SEMANA Nº 01
CONCEPTOS BÁSICOS DEL ALGEBRA

DEFINICIÓN DE ÁLGEBRA: Es una rama de la matemática, estudia las cantidades en su forma más general posible.

UTILIDAD: Los conocimientos del álgebra son indispensables en el desarrollo de los cursos de: Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica, el Cálculo diferencial e integral.

SÍMBOLOS: Los símbolos que utiliza el álgebra para su estudio son los números y las letras. Los números representan cantidades conocidas y las letras representan toda clase de cantidades (conocidas o desconocidas).

Las primeras letras del alfabeto: a, b, c,… representan cantidades conocidas y Las últimas letras del alfabeto: x, y, z,… representan cantidades desconocidas.

SIGNOS QUE UTILIZA EL ÁLGEBRA: Son de tres clases:

1. **SIGNOS DE OPERACIÓN:** Nos indican las operaciones a realizar: Adición (+), Sustracción (–), Multiplicación (.), División (:), Potenciación ($)^n$ y Radicación ($\sqrt{\ }$)

2. **SIGNOS DE RELACIÓN:** Para relacionar las cantidades: Igual a (=), Diferente a (≠); Mayor que (>), menor que (<), mayor o igual que (≥), menor o igual que (≤), idéntico a (≡).

3. **SIGNOS DE AGRUPACIÓN:** Todas las cantidades que se encierran, se considera como una sola. Estos son: Paréntesis ( ), Corchetes [ ], llaves { } y barra o vínculo " —— "

TÉRMINO ALGEBRAICO: Es la representación de una o más variables unidas por las operaciones de: multiplicación, división potenciación y radicación.

Ejemplos:
1) 12xyz
2) $5xy^5z^7$
3) $-9xyz\sqrt{(xy)(x^2-y^2)}$

Todo Término algebraico consta de partes o elementos:

Ejemplo:

SIGNO EXPONENTE

$+15x^9$

COEFICIENTE PARTE LITERAL

1. **COEFICIENTE:** Indica las veces que se repite la parte literal como suma.

   Ejemplo: 5x = x + x + x + x + x

2. **EXPONENTE:** Indica las veces que se repite la parte literal como producto.

   Ejemplo: $x^5 = x.x.x.x.x$

EXPRESIONESALGEBRAICAS: Es la agrupación de términos algebraicos unidos por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

1) $8x^3 - 7xy^2 + 5xy^2z - 15$

2) $3x\sqrt{xy}^3 + \sqrt{xyz} - 11xy$

3) $\frac{5x^2+\sqrt{7x^2-8xy^3}}{2xy-5xy^2}$

VARIABLE MATEMÁTICA: Símbolos que pueden recibir diferentes valores numéricos y pertenecen al conjunto de números reales. (x, y, z,…)

CONSTANTE: Está determinada por un número conocido el cual pertenece al conjunto de los números reales.

Ejemplos:

(2, $\sqrt{3}$, 7, etc.)

TÉRMINOS SEMEJANTES: Dos o más términos son semejantes si tienen la misma parte literal y sus variables tienen los mismos exponentes.

Ejemplos:
1) $2x^3$; $5x^3$
2) $\sqrt{6}\,x^3y^4$; $-7x^3y^4$
3) $\sqrt{3}x^5y^7z^9$; $\frac{3}{5}x^5y^7z^9$

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

A. **POR SU NATURALEZA:** Se clasifican en racionales e irracionales:

Una expresión algebraica es racional cuando ninguna letra está afectada de un signo radical o exponente fraccionario, caso contrario será irracional.

Ejemplos:

a) $3x^2 + \sqrt{2}xy - 5^{2/3}z^3$, es racional.

b) $\sqrt[3]{x+y} - 5\sqrt[3]{x-y} + 3$, es irracional.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

1. E.A.R. enteras: los exponentes de las variables son números naturales o enteros positivos.

Ejemplos:

1) $9x^3y^4 + \frac{2}{3}x^3y^5$

2) $-3x^2yz^4$

2. E.A.R. fraccionarias: al menos uno de los exponentes de las variables es un número entero negativo.

Ejemplos:

1) $2x + \frac{4}{z}$

2) $4x^{-2}yz$

3) $-xy^{-2}z + \frac{1}{y+z}$

B. SEGÚN LA CANTIDAD DE TÉRMINOS:

MONOMIOS: un solo término.

Ejemplos:

1) $-5x^2yz^3$

2) x^5yz

3) $\frac{3}{7}xyz^{11}$

POLINOMIOS: Es una expresión algebraica que consta de un o más términos algebraicos racionales enteros, un polinomio generalmente se representa de la siguiente manera:

P(x): Se lee "Polinomio en la variables x"

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Donde:

- x: Variable
- n: Grado del polinomio.
- a_n: Coeficiente principal.
- a_0: Término independiente.

Ejemplos:

1) $x^2 + y^2 - yz$

2) $\sqrt{5}\,yz^4 - 2xy$

3) $3 + \frac{5}{3}x^2 - 7xy + \sqrt{x-3y}$

OBSERVACIÓN:

P (1) = Suma de sus coeficientes.

P (0) = Término independiente.

TEORIA DE EXPONENTES

FINALIDAD: El objetivo de la teoría de exponentes es estudiar todas las clases de exponentes que existen y las relaciones que se dan entre ellos.

LEYES DE LA TEORÍA DE EXPONENTES:

1) $a^n = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{n-veces}$, $n \in IN$

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, con $a \neq 0$

4) $a^0 = 1$, con $a \neq 0$

5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, con $a \neq 0$

6) $(a.b)^n = a^n.b^n$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$

8) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, con $a \neq 0$

9) $(a.b)^n = a^n.b^n$

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, con $a \neq 0$

12) $(a^m)^n = a^{m.n}$

13) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

14) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

15) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, con $b \neq 0$

16) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[m.n.p.q]{a}$

17) $\sqrt[m]{x^p.\sqrt[m]{x^p\ldots."n"\,radicales}} = \sqrt[m^n]{x^{\frac{p(m^n-1)}{m-1}}}$

$\sqrt[m]{x^p \div \sqrt[m]{x^p \div \ldots "n"\,radicales}} = \sqrt[m^n]{x^{\frac{p(m^n-1)}{m+1}}}$

para n par

18) $\sqrt[m]{x^p \div \sqrt[m]{x^p \div \ldots "n"\,radicales}} = \sqrt[m^n]{x^{\frac{p(m^n+1)}{m+1}}}$

para n impar

19) $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}} = n \rightarrow x = \sqrt[n]{n}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el valor de:

$$E = \sqrt[n]{\frac{4^{n+1}}{\sqrt[n+2]{16\sqrt{16^n}}}}$$

A) 2
B) 4
C) $\sqrt{2}$
D) 3
E) 16

Solución:
Efectuando operaciones en el denominador:

$$D = \sqrt[n+2]{16.\sqrt{16^n}}$$

$$= \sqrt[n+2]{16.16^{\frac{n}{2}}} = \sqrt[n+2]{4^{2\left(1+\frac{n}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt[n+2]{4^{2\left(\frac{2+n}{2}\right)}} = 4$$

Reemplazando en la expresión:

$$E = \sqrt[n]{\frac{4^{n+1}}{4}} = \sqrt[n]{4^{n+1-1}} = 4$$

2. Hallar el valor de "x" sabiendo que: $9^{5x-2} + 9^2 = 90$

A) 2
B) $\frac{5}{2}$
C) 3
D) $\frac{3}{5}$
E) 5

Solución:
Transponiendo se tiene:
$9^{5x-2} = 90 - 81 \Rightarrow 9^{5x-2} = 9^1$
Por igualdad de bases:
$5x - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$ $\boxed{\therefore\ x = \frac{3}{5}}$

3. Hallar el valor de:

$$E = \left[\frac{\overbrace{x.x.x\ldots x}^{(4n+5)\text{ veces}}}{\underbrace{x.x.x\ldots x}_{(3n+2)\text{ veces}}}\right]\left[\frac{\overbrace{x.x.x\ldots x}^{(2n+1)\text{ veces}}}{x^4}\right]\left[\frac{1}{x^{3n-4}}\right]$$

A) x^3
B) x^4
C) $\sqrt{x}$
D) x^{n+1}
E) x^n

Solución:
Reduciendo el exponente en el primer y segundo corchete:

$$E = \left[\frac{x^{4n+5}}{x^{3n+2}}\right]\left[\frac{x^{2n+1}}{x^4}\right]\left[\frac{1}{x^{3n-4}}\right]$$

Usando: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$E = (x^{4n+5-3n-2})(x^{2n+1-4})(x^{-3n+4})$$

$E = x^{n+3+2n-3-3n+4} = x^4$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Simplificar:

$$E = \frac{2^{n+13}+2^{n+14}}{2^{n+14}+2^{n+15}}$$

A) 0,5 B) 0,6 C) 3 D) 2 E) 0,3

2. Reducir: $A = \frac{2^{m+3}.4^{m+`2n}}{8^{m-2}.16^{n+2}}$

A) 3 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

3. Realizar: $C = \frac{\sqrt[3]{3}^{-m^n}.\sqrt[9]{27}^{-2}}{\sqrt[12]{81}^{-m^n-1}}$

A) 2 B)3 C) 5 D) 7 E) 1

4. Simplificar: $W = \sqrt[n-1]{\frac{2^{n-1}+3^{n-1}}{2^{1-n}+3^{1-n}}}$

A) 1 B) 3 C) 6 D) 2 E) 5

5. Efectuar: $C = \frac{\sqrt[2^n-2]{x^{2^n+1}} + x^2\,\sqrt[2^n-2]{x^4}}{\sqrt[2^n-2]{x^{2^n+2}}}$

A) 3x B) x^2 C) 2^n D) 2x E) x

6. Calcular (W + C) si: $W = 81^{16^{-4^{-2^{-1}}}}$
y

$$C = 27^{9^{-4^{-4^{-4^{-2^{-1}}}}}}$$

A) 0,5 B) 0,75 C) 2 D) 4 E) 6

7. Calcular:

$$A = \sqrt[x-1]{\frac{10^{x-1}+6^{x-1}+15^{x-1}}{(2^{x-1})^{-1}+(3^{x-1})^{-1}+(5^{x-1})^{-1}}}$$

A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 5

8. Efectuar:

W =

$$\left[\frac{1}{2^{(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\right]\left[\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{4}}\left[\sqrt{3}^{\sqrt{4}}\right]^{\sqrt{2}}\left[\sqrt{4}^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{3}}$$

A) $2^{\sqrt{2}}$ B) $3^{\sqrt{2}}$ C) $5^{\sqrt{2}}$ D) $6^{\sqrt{2}}$ E) $4^{\sqrt{2}}$

9. Calcular:

$$W=\sqrt[5]{\frac{3^{a+1}+3^{a+2}+3^{a+3}+3^{a+4}}{3^{a-1}+3^{a-2}+3^{a-3}+3^{a-4}}}$$

A) 6 B) 1 C) 3 D) 2 E) 4

10. Luego de simplificar, indicar el exponente de "x" en: $C=\dfrac{\sqrt[0,04]{x^{0,02}\ \sqrt[0,02]{x^{0,01}}}}{\sqrt[0,4]{x^{0,3}\ \sqrt[0,2]{x^{0,1}}}}$

A) 7 B) 5 C) 9 D) 2 E) 11

11. Simplificar: $\left[\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\sqrt{2^{2}}}\right]^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}}$

A) 2 B) 7 C) 5 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

12. Reducir:

$$C=\sqrt[\sqrt{2}-1]{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}.\ \sqrt[(\sqrt{2}-1)^{2}]{\frac{\sqrt{2}^{\ 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}}$$

A) 2 B) 1 C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) $2-\sqrt{2}$

13. El equivalente reducido de:

$$A=\sqrt[\frac{5}{4}]{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{16}}\sqrt[\sqrt[3]{\frac{1}{4}}]{\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt[\frac{3}{4}]{\frac{1}{4}}}}}$$

Es

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) ¼ C) 1 D) $2\sqrt{2}$ E) 1/3

14. La expresión simplificada de:

$$W=\frac{\sqrt[mn^{-1}]{\sqrt[n]{x}.\ \sqrt[n]{x^{2}}.\ \sqrt[n]{x^{3}}\ldots\sqrt[n]{x^{m}}}}{\sqrt{x\ \sqrt[m]{m^{2}}}}$$

A) 3 B) 1 C) 5 D) 2 E) 7

15. Si el denominador tiene "n" radicales y el numerador uno menos, simplificar:

$$W=\left[\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{x}}}}}{x\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}\ldots\sqrt{\frac{1}{x}}}}}\right]^{2^{n}}$$

A) 1 B) $\frac{1}{x}$ C) x^2 D) 2x E) x

16. Reducir:

$$W=\left[\sqrt[\sqrt{7}]{7\sqrt[7]{\sqrt{\sqrt[7]{7}}}}\right]^{\sqrt{7}}\left[\sqrt[-7^{\sqrt{7^{-1}}}]{\sqrt{\sqrt{7}}}\right]^{\frac{\sqrt{7}}{7}}$$

A) 1 B) 5 C) 3 D) 7 E) $\sqrt{7}$

17. Calcular:

$$A=\left[\sqrt[x^{x^{x}}]{x^{x^{x^{2x^{x}}}}}\right]^{x^{x^{x}-\left[x^{x^{x}}\right]^{2}}}$$

A) x B) x^{-1} C) x^{-2} D) x^2 E) x^x

18. Simplificar:

$$C=\frac{\sqrt[1+x^{1+x}]{(x^{2}+x)^{x^{x}+x-1}}}{\sqrt[x]{\sqrt[1+x^{1+x}]{x}\ .\ \sqrt[1+x^{1+x}]{x^{x^{x}}}}}$$

A) $\sqrt[x]{2x+1}$ B) $\sqrt[x]{x+2}$ C) $\sqrt[x]{x}$
D) $\sqrt[x]{x+1}$ E) $\sqrt[x]{2x}$

19. Calcular el exponente de "x" al simplificar:

$$W=\underbrace{\sqrt[7]{x^{6}\sqrt[7]{x^{6}\sqrt[7]{x^{6}\ldots}}}}_{\text{"n" radicales}}$$

A) x^6 B) $\sqrt[7]{x^{6}}$ C) $x^{1/7}$
D) $\sqrt[7]{x}$ E) $1-7^{-n}$

20. Si $2^{12}+1=x$, calcular:

$$M=2^{2^{2^{2}}}+[(2^{2})^{-2}]^{2}.2^{12}$$

A) 16x B) 2x C) 4x D) x E) 8x

21. Calcular el valor de: $C=x^{2x^{2x^{x}+1}}$; Si $x^{x^{x}}=2$

A) 16 B) 128 C) 256 D) 1 E) 8

22. Hallar el valor de: $M=(x^{x}+x^{-x})^{x^{-1}-x}$, para $x=\frac{1}{2}$

A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3\sqrt{2}}$ C) $\frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{2}}$
D) $\frac{3}{2}\sqrt{3\sqrt{2}}$ E) $3\sqrt{2}$

23. Si $x^{x-2^{x}}=\frac{1}{2}$; calcular:

$$C=\sqrt[x^{2^{x}}]{x^{(2x)^{x}}-x^{x+1}}$$

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 2x E) x^{-1}

24. Al efectuar:

$$\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^{4}\sqrt[9]{x^{24}\sqrt[17]{x^{240}\ldots\text{"n" radicales}}}}}$$

Se obtiene un exponente fraccionario de "x" indicar la suma del numerador y denominador de dicho exponente.

A) 2^{n+1} B) 2^{n+2} C) 2^n
D) 2 E) 2^{n-1}

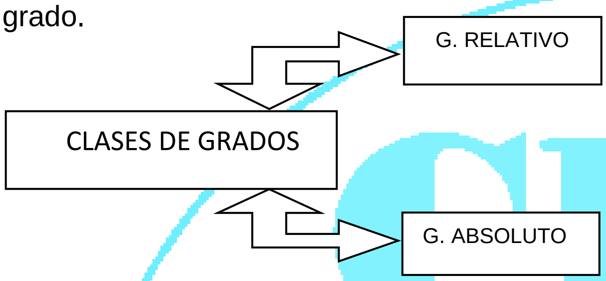
25. Calcular: "x" si: $(5x)^{x}=5^{5^{5}}$

A) 5 B) 25 C) x^5 D) x^2 E) 5^4

SEMANA Nº 02
GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

GRADO: El grado de una expresión algebraica racional entera, es una característica relacionada con los exponentes de sus variables, además es un número entero positivo, permite de antemano determinar el número de soluciones de la ecuación algebraica.

CLASESDE GRADO: Toda expresión algebraica racional entera tiene dos tipos de grado.



1. **GRADO RELATIVO:** Es el exponente de la variable indicada, se toma en relación a una sola variable de la expresión algebraica (Monomio o Polinomio).
2. **GRADO ABSOLUTO:** Llamado también grado, se toma en consideración a todas las variables de la expresión algebraica. (Monomio o Polinomio).

POLINOMIOS ESPECIALES: Son aquellos que tienen ciertas características y que es necesario conocerlos, los más importantes son:

1. **POLINOMIO HOMOGÉNEO:** Cada término tiene el mismo grado absoluto.
   Ejemplo:
   $P(x, y) = 5x^5 - 3x^2y^3 + 7x^3y^2 - xy^4 - 8y^5$
2. **POLINOMIO COMPLETO:** Cuando la variable referida presenta todos los exponentes consecutivamente desde la potencia máxima hasta cero.

   Ejemplo:
   $P(x) = 5x + 27 - 3x^3 + 8x^4 - 7x^2 - 12x^5$
3. **POLINOMIO ORDENADO:** Cuando los exponentes de la variable referida están aumentando o disminuyendo; Es decir, puede estar ordenado en forma creciente o decreciente.

   Ejemplos:
   $P(x) = 2 + 5x^3 - x^5 + 7x^{12}$,
   El polinomio está ordenado en forma creciente.
   $P(x) = 5x^{15} - 8x^{11} + 3x^7 - 2x^3 + 15$,
   El polinomio está ordenado en forma decreciente.
4. **POLINOMIOS IDÉNTICOS:** Cuando los coeficientes de sus términos semejantes son iguales.

   Si
   $$\begin{cases} P(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0 \\ Q(x) = B_nx^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1x + B_0 \end{cases}$$
   Son polinomios idénticos si y sólo si: $A_n = B_n,\ \ A_{n-1} = B_{n-1}, \ldots ,\ A_1 = B_1,\ \ A_0 = B_0$
5. **POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO:** Cuando los coeficientes de todos sus términos son nulos.

   $P(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0$,
   entonces: $A_n = A_{n-1} = \ldots = A_1 = A_0 = 0$
6. **POLINOMIO CONSTANTE:** P(x) = K;

   $K \in IR - \{0\}$, su grado siempre es cero.
7. **POLINOMIO MÓNICO:** Aquel que tiene una sola variable, su coeficiente principal es uno.

VALOR NUMÉRICO DE POLINOMIOS: Es el resultado que se obtiene al reemplazar en la Expresión algebraica cada letra por un valor particular y efectuar operaciones.

