões.
- Expr\_Number: representa literais numéricos dentro de expressões.

- Expr\_Grouped: representa expressões agrupadas dentro de parênteses.
- Expr\_Prefix: representa operações unárias de prefixo.
- Expr\_Infix: representa operações binárias de infixo.
- Expr\_Postfix: representa operações unárias de sufixo.
- Expr\_Mixfix: representa operações ternárias de mixfix.
- Expr\_Function\_Call: representa chamadas de função com argumentos.

#### 6.1.4 Implementação do Padrão de Visitante

O padrão visitante foi empregado para percorrer e operar em uma árvore de sintaxe abstrata (AST). A estrutura da AST é definida com vários tipos de nó para capturar diferentes elementos da sintaxe. Três procedimentos incorporam o padrão de visitante para percorrer e manipular a AST:

- walker\_interp: interpreta a AST, calculando o valor numérico das expressões.
- walker\_paren: gera uma representação de string entre parênteses da AST, auxiliando na legibilidade e garantindo a ordem correta de avaliação.
- walker\_print: imprime os nós da AST e seus atributos, facilitando a depuração e compreensão da estrutura da AST.

#### **6.1.5** Testes

Foi desenvolvida uma serie de testes que abrangem vários aspectos da funcionalidade do parser, incluindo geração de árvore de sintaxe, precedência de operadores e interpretação semântica.

#### 6.1.5.1 Geração de Árvore de Sintaxe

Um aspecto crucial dos testes envolve verificar a correta geração de árvores sintática a partir de expressões de entrada. Os testes são projetados para cobrir diferentes cenários, incluindo operações aritméticas simples, expressões complexas com subexpressões aninhadas e chamadas de funções. São eles:

- O manuseio correto de operadores unários e binários, garantindo a precedência e associatividade adequadas.
- A representação precisa de chamadas de função e seus argumentos dentro da árvore de sintaxe.

 O agrupamento adequado de expressões dentro de parênteses para impor regras de precedência.

#### 6.1.5.2 Interpretação Semântica

Além da geração de árvore de sintaxe e precedência de operadores, testes foram realizados para garantir a interpretação semântica de expressões. Isso envolve avaliar entradas e comparar a saída com os valores esperados.

Por exemplo, os testes de interpretação semântica abrangem:

- Avaliar expressões aritméticas envolvendo constantes, variáveis e chamadas de função recursivas para verificar resultados corretos.
- Verificar o comportamento de expressões condicionais (por exemplo, operador ternário) sob diferentes condições.

Ao testar a geração de árvore de sintaxe, precedência de operadores e interpretação semântica, a implementação do Pratt *Parsing* pode foi validada quanto à correção e confiabilidade, e um desempenho robusto em vários cenários de entrada.

# 6.2 Ray Tracing

Este capítulo apresenta o desenvolvimento e implementação de um simples *ray tracer* usando métodos estocásticos de colisão de raios na linguagem de programação Odin com a biblioteca RayLib <sup>1</sup> para renderização de imagens em uma janela. Isso foi feito para começar a entender melhor BRDFs e a equação de renderização.

O *ray tracer* foi construído com instruções do livro "Ray Tracing in One Weekend"<sup>2</sup>. Ele opera inteiramente na unidade de processamento central, e a funcionalidade principal do *ray tracer* envolve a modelagem de raios e sua reflexão dos *pixels* da imagem para a cena. A cena consiste exclusivamente de esferas, empregando cálculos de colisão padrão entre um raio e uma esfera.

### 6.2.1 Implementação de Materiais

O ray tracer inclui vários materiais que ditam o comportamento dos raios ao interagir com superfícies, embora não garantidos de estar fisicamente vinculados, considerando a conservação de energia discutida no capítulo 3.1.2. Cada material é implementado como uma estrutura contendo um ponteiro de função de dispersão responsável por calcular a atenuação e o raio

<sup>1 &</sup>lt;https://www.raylib.com/>

<sup>2 &</sup>lt;https://raytracing.github.io/books/RayTracingInOneWeekend.html>

disperso após a interação com uma superfície. Como demonstrando no Código 4, os seguintes materiais foram implementados:

- Material Difuso: representa um material básico com refletância lambertiana.
- Material Lambertiano: uma variante do material difuso com albedo personalizável.
- Material Metálico: modela uma superfície metálica com reflexão especular, permitindo controle sobre a difusão.
- Material Dielétrico: simula materiais transparentes com refração e reflexão com base no índice de refração.

#### Código 4 – Materiais

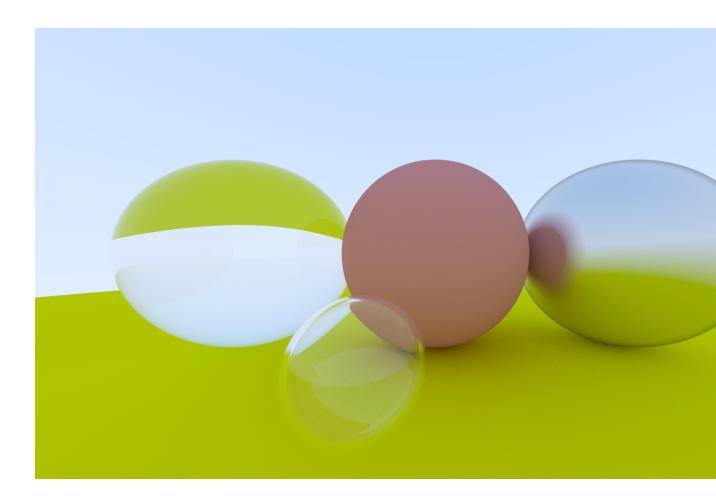
```
Material :: struct {
    scatter: #type proc(self: ^Material, ray: Ray, hit: Hit) -> (attenuation: Cole
}
Shit_Diffuse_Material :: struct {
    using _ : Material,
    albedo: Color,
}
Lambertian_Material :: struct {
    using _ : Material,
    albedo: Color,
}
Metal_Material :: struct {
    using _ : Material,
    albedo: Color,
    fuzz: f32,
}
Dielectric_Material :: struct {
    using _ : Material,
    ir: f32, // índice de refração
};
```