Ejemplo: Si
$P(x, y) = x^3 + y^3 + 2(x^2y + xy^2) + 2xy^2$
Calcular su valor numérico, si x = 1 e y =2,
Reemplazando se tiene:
$P(1, 2) = 1^3 + 2^3 + 2[(1^1)(2) + (1)(2^2)] + 2(1)(2^2) = 1 + 8 + 2(2 + 4) + 8 = 29$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Determinar el grado relativo de $E = ax^{a+8} + abx^ay^b - by^{b+16}$ con respecto a y, sabiendo que es homogéneo.
   A)18 B)20 C)22 D)24 E) 26
   Solución:
   Como E es homogéneo, entonces se cumple: a + 8 = a + b = b + 16, de donde se tiene: $\begin{cases} a + 8 = a + b \\ a + b = b + 16 \end{cases}$ entonces
   $$\begin{cases} a = 16 \\ b = 8 \end{cases}$$
   Luego: $E = 16x^{24} + 128x^{16}y^8 - 8y^{24}$

2. Calcular la suma de coeficientes del polinomio:
   $P(x, y) = 2ax^{n^2-2}y^4 + 4(a - b)x^ay^b + (10b - 1)x^{n^2}y^{2n-6}$ Si es homogéneo.
   A) 8 B) 94 C) 102 D) 107 E) 108

Solución:

P(x, y) es homogéneo, entonces se cumple: $n^2 - 2 + 4 = a + b = n^2 + 2n - 6$,

de donde se tiene: $\begin{cases} n^2 + 2 = n^2 + 2n - 6 \\ a + b = n^2 + 2 \end{cases}$

entonces $\begin{cases} n = 4 \\ a + b = 18 \end{cases}$ Luego:

$\sum Coeficientes = 2a + 4(a - b) + 10b - 1 = 6(a + b) - 1 = 6(18) - 1 = 107$

3. Hallar "a + b" si se cumple la identidad:
$27 + 8x \equiv a(x + 4) + b(2x + 3)$
A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Solución:

$27 + 8x \equiv ax + 4a + 2bx + 3b$

$\rightarrow$ $27 + 8x = (4a + 3b) + (a + 2b)x$, identificando coeficiente se tiene:

$\begin{cases} 4a + 3b = 27 \\ a + 2b = 8 \end{cases}$ De donde $\begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases}$

Luego: a + b = 7

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea F(3x + 1) = x, calcular F(3x)
A) $\frac{3x-1}{3}$ B) $\frac{3x-2}{3}$ C) $\frac{3x+1}{3}$ D) $\frac{3x-1}{2}$ E) $\frac{2x-1}{3}$
2. Hallar a + b + c Si:
$(a^a - 4)x^3 - 24x + b - 3 \equiv 2cx$
A) 8 B) –12 C) 10 D) 17 E) 11
3. Dado el polinomio:
$P(x,y) = x^{2a}y^{b-2} + \sqrt{3}x^{2a-1}y^{b+5} - \frac{2}{5}x^{2a+2}y^b + 2^4x^{2a-3}y^{b+1}$
Hallar el grado relativo a "y" si el grado absoluto es 24, el grado relativo a "x" es 18.
A) 6 B) 9 C) 12 D) 14 E) 11
4. Si el polinomio:
$P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3)^2 - (2x+3)^2 + c$, es idénticamente nulo. Hallar el valor de $W = \sqrt[c]{a - b}$
A) 0 B) 2 C) 1 D) 4 E) 3
5. En el siguiente polinomio homogéneo:
$P(x,y) = x^{(bk)^b} + x^{kb^{kb}}\sqrt[k]{y}^{\,b} + y^{b^{b^k}}$
Calcular el valor de: 9b + 24k.
A) 36 B) 40 C) 86 D) 33 E) 48
6. Si el polinomio:
$P(x,y,z) = Ax^{2a+2b-c} + By^{2b+2c-a} + Cz^{2c+2a-b}$ Es homogéneo,
Halar: $M = \frac{(a+b)^n + (b+c)^n}{(c+a)^n}$
A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 4
7. Que valor debe asignarse a "n" en la expresión: $(x^{n+2} + x^{n+1}y^n + y^{n+1})^n$ de modo que su grado absoluto excede en 9 al grado relativo de "y"
A) 2 B) 4 C) 1 D) 3 E) 9
8. Si: $P(x + 1) = x^2 + x + 1$ y $Q(x + 2) = ax^2 + bx + c$, donde: $P(x + 1) \equiv Q(x + 2)$. Hallar S = a + b + c.
A) 4 B) 5 C) 6 D) 2 E) 3
9. Señale el grado del polinomio entero y ordenado en forma estrictamente decreciente: $P(x) = x^{12-2a} + x^{2a-4} + x^{4-2a}$
A) 5 B)3 C) 6 D) 4 E) 7
10. Si la expresión:
$W(x, y, z) = x^{m+n}y^{n+p}z^{p+m}$, es de grado 18 y los grados relativos a x, y z son tres números consecutivos (en ese orden). Calcular: m.n.p
A) 24 B) 22 C) 25 D) 23 E) 28
11. Si: $ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$. Calcular el valor de: $A = \frac{b^2 + ac}{b^2 - ac}$
A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$
12. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio homogéneo:
$P(x,y) = 3ax^{n^5+7}y^{2n^2+3} + 5(a+b)x^ay^{2b} + (11b+7)x^{25}y^{2n^2+17}$
A) 408 B) 405 C) 40 D) 402 E) 407
13. Siendo:
$P(x,y,z) = 3ax^{a+2}y^{b+2} + 2^by^{a+1}z^{c+3} + 5^cx^{b+4}z^c$ Un polinomio homogéneo de grado "m + 2" Calcular:
$\sqrt[1+n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{(a+b+c)^n}}$
A) 4 B) 5 C) 2 D)1 E) 3
14. Dado los polinomios:
P(x) = (a + x)(b + cx) + ax + 3
Q(x) = (x + b) (x + 1) + x. La suma de P(x) y Q(x) originan un polinomio de grado cero. Determinar bajo esta condición el valor de: $b^2 + c^2$
A) 3 B) 4 C) 2 D) 5 E)1
15. Calcular: "A + B + C" si:
$(x + 1)[A(x + 2) + B(x - 2) - 3x] + 15x \equiv (x - 2)[3x + c(x + 2)]$ se verifica para todo "x"
A) 23 B) 22 C) 20 D) 24 E) 26
16. Sabiendo que:
$(a - b)x^3 + (b - c)y^3 \equiv (c - a)(x^3 + y^3)$
Calcular: $W = \frac{a + 2b + 3c}{a - 2b - 3c}$
A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{4}{5}$
17. Dado el polinomio ordenado y completo:
$P(x) = cx^{b^b + a^a + a} + ax^{a^a + 2a} + bx^{2a+26} - 3x^{c^5 - 1} + \cdots + abc$ Hallar el término independiente.
A) 13 B) 12 C) 10 D) 14 E) 11
18. Si el grado de: $P(x).Q^2(x)$ es 13 y el grado de $P^2(x).Q^3(x)$ es 22. Calcular el grado de: $P^3(x) + Q^3(x)$.
A) 14 B) 13 C) 16 D) 15 E) 12
19. Hallar "k" de manera que la expresión sea de segundo grado:
$P(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{k-2}.\sqrt[7]{x^{3k}}}{\sqrt[4]{x^{k+1}}}}$
A) 8 B) 5 C) 7 D) 6 E) 4

20. Hallar el grado de:
$W(x,y,z) = \sqrt[(a+c)^2+c^2]{x^{a^2}\, y^{4bc}\, z^{5ac}}$ Si $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{c+a}$
A) 3 B) 2 C) 5 D) 4 E) 6

21. Siendo:
$P(x,y) = 2^2 x^{a+b-4} y^{a+b+3} + x^{2a+b-3} y^{a+b+1} + x^{2a+b-2} y^{a+b+2}$
De grado absoluto 41, y que la diferencia de los grados relativos a "x" e "y" es 2. Calcular: $A = \frac{a+b+1}{b-a}$
A) 7 B) 5 C) 3 D) 6 E) 4

22. Calcular "x" para que la siguiente expresión: $\sqrt[x]{a}\ \sqrt[x]{a^2}\ \sqrt[x]{a^3}\ \ldots\ \sqrt[x]{a^x}$ sea de segundo grado.
A) 3 B) 7 C) 5 D) 4 E) 6

23. Hallar el valor de "a + b", si los siguientes polinomios son idénticos:
$P(x, y, z) = cz + ax^2 - by^2 + a$
$Q(x, y, z) = cz + bx^2 + ay^2 + x^2 + 2y^2 + a$
A) 7 B) 5 C) 8 D) – 2 E) – 3

24. Si: $P(x) = x^4 - x^2 - x$. Calcular el valor de
$$W\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \cdots}}}\right)$$
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{2}$

25. En un polinomio P(x, y) homogéneo y completo en "x" e "y", la suma de los grados absolutos de todos sus términos es 156. ¿cuál es su grado de homogeneidad?
A) 10 B) 12 C) 13 D) 11 E) 15

SEMANA Nº 03
OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS: Son transformaciones que se hacen con la finalidad de obtener otra expresión algebraica equivalente. Las operaciones son las siguientes:

Consideremos las expresiones algebraicas: M(x) y N(x), entonces se tiene:

ADICION:

$$\underbrace{M(x) + N(x)}_{\text{SUMANDOS}} = \underbrace{S(x)}_{\text{SUMA}}$$

SUSTRACCION:

$$\underbrace{M(x)}_{\text{MINUENDO}} - \underbrace{N(x)}_{\text{SUSTRENDO}} = \underbrace{D(x)}_{\text{DIFERENCIA}}$$

MULTIPLICACION:

$$\underbrace{M(x).N(x)}_{\text{FACTORES}} = \underbrace{P(x)}_{\text{PRODUCTO}}$$

PRODUCTOS NOTABLES

DEFINICIÓN: Son ciertas multiplicaciones, tienen formas determinadas y cuyo resultado (producto) se puede escribir en forma directa sin necesidad de efectuar la operación. Los principales productos notables son:

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
5. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
   $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
7. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$
   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$
   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$
8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
9. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
10. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
11. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$
12. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
    $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
13. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$
14. $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

IGUALDADES CONDICIONALES

Si a + b + c = 0, entonces se verifica que:

15. $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$
16. $(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$
17. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Efectuar:
   $A = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)\ldots$ hasta n factores.
   A) $x^{16} + x^8 + 1$
   B) $x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + 1$
   C) $x^{2^n} - x^{2^{n-1}} + 1$
   D) $x^{16} - x^8 + 1$
   E) $x^{16} + x^8 + 4$

   Solución:
   Tomando dos factores:
   $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$
   $= x^{2^2} + x^{2^1} + 1$
   Tomando tres factores:
   $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
   $= x^8 + x^4 + 1 = x^{2^3} + x^{2^2} + 1$

Tomando cuatro factores:
$(x^8 + x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) = x^{16} + x^8 + 1$
$= x^{2^4} + x^{2^3} + 1$
Análogamente, de acuerdo a la ley de formación se observada.
Tomando n factores:
$A = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
$(x^8 - x^4 + 1)\ldots$ hasta n factores:

$A = x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + 1$

$$\boxed{\therefore x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + 1}$$

2. Si $x + x^{-1} = 3$, hallar el valor de :
$E = x^6 + x^{-6}$
A)302 B)312 C)318 D)320 E) 322
Solución:
Para obtener las potencias sextas, elevamos al cuadrado y luego el resultado se eleva al cubo:
De: $x + x^{-1} = 3$ Elevando al cuadrado se tiene: $x^2 + 2 + x^{-2} = 9 \rightarrow x^2 + x^{-2} = 7$
Luego elevando al cubo:
$(x^2)^3 + 3(x^2)(x^{-2})(x^2 + x^{-2}) + (x^{-2})^3 = 7^3$
$\rightarrow x^6 + x^{-6} + 3(\underbrace{x^2 + x^{-2}}_{7}) = 343$

$\rightarrow x^6 + x^{-6} = 322$

3. Si $a + b = 4$; $ab = 3$, entonces el valor de $E = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ es:
A) $\frac{14}{5}$ B) $\frac{3}{7}$ C) 5 D) $\frac{7}{4}$ E) 9
Solución:
Las expresiones $a^3 + b^3$ y $a^2 + b^2$ lo calculamos a partir de la condición:
$a + b = 4,\ ab = 3$ … (1)
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
Reemplazando se tiene:
$(4)^3 = a^3 + b^3 + 3(3)(4)$
$\rightarrow a^3 + b^3 = 28$ … (2)
También sabemos que:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ … (3)

Reemplazando se tiene:
$(4)^2 = a^2 + 2(3) + b^2$
$\rightarrow a^2 + b^2 = 10$ … (4)
De (2) y (4) se tiene:

$$E = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular:
$$W = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^4 - 3(a^4+b^4+c^4)^2}{a^4+b^4+c^4}}$$
Si: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, donde $\{a, b, c\} \in IR$ y $a \neq b \neq c$.
A) $\sqrt{a^4+b^4+c^4}$
$\sqrt{2(a^4+b^4+c^4)}$
B) $\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$
C) $a^4 + b^4 + c^4$
D) $\sqrt{a+b+c}$

2. Sabiendo que: $a + b + c = 0$. Hallar el valor de:
$$W = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3 - \left(\frac{ab}{c^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{bc}{a^2}\right)$$
A) – 3 B) 3 C) 5 D) 1 E) – 2

3. Si: $a^4 + b^4 + c^4 = 83$ … (1)
$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = 19$ … (2)
$Ab + ac + bc = 7$ … (3)
Hallar: $C = \frac{a^3 + b^c + c^3 - 11}{abc + 3}$
A) 1 B) 5 C) 3 D) 2 E) 4

4. Si $2W = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Calcular el valor de W, sabiendo que: $a + b + c = 2p$
A) $\frac{p(p-a)}{4bc}$ B) $\frac{p(p-a)}{2bc}$ C) $\frac{p(p-a)}{abc}$
D) $\frac{p(p-a)}{bc}$ E) $p(p-a)$

5. Determinar los dos valores consecutivos x e y, que cumplen la siguiente relación:
$$\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 5$$
A) 2 y 3 B) 3 y 4 C) 3 y 2
D) 4 y 5 E) 5 y 5

6. Efectuar:
$W = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ ... hasta n factores
A) $x^{16} - 1$ B) $x^{2^n} - 1$ C) $x^{2n} - 1$
D) $x^n - 1$ E) $x^{2^{n-1}} - 1$

7. Simplificar:
$A = \left[x^{2^n} + y^{2^n}\right]\left[x^{2^n} - y^{2^n}\right]\left[x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}}\right] + y^{2^{n+2}}$
A) x^{2n+2} B) $x^{2^{n+1}}$ C) $x^{2^{n+2}}$
D) x^{n+2} E) x^{2^n+2}

8. Efectuar:
$C = (x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^2 - x + 1)$
A) $x^{16} + x^8 + 1$ B) $x^{16} - x^8 + 1$
C) $x^{32} + x^{16} + 1$ D) $x^{64} + x^{32} + 1$
E) $x^8 + x^4 + 1$

9. Efectuar:
$C = (x^2+x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^2-x+1)\ldots\ n\ \text{factores}$
A) $x^{2^n}+x^{n+1}+1$
B) $x^{2n}+x^{n}+1$
C) $x^{2^n}+x^{2^{n+1}}+1$
D) $x^{2^{n+2}}+x^{2^{n-1}}+1$
E) $x^{2^n}+x^{2^{n-1}}+1$

10. Efectuar:
$A = (x^y+x^{-y})(x^y-x^{-y})(x^{4y}+1+x^{-4y})$
A) $x^{4y}-x^{-4y}$
B) $x^{8y}-x^{-8y}$
C) $x^{12y}-x^{-12y}$
D) $x^{6y}+x^{-6y}$
E) $x^{6y}-x^{-6y}$

11. Con: $(x+z+y+z)^2+(x-z+y-z)^2 = 8z(x+y)$ reducir:
$\left(\frac{x-y}{z-y}\right)^3+\left(\frac{y-z}{x-z}\right)^3+\left(\frac{2z}{x+y}\right)^3$
A) 9 B) 8 C) 12 D) 2 E)3

12. Si
$$x = \sqrt[3]{-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$
Obtener el valor de: x^3+bx+a.
A) 2 B) 3 C) 0 D) 7 E) ab

13. Sabiendo que el polinomio:
$P = (x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2$ se anula en $\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$ Reducir: $\frac{2a^3-b^3-c^3}{ab+bc+ca}$
A) 3a B) 2a C) ab D) – 3a E) abc

14. Al cumplirse que:
$\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt[9]{\frac{a}{c}}+\sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}} = 0$ Determinar el valor de: $W = \left[\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}}\right]^9$
A) 0 B) 5 C) 3 D) 4 E) 1

15. Sabiendo que: $ab-1 = \sqrt[3]{10}(\sqrt[3]{10}-1)$ y $(a^2+b^2-1)^3 = 10$ hallar el valor de $K = \sqrt[4]{-7+(a+b)^4-(a-b)^4}$
A) 5 B) 1 C)3 D) 7 E) 9

16. Hallar el valor numérico de: $E = (x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}$ cuando $x = 1{,}5a+0{,}5\frac{b^2}{a}$; $y = 1{,}5b+0{,}5\frac{a^2}{b}$; $ab = 32$
A) 4 B) 0 C) 8 D) 10 E) 12

17. Si $(x+\frac{1}{x})^3 = 27$ Calcular:
$W = x^4+x^{-4}$
A) 45 B) 47 C) 42 D) 40 E) 38

18. Si $a^{2n}+a^{-2n} = 123$ Hallar el valor de: a^n-a^{-n}
A) 11 B) 9 C) 13 D) 10 E)12

19. Si $x = \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2m}}$ Hallar el valor de: $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
A) 2m B) 2/3m C) m D) 1/m E) 1

20. Sabiendo que: $ab = \sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1$ $\wedge$ $a^2+b^2 = 1+\sqrt[3]{10}$ Calcular: $W = (a-b)^4-(a+b)^4$
A) – 8 B) – 28 C) – 11 D) – 4 E) – 88

21. Simplificar:
$W = \frac{(a^{-1}+b^{-1})^2-(a^{-1}-b^{-1})^2-ab}{2-ab}-1$
A) $\frac{2}{b}$ B) $\frac{2}{a}$ C) $\frac{2}{ab}$ D) 2ab E) ab

22. Calcular:
$W = \sqrt[3]{20+\sqrt{362}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$
A) 1 B) 5 C) 4 D) 2 E) 40

23. Si: $x^4+y^4 = 322$; además: $x = \frac{n^2-\sqrt{n^2-1}-1}{\sqrt{n^2-1}-1}$ Hallar el valor de $x-y$
A) 4 B) – 4 C) ± 4 D) 16 E) 18

24. Si $(x+y)(y+z)(z+x) = 60$;
$xy+yz+zx = 11$;
$xyz = 6$; Calcular el valor de:
$W = \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)$
A) 80 B) 84 C) 88 D) 216 E) 36

25. Simplificar:
$W = (x^2-x+1)^3-(x^2+x-1)^3+2(x-1)^3+6x^5$
A) $6x^3$ B) $6x^5$ C) 6x4 D) $6x^2$ E) 6x

SEMANA N° 04
DIVISION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN: Es una operación algebraica, consiste en hallar dos expresiones llamadas cociente "Q(x)" y residuo o resto "R(x)", a partir de dos polinomios llamados dividendo "D(x)" y divisor "d(x)".

NOTACIÓN: $\frac{D(x)}{d(x)}$ ó $D(x)\underline{|\ d(x)}$; $d(x) \neq 0$.

También se puede denotar por:

$D(x) = d(x).Q(x) + R(x)$

NOTA: Si un polinomio P(x) es divisible por

x – a, entonces se dice que x – a es un factor de P(x).

PROPIEDADES:

El dividendo y el divisor deben ser polinomios racionales y enteros.

El dividendo y el divisor deben ser polinomios completos y ordenados en forma decreciente con respecto a la misma letra ordenatriz.

$[Q(x)]^o = [D(x)]^o - [d(x)]^o$

Grado Máximo del: $[R(x)]^o = [d(x)]^o - 1$

DIVISIÓN	COCIENTE NOTABLE	RESTO O RESIDUO
$\frac{x^n - y^n}{x - y}$	$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}$	R = 0, ∀ n ∈ IN
$\frac{x^n - y^n}{x + y}$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - y^{n-1}$ $x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}$	R = 0, Si n es par R= – $2y^n$, Si n es impar
$\frac{x^n + y^n}{x + y}$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}$ $x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - y^{n-1}$	R = 0, Si n es impar R = $2y^n$, Si n es par
$\frac{x^n + y^n}{x - y}$	$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}$	R = $2y^n$, ∀ n ∈ IN

Si un polinomio P(x) se anula para "x – a"; es decir, P(a) = 0, entonces dicho polinomio es divisible por (x – a).

Si un polinomio P(x) es divisible separadamente por: x + a, x + b, x + c, entonces P(x) también es divisible por el producto (x + a) (x + b) (x + c).

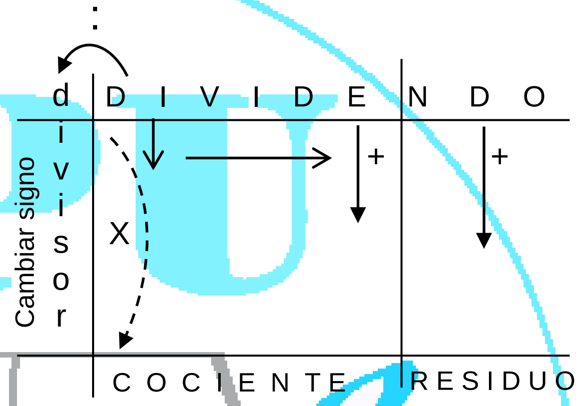
MÉTODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS:

Para dividir polinomios enteros de cualquier grado se pueden utilizar cualquiera de los siguientes métodos:

Método Clásico (Tradicional).
Método de los coeficientes separados.
Método sintético de Horner.
Método de Ruffini.

MÉTODO DE HORNER: Este método nos permite efectuar la división sintética entre dos Polinomios completos y ordenados, para ello solamente se consideran coeficientes.

Su esquema clásico es el siguiente:



NOTA: Si a un polinomio P(x) le faltan términos, estos se completan con ceros.

TEOREMA DEL RESTO:

En una división de la forma: $\frac{P(x)}{ax+b}$ con $a \neq 0$, donde P(x) es un polinomio entero de cualquier grado, El resto es un valor numérico que se obtiene mediante: $R(x) = P(-\frac{b}{a})$

COCIENTES NOTABLES

DEFICICIÓN: Son divisiones indicadas de dos expresiones binómicas o de expresiones que pueden adoptar la forma y cuyo cociente se puede escribir por simple inspección, sin necesidad de efectuar la operación, cuya forma general es la siguiente: $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$

FORMAS DE COCIENTES NOTABLES:

FÓRMULA PARA CALCULAR UN TÉRMINO CUALQUIERA DE UN COCIENTE NOTABLE

Si $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ es un cociente notable, entonces un término cualquiera del cociente notable se calcula con la siguiente fórmula:

$$\boxed{t_K = (\text{Signo})x^{n-k}y^{k-1}}$$

Donde: t_k: Lugar que ocupa el término.
x: Primera base del C.N.
y: Segunda base del C.N.
n: Exponente del C.N.

CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS DE UN COCIENTE NOTABLE

Si $\frac{x^m - y^p}{x^n - y^q}$ es un cociente notable, entonces el número de términos se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = r; \quad r \in \mathbb{N}}$$

EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Hallar "n", si el polinomio: $x^3 - nx^2 + nx - 1$, es divisible entre: $x^2 - x + 1$.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
Solución:
Usando el método de Horner:

1	1	– n	n	– 1
1		1	– 1	
– 1			(1 – n)	(n – 1)
	1	1 – n)	0	(n – 2)

Como R = 0, entonces: (n – 2) = 0
→ n = 2

2. Si la división: $\frac{20x^4 + 6ax^3 - 3bx^2 - 17cx + 9d}{5x^2 - 7x + 2}$ Da un cociente cuyos coeficientes van aumentando de 4 en 4 y deja un resto igual a 34x + 3, hallar el valor de:
E = (a + b) – (c + d).
A)–9 B)–8 C) – 7 D) 3 E) 5
Solución:
Dividiendo por Horner:

5	20	6a	– 3b	– 17c	9d
7		28	– 8		
– 2			56	– 16	
				84	– 24
	4	8	12	(– 17c + 68)	(9d – 24)

El cociente es: 4x2 + 8x + 12
El resto es: (– 17c + 68) x + (9d – 24) = 34x + 3 $\rightarrow \begin{cases} -17c + 68 = 34 \rightarrow c = 2 \\ 9d - 24 = 3 \rightarrow d = 3 \end{cases}$

Luego: $\frac{6a + 28}{5} = 8 \rightarrow a = 2$ y
$\frac{-3b - 8 + 56}{5} = 12 \rightarrow b = -4$
Finalmente: E = (a + b) – (c + d)
→ E = (2 – 4) – (2 + 3) = – 7

3. Hallar E = m + n, si la siguiente división es exacta: $\frac{x^m(x-a)^{3m} - 256(3a-x)^{2n}}{x - 2a}$
A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26
Solución:
Dato: La división es exacta, el resto es cero. Entonces por el Teorema del resto se tiene:
x – 2a = 0 → x = 2a, reemplazando:
R = $(2a)^m (2a - a)^{3m} - 256 (3a - 2a)^{2n}$
Como el resto es cero.
→ $0 = 2^m a^m a^{3m} - 2^8 a^{2n}$
→ $2^m a^{4m} = 2^8 a^{2n}$ Comparando: m = 8, además 4m = 2n → 4(8) = 2n → n = 16.
Luego: E = m + n = 8 + 16 = 24

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el residuo en la siguiente división algebraica:
$(4x^2 - 4 + x^4 + 8x) : (x^2 + x + 1)$
A) 5x – 8 B) 5x + 8 C) 5x – 6 D) 5x – 2 E)5x + 2
2. Hallar la suma de coeficientes del cociente de dividir:
$\frac{8x^6 - 6x^5 - 13x^4 + 19x^3 - 27x^2 - 16x + 33}{2x^2 + x - 3}$
A) 9 B) – 9 C) – 8 D) 8 E) – 2
3. Hallar el cociente en la siguiente división:
$\frac{x^5 + (a+1)x^4 + (a+b)x^3 + (b+1)x^2 + ax + b}{x^2 + ax + b}$
A) $x^3 - x + 1$
B) $x^3 + x^2 - 1$
C) $x^3 + 2x^2 + 1$
D) $x^3 + x^2 + 2$
E) $x^3 + x^2 + 1$
4. Hallar la suma de coeficiente del cociente en la siguiente división:
$\frac{2x^2 - 7x + 3x^4 - 5x^3 + 11}{x + 2}$
A) 18 B) 37 C) 39 D) – 39 E) – 41
5. Hallar el cociente y el resto de la división:
P(x) = $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 22x - 10$ entre $(x^2 + x - 2)$
A) $x^2 - 4x + 11$ y $3(x + 2) + 6$
B) $x^2 - 4x + 11$ y $3(x + 2) + 4$
C) $x^2 - 4x + 12$ y $3(x + 2) + 6$
D) $x^2 - 4x + 11$ y $3(x + 1) + 6$
E) $x^2 + 4x + 11$ y $3(x + 2) + 6$
6. Hallar el resto de la siguiente división:
$[(x + a)^6 - x^6 - a^6] : (x + 2a)$
A) $64a^6$
B) $-64a^4$
C) $-64a^2$
D) $-64a^8$
E) $-64a^6$

7. Hallar el residuo de la división: $\dfrac{2x^{15} - 3x^{10} - 4x^5 - 1}{x^5 - 3}$
A) 6 B) 14 C) 13 D) 54 E) 27

8. Hallar el resto de:
$\dfrac{[x^4-3x+6]^{102} + [x^4-3x+4]^{53} - 2x^4+6x-14}{x^4 - 3x + 5}$
A) 2 B) 4 C) – 5 D) – 4 E) 0

9. Encontrar el valor de "m" para que la siguiente división sea exacta:
$\dfrac{(m+3)x^n+(m-1)x^{n-1}+(3m-4)x^8-14-m}{x-1}$
A) 16 B) 4 C) 2 D) – 4 E) 3

10. Encontrar el valor de "m + n + p + q", sabiendo que el polinomio:
$P(x) = 21x^6 + 14x^5 - 13x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$, sea divisible entre: $7x^4 - 2x^2 + x - 1$
A) 2 B) – 2 C) 4 D) 5 E) – 4

11. Encontrar un polinomio P(x) de tercer grado que sea divisible separadamente entre (x + 3) y (x – 2); sabiendo además que la suma de sus coeficientes es – 12 y que el término independiente es 12.
A) $5x^3 + 3x^2 + 32x + 12$
B) $5x^3 - 3x^2 - 32x + 12$
C) $5x^3 + 3x^2 - 32x - 12$
D) $5x^3 - 3x^2 - 32x - 12$
E) $5x^3 + 3x^2 - 32x + 12$

12. Al dividir un polinomio P(x) entre (x + 3) se obtuvo un residuo de – 5 y un cociente cuya suma de coeficientes es igual a 3. Encontrar el residuo de dividir P(x) entre (x – 1)
A) 7 B) 5 C) 3 D) 12 E) 8

13. Al dividir un polinomio P(x) entre el producto (x + 1) (x – 2) (x + 3) el resto obtenido es $x^2 - 5x + 1$. Encontrar los restos que se obtienen al dividir P(x) entre: (x + 1); (x – 2) y (x + 3).
A) 7, – 5 y 20 B) 7, 5 y 25
C) 7, – 5 y 25 D) 7, – 5 y 5
E) 7, – 5 y 15

14. Siendo en una división:
$P(x) = 4x^4 - 2x^3 - 22x^2 + 69x - 61$ el dividendo, $Q(x) = 2x^2 + 4x - 8$ el divisor, S(x) el cociente y R(x) el residuo, resolver la siguiente ecuación:
Q(x) – S(x) + R(x) = 0
A) 4 B) 7 C) 2 D) 5E) 1

15. Calcúlese (A + B – C) si la siguiente división: $\dfrac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + 27x^2 + 19x + 5}{4x^3 + 3x + 1}$
es exacta.
A) 141 B) 11 C) 60 D) – 11 E) 65

16. Señale la suma de coeficientes del residuo de: $\dfrac{21x^{242} - 17x^2 + 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$
A) 6 B) 8 C) 5 D) 3 E) 9

17. Hallar el término octavo en el desarrollo de: $\dfrac{x^{60} - y^{72}}{x^5 - y^6}$
A) $x^{42}y^{20}$ B) $x^{24}y^{40}$ C) $x^{24}y^{48}$
D) $x^{20}y^{42}$ E) $x^{20}y^{48}$

18. Indicar cuántos términos tiene el siguiente desarrollo: $\dfrac{x^{4n} - y^{5n}}{x^4 - y^5}$ sabiendo que el T (5) tiene como grado absoluto 32.
A) 9 B) 5 C) 10 D) 6 E) 8

19. Uno de los términos del desarrollo del cociente notable $\dfrac{x^m - y^{m+n}}{x^2y^{m-1} - y^{m+4}}$ es x^{50}. Determinar: (n – m)
A) 42 B) 45 C) 40 D) 43 E) 48

20. En el cociente notable:
$\dfrac{x^{60} - y^{60}}{x - y}$, hallar el término del lugar 15.
A) $x^{45}y^{14}$ B) $x^{44}y^{18}$ C) $x^{14}y^{45}$
D) $x^{44}y^{10}$ E) $x^{14}y^{15}$

21. ¿Qué lugar ocupa el término de grado 34 en el cociente notable generado por: $\dfrac{x^{40} - y^{20}}{x^2 - y}$
A) Tercer lugar B) Quinto lugar
C) Segundo luga D) Sexto lugar
E) Cuarto lugar

22. En cociente notable generado por la división $\dfrac{x^{20m+35} + y^{20m-57}}{x^{m+1} + y^{m-3}}$ Determinar el valor de "m" e indicar el número de términos.
A) 4 y 22 B) 4 y 25 C) 4 y 23
D) 4 y 21 E) 4 y 18

23. En el cociente generado por: $\dfrac{x^a - y^b}{x^3 - y^7}$ existe un término central que es igual a $x^c y^{231}$. Hallar : "a + b + c "
A) 469 B) 201 C) 67 D) 767 E) 769

24. Determinar "m + n + p" sabiendo que el término central del cociente notable generado por: $\dfrac{x^{m^3-114} + y^{n^3-40}}{x^m + y^n}$ es el noveno término y tiene por valor $x^p y^{40}$
A) 59 B) – 59 C) 58 D) 48 E) 45

25. Si la siguiente división: $\dfrac{(5x-1)^{99} + (5x+1)^{99}}{10x}$ origina un cociente notable, donde uno de sus términos tiene la forma: $A(25x^2 - 1)^B$. Calcular AB.
A) 490 B) 139 C) – 490 D) 458 E) 467

SEMANA Nº 05
FACTORIZACION ALGEBRAICA

DEFINICIÓN: Es una transformación sucesiva de un expresión algebraica racional entera en otra equivalente expresada en factores primos.

Ejemplo:

FACTORIZACIÓN

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3$$

MULTIPLICACIÓN

NÚMERO DE FACTORES Y DIVISORES: Consideremos el polinomio en forma factorizada: $P = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$, donde: x, y, z son los factores primos, Es decir se tiene 3 factores primos.

Ejemplo: Consideremos la expresión algebraica factorizada $P(x, y) = y^2(x + y)$, donde sus factores primos son: (y), (x + y); y el número total de divisores son: (y), (y^2), (x + y), [y(x + y)], [y^2(x + y)], (1), por lo que el número total de divisores está dado por:

El número total de divisores:

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = (2 + 1)(1 + 1) = 6.$

El número total de factores es: $\alpha + \beta + \gamma$

CRITERIOS DE FACTORIZACIÓN: Son técnicas a utilizar, según la forma que presente la expresión algebraica. Algunas de estas son:

1. CRITERIO DEL FACTOR COMÚN:

1.1. FACTOR COMÚN MONOMIO:

Ejemplo: Factorizar:

$P(x, y, z) = 4x^4y^2z - 2x^3y^5z^2 + 18xy^4z^2$

Solución:

El factor común es: $2xy^2z$, Luego se tiene: $P(x, y, z) = 2xy^2z\,(2x^3 - x^2y^3z + 9y^2z)$

1.2. FACTOR COMÚN POLINOMIO:

Ejemplo: Factorizar o descomponer en factores.

$P(x, y) = (x + 2)(x - 3) + 3y(x - 3)$

Solución:

El factor común es: $x - 3$,

Luego se tiene:

$P(x, y) = (x - 3)[x + 2 + 3y]$

$\rightarrow P(x, y) = (x - 3)(x + 3y + 2)$

1.3. AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS: Se aplica cuando la expresión tiene cuatro o más términos, consiste en formar grupos de 2 ó 3 términos, de tal manera que todos los grupos tengan un factor común.

Ejemplo: Factorizar:

$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Solución:

Agrupando:

$P(x) = (x^3 + x^2) + (x + 1)$

$P(x) = x^2(x+ 1) + (x + 1)$

Factor común: $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$

2. CRITERIO DE LAS IDENTIDADES: Este método está basado en algunas identidades algebraicas o productos notables, se considera los siguientes casos:

2.1. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$x^{2m} \pm 2x^my^n + y^{2n} = (x^m \pm y^n)^2$

Ejemplo:

$9x^2 + 12xy + 4y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto, pues el cuadrado del binomio

$(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

2.2. DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$x^{2m} - y^{2n} = (x^m + y^n)(x^m - y^n)$

Ejemplo:

Factorizar $E = x^6 - x^4 + 2x^2 - 1$

Solución:

Agrupando términos:

$E = x^6 - (x^4 - 2x^2 + 1)$

$E = (x^3)^2 - (x^2 - 1)^2$ por diferencia de cuadrados se tiene:

$E = [x^3 + (x^2 - 1)][x^3 - (x^2 - 1)]$

$E = (x^3 + x^2 - 1)(x^3 - x^2 + 1)$

2.3. SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS:

$x^{3m} + y^{3n} = (x^m + y^n)(x^{2m} - x^my^n + y^{2n})$

ó

$x^{3m} - y^{3n} = (x^m - y^n)(x^{2m} + x^my^n + y^{2n})$

Ejemplo: Factorizar o descomponer en sus factores la expresión:

$E = (2x - 1)^3 + (x - 2)^3$

Solución:

$E = (2x - 1)^3 + (x - 2)^3$

$E = [(2x - 1) + (x - 2)][(2x - 1)^2 - (2x - 1)(x - 2) + (x - 2)^2]$

$E = (2x - 1 + x - 2)(4x^2 - 4x + 1 - 2x^2 + 5x - 2 + x^2 - 4x + 4)$

$E = (3x - 3)(3x^2 - 3x + 3)$

$E = 9(x - 1)(x^2 - x + 1)$

Ejemplo: Factorizar o descomponer en sus factores: $E = (3x - 2)^3 - 125x^3$

Solución:

$E = (3x - 2)^3 - 125x^3$

$E = (3x - 2)^3 - (5x)^3$

$E = (3x - 2 - 5x)\,[(3x - 2)^2 + 5x\,(3x - 2) + (5x)^2]$

$E = (-2 - 2x)\,(9x^2 - 12x + 4 + 15x^2 - 10x + 25x^2]$ ç

$E = -2(x + 1)\,(49x^2 - 22x + 4)$

$E = -2(x + 1)\,(49x^2 - 22x + 4)$

3. **TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN:** Lo ilustramos mediante un ejemplo.

Ejemplo: Factorizar $E = x^4 + x^2y^2 + y^4$

Solución:

La expresión no es trinomio cuadrado perfecto, entonces:

La raíz cuadrada de: $\begin{cases} x^4 \text{ es } x^2 \\ y^4 \text{ es } y^2 \end{cases}$ y el doble producto de las raíces es $2x^2y^2$, para que el trinomio sea cuadrado perfecto debemos sumar y restar x^2y^2, entonces se tiene:

$E = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$

$E = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$ Factorizando la diferencia de cuadrados se tiene:

$E = (x^2 + y^2 + xy)\,(x^2 + y^2 - xy)$, ordenando

$E = (x^2 + xy + y^2)\,(x^2 - xy + y^2)$

4. **CRITERIO DE UNA SUMA DE DOS CUADRADOS:** En general una suma de dos cuadrados no se puede descomponer en factores racionales, pero si se suma y resta una misma cantidad, se puede llevar al caso anterior y factorizarse.