#### 6.2.2 Mecanismo de Reflexão de Raios

O mecanismo central do *ray tracer* envolve traçar raios pela cena para determinar suas interações com superfícies e calcular os valores de cor resultantes. Esse processo foi implementado considerando os passos, o resultado pode ser encontrando na Figura 12:

- 1. **Geração de Raios**: raios são gerados a partir do ponto de vista da câmera e projetados na cena.
- 2. **Detecção de Colisão**: cada raio é testado quanto à interseção com objetos na cena.
- 3. **Interação de Material**: após a colisão, os raios interagem com o material da superfície, determinando atenuação e raios dispersos com base nas propriedades do material.
- 4. **Traçado Recursivo**: se um raio se dispersa, o processo se repete, traçando o caminho do raio disperso até que uma profundidade máxima de recursão seja atingida ou o raio escape da cena.
- 5. **Acúmulo de Cor**: os valores de cor são acumulados ao longo do caminho do raio, essa acumulação simula a irradiância de um certo ponto da superfície.

Figura 12 – Imagem gerada por raytracing conforme a implementação em Odin



# Referências

BRADY, A. et al. genbrdf: Discovering new analytic brdfs with genetic programming. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, ACM New York, NY, USA, v. 33, n. 4, p. 1–11, 2014. Citado na página 26.

CEM, Y. *Intro to Graphics 07 - GPU Pipeline*. 2020. Disponível em: <a href="https://youtu.be/UzlnprHSbUw?si=Y0a0Tj7ia-lW\_eGC">https://youtu.be/UzlnprHSbUw?si=Y0a0Tj7ia-lW\_eGC</a>. Citado na página 16.

DAVISONPRO. *Criando um jogo em JavaScript*. 2024. Disponível em: <a href="https://bulldogjob.pl/readme/tworzenie-gry-w-javascript">https://bulldogjob.pl/readme/tworzenie-gry-w-javascript</a>. Citado na página 18.

DISNEY, M.; LEWIS, P.; NORTH, P. Monte carlo ray tracing in optical canopy reflectance modelling. *Remote Sensing Reviews*, Taylor & Francis, v. 18, n. 2-4, p. 163–196, 2000. Citado na página 9.

GENG, C. et al. Tree-structured shading decomposition. In: 2023 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). [S.l.: s.n.], 2023. p. 488–498. Citado na página 27.

HE, Y.; FATAHALIAN, K.; FOLEY, T. Slang: language mechanisms for extensible real-time shading systems. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, ACM New York, NY, USA, v. 37, n. 4, p. 1–13, 2018. Citado na página 26.

JÄGER, G.; ROGERS, J. Formal language theory: refining the chomsky hierarchy. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, The Royal Society, v. 367, n. 1598, p. 1956–1970, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

JUDICE, S. F.; GIRALDI, G. A.; KARAM-FILHO, J. Rendering Equation. 2019. Citado na página 9.

KAJIYA, J. T. The rendering equation. In: *Proceedings of the 13th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 143–150. Citado na página 11.

MONTES, R.; UREÑA, C. An overview of brdf models. *University of Grenada, Technical Report LSI-2012-001*, 2012. Citado na página 12.

OHBUCHI, E.; UNNO, H. A real-time configurable shader based on lookup tables. In: IEEE. *First International Symposium on Cyber Worlds, 2002. Proceedings.* [S.1.], 2002. p. 507–514. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

OpenGL Architecture Review Board. *OpenGL 4.6 Core Specification*. [S.l.], 2017. Https://www.khronos.org/registry/OpenGL/index\_gl.php. Citado na página 15.

PHARR, M.; JAKOB, W.; HUMPHREYS, G. *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation (3rd ed.)*. 3rd. ed. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2016. 1266 p. ISBN 9780128006450. Citado 5 vezes nas páginas 5, 9, 10, 11 e 12.

PRATT, V. R. Top down operator precedence. In: *Proceedings of the 1st annual ACM SIGACT-SIGPLAN symposium on Principles of programming languages*. [S.l.: s.n.], 1973. p. 41–51. Citado na página 20.

Referências 44

PROKHOROV, A. V.; HANSSEN, L. M.; MEKHONTSEV, S. N. Calculation of the radiation characteristics of blackbody radiation sources. *Experimental Methods in the Physical Sciences*, Elsevier, v. 42, p. 181–240, 2009. Citado na página 9.

RABIN, M. O. Mathematical theory of automata. In: *Proc. Sympos. Appl. Math.* [S.l.: s.n.], 1967. v. 19, p. 153–175. Citado na página 20.

TAN, P. Phong reflectance model. *Computer Vision: A Reference Guide*, Springer, p. 1–3, 2020. Citado na página 14.

WEYRICH, T. et al. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 10.

WOLFE, W. L. *Introduction to radiometry*. [S.l.]: Spie press, 1998. v. 29. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 28.

ZEYU, Z. et al. The generalized laws of refraction and reflection. *Opto-Electronic Engineering*, Opto-Electronic Engineering, v. 44, n. 2, p. 129–139, 2017. Citado na página 13.