Ejemplo: Factorizar $E = 64x^4 + y^4$

Solución:

La raíz cuadrada de: $\begin{cases} 64x^4 \text{ es } 8x^2 \\ y^4 \text{ es } y^2 \end{cases}$ para que la expresión dada sea un trinomio cuadrado perfecto es necesario sumar y restar el término: $2(8x^2)\,(y^2) = 16x^2y^2$ entonces se tendrá:

$E = 64x^4 + 16x^2y^2 + y^4 - 16\,x^2y^2$

$E = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2$ Por diferencia de cuadrados se tiene:

$E = (8x^2 + y^2 + 4xy)\,(8x^2 + y^2 - 4xy)$, ordenando

$E = (8x^2 + 4xy + y^2)\,(8x^2 - 4xy + y^2)$

5. **CRITERIO DEL ASPA:** Se presentan los siguientes casos:

5.1. ASPA SIMPLE: Se utiliza para factorizar trinomios de la forma:

$P(x) = ax^{2n} + bx^n + c$ ó

$P(x) = ax^{2n} + bx^ny^m + cy^{2m}$

Ejemplo: Factorizar:

$E = x^2 - 7x + 10$

Solución:

Descomponemos los términos fijos en sus factores y luego sumamos los productos en aspa

$x^2 - 7x + 10$

$$\begin{array}{lll} x & -5 & \longrightarrow -5x \\ x & -2 & \longrightarrow -2x \end{array}$$

La suma de los productos en aspa es igual al término central = – 7x

La expresión factorizada es:

$E = x^2 - 7x + 10 = (x - 5)\,(x - 2)$

5.2. ASPA DOBLE: Se utiliza para factorizar polinomios de seis términos de la forma:

$ax^{2m} + bx^my^n + cy^{2n} + dx^m + ey^n + f$ consiste en descomponer los términos en x^2, y^2 y el término independiente, los demás términos se reproducen sumando los productos en aspa, los factores se forman como en el caso anterior.

Ejemplo: Factorizar:

$E = 8x^2 - 6xy - 9y^2 + 10x + 21y - 12$

Solución:

Descomponiendo los términos fijos:

$$\begin{array}{llllll} 8x^2 & -6xy & -9y^2 & +10x & +21y & -12 \\ 4x & & +3y & & & -3 \\ 2x & & -3y & & & 4 \end{array}$$

$\underbrace{-12xy + 6xy = -6xy}$ $\underbrace{12y + 9y = 21y}$

Además: $4x\,(4) + (2x)\,(-3) = 10x$ (el cuarto término), luego la expresión factorizada es:

$E = 8x^2 - 6xy - 9y^2 + 10x + 21y - 12$

$E = (4x + 3y - 3)\,(2x - 3y + 4)$

5.3. ASPA DOBLE ESPECIAL: Se utiliza para factorizar polinomios completos y ordenados de cuarto grado: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, en este método se descomponen los términos extremos en sus factores, la suma algebraica de los productos en aspa debe aproximarse al término en x^2, el cual se descompone en sus factores, luego se verifica los términos restantes.

Ejemplo: Factorizar:
$E = 2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 3$
Solución:
Descomponiendo los términos extremos:

$2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 3$

$3x^2$

$2x^2$ $\quad -3x \quad$ 1

x^2 $\quad -x \quad$ 3

Luego se la suma de los productos es aspa es: $7x^2$
Se debe tener: $10x^2$
Le falta: $3x^2$. Por lo tanto los factores son:
$E = 2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 3$
$E = (2x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 3)$
$E = (2x - 1)(x - 1)(x^2 - x + 3)$

6. OTROS CRITERIOS:

6.1. CRITERIO DE LOS DIVISORES BINÓMICOS:

Este método se utiliza para factorizar polinomios de una sola variable de cualquier grado y que admita factores lineales de la forma: $(ax \pm b)$ ó $(x \pm b)$: Es decir el método está basado en el criterio de la divisibilidad. Si $P(x)$ es divisible entre $(x - a)$, entonces $R = P(a) = 0$, de donde: $P(x) = (x - a)\,Q(x)$, por lo que todos los divisores se obtienen aplicando Ruffini.

Ejemplo: Factorizar:
$P(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4$
Solución:
Las posibles raíces o ceros de -4 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Aplicando Ruffini se tiene:

	1	5	7	– 1	– 8	– 4
1	↓	1	6	13	12	4
	1	6	13	12	4	0
–1	↓	– 1	– 5	– 8	– 4	
	1	5	8	4	0	
– 2	↓	– 2	– 6	– 4		
	1	3	2	0		
– 2	↓	– 2	– 2			
	1	1	0			
– 1	↓	– 1				
	1	0				

Luego:
$x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4 = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2)^2$

6.2. CAMBIO DE VARIABLE:

Este método consiste en ubicar expresiones iguales directas o indirectas realizando ciertas transformaciones, luego se hace un cambio de variable tal que permita transformar la expresión aparentemente complicada en otra expresión sencilla.

Ejemplo: Facorizar:
$E = (x - 2)(x - 1)(x + 2)(x + 3) + 3$
Solución:
Efectuando adecuadamente:
$E = \underbrace{(x-2)(x+3)}\,\underbrace{(x-1)(x+2)} + 3$
$E = (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2) + 3$, se tiene una expresión común, se hace: $z = x^2 + x$, reemplazando
$E = (z - 6)(z - 2) + 3$
$E = z^2 - 8z + 15$
$E = (z - 5)(z - 3)$, regresando a la variable original.
$E = (x^2 + x - 5)(x^2 + x - 3)$

6.3. FACTORIZACIÓN RECÍPROCA:

Este método se aplica a los polinomios recíprocos.

Ejemplo: Factorizar
$E = 2x^4 + 23x^3 + 49x^2 + 23x + 2$
Solución:
Reduciendo a grado mitad.
$E = x^2[2x^2 + 23x + 49 + \frac{23}{x} + \frac{2}{x^2}]$, agrupando los términos con coeficientes iguales.
$E = x^2[2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 23(x + \frac{1}{x}) + 49]$, realizando cambio de variable:
$z = x + \frac{1}{x} \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$
$E = x^2[2(z^2 - 2) + 23z + 49]$
$E = x^2[2z^2 + 23z + 45]$
$E = x^2(2z + 5)(z + 9)$ recuperamos la variable original "x".
$E = x^2[2(x + \frac{1}{x}) + 5]\,[x + \frac{1}{x} + 9)]$
$E = x^2(\frac{2x^2 + 5x + 2}{x})\,(\frac{x^2 + 9x + 1}{x})$ ç
$E = (2x^2 + 5x + 2)(x^2 + 9x + 1)$
$E = (2x + 1)(x + 2)(x^2 + 9x + 1)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Factorizar la siguiente expresión:
$L(x) = -(y^2x + zx^2 + z^2y - z^2x - y^2z - x^2y)$
0e indica la suma de sus factores primos.
A) x + y + z B) 0 C) 1 D) x – y E) z – x
2. Al factorizar la siguiente expresión
$N(x) = 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 2$, la suma de sus factores primos es:
A) 4x + 7 B) 4x + 4 C) $2x^2 + 3x - 4$
D) $5x^2 + 5x + 2$ E) $5x^2 + 5x + 3$
3. Al factorizar la siguiente expresión
$R(x, y) = x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 7y + 2$, el número de factores primos es:
A) 2 B) 1 C) 3 D) 5 E) 4
4. Al factorizar la siguiente expresión
$M(x) = 10x^4 - 13x^3 + 8x^2 - 8x + 3$, el número de factores primos es:
A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) 1
5. Al factorizar la siguiente expresión
$E(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - 25x - 12$, uno de sus factores primos es:
A) x – 3 B) x – 1 C) x + 4
D) x + 3 E) x – 5
6. Al factorizar la siguiente expresión
$E(x) = 4x^5y^5 + 8x^4y^6 + 4x^3y^7$. El número total de factores es:
A) 24 B) 10 C) 60 D) 48 E) 24
7. Al factorizar la siguiente expresión
$P(x) = x^8 + x^4y^6 + 25y^{12}$, el número de divisores es:
A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 4
8. Al factorizar la siguiente expresión
$N(x) = 6x^5 + 10x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 10x + 6$, un factor lineal es:
A) x + 1 B) x – 1 C) x – 6
D) x – 4 E) x + 3
9. Señalar un factor primo de la siguiente expresión: $H(x) = (2x^2 + x - 1)^2 - (x^2 - 3x - 5)^2$
A) x – 2 B) $x^2 + x + 1$ C) x + 2
D) $x^2 - x + 1$ E) $x^2 + 2$
10. Al factorizar la siguiente expresión
$N(x, y) = 15x^2 - xy - 6y^2 - 9x - 13y - 6$, la suma de sus factores primos es:
A) 5x + 5y – 3 B) 8x – y + 1
C) 8x + 3y – 1 D) 8x + y – 1
E) x – y + 7
11. Factorizar:
$M(a, b) = 2a^2 + 2b^2 - (a^2 - b^2)^2 - 1$,
e indicar el número de factores primos.
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
12. Al factorizar la siguiente expresión
$P(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 5x + 12$, la suma de los términos independientes de sus factores es:
A) 6 B) – 6 C) – 8 D) 8 E) 7
13. Factorizar: $A(x) = 1 - a^2 + (1 + ax)^2 - (a + x)^2$, e indicar uno de sus factores.
A) x + 2 B) $x^2 + 1$ C) $x^2 - 1$
D) x – 2 E) $x^2 - 2$
14. El factor lineal de la expresión:
$E(x) = (x - 8)(x - 7)(x - 6) + (x - 7)(x - 6) - x + 6$ es:
A) x – 8 B) x – 7 C) x + 6
D) x E) x – 1
15. Al factorizar la siguiente expresión
$L(x) = 2x^6 - 8x^5 + 6x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 2$, el número de divisores es:
A) 4 B) 3 C) 5 D) 2 E) 6
16. Son factores de la expresión:
$E(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - (x - 1)$

1) x + 1 2) x – 1 3) x – 2 4) x + 3
5) x – 3
Son verdaderos:
A) 2 y 5 B) 1 y 3 C) 1, 2 y 3
D) 3, 4 y 5 E) 3 y 4.
17. Un factor de: $E(x, y) = ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$, es:
A) ax + by B) a + b C) x + y
D) x^2+y^2 E) ax^2+bx^2
18. Uno de los factores de la expresión: $E(m, n) = mn^4 - 5m^2n^3 + 4m^3n^2 - 20m^4n$ es:
A) m^2 B) (n + 2m) C) m + n
D) $n^2 + 2m^4$ E) n – 5m
19. Halle un factor primo de la expresión:
E(a, b) = (a + b)(a + c) – (b + d)(c + d)
A) a – b B) b – c C) a – d
D) ab E) bc
20. Uno de los factores de la siguiente expresión $L(a, b) = (1 + ab)^2 - (a + b)^2$ es:
A) 1 – a B) b – c C) a – d
D) ab E) a + b
21. La cantidad de factores lineales de la siguiente expresión
$P(a) = a^6x^2 - x^2 + a^6x - x$, es:
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1
22. El número de factores del polinomio
$P(a,b,c,d) = (a^2 - b^2)^2(c^2 - d^2) + 4a^2b^2c^2$ es:
A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1
23. Dado el polinomio:
$P(x,y,z) = (x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4y^2z^2$; la suma de todos los términos de los factores del polinomio es:
A) x + y + z B) xyz C) 4x
D) 3xyz E) 2(x+ y + z)
24. Dado el polinomio $P(x) = x^6 + (1 + x^6)(1 + x^3)^2$ al factorizar resulta:
A) $(x^2 + x + 1)^2$
B) $(x^4 + x^2 - 1)^3$
C) $(x^6 + x^3 + 1)^2$
D) $(x^3 + x - 1)^2$
E) $(x^5 - x^3 + 1)^2$
25. El número de factores primos de la expresión:
$E(x, y) = x^{12} - x^8y^4 - x^4y^8 + y^{12}$ es:
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 6

SEMANA Nº 06

MÁXIMO COMÚN DIVISOR, MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y DESCOMPOSICION DE FRACCIONES

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD). El MCD de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor grado contenida como factor un número entero de veces en dichas expresiones.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM). El MCM de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de menor grado que contiene un número entero de veces, como factor, a dichas expresiones.

Pasos a seguir para calcular el MCD y MCM de dos o más Expresiones Algebraicas**.**

1. Se factorizan las expresiones dadas.
2. El **MCD** se determina considerando sólo factores comunes a todas las expresiones pero elevadas a su menor exponente.
3. El **MCM** estará expresado por la multiplicación de los factores comunes a todas las expresiones pero elevadas a su mayor exponente luego multiplicado por los no comunes.

PROPIEDADES:

1. El MCD de dos o más expresiones algebraicas primas entre si es la unidad y su MCM el producto de ellas.
2. Solo para dos expresiones o polinomios se cumple: A.B = MCM (A, B).MCD (A, B)

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dados los monomios:
$y^{a-3}.z^{b-2}$; $y^{a-1}.z^{b+5}$; $y^{a+4}.z^{b-3}$. El MCD de ellos es y^nz; el MCM de los mismos es $y^{10}z^m$. Calcule: a + b + m + n.
A) 24 B) 22 C)18 D)20 E) 16
Solución:
El MCD de:
$(y^{a-3}.z^{b-2};\ y^{a-1}.z^{b+5};\ y^{a+4}.z^{b-3})$
$MCD = y^{a-3}.z^{b-3}$.
Luego se tiene: $y^{a-3}.z^{b-3} = y^nz$ de donde:
$a-3 = n$; $\wedge$ $b-3 = 1 \Rightarrow b = 4$
Además; el MCM de:
$(y^{a-3}.z^{b-2};\ y^{a-1}.z^{b+5};\ y^{a+4}.z^{b-3})$
$MCM = y^{a+4}.z^{b+5} \rightarrow y^{a+4}.z^{b+5} = y^{10}z^m$
De donde: $a + 4 = 10 \rightarrow a = 6$ y
$b + 5 = m \rightarrow m = 9$
Además. $a-3 = n \rightarrow n = 3$
Por lo tanto: a + b + m + n = 22
Rpta: B

2. Indique lo que se obtiene luego de multiplicar los polinomios A(x).L(x) y dividirlo entre su MCD;
$A(x) = x^3 - x^2 + 7x - 18$ y
$L(x) = x^4 + 7x^2 - 10x - 9$
A) $(x+2)(x^2+x+9)(x^2-x-1)$
B) $(x-2)(x^2+x+9)(x^2+x-1)$
C) $(x-2)(x^2+x-9)(x^2-x-1)$
D) $(x-2)(2x^2+x+2)^2$
E) $(x-2)(x^2+x+9))(x^2-x-1)$
Solución:
Factorizando se tiene:
$A(x) = (x-2)(x^2+x+9)$;
$L(x) = (x^2+x+9)(x^2-x-1)$
Se cumple que: $MCM(A, L) = \dfrac{A(x).L(x)}{MCD(A,L)}$
$= \dfrac{(x-2)(x^2+x+9)(x^2+x+9)(x^2-x-1)}{x^2+x+9}$
Por lo tanto:
$MCM(A,L) = (x-2)(x^2+x+9)(x^2-x-1)$
Rpta: E

3. Si el MCD de los polinomios: $A(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ y $L(x) = x^3 + cx + d$ es $(x-1)(x+3)$. Halle el número de factores primos que tiene el MCM de ellos.
A) 4 B) 2 C) 3 D) 1 E) 5
Solución:
Por propiedad: $\dfrac{A(x)}{MCD(A,L)}$ es una división exacta:
$\rightarrow A(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$
$\dfrac{L(x)}{MCD(A,L)}$ es una división exacta
$\rightarrow L(x) = (x-1)(x+3)(x+2)$
Luego se tiene:
$MCM(A, L) = (x-1)(x+3)(x-2)(x+2)$.
Por lo tanto el número de factores primos es: 4
Rpta: A

FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Es una expresión de la forma siguiente: $\dfrac{F(x)}{G(x)}$ son expresiones racionales en donde al menos en el denominador debe contener una variable.

CLASES DE FRACCIONES ALGEBRAICAS:

1. **FRACCIÓN PROPIA:** Una fracción se dice que es propia, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, en cualquier otro caso se le denomina fracción impropia.
   Son fracciones propias:
   $$\frac{x+1}{x^2+3} \quad y \quad \frac{x^5+2x+3}{x^7+x^5+3x+5}$$
   No son fracciones propias:
   $$\frac{x^2+9}{x+3} \quad y \quad \frac{x^3+2x+11}{x^2+3}$$ Son "fracciones impropias".

2. **FRACCIONES HOMOGÉNEAS:** Dos o más fracciones serán llamadas homogéneas, si no poseen el mismo denominador, de no ocurrir esto se les llamará fracciones heterogéneas.
   $$\frac{5x^3+x}{x+3}, \quad \frac{6x^2+3}{x+3}$$
   No son fracciones homogéneas:
   $$\frac{x^2+9x}{x+5} \quad y \quad \frac{x^3+x+16}{x^2+3}$$ Son "fracciones heterogéneas".

3. **FRACCIONES EQUIVALENTES:** Dos fracciones: $\frac{x}{y} \wedge \frac{w}{z}$ son equivalentes si se verifica la siguiente condición.
   Si: $\frac{x}{y} \equiv \frac{w}{z} \rightarrow$ xz = yw

4. **FRACCIONES COMPLEJAS:** Una fracción se dice que es compleja si su numerador y/o denominador son fracciones.
   Ejemplo: $$\frac{x+\frac{2}{x}}{x-3}$$

5. **FRACCIÓN DE VALOR CONSTANTE:** Llamada también, fracción independiente de sus variables, es aquella que admite el mismo valor numérico al sustituir sus variables por cualquier sistema de valores permisibles.

OPERACIONES CON FRACCIONES:

1. **ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.**
   Para fracciones homogéneas:
   $$\frac{m}{x} \pm \frac{n}{x} = \frac{m \pm n}{x}$$
   Para fracciones heterogéneas:
   $$\frac{m}{x} \pm \frac{n}{y} = \frac{my \pm nx}{xy}$$

2. **MULTIPLICACIÓN:** $\frac{m}{x} . \frac{n}{y} = \frac{m.n}{xy}$

3. **DIVISIÓN:** $\frac{m}{x} : \frac{n}{y} = \frac{my}{nx}$

DESCOMPOSICIÓN DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES:

Consiste en transformar una fracción dada, como una suma de dos ó más fracciones simples. A continuación indicaremos los cuatro casos de descomposición de fracciones.

CASO I. Si el denominador tiene únicamente factores de primer grado, por cada denominador de la forma: "ax + b", le corresponde una fracción simple de la forma:
$$\frac{A}{ax+b}, \quad A = \text{cte.}$$

CASO II. Si el denominador presenta factores repetidos de primer grado de la forma: $(ax + b)^n$ por cada uno de estos factores le corresponderán "n" fracciones simples de la forma siguiente:
$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

CASO III. Si el denominador presenta únicamente factores cuadráticos (no factorizables) de la forma: ax^2+bx+c por cada uno de estos factores le corresponderá una fracción simple de la forma:
$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

CASO IV. Si el denominador presenta factores cuadráticos (irreductibles) de la forma: $(ax^2+bx+c)^n$ por cada uno de estos factores le corresponderán "n" fracciones simples de la forma:
$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bs+c)^n}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sumar las "n" fracciones mostradas:

S = $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{176}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

A) $\frac{n}{5n-1}$ B) $\frac{n}{n+1}$ C) $\frac{-n}{5n+1}$

D) $\frac{n}{5n+1}$ E) $\frac{2n}{5n+1}$

Solución:

S = $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{176}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

Multiplicando por 5 ambos miembros se tiene:

5S = $\frac{5}{1x6}+\frac{5}{6x11}+\frac{5}{11x16}+\ldots+\frac{5}{(5n-4)(5n+1)}$

5S = $\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\ldots+$ $\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$

Simplificando se obtiene:

5S = 1 – $\frac{1}{5n+1}$

5S = $\frac{5n}{5n+1}$ $\rightarrow$ S = $\frac{n}{5n+1}$

Rpta: D

2. Si la fracción algebraica: $\frac{5x}{x^2+x-6}$ Se descompone en 2 fracciones parciales de numerador A y B. Hallar el valor de: A + B

A) 4 B) 2 C) 5 D) 8 E) 6

Solución:

Descomponiendo la fracción en fracciones simples se tiene:

$$\frac{5x}{x^2+x+6}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x+3B-2A}{(x+3)(x-1)}$$

De donde.

$5=A+B \wedge 0=3B-A\rightarrow$ A = 3 y B = 2. Luego: A + B = 5

Rpta: C

3. Descomponer la siguiente fracción: $\frac{10x^2-6x-22}{x^3-2x^2-5x+6}$ en fracciones parciales. Indicando como respuesta la suma de los numeradores de todas las fracciones simples encontradas.

A) 14 B) 12 C) 15 D) 18 E) 10

Solución:

$$\frac{10x^2-6x-22}{x^3-2x^2-5x+6}=\frac{10x^2-6x-22}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{10x^2-6x-22}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-3} \quad \text{--(*)}$$

$$\frac{10x^2-6x-22}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{a(x+2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

De donde.

$10x^2-6x-22\equiv a(x+2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x+2)$

Asignando valores convenientes para la variable x, obtenemos los valores de a,b,c

Si: $x=1\rightarrow 10-6-22=a(3)(-2)\rightarrow a=3$

Si: $x=-2\rightarrow 40+12-22=b(-3)(-5)\rightarrow b=2$

Si: $x=3\rightarrow 90-18-22=c(2)(5)\rightarrow c=5$

Reemplazando en (*) se tiene:

$$\frac{10x^2-6x-22}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+2}+\frac{5}{x-3}$$

Por lo tanto la suma de los numeradores es 10

Rpta: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Simplificar:

$$\left(\frac{x^2+x-2}{x^2-x-20}\right)\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-x}\right)\div\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-15}\right)\left(\frac{x+3}{x^2}\right)$$

A) 2x B) x C) – 2x D) – x E) x^2

2. Simplificar:

$$\frac{\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}\right)\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right)\div\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}}{\left(\frac{2x^2-2x}{3x^2+3x-6}\right)\left(\frac{3x^2+12x+12}{2x}\right)}$$

A) x – 2 B) 2x C) – 2 D) 1 E) 1/2

3. Si se verifica que: $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{a+b}{2}$. Determine el valor de: L = $\frac{ab+a+2}{b+1}+\frac{ba+b+2}{a+1}$

A) 4 B) 8 C) 6 D) 7 E) 5

4. Hallar el valor de:

$$G=\frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right)\left(\frac{2x^2-8x-10}{x-1}\right)}{\left(\frac{2x+2}{x^2+x-2}\right)\div\left(\frac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}\right)}$$

A)4 B) 2 C) 3 D) 1 E) 5

5. Simplificar la expresión.

$$G=\frac{\left(\frac{1+a}{1-5a}\right)^2+\frac{2+2a}{1-5a}-3}{5\left(\frac{1+a}{1-5a}\right)^2+\frac{16+16a}{1-5a}+3}$$

A) 3 B) – a C) 2a D) 1 E) a

6. El m.c.m de
$2x^4y^2z^3$; $8x^2z^6$; $6x^5y^7z^4$, es:

A) $24x^5y^7z^6$ B) $16x^5y^7z^6$ C) $48x^5y^7z^6$
D) $24x^6y^7z^6$ E) $24x^4y^2z^4$

7. ¿Cuántos divisores tiene el m.c.m. de:
$P(x) = (x + 2)^4(x – 5)^2(x + 3)$ y
$Q(x) = (x + 2)^3(x – 5)^2(x – 1)$**?**

A) 59 B) 40 C) 58 D) 20 E) 60

8. ¿Cuántos divisores tiene el m.c.d. de:
$P(x) = (x + 1)^4(x + 2)^3(x + 3)$ y
$Q(x) = (x + 1)^3(x +2)^5(x – 2)$?

A) 20 B) 16 C) 15 D) 17 E) 12

9. El m.c.d. de los polinomios:
$A(x) = x^4 + 4x^3 – 5x + 2$ y
$B(x) = x^3 + 2x^2 – 5x + 2$, es:
A) $x^2 + 3x – 2$
B) $x^2 + 3x + 2$
C) $x^2 – 3x – 2$
D) $x^2 – 3x + 2$
E) $x^2 + 3x – 1$

10. Indique lo que se obtiene luego de multiplicar los polinomios A(x).L(x) y dividirlo entre su m.c.d, si
$A(x) = x^3 – x^2 + 7x – 18$ y
$L(x) = x^4 + 7x^2 - 10x – 9$
A) $(x + 2)(x^2 + x + 9)(x^2 – x –1)$
B) $(x – 2)(x^2 + x + 9)(x^2 – x – 1)$
C) $(x – 2)(x^2 + x + 9)(x^2 – x + 1)$
D) $(x – 2)(x^2 – x + 9)(x^2 – x – 1)$
E) $(x – 2)(x^2 + x – 9)(x^2 – x – 1)$

11. Si el m.c.d. de los polinomios
$A(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ y
$L(x) = x^3 + cx + d$ es $(x – 1)(x +3)$.
Halle el número de factores primos que tiene el m.c.m. de ellos.
A) 9 B) 3 C) 4 D) 6 E) 2

12. Sean: $A(x) = ax^2 + 2x – b$ y $M(x) = ax^2 – 4x + b$. Si $(x – 1)$ es el m.c.d. de A y M, hallar el cociente de b/a.
A) – 1 B) – 4 C) 2 D) 3 E) – 2

13. Hallar el m.c.m. de: $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $B(x) = x^3 + x^2 – x – 1$ y $C(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.
A) $(x + 1)^3(x – 1)(x + 2)$
B) $(x + 1)^2(x – 1)^3(x + 2)$
C) $(x – 1)^3(x + 1)(x + 2)$
D) $(x + 1)(x – 1)(x + 2)$
E) $(x – 1)(x + 1)(x + 2)$

14. Hallar el m.c.m de: $A = x^3 – 1$, $B = x^4 + x^2 + 1$ y $C = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.
A) $(x^2 + x + 1)^2(x – 1)(x^2 – x + 1)(x + 2)$
B) $(x^2 + x + 1)(x – 1)(x^2 – x + 1)(x + 2)$
C) $(x^2 + x + 1)(x – 1)^2(x^2 – x + 1)(x + 2)$
D) $(x^2 + x – 1)(x – 1)(x^2 – x + 1)(x + 2)$
E) $(x^2 + x + 1)(x – 1)(x^2 – x + 1)^2(x + 2)$

15. Hallar el m.c.d. de las siguientes expresiones: $A(x) = x^4 – 8x^3 + 17x^2 – 8x + 1$ y $B(x) = x^3 – 6x^2 + 6x – 1$
A) $x^2 – 6x – 1$
B) $x^2 + 6x – 1$
C) $x^2 – 5x + 1$
D) $x^2 + 5x – 1$
E) $x^2 – 3x – 1$

16. Hallar el m.c.d de las siguientes expresiones:
$A(x) = 2x^4 + 3x^3 – 13x^2 + 13x – 21$ y
$B(x) = 2x^3 – 5x^2 + 5x – 6$
A) $2x^2 – x + 3$ B) $2x^2 + x + 3$
C) $x^2 – x + 3$ D) $2x^2 – x – 3$
E) $x^2 – 2x + 3$

17. Halle el m.c.d de los polinomios
$P(x,y) = x^{m+2} + x^2y^n + y^{n+3} + x^my^3$ y
$Q(x,y) = x^{m+n} + y^{n+m} + (xy)^m + (xy)^n$
A) $(x + y)^n$ B) $x^n + y^m$ C) $x + y$
D) $(x + y)^m$ E) $x^m + y^n$

18. Sean los polinomios $P(x) = x^2 + 2x - a$ y $Q(x) = x^2 – 4x + a$; $a\in Z^+$. Si: $m.c.m.(P,Q) = x^3 – x^2 – 9x + 9$.
Calcular el valor de "a".
A) – 4 B) – 2 C)3 D) 4 E) 6

19. Descomponer en fracciones parciales:
$$\frac{3x+7}{(x+1)(x+2)}$$
A) $\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ B) $\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x+2}$
C) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x+2}$ D) $\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x-2}$
E) $\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x+2}$

20. Descomponer en fracciones parciales:
$$\frac{2x^2+13x+19}{(x+3)^3}$$
A) $\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{2}{(x+3)^3}$
B) $\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{2}{(x+3)^3}$
C) $\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2}{(x+3)^3}$
D) $\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2}{(x+3)^3}$
E) $\frac{-2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2}{(x+3)^3}$

21. Descomponer en fracciones parciales: $\dfrac{5x^3-3x^2+12x-7}{x^4+4x^2+4}$

A) $\dfrac{5x-3}{x^2+2}+\dfrac{2x-1}{(x^2+2)^2}$

B) $\dfrac{5x+3}{x^2+2}+\dfrac{2x-1}{(x^2+2)^2}$

C) $\dfrac{5x-3}{x^2+2}+\dfrac{2x+1}{(x^2+2)^2}$

D) $\dfrac{5x-3}{x^2-2}+\dfrac{2x-1}{(x^2+2)^2}$

E) $\dfrac{5x-3}{x^2+2}+\dfrac{2x-1}{x^2+2}$

22. Descomponer en fracciones parciales: $\dfrac{3x^3-x^2+5}{x^4-x^2-2}$

A) $\dfrac{2x-1}{x^2-2}+\dfrac{x-2}{x^2+1}$ B) $\dfrac{2x+1}{x^2-2}+\dfrac{x+2}{x^2+1}$

C) $\dfrac{2x+1}{x^2+2}+\dfrac{x-2}{x^2+1}$ D) $\dfrac{2x+1}{x^2-2}+\dfrac{x-2}{x^2+1}$

E) $\dfrac{2x+1}{x^2-2}-\dfrac{x-2}{x^2+1}$

23. Descomponer en fracciones parciales: $\dfrac{x^2-4x-5}{(x^2+3)(x-1)}$

A) $\dfrac{3x-1}{x^2+3}-\dfrac{4}{x-1}$ B) $\dfrac{3x-1}{x^2+3}-\dfrac{5}{x-1}$

C) $\dfrac{3x-1}{x^2+3}+\dfrac{2}{x-1}$ D) $\dfrac{3x-4}{x^2-6}-\dfrac{2}{x-1}$

E) $\dfrac{3x-1}{x^2+3}-\dfrac{2}{x-1}$

24. Descomponer en fracciones parciales: $\dfrac{3x-4}{x^2-x-6}$

A) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}$ B) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x+2}$

C) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x-2}$ D) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2}{x+2}$

E) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2}{x-2}$

25. Descomponer en fracciones parciales: $\dfrac{4x^2-15x+8}{x^3-3x^2+4}$

A) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}$

B) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}$

C) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}$

D) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

E) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}$

SEMANA Nº 07
RADICACIÓN Y RACIONALIZACIÓN

RADICACIÓN POLINOMIAL: Es una operación matemática, que consiste en hallar una expresión algebraica llamada raíz tal que elevada al índice resulte otra expresión llamada radicando o cantidad subradical.

Índice Signo radical

$\sqrt[n]{A}=r \leftrightarrow r^n=A$, n ∈ $\mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$

Radicando Raíz

RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS: Cuando el índice de la radicación es 2, se denomina raíz cuadrada. Dado que la raíz cuadrada de un polinomio no siempre resulta otro polinomio, se considera un término adicional llamado residuo, de modo que todos los términos de la radicación sean polinomios.

RAIZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{P(x)} & Q(x) \\ \quad R(x) & \end{array} \rightarrow P(x) = Q^2(x) + R(x)$$

$[P(x)]^{o}$ = par;
$[R(x)]^{o} < [Q(x)]^{o}$

Si R(x) = 0, entonces la raíz cuadrada es exacta.
Si R(x) ≠ 0, entonces la raíz cuadrada es inexacta.

MÉTODO DE EXTRACCIÓN DE LA RAIZ CUADRADA:

1. Ordenar el polinomio en forma descendente respecto a una de sus variables, si falta un término se completa con términos de coeficiente cero.

2. Los términos del polinomio se agrupan de dos en dos, de derecha a izquierda.
3. Se extrae la raíz cuadrada del primer término, el cual es el primer término de la raíz.
4. El término obtenido de la raíz se eleva al cuadrado y se le resta al primer término del polinomio.
5. Bajar los dos términos del polinomio y duplicar la raíz obtenida hasta el momento. Se divide el primer término de los bajados entre la raíz duplicada. El resultado es el segundo término de la raíz.
6. A este término se le suma la raíz duplicada y todo ello se multiplica por el segundo término de la raíz para luego restarlo del polinomio.
7. Se baja los siguientes dos términos y se prosigue como en los pasos anteriores hasta que el grado del residuo sea menor que el de la raíz o que este resulte nulo.

RADICALES DOBLES: Se caracterizan por que dentro de un radical se tienen otros radicales ligados con las operaciones de adición y sustracción, muchos de ellos se pueden transformar en una suma o resta de radicales simples. Tienen la siguiente forma:

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, donde A y B son expresiones racionales positivas.

TRANSFORMACIÓN DE RADICALES DOBLES EN RADICALES SIMPLES

1. **PARA RADICALES DE LA FORMA**: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ Donde A y B son números racionales, y que además existen otros números racionales positivos "x" e "y" tales que:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

Donde $C = \sqrt{A^2 - B}$, *($A^2 - B$ es un cuadrado perfecto).*

Regla práctica:

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{(x+y) \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y},$$

con: $x > y$

2. **RADICALES DE LA FORMA**: $\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}}$ donde A, B, C y D son números racionales positivos, su fórmula de transformación es la siguiente:

$$\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

$$\{A, B, C, D, X, Y, Z\} \subset Q^+$$

$$\begin{cases} x + y + z = A \\ 4xy = B \\ 4yz = C \\ 4xz = D \end{cases}$$

Regla práctica:

$$\sqrt{(x+y+z) + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

3. **RADICALES DE LA FORMA:** $\sqrt{A + \sqrt{B} - \sqrt{C} - \sqrt{D}}$ La transformación de este radical doble es semejante al caso anterior. Es decir, se tiene:

$$\sqrt{A + \sqrt{B} - \sqrt{C} - \sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}$$

4. **RADICALES DE LA FORMA:** $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$, el cual se puede expresar como:

$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y}$; {A, B, x, y} ⊂ Q^+

$$Donde: \begin{cases} 4x^3 - 3(\sqrt[3]{A^2 - B})x - A = 0 \\ y = x^2 - \sqrt[3]{A^2 - B} \end{cases}$$

Dónde: C = $\sqrt[3]{A^2 - B}$ es una raíz exacta.

RACIONALIZACIÓN: Es una transformación de una expresión algebraica irracional en otra equivalente racional, para ello ambos términos de la fracción se multiplica por una expresión llamada factor racionalizante. Los casos que se presentan se resumen en la siguiente tabla:

DENOMINADOR DE LA FORMA	FACTOR RACIONALIZANTE	DENOMINADOR RACIONALIZADO
$\sqrt[n]{A^m}$	$\sqrt[n]{A^{n-m}}$	A
$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$\sqrt{A}-\sqrt{B}$	A – B
$\sqrt{A}-\sqrt{B}$	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	A – B
$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$	A + B
$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$	A – B
$\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}$ n∈IN	$\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\cdots+\sqrt[n]{B^{n-1}}$	A – B
$\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}$ n∈IN impar	$\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\cdots+\sqrt[n]{B^{n-1}}$	A + B
$\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}$ n∈IN par	$\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\cdots+\sqrt[n]{B^{n-1}}$	A + B

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar a.b si la raíz cuadrada de:
$ax^4 + 3ax^3 + (6a + b)\ x^2 + 6ax + a^2$ es exacta.
A) 4 B) 8 C) 7 D) 10 E) 5
Solución:
Aplicando el método de los coeficientes indeterminados.
El polinomio es de grado 4, implica que su raíz cuadrada será de grado 2, es decir: $raíz(x) = mx^2 + nx + p$
Luego:
$ax^4 + 3ax^3 + (6a + b)\ x^2 + 6ax + a^2 = (mx^2 + nx + p)^2$
Desarrollando y reduciendo, se tiene:
$ax^4 + 3ax^3 + (6a + b)x^2 + 6ax + a^2 \equiv$
$m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2mp)x^2 2npx + p^2$
Por ser polinomios idénticos:
$a = m^2$; $3a = 2mn$
$6a + b = n^2 + 2mp$
$6a = 2np$
$a^2 = p^2$
De donde:
$a = p = 4$; $b = 1$; $m = 2$ y $n = 3$
Rpta: A

2. Transformar a radicales simples, el siguiente radical doble: $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
A) 1 B) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$
C) $\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$ D) $1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$
E) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
Solución:
$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{4\left(\frac{3}{4}\right)}} = \sqrt{2-2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2-2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$
Rpta: B

3. Halle la raíz cuadrada de:
$16 + \sqrt{80} + \sqrt{112} + \sqrt{140}$
A) $\sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$
B) $\sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$
C) $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{10}$
D) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{8}$
E) $\sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{6}$
Solución:
$$\sqrt{16 + \sqrt{80} + \sqrt{112} + \sqrt{140}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$
$$\sqrt{16 + 2\sqrt{5.4} + 2\sqrt{4.7} + 2\sqrt{7.5}} = \sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{4}$$
Rpta: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar m y n si la raíz cuadrada de:
$16x^4 - 32x^3 + 24x^2 + mx + n$ es exacta.
A) – 8; 1 B) 1; 8 C) – 6; 8
D) – 8; – 1 E) 8; – 1
2. Hallar a + b si la raíz cuadrada de:
$ax^4 + 3ax^3 + (6a + b)\ x^2 + 6ax + a^2$ es exacta.
A) – 4 B) 4 C) 3 D) 1 E) 5
3. Hallar a + b si la raíz cuadrada de:
$P(x) = 9x^4 + ax^3 + bx^2 - 67x + 54$ tiene un resto de 3x + 5
A) 50 B) 37 C) 40 D) 42 E) 36
4. Si al extraer la raíz cuadrada de:
$P(x) = x^6 + x^4 + ax^2 + b$. Se obtiene como residuo $[p(\sqrt{x}) - ax - x^3]$. Hallar "a"
A) – 2 B) – 4 C) –5/4 D) 1/4 E) 3/4
5. Efectuar:
$$K = \sqrt{3+\sqrt{9+\sqrt{80}}+\sqrt{21-\sqrt{320}}}$$
A) 7 B) 3 C) 5 D) 6 E) 2
6. Simplificar: $\sqrt{20\sqrt{6}+49} + \sqrt[4]{441+180\sqrt{6}}$
A) $8-3\sqrt{6}$ B) $8+3\sqrt{6}$
C) $2+\sqrt{6}$ D) $6-\sqrt{6}$
E) $8+2\sqrt{6}$
7. Transformar a radicales simples, el siguiente radical doble
$\sqrt{\frac{z+x+y}{2} - \sqrt{xz+yz}}$; x + y > z
A) $\sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{z}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{x+y}{2}} - \sqrt{\frac{z}{2}}$
C) $\sqrt{\frac{x+z}{2}} + \sqrt{\frac{y}{2}}$ D) $\sqrt{\frac{z+y}{2}} + \sqrt{\frac{x}{2}}$
E) $\sqrt{\frac{x+z}{2}} - \sqrt{\frac{y}{2}}$
8. Transformar a radicales simples
$\sqrt{24+\sqrt{240}+\sqrt{336}+\sqrt{140}}$
A) $\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{5}$
B) $8+3\sqrt{6}$ C) $2+\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{5}$
E) $2\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{5}$
9. Transformar a radicales simples
$\sqrt{21+\sqrt{192}-\sqrt{80}-\sqrt{240}}$
A) $2\sqrt{3}+\sqrt{5}-2$ B) $\sqrt{3}+\sqrt{5}-2$
C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}-2$ D) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$
E) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}$
10. Si $a^4 = 17 + 12\sqrt{2}$, hallar el valor de a.
A) $2\sqrt{3}$ B) $1+\sqrt{3}$ C) $2+\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $1+\sqrt{2}$

11. Transformar a radicales simples
$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$
A) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ B) $8+3\sqrt{6}$
C) $1+\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}-\sqrt{6}$
E) $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$

12. Transformar a radicales simples
$\sqrt[3]{20\sqrt{2}-12\sqrt{6}}$
A) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}-3$
C) $1-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}-\sqrt{6}$
E) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$

13. Efectuar: $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}+2\right)^2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$
A) $8-\sqrt{5}$ B) $8+3\sqrt{6}$
C) $1+\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}-\sqrt{6}$
E) $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$

14. El valor de "a" en la expresión:
$\dfrac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$, es:
A) 70 B) 64 C) 66 D) 68 E) 62

15. Efectuar: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}}\right)^{-1}$
A) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
C) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
E) 1

16. El denominador al racionalizar
$f=\dfrac{N}{\sqrt[5]{4.\sqrt{a^3}.\sqrt[4]{125}}}$; $a\in Q^+$, es:
A)10a B)25a C) $10a^2$ D) $5a^3$ E) 12a

17. Racionalizar: $\dfrac{12}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}$
A) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{45}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2}\right)}{3}$
B) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{9}\right)}{3}$
C) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}$
D) $\dfrac{12\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}{7}$
E) $\dfrac{12\left(\sqrt[3]{49}+1\right)}{7}$

18. Efectuar:
$\dfrac{4}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}-\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}+\dfrac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$
A) $-\sqrt{5}$ B) 0 C) 2 D) $2\sqrt{3}$ E) 4

19. El verdadero valor de la expresión:
$E=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-4-\sqrt{3x-14}}}$, para $x = 5$, es:
A) 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) – 2

20. Racionalizar e indicar el denominador de:
$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{10}+\sqrt{6}}$
A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

21. El denominador al racionalizar
$f=\dfrac{k}{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$; x > 1
es:
A) x B) x + 2 C) x – 1 D) x + 1 E) 2x

22. Luego de racionalizar:
$k=\dfrac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}$ x > 1: Señale su denominador.
A) 1 B) x^2 C) x – 1 D) x + 1 E) 2x

23. Luego de racionalizar: $k=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{2}}$; El denominador es:
A) 13 B) 5 C) 18 D) 10 E) 11

24. Señale el denominador racionalizado de la fracción :
$f=\dfrac{7}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{12}}$
A) 2 B) 12 C) 8 D) 4 E) 15

25. Marque el denominador final, luego de racionalizar y simplificar en :
$h=\dfrac{35}{3+\sqrt[5]{2}}$
A) 12 B) 8 C) 7 D) 10 E) 2

SEMANA Nº 08
ANÁLISIS COMBINATORIO

FACTORIAL DE UN NÚMERO: El factorial de un número entero y positivo "n", se define como el producto que resulta de multiplicar todos los números enteros consecutivos desde 1 hasta el número considerado.

Se denota como: n!

FORMA MATEMÁTICA:

n! = 1.2.3.4… (n – 1).n, donde n ≥ 1

PROPIEDADES:

1. 0! = 1,
2. 1! = 1,
3. n! = n(n – 1)!; n ≥ 1

4. $a! = b! \leftrightarrow (a=0 \wedge b=1) \vee (a=1 \wedge b=0) \vee (a=b)$

NÚMERO COMBINATORIO:

DEFINICIÓN: Se define como el número total de grupos que se pueden formar con **n** elementos tomados de **k** en **k**, en el cual cada grupo debe diferenciarse de otro por lo menos de un elemento.

FORMA MATEMÁTICA:

$C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Donde: {n; k} $\in$ IN, n ≥ k.

PROPIEDADES:

1. Combinaciones complementarias

$C_k^n = C_{n-k}^n$

Corolarios:

1.1. $C_0^n = C_n^n = 1$

1.2. $C_1^n = C_{n-1}^n = n$

2. Suma de combinaciones de igual índice superior pero inferiores diferenciados en 1.

$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

3. Degradación de índices

Ambos índices: $C_k^n = \dfrac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$

Sólo índice superior: $C_k^n = \dfrac{n}{n-k} C_k^{n-1}$

Sólo índice inferior: $C_k^n = \dfrac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$

TEOREMA:

Si: $C_k^n = C_r^m \rightarrow \begin{cases} n=m \ \wedge \ k=r \\ \vee \\ n=m \ \wedge \ k+r=m \end{cases}$

FÓRMULA DE NEWTON: Dado el binomio: (x + y) y n $\in$ IN, se tiene:

$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + ... + C_n^n y^n$

Donde el desarrollo del polinomio es completo y homogéneo de grado "n".

PROPIEDADES:

1. El desarrollo de binomio tiene (n + 1) términos.
2. Término General contado de izquierda a derecha se encuentra:

$T_{\underset{\rightarrow}{k+1}} = C_k^n x^{n-k} y^k$

Donde: k + 1: es el término del lugar buscado.
n: es la potencia del binomio.
x: es el primer término del binomio.
y: es el segundo término del binomio.

3. Término General contado de derecha a izquierda se encuentra.

$T_{\underset{\leftarrow}{k+1}} = C_k^n y^{n-k} x^k$

4. Término Central tiene la forma:

$T_c = T_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^n x^{n-\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}$. Si n es par y

$T_{c1} = T_{\frac{n+1}{2}}$ y $T_{c2} = T_{\frac{n+3}{2}}$ Si "n" es impar, existen dos términos centrales.

5. Suma de todos los coeficientes del desarrollo de $(ax + by)^n$ es:

$\sum coef. = (a+b)^n$

6. Suma de todos los exponentes de las variables del desarrollo de $(ax^p + by^q)^n$ es:

$\sum \exp. = \dfrac{(p+q)(n)(n+1)}{2}$

7. El número de términos del desarrollo de $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r)^n$ esta dado por:

$\dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$

8. El equivalente del valor máximo en el desarrollo de $(x+y)^n$ es el término central si n es para y los dos centrales si n es impar.

PERMUTACIONES: Para "n" objetos diferentes el número de permutaciones es:

$P_n = n!$

PERMUTACIÓN CIRCULAR: El número de permutaciones circulares de "n" elementos distribuidos alrededor de una curva cerrada es:

$P_n^c = (n-1)!$

PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN: El número de permutaciones en el que se repite alguno de ellos es:

$P_{(k_1,\ k_2,\ k_3 \ldots k_m)}^n = \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3! \ldots k_m!}$

Donde:

$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$: Número de veces que se repite cada elemento

$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_m = n$: Número total de elementos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Cuantos valores de "x" dan existencia a $\left(\frac{x}{3}-1\right)!$, si "x" es menor que 30?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Solución:

Debe cumplir que: $\left(\frac{x}{3}-1\right) \in Z_0^+$

$\rightarrow$ x es múltiplo de 3,

Además: $0 < x < 30$

Es decir:

$x \in \{3;6;9;12;15;18;21;24;27\}$

Luego x toma 9 valores.

Rpta: E

2. En la suma combinatoria de:

S = $\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}$, donde n es natural, mayor o igual que 3. Al simplificar se obtiene:

A) Un número primo
B) Un cuadrado perfecto
C) Un número impar
D) Un numeró par
E) Un múltiplo de 4

Solución:

Desarrollando.

$$S=\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}$$

$$S=\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{(n-1)!}{2!(n-3)!}$$

$$S=\frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!}+\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)}{2(n-3)!}$$

$$s=(n-1)^2$$

Rpta: B

3. Hallar el término independiente de:

$$\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$$

A) $\frac{2}{18}$
B) $\frac{7}{18}$
C) $\frac{18}{7}$
D) $\frac{6}{7}$
E) $\frac{3}{8}$

Solución:

Sea t_{k+1}el lugar que ocupa el término independiente es decir:

$$t_{k+1}=C_k^9\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{9-k}\left(-\frac{1}{3x}\right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^9\left(\frac{3}{2}\right)^{9-k}\left(\frac{-1}{3}\right)^k .x^{18-3k}$$

$\rightarrow$ 18 – 3k = 0

De donde: k = 6.

Luego el término independiente será:

$$C_6^9\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{9!}{6!.3!}x\frac{3^3}{8}x\frac{1}{3^6}=7/18$$

Rpta: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Reducir: $J=\left[\left(\frac{83!}{81!+82!}\right)\left(\frac{40!+41!}{42!}\right)\right]^2+4$

A) 1 B) – 1 C) 4 D) 10 E) 8

2. Simplificar: $J=\frac{25!+5(6!!)}{5(4!!)+3!!!}$

A)3 B)4 C)5 D)2 E)1

3. Simplificar la expresión:

$J=\frac{(n!!+1)!-n!!!}{(n!!-1)!}$ Donde "n" es un número natural mayor o igual que tres.

A) $n!!$ B) n C) $(n!)^2$ D) $(n!!)^2$ E) n

4. Calcular: $J=\frac{(n-3)!+(n-2)!+(n-1)!}{(n-1)^2(n-4)!}$

Si $n \neq \{1,4\}$

A) n – 2 B) n – 3 C) n – 4 D) n – 5 E) n – 1

5. Simplificar: $J=\frac{(n-4)!+(n-3)!+(n-2)!}{n^4-13n^3+60n^2-116n+80}$

A) $(n-5)!$ B) $(n-6)!$ C) $(n-4)!$ D) $(n+6)!$ E) $(n+5)!$

6. Si se cumple la siguiente relación:

$\frac{(n!-4)[(4+n!)n!+16]-2}{(n!-1)^2}=6$ El valor de "n" es:

A) 8 B) 3 C) 6 D) 5 E) 2

7. Calcular el valor de "n" en:

$1x3x5x7x\ldots(2n-1)=\frac{40!}{2^{20}(20)!}$

A) 20 B) 40 C) 19 D) 41 E) 39

8. El numero $100!$ que se obtiene del producto $100!=1x2x3x\ldots x99x100$ termina en "n" ceros ,entonces "n" es igual a:

A) 24 B) 23 C) 36 D) 10 E) 100

9. Hallar"n" en:

$$\frac{3(3n^2+10n+8)(3n+5)!(3n+4)!}{(3n+5)!-(3n+4)!}=24!$$

A) 4 B) 3 C) 6 D) 10 E) 8

10. Hallar el valor de "J" en:

$J=\frac{C_4^{18}+C_5^{18}+C_6^{19}+C_{13}^{20}+C_{13}^{21}+C_{14}^{22}}{C_7^{21}+C_{13}^{21}}$

A) 6 B) 5 C) 2 D) 0 E) 1

11. Si $C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_{n-1}^n=30$

entonces el valor de: $J=\sqrt[3]{\frac{n!-(n-1)!}{n-1}+3}$

A) 5 B) 1 C) 12 D) 3 E) 6

12. Determinar el valor de: $J = 3x + 7y$, si se cumple que: $C_{y-1}^{x} = C_{y}^{x}$, $4C_{y}^{x} = 5C_{y-2}^{x}$
A) 104 B) 100 C) 114 D) 141 E) 401

13. Obtener la suma de todos los valores de "x" en la ecuación:
$C_{x-2}^{3x-2} + C_{x-3}^{3x-2} + C_{x-3}^{3x-1} + C_{x-3}^{3x} = C_{3x-16}^{3x+1}$
A) 25 B) 22 C) 24 D) 26 E) 21

14. Si se cumple que:
$C_{5}^{m} + 2C_{6}^{m} + C_{7}^{m} + C_{8}^{m+2} = C_{n-3}^{m+3}$
Calcular el valor de: $J = m + n$
A) 25 B) 23 C) 24 D) 26 E) 21

15. Hallar "n" en :
$\frac{nC_1^n}{C_0^n} + \frac{+2(n-1)C_2^n}{C_1^n} + \frac{3(n-2)C_3^n}{C_2^n} + \cdots \frac{nC_n^n}{C_{n-1}^n} = 204$
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

16. Calcular el cuarto término en el desarrollo del binomio: $(\frac{x}{2} - \frac{2}{x})^6$
A) $-\frac{96}{x^4}$ B) $\frac{15x^2}{4}$ C) -20
D) $\frac{60}{x^2}$ E) $\frac{3x^4}{8}$

17. Sabiendo que: $n = \frac{7C_6^{15} + 8C_9^{15}}{5C_6^{15}}$
Hallar el término "n" en: $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})^{5n}$
A) $30x$ B) $35x^{13}$ C) $10x^{12}$
D) $5x^{13}$ E) $12x^{12}$

18. Calcular el termino independiente de "x" en: $(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x})^9$
A) 7/18 B) 1/7 C) 3/8 D) 18/19 E) 2/19

19. En el desarrollo del binomio $(1 + y)^{52}$ los coeficientes de los términos de lugares "2m+1" y "m+2" son iguales. Determinar dichos lugares
A) 35; 19 B) 19; 30 C) 19; 23
D) 30; 29 E) 19; 15

20. Si el término "n" contado a partir del último, en el desarrollo de $(x^3 + \frac{1}{y^2})^n$ es $px^{18}y^{-2}$ entonces el valor de $J = n.p$ es:
A) 4 B) 50 C) 49 D) 18 E) 94

21. Si el único termino central del desarrollo de $(x^3 - \frac{2}{x^2})^n$ es $1120x^4$.
Determinar el sétimo término de dicho desarrollo.
A) $1500x^{-8}$ B) $1792x^{-6}$ C) $2500x^{-3}$
D) $1580x^{-6}$ E) $180x^{-2}$

22. Los exponentes de "x" en el desarrollo del binomio $(x^m + \frac{1}{\sqrt[3]{x^m}})^n$ van disminuyendo de 8 en 8, el término de lugar 13 es independiente de "x", entonces el número de términos en su desarrollo es:
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

23. De 5 físicos, 4 químicos y 3 matemáticos se tiene que escoger un comité de 6; de modo que se incluyan 3 físicos, 2 químicos y un matemático ¿De cuantas maneras puede hacerse esto?
A) 180 B) 280 C) 190 D) 30 E) 120

24. María una alumna del CPU tiene su juguería y quiere saber, con tres frutas diferentes ¿Cuántas clases de jugo puede preparar?
A) 9 B) 6 C) 27 D) 7 E) 8

25. En un estante hay 4 libros de aritmética y 5 de algebra ¿De cuantas maneras diferentes se puede coger 5 libros, de modo que 2 sean de aritmética y 3 de algebra?
A) 20 B) 30 C) 45 D) 60 E) 40

SEMANA Nº 09
TEORÍA DE ECUACIONES

IGUALDAD: Es una relación que existe entre dos expresiones matemáticas, mediante el signo "=" (igual).

Primer miembro $\longrightarrow$ A = B $\longleftarrow$ Segundo miembro

CLASES DE IGUALDADES: Son las siguientes:

1. **IGUALDAD NUMÉRICA:** Formada por números:
Ejemplo: $3^2 + 3 = 2^3 + 4$
2. **IGUALDAD LITERAL:** Está formada por números y letras:
   2.1. **IGUALDAD ABSOLUTA:** Se verifica para cualquier valor de sus variables.
   Ejemplo: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
   2.2. **IGUALDAD RELATIVA:** Se verifica para valores específicos de las variables.
   Ejemplo: $5x + 3 = 3x + 7$

ECUACIÓN: Es una igualdad condicional, tiene por lo menos una variable o incógnita, puede tener o no solución.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES:

1. **ECUACIONES ALGEBRAICAS:** Con las incógnitas se pueden realizar todas las operaciones matemáticas. Estas son:
b) POLINOMIALES.
c) FRACCIONARIAS.
d) IRRACIONALES.

2. **ECUACIONES TRASCENDENTES**: Si por lo menos uno de sus miembros son expresiones no algebraicas. Estás son:
a) EXPONENCIALES.
b) LOGARÍTMICAS.
c) TRIGONOMÉTRICAS.

3. **SEGÚN SUS SOLUCIONES:** pueden ser:
   a) **COMPATIBLES:** Tienen solución:
      - DETERMINADA: Tienen un número limitado de soluciones:
        Ejemplo: $8x - 4 = 3x + 6 \rightarrow x = 2$
      - INDETERMINADAS: Tiene un número ilimitado de soluciones.
        Ejemplo: $2(x - 3) = 2x - 6$
        $\rightarrow 0x = 0$
   b) **INCOMPATIBLES:** No tiene solución.
4. **SEGÚN SU GRADO:** Pueden ser de:
   a) Primer Grado o lineales.
   b) Segundo grado o cuadráticas.
   c) Tercer grado o cúbicas, etc.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

DEFINICIÓN: Una ecuación de primer grado o lineal es aquella que tiene la forma: $ax + b = 0$, $a \neq 0$, donde a y b se denominan coeficientes.

REGLA GENERAL PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA:

1. Se efectúa las operaciones indicadas, si los hay.
2. Se hace la transposición de términos, poniendo en un miembro los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro las cantidades conocidas.
3. Se simplifica términos semejantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de la incógnita.

ECUACIONES CUADRÁTICAS:

Son aquellas que tienen la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$,

Donde a, b y c $\in$ IR.

MÉTODO DE SOLUCIÓN:
1. Usando el método factorización.
2. Usando la fórmula de Carnot:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

RELACIÓN ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO:

Supongamos que x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se tiene:

$ax^2 + bx + c = 0 \equiv x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, donde:

La suma de las raíces: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

El producto: $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

La diferencia: $D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$

Entonces la ecuación cuadrática se construye mediante: $\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$

ECUACIONES BICUADRÁTICAS:

Son aquellas ecuaciones que no son cuadráticas, pero, mediante un artificio se reducen a cuadráticas.

Son de la forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$, donde sus coeficientes: a, b y c $\in$ IR.

MÉTODO DE SOLUCIÓN:

1. Factorizando e igualando a cero cada factor, o
2. Haciendo: $x^2 = y$, Luego reemplazando en la ecuación dada, esta se trasforma en una ecuación de segundo grado: $ay^2 + by + c = 0$

ECUACIONES RECÍPROCAS:
Son aquellas que tienen sus coeficientes extremos y equidistantes a los extremos iguales en valor y en signo es decir:
$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$
En dichas ecuaciones: Si se verifica para:
$x = m$, también se verificará para: $x = \frac{1}{m}$

MÉTODO DE SOLUCIÓN: Se considera:
1. Cuando la ecuación es de grado impar, admite necesariamente la raíz: $x = -1$.
2. Si los coeficientes de los términos equidistantes a los extremos son de signo contrario, admite necesariamente la raíz $x = 1$ (Caso especial).
3. Cuando la ecuación es de grado par, se lleva a una ecuación de grado mitad.

ECUACIONES IRRACIONALES:
Son aquellas ecuaciones que contiene radicales.
El método de solución consiste en eliminar los radicales y resolver la ecuación resultante por los métodos conocidos. Sin embrago se debe tener precaución de sustituir todas las raíces posibles en la

ecuación original puesto que el método de eliminación de radicales requiere elevar a una determinada potencia los dos miembros de la igualdad. Este procedimiento puede introducir raíces en la ecuación final que no lo son de la ecuación original.

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO: Sea "x" un número real, su valor absoluto se denota por $|x|$ y se define por la siguiente regla:

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$$

TEOREMAS DEL VALOR ABSOLUTO:

1. $\forall$ x $\in$ IR: $|x| \geq 0$
2. $\forall$ x $\in$ IR: $|x|^2 = x^2$
3. $\forall$ x $\in$ IR: $|x| = \sqrt{x^2}$
4. $\forall$ x $\in$ IR: $|x| = |-x|$
5. $\forall$ x $\in$ IR: $|x.y| = |x|.|y|$
6. $\forall$ x,y $\in$ IR: $y \neq 0 \rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
7. $|x| = y \leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (x = y \vee x = -y)$
8. $|x| = |y| \leftrightarrow (x = y \vee x = -y)$

La solución de ecuaciones con valor absoluto se efectúa haciendo uso de los teoremas anteriores.

EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Resolver: $\dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x+5}{x-2} = \dfrac{2x^2 - x - 11}{x^2 - 5x + 6}$

A) – 2 B) 3 C) 1 D) ϕ E) 0

Solución:

La ecuación está bien definida para:

$x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \quad \wedge \quad x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Luego:

$$\frac{(x+1)(x-2)+(x+5)(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{2x^2 - x - 11}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

$$\frac{2x^2 + x - 17 - (2x^2 - x - 11)}{(x-3)(x-2)} = 0$$

$$\frac{2x-6}{(x-3)(x-2)} = 0$$

$\rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

Como: $x \neq 3 \rightarrow$ C.S. = ϕ

Rpta: D

2. Resolver: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} = \sqrt{6x+1}$

A) $\{\frac{1}{3}; 8\}$ B) 4 C) 6 D) $\{8\}$ E) 3

Solución:

Elevando al cuadrado:

$x+1+2\sqrt{(x+1)(x+8)} + x + 8 = 6x + 1$

De donde: $\sqrt{x^2 + 9x + 8} = 2x - 4$

Elevando otra vez al cuadrado:

$x^2 + 9x + 8 = 4x^2 - 16x + 16$

$\leftrightarrow 3x^2 - 25x + 8 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 8$

Comprobando las raíces en la ecuación original sólo satisface para x = 8.

Por lo tanto C. S = $\{8\}$

Rpta: D

3. Hallar el conjunto de solución de la siguiente ecuación: $|3x-5| = x - 5$

A) $\{1; 3\}$ B) 2 C) $\{-1;3\}$ D) 1 E) 3

Solución:

$|3x-5| = x-5 \leftrightarrow (x-5 \geq 0) \wedge (3x-7 = x-5 \vee 3x-7 = -x+5)$

$\leftrightarrow (x \geq 5) \wedge (x = 1 \vee x = 3)$

Por lo tanto: C.S. = $\{1; 3\}$

Rpta: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver:
$x(x+3)(x-7)-(2x+1) = (x-1)^3 - x(x+26)$
A) Φ B) $<-\infty, \infty>$ C) 1 D) 0 E) 3
2. Resolver e indicar una solución en:
$(a-b)x + \dfrac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)x} = \dfrac{2a(a^2+b^2)}{(a+b)}$
A) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ B) $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ C) $\frac{a^2+b^2}{ab}$
D) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ E) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)}$
3. Resolver la ecuación:
$\dfrac{4x^2-7x+9}{4x^2+25x+25} = \left(\dfrac{2x+5}{2x-3}\right)^{-2}$
Hallar el número de soluciones.
A) 4 B) 2 C) 3 D) 1 E) 5
4. Hallar el número de soluciones de la ecuación:
$\dfrac{x^2-6}{x} - \dfrac{5x}{x^2-6} = 4$
A) 4 B) 2 C) 5 D) 3 E) 1
5. Hallar el valor de "m" en la ecuación:
$x^2 + (2m+5)x + m = 0$
Si una raíz excede a la otra en tres unidades.
A) – 2 B) – 8 C) 1 D) – 1 E) – 3
6. Dada la ecuación:
$(2m+2)x^2 + 4x - 4mx + m - 2 = 0$
Hallar la suma de las raíces sabiendo que estas son inversas.
A) 3/10 B) 1/3 C) 3 D) 10/3 E) 1
7. Resolver:
$\left(\dfrac{1}{x+3a} + \dfrac{1}{x+4b}\right)(2x+3a+4b) = \dfrac{9}{2}$
A) $4b-6a$ B) $6a-4b$ C) $2a-3b$
D) $2a^2-8b^2$ E) $2a^2-8b^2+4$

8. Resolver:
$$(x+a)^2-(x+b)^2=2(a^2-b^2)$$
A) a B) b C) $(a+b)/2$
D) $(a-b)/2$ E) 1

9. Resolver: $\dfrac{1+3+5+.....(2x-1)}{2+4+6+.....2x}=\dfrac{28}{29}$
A) 30 B) 29 C) 28 D)31 E) 27

10. Resolver: $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=a$ con $a\neq 0$
A) $a(a+1)/2$ B) $2(a^2+1)/a$
C) a D) $(a-1)^2/(2a)$
E) $a(1-a)/2$

11. Resolver:
$$2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}=24$$
A) – 9/2 B) – 2 C) 0 D) 1 E) – 1

12. Resolver:
$$\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+2x+\sqrt{2x(2x+3)}}}=x+1$$
A) ½ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. Resolver: $x-\sqrt{x^2-15}=5$
A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) Incompatible

14. Resolver: $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1-\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{1}{2}$
A)–0,2 B)–0,5 C)– 0,25 D) 0,2 E) 0,5

15. Hallar "m" si las raíces de la ecuación:
$(m-2)x^2-4x+1=0$ Son iguales
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

16. Hallar "n" si las diferencias de las raíces de:
$3x^2-14x+(n-1)=0$ Es 4
A) 2 B) 3/16 C) 1/13 D) 16/3 E) 1/3

17. Para que valor de "a" las raíces de la ecuación: $\dfrac{x^2+3x}{5x+2}=\dfrac{a-1}{a+1}$ Son simétricas
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

18. Hallar el menor valor de "m" para que la diferencia de raíces en :
$mx^2-2mx+m^2-13=0$ .Tenga por valor a la unidad.
A) – 13/4 B) 2 C) 4/13 D) 1/13 E) 13/4

19. Hallar el valor de "x" que verifica
$$\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}=4$$
A) 170 B) 169 C) 165 D) 150 E) 189

20. Si
$$x+y=12$$
$$y+z=14$$
$$x+z=16$$
El valor de "y" es:
A) 4 B) 8 C) 6 D) 7 E) 5

21. Se compra cierto número de relojes por \$ 5625 sabiendo que el número de relojes comprados es igual al precio de un reloj en dólares ¿Cuántos relojes se han comprado?
A) 75 B) 85 C) 95 D) 95 E) 105

22. El jardinero A, planta rosas más rápidamente que el jardinero B en la proporción de 4 a 3, cuando B planta x rosas en una hora, A planta x+2 rosas. ¿Cuántas rosas planta B en 4 horas?
A) 6 B) 81 C) 32 D) 24 E) 12

23. Hallar el conjunto de solución de la siguiente ecuación: $|3x-5|=x-5$
A) $\{1;3\}$ B) 2 C) $\{-1;3\}$ D) 1 E) 3

24. El producto de las soluciones del sistema de ecuaciones simultaneas:
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$; $x+y=b$ Es:
A) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ B) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ C) $\frac{1}{a}-b$
D) $\frac{b}{a}$ E) $\frac{a}{b}$

25. Resolver: $\sqrt[3]{22+\sqrt{2x-1}}=3$
Dar como respuesta $J=2x$
A) 12 B) 13 C) 20 D) 26 E) 24

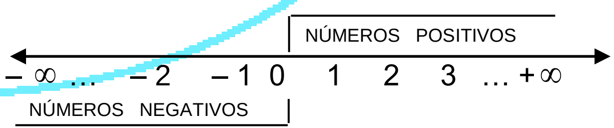
SEMANA N° 10
INECUACIONES

DESIGUALDADES: Es una relación de orden que se establece entre dos cantidades, donde una de ellas es mayor que la otra. Así: A > B ó A < B

>: Mayor que
<: Menor que
} RELACIONES ESTRICTAS

≥: Mayor o igual
≤: Menor o igual
} RELACIONES NO ESTRICTAS

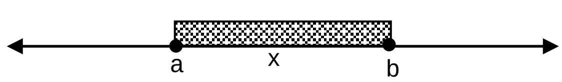
RECTA NUMÉRICA REAL: Es una recta geométrica en la cual se establece una biyección entre cada uno de los puntos de la recta y cada uno de los números reales.



INTERVALOS: Es un conjunto de números reales comprendido entre dos extremos llamados superior e inferior.

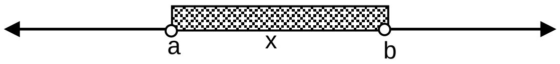
TIPOS DE INTERVALOS:

INTERVALO CERRADO: Cuando los extremos pertenecen al intervalo.



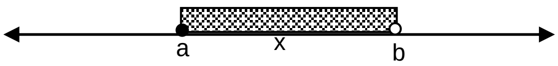
[a, b] = {x ∈ IR / a ≤ x ≤ b}

INTERVALO ABIERTO: Cuando los extremos no pertenecen al intervalo.



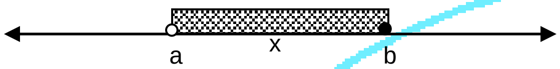
$\langle a, b\rangle = \{x \in IR \,/\, a < x < b\}$

INTERVALO CERRADO EN "a" Y ABIERTO EN "b":



$[a, b\rangle = \{x \in IR \,/\, a \le x < b\}$

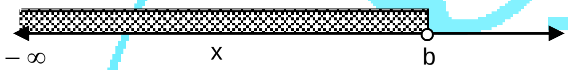
INTERVALO ABIERTO EN "a" Y CERRADO EN "b":



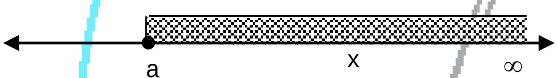
$\langle a, b] = \{x \in IR \,/\, a < x \le b\}$

INTERVALOS INFINITOS:

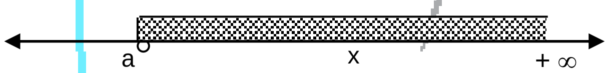
$\langle -\infty , b] = \{x \in IR \,/\, x \le b\}$



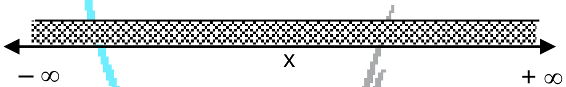
$\langle -\infty , b\rangle = \{x \in IR \,/\, x < b\}$



$[a, +\infty\rangle = \{x \in IR \,/\, x \ge a\}$



$\langle a, +\infty\rangle = \{x \in IR \,/\, x > a\}$



$\langle -\infty, +\infty\rangle = IR = \{x \,/\, x \in IR\}$

INECUACIÓN: Es una desigualdad condicional que se establece entre expresiones algebraicas; se representa mediante las siguientes formas:

$P(x) \ge Q(x)$ ó $P(x) > Q(x)$ ó $P(x) \le Q(x)$ ó $P(x) > Q(x)$

Por ejemplo: $3x + 4 > 2x – 6$

TIPOS DE INECUACIONES: Son las siguientes:

1. Inecuaciones Lineales.
2. Inecuaciones cuadráticas.
3. Inecuaciones polinómicas
4. Inecuaciones Racionales.
5. Inecuaciones con Radicales o Irracionales.
6. Inecuaciones con Valor Absoluto.

INECUACIONES LINEALES: Tienen la forma:

$ax + b > 0$ ó $ax + b < 0$ ó $ax + b \ge 0$ ó $ax + b \le 0$,

Donde, $a, b \in IR$, $a \ne 0$

Para resolver esta inecuación se debe considerar: $a > 0$.

Es decir: $x > -\frac{b}{a}$ ó $x < -\frac{b}{a}$

PROPIEDADES:

1. $a > 0$ si a es positivo
2. $a < 0$ si a es negativo
3. Si $– a < – b$ entones $a > b$
4. $a < b < c$ si y solo si $a < b \wedge b < c$

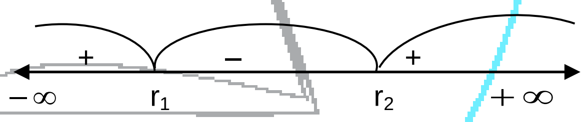
INECUACIONES CUADRÁTICAS: Son aquellas que tienen la forma:

$ax^2 + bx + c \ge 0$ ó $ax^2 + bx + c \le 0$ ó $ax^2 + bx + c > 0$ ó $ax^2 + bx + c < 0$,

donde: a, b y $c \in IR$ y además $a \ne 0$.

MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS: Este método sirve para resolver Inecuaciones de segundo grado e inecuaciones racionales consiste en:

1. Factorizar la expresión hasta obtener binomios de la forma $(ax + b)$
2. Hallar los puntos críticos: es decir aquellos puntos en los cuales se anula la expresión.
3. Ordenar los puntos en la recta numérica.
4. Determinar las regiones de derecha a izquierda, en forma intercalada: - +; –; +;



Luego escribir la solución de la inecuación:

- Si la inecuación es de la forma: $ax^2 + bx + c > 0$. La solución es: $\langle -\infty, r_1\rangle \cup \langle r_2, +\infty\rangle$
- Si la inecuación es de la forma: $ax^2 + bx + c < 0$. La solución es: $\langle r_1, r_2\rangle$

INECUACIONES POLINÓMICAS: Son aquellas que tienen la forma:

$P(x)$: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n > 0$

$P(x)$: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n < 0$

Con: $a_0 \ne 0$, $n \in Z^+$, $n \ge 0$

Para resolver estas inecuaciones se debe tener en cuenta:

1. Consideremos $a > 0$ (Si no lo es, multiplicamos por $(– 1)$)
2. Factorizar el polinomio $p(x)$ hasta encontrar solo fracciones lineales de

coeficientes reales o trinomios cuadráticos positivos.

3. Los trinomios positivos no interviene en el conjunto de solución por lo tanto se pueden descartar. A los factores lineales restantes aplicaremos el método de los puntos críticos.

INECUACIONES RACIONALES: Son aquellas que tienen la forma:

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ó $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $Q(x) \neq 0$

Donde P(x) y Q(x) pueden ser monomios o polinomios. Se resuelven haciendo uso de:

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \equiv$ P(x).Q(x) > 0 ó

$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \equiv$ P(x).Q(x) < 0

Para solucionar las inecuaciones racionales se debe tener en cuenta:

1. Hallaremos el C.V.A. (Conjunto de Valores Admisibles), C.V.A.
$$\left[\frac{p(x)}{Q(x)}\right] = IR - \{x / Q(x) = 0\}$$
2. El C.V.A. de la inecuación $Q^2(x) > 0$, $\forall x \in IR$. Multiplicando a la inecuación por $Q^2(x)$ se obtiene la inecuación equivalente:
P(x) Q(x) > 0 ó P(x) Q(x) < 0, la cual será resuelta por el método de los puntos críticos.
3. El conjunto solución es la intersección del C.V.A. con la solución del paso anterior.

INECUACIONES IRRACIONALES: Son de la forma:

$F[\sqrt{P(x)}, \sqrt[3]{Q(x)}, \ldots, \sqrt[n]{R(x)}] > 0$ ó

$F[\sqrt{P(x)}, \sqrt[3]{Q(x)}, \ldots, \sqrt[n]{R(x)}] < 0$

Donde P(x), Q(x) y R(x), son expresiones irracionales.
Para solucionar estas inecuaciones se debe tener en cuenta:

1. Hallar el C.V.A. de las expresiones irracionales.
2. Transformar la inecuación irracional en otra más sencilla, mediante pasos equivalentes, de tal modo que consignamos resolver tal inecuación.
3. El conjunto solución se obtiene interceptando el C.V.A. con las soluciones de la inecuación.

NOTA: Cualquier Inecuación irracional se reduce en inecuaciones de las formas:

a) La inecuación $\sqrt{f(x)} < h(x)$ es equivalente al sistema de inecuaciones siguientes.
$$\sqrt{f(x)} < h(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \leftrightarrow x \in S_1 \\ h(x) > 0 \leftrightarrow x \in S_2 \\ f(x) < [h(x)]^2 \leftrightarrow x \in S_3 \end{cases}$$
C.V.A = $S_1 \cup S_2$ y S.G = $S_1 \cap S_2 \cap S_3$

b) La inecuación $\sqrt{f(x)} > h(x)$ es equivalente al sistema de inecuaciones siguientes.
$$\sqrt{f(x)} > h(x) \leftrightarrow \alpha = \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ h(x) > 0 \end{cases} \vee \beta = \begin{cases} f(x) > 0 \\ h(x) \geq 0 \\ f(x) > [h(x)]^2 \end{cases}$$
C.S. = S (α) $\cup$ S (β)

Para la desigualdad:
$$\sqrt[2n-1]{f(x)} < g(x) \leftrightarrow f(x) < [g(x)]^{2n-1}$$
Válido para: $(>, \leq, \geq)$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

La solución de inecuaciones con valor absoluto se obtiene haciendo uso de los siguientes teoremas.
Teoremas:

1. $\forall x, y \in IR : |x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)
2. $\forall x, y \in IR$ | x | < | y | $\leftrightarrow x^2 < y^2$
3. Si: $x \geq 0 \wedge |x| \leq y \leftrightarrow -y \leq x \leq y$
4. Si: $y \geq 0 \wedge |x| \geq y \leftrightarrow x \geq y \vee x \leq -y$

EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Resolver la inecuación:
$$\frac{3x}{5} + \frac{7}{20} - \frac{x}{10} \leq \frac{4}{5} + \frac{6x}{20}$$
A) $(-\infty, 4]$

B) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$

C) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

D) $(-\infty, 4)$

E) $(-\infty, -1/4)$

Solución:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}-\frac{6}{20}\right)x \le \frac{4}{5}-\frac{7}{10}$$

$$\frac{8}{20}x \le \frac{1}{10}$$

$$x \le \frac{1}{4}$$

C.S = $\left(-\infty, 1/4\right]$

Rpta: B

2. Resolver la inecuación:

$mnx^2-(m+n)x+1 \ge 0$ Donde m > 0 y n < 0.

A) $\left(-\infty, 1/n\right]$

B) $\left(-\infty, 1/m\right]$

C) $\left(1/m, 1/n\right]$

D) $\left(-\infty, +\infty\right)$

E) $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right]$

Solución:

Factorizando se tiene:

$(mx-1)(nx-1) \ge 0$ … (1)

Como: n < 0, $(mx-1)(1-nx) \le 0$ … (2)

Puntos críticos: $\left\{\frac{1}{m}; \frac{1}{n}\right\}$

De (1): $\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{m}$

CS = $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right]$

Rpta: E

3. Resolver la inecuación:

$$\frac{3x^2-10x+9}{x^2-4x+3} \ge 0$$

A) $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle$

B) $\left(-\infty, 3\right]$

C) $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$

D) $\left(-\infty, 1\right)$

E) $\left(1, 3\right)$

Solución:

$$\frac{3x^2-10x+9}{x^2-4x+3} \ge 0$$

Analizando el trinomio: $3x^2 - 10x + 9$, tiene $\Delta < 0$, el trinomio se verifica $\forall$ x $\in$ IR.

Luego la inecuación se reduce a:

(x – 1) (x – 3) > 0

Por tanto: C.S. = x $\in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$

Rpta: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver:
$(x+1)(x+3)+(x-2)(x+2)(x+4) \le (x+2)^3-(x-1)^2$
A) $\emptyset$
B) $<-\infty, \infty>$
C) 1
D) $[-\frac{10}{7}, \infty >$
E) $< -\infty, -\frac{10}{7}]$

2. Resolver: $\frac{7x-2}{2} \le \frac{5x+6}{3} < \frac{9x+34}{5}$
A) $< -\infty, -36 >$
B) $< -36, \frac{18}{11}]$
C) $\mathbb{R}$
D) $< -36, \frac{18}{11} >$
E) $[\frac{18}{11}, \infty >$

3. Si $(5x+1) \in < -3, 2 >$ entonces $\frac{1}{2x-2}$ se encuentra en el intervalo:
A) $< -\frac{8}{5}, -\frac{18}{5} >$
B) $< -\frac{18}{10}, \frac{8}{10} >$
C) $< -\frac{5}{18}, \frac{5}{8} >$
D) $< -\frac{5}{8}, -\frac{5}{18} >$
E) $< -\infty, 18 >$

4. En el desarrollo de: $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-56} \ge 0$
Uno de los intervalos del conjunto solución es:
A) $< 2, 7]$
B) $< -\infty, 2]$
C) $[2, 3]$
D) $[7, \infty >$
E) $< -\infty, -8]$

5. La desigualdad: $\frac{(4x+8)(x^2-1)}{x-1} < -1$; $x \ne 1$ Tiene por solución:
A) $x < -\frac{3}{2}$
B) $x = -\frac{3}{2}$
C) $x > -\frac{3}{2}$
D) $\mathbb{R}$
E) No tiene solución

6. Si "x" es un entero positivo que verifica la relación:
$\sqrt[4]{(0,8)^{(x-3)/4}} > \sqrt[8]{(0,64)^{(x-2)/5}}$
Con relación a estos valores de "x" podemos afirmar que:
A) Hay infinitas soluciones.
B) El mayor valor de "x" es 11
C) Solamente cumplen los enteros impares menores que 25.
D) La suma de todas las soluciones es 21
E) El de menor valor de "x" es 15

7. Entre tres criadores de ovejas, A, B y C reúnen más de 8 ovejas, B piensa adquirir 4 ovejas más, con lo que tendría más ovejas que entre A y C. Se sabe que B tiene menos ovejas que C y los que este tiene no llega a 5. ¿Cuántas ovejas tiene cada uno en el orden A, B y C?
A) 2, 3, 4
B) 4, 2 ,3
C) 4, 3, 2
D) 3, 3, 4
E) 3, 2, 4

8. Hallar un numero entero y positivo, sabiendo que la tercera parte del que le precede disminuido en una decena, es mayor que 14, y que la cuarta parte del que le sigue, aumentado en 10, es menor que 29
A) 66
B) 75
C) 82
D) 45
E) 74

9. Resolver para: $x, y, z \in Z$
$x + y > 6$
$x - y < 2$
$y < 4$
E indicar: $J = \frac{y}{x}$
A) 0,5
B) 0,75
C) 1
D) 2
E) 3

10. Hallar la suma de los enteros que cumplen:
$\frac{3x+4}{x-5} + 2 < \frac{4x-5}{x-5}$
A) 9
B) 12
C) 8
D) 10
E) 15

11. Resolver e indicar el conjunto solución de:
$\sqrt{\frac{x^2-1}{9-x^2}} + 2 > 0$
A) $< -3, -1]$
B) $[1,8 >$
C) $[1,9 >$
D) $< -3, -1] \cup [1,3 >$
E) $< -2, -1] \cup [1,5 >$

12. Resolver el sistema:
$(x-4)(-2x+1) > 0$
$\frac{x+1}{x-1} > 2$
$(x-1)^2(x-3)(x+4)^3 < 0$
A) $2 < x < 5$
B) $x < 6$
C) $x > 0$
D) $1 < x < 3$
E) $2 < x < 6$

13. Resolver: $|4x - 3| > x + 2$
A) $< \frac{1}{5}, \infty >$
B) $< -5, \frac{1}{5} >$
C) $< \frac{1}{5}, \frac{5}{3} >$
D) $< -\infty, \frac{1}{5} > \cup < \frac{5}{3}, \infty >$
E) $< -\infty, 1 > \cup < 2, \infty >$

14. Determinar el máximo valor del trinomio $1 + 6x - x^2$
A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

15. Si $C > A$, $C - D < 0$, $B - A > 0$, $A - E > 0$
¿Cuál de estas cantidades es la menor?
A) E
B) D
C) B
D) C
E) A

16. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |2x - 7| < -2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - |x| - 42 = 0\}$
Hallar: $J = A^c \cap B$
A) $\mathbb{R}$
B) $\emptyset$
C) $\{7\}$
D) $\{-7\}$
E) $\{7, -7\}$

17. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{x-2} + 3 < 0\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{x-2} - 3 < 0\}$
Hallar: $J = A^c - B$
A) $< -\infty, 11 >$
B) $[2, 11 >$
C) $[11, \infty >$
D) $< -\infty, 2 > \cup [11, \infty >$
E) $\emptyset$

18. Resolver: $|3x + 2| \leq |2x - 3| + |x + 5|$
A) $\emptyset$
B) $\mathbb{R}$
C) [0,1]
D) $< -\infty, -5 > \cup < 5, \infty >$
E) $\left\{\frac{-2}{3}; \frac{3}{2}; -5\right\}$

19. Sabiendo que: $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{2-3x}{x+3} \geq 0\right\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x-4)^2 > 9\}$
Calcular: $J = A \cap B$
A) $< 1,7 >$
B) $< -3, 2/3]$
C) $< 7, \infty >$
D) $[-3, 2/3]$
E) $[-3, 1 >$

20. El conjunto solución de:
$\frac{x^2+x+4}{x^2-x-2} + \frac{x^2-x-2}{x^2+x+4} < 0$
A) $< -2, -1 >$
B) $< 2, 3 >$
C) $< -4, -2 >$
D) $< -1, 2 >$
E) $< 4, \infty >$

21. Hallar el número de enteros que posee la solución del sistema:
$\begin{cases} (x+4)(3-x) \geq 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

22. Resolver: $\sqrt[x+1]{8^{x+3}} < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$
A) $< -\infty, 0]$
B) $[0, \infty >$
C) $\emptyset$
D) $\mathbb{R}$
E) $< -\infty, -1 > \cup < 1, \infty >$

23. Resolver: $3|x-4| - |3-x| = 1$
A) Solo 5
B) $\{1\}$
C) Solo 7/2
D) $\{5, 7/2\}$
E) $\emptyset$

24. Resolver :
$\frac{(x-1)^{30}(x+2)^3}{(x^2+x+2)(x-5)} > 0$
Si la solución es $S = (\mathbb{R} - < a; b]) \cup \{1\}$; dar el valor de $J = b - a$
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

25. Cuantos enteros positivos no verifican la inecuación:
$\frac{2x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2} \geq \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 3}$
A) Ninguno
B) 1
C) 2
D) 3
E) más de 3

SEMANA Nº 11: FUNCIONES

PAR ORDENADO:
Son entes matemáticos compuestos de dos elementos x e y denotado por **(x, y)** donde:
x: primera componente;
y: segunda componente

Ejemplo:
Son pares ordenados: (2, 3); (3, 5); (–2, –4)
Nota: el par (3, 4) es diferente del par (4, 3)

PRODUCTO CARTESIANO:
Dados dos conjuntos, el producto cartesiano de A y B se denota y define:

$A \times B = \{(x, y) \ / \ x \in A \wedge x \in B\}$

RELACIÓN:
Sean los conjuntos: A y B entonces se define:
R es una relación de A en B si y solo si $R \subseteq A \times B$

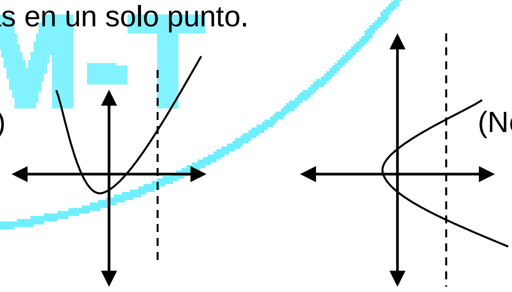
FUNCIÓN:

DEFINICIÓN: A la relación f de A en B le llamaremos función de A en B si y solo si se verifica:
1. $f \subseteq A \times B$
2. $(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \ \rightarrow \ b = c$

OBSERVACIONES:
1. Una función f de A en B denotada por f: $A \rightarrow B$; $A \xrightarrow{f} B$, y se lee "f es una función de A en B", donde A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada.
2. Si el par $(a, b) \in f$, se escribe: $b = f(a)$ y se dice que b es la imagen de "a" por f ó también, que $b = f(a)$ es el valor de f en el punto a.
3. Si A = B = IR, a la función f: IR $\rightarrow$ IR, se denomina función real de variable real.
4. $y = f(x) \leftrightarrow (x, y) \in f$
5. $f = \{(x, y) \in IR \times IR \ / \ y = f(x)\}$

TEOREMA:
f es una función de IR en IR si y solo si toda recta paralela al eje **Y** corta la gráfica a lo más en un solo punto.

(Si) (No)

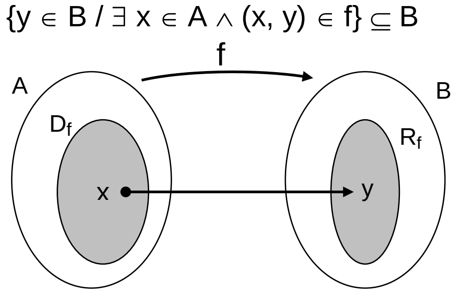


DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Sea f: A $\rightarrow$ B una función, se define al dominio y al rango como:

$D_f = \{x \in A \ / \exists! \ y \in B \wedge (x, y) \in f\} \subseteq A$

$R_f = \{y \in B \ / \ \exists \ x \in A \wedge (x, y) \in f\} \subseteq B$



CÁLCULO DE DOMINIOS DE ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

1) Si f(x) = $\sqrt{g(x)}$ entonces
   Dom (f) = g(x) ≥ 0
2) Si f(x) = $\sqrt[3]{g(x)}$ entonces
   Dom (f) = Dom (g(x))
3) Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ entonces
   Dom (f) = IR – {Q(x) = 0}
4) Si f(x) = $\log_b U(x)$; b > 0, $\wedge$ b $\neq$ 1, entonces el Dom(f) = {x $\in$ IR / U(x) > 0}
5) Si $f(x)=a^{u(x)}$; $a>0; a\neq 1$ entonces el Dom (f) = Dom (U(x))

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Es la representación geométrica de los pares ordenados que pertenecen a la función

Graf (f) = {(x, y)$\in$ IR ^{2}/ y = f(x); x $\in$Dom (f)}

Las funciones se pueden representar mediante:

PLANO CARTESIANO:

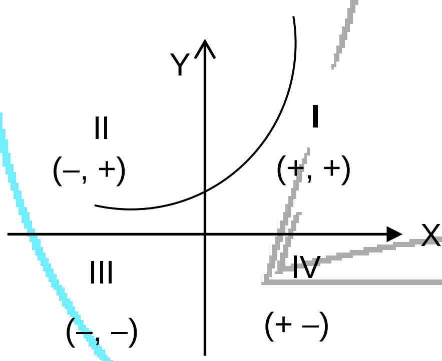
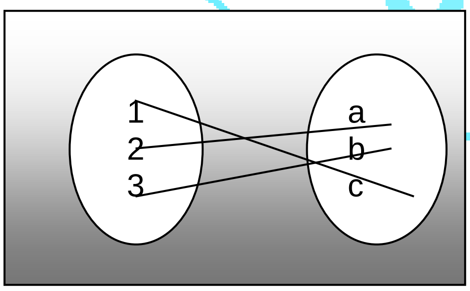


DIAGRAMA SAGITAL:



ALGEBRA DE FUNCIONES:

OPERAC IONES CON FUNCIONES:

Dada las funciones $f(x)$ y $g(x)$;

$\forall x\in\{Dom(f(x))\cap Dom(g(x))\}$ Se define:

ADICIÓN:

$$(f+g)(x)=\ \{(x, f(x)+g(x))\}$$

SUSTRACCIÓN:

$$(f-g)(x)=\ \{(x, f(x)-g(x))\}$$

MULTIPLICACIÓN:

$$(f.g)(x)=\ \{(x, f(x).g(x))\}$$

DIVISIÓN:

$$(f/g)(x)=\ \{(x, f(x)/g(x)), g(x)\neq 0\}$$

COMPOSICIÓN:

$$(fog)(x)=\ \{(x,y)/y=f(g(x))\}$$

$$Dom(fog)(x)=\ \{x\in D_g / x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$$

Ejemplo:

1. Sean las funciones: $f=\{(1,4);(4,5);(2,3);(3,2)\}$ y $g=\{(0,2);(1,2);(2,-1);(3,0)\}$

   Hallar:
   A) $f+g$,
   B) $f-g$
   C) $f.g$
   D) $\frac{f}{g}$
   E) fog

   Solución:

   Primero calculamos los dominios: $Dom(f)=\{1;2;3;4\}$ y $Dom(g)=\{0;1;2;3\}$

   Ahora calculamos el dominio de

   $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)=\{1;2;3\}$

   Calculamos los pares que pertenecen a "f + g"

$$\begin{cases}(f+g)(1)=f(1)+g(1)=4+2=6\\(f+g)(2)=f(2)+g(2)=3-1=2\\(f+g)(3)=f(3)+g(3)=2+0=2\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}(1,6)\in(f+g)\\(2,2)\in(f+g)\\(3,2)\in(f+g)\end{cases}$$

   Luego la suma $f+g=\{(1,6);(2,2);(3,2)\}$

   De manera similar para "f – g" y "f. g"

   $f-g=\{(1,2);(2,4);(3,2)\}$

   $f.g=\{(1,8);(2,-3);(3,0)\}$

   Para $\frac{f}{g}$ el $Dom(\frac{f}{g})=\{1;2\}$ se excluye 3 por que $g(3)=0$

   $\frac{f}{g}=\{(1,2);(2,-3)\}$

   Para "fog"

   $D_{(fog)}=\{x\in D_g / x\in D_g \wedge g(x)\in Dom(f)\}$

   $x=0\in Dom(g)\ \wedge\ g(0)=2\in Dom(f)$

$x = 1 \in Dom(g) \quad \wedge \; g(1) = 2 \in Dom(f)$

$x = 2 \in Dom(g) \quad \wedge \; g(2) = -1 \; \notin Dom(f)$

$x = 3 \in Dom(g) \quad \wedge \; g(3) = \; 0 \notin Dom(f)$

Entonces el $Dom(fog) = \{0; 1\}$

Su regla de correspondencia.

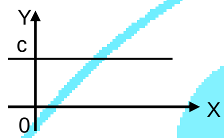
$fog(0) = f\big(g(0)\big) = f(2) = 3$

$fog(1) = f\big(g(1)\big) = f(2) = 3$

$\therefore fog = \{(0,3); (1,3)\}$

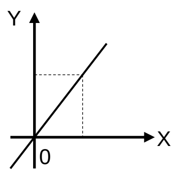
FUNCIONES REALES ESPECIALES

1. Función Constante: f(x) = c



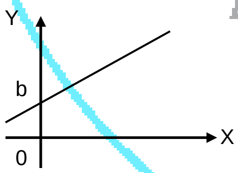
$Dom(f) = IR$
$Rang(f) = \{c\}$

2. Función Identidad: f(x) = x



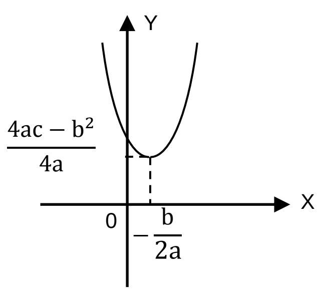
$Dom(f) = IR$
$Rang(f) = IR$

3. Función Lineal: f(x) = ax + b, a ≠ 0



$Dom(f) = IR$
$Rang(f) = IR$

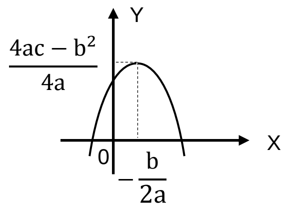
4. Función Cuadrática:
f (x) = ax^2 + bx + c, a ≠ 0
Para: a > 0



$Dom(f) = IR$

$Rang(f) = [\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\rangle$

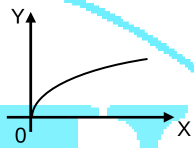
Para: a < 0



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Rang(f) = \langle -\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$

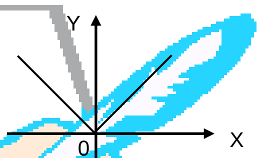
5. Función Raíz Cuadrada: f(x) = $\sqrt{x}$



$Dom(f) = IR_0^+ = [0, \infty\rangle$

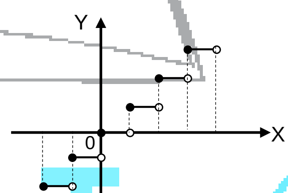
$Rang(f) = [0, \infty\rangle$

6. Función valor absoluto: f(x) = |x|



$Dom(f) = IR$
$Rang(f) = [0, \infty\rangle$

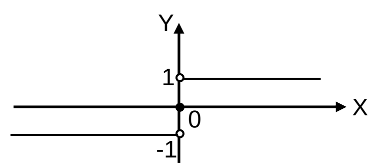
7. Función Máximo entero: f(x) = $[\![x]\!]$



$Dom(f) = IR$
$Rang(f) = \mathbb{Z}$

8. Función Signo:

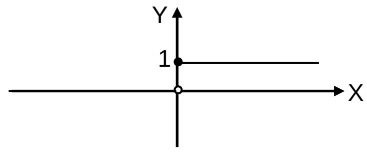
$$f(x) = Sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$Dom(f) = IR$
$Rang(f) = \{-1;\ 0;\ 1\}$

9. Función Escalón Unitario:

$f(x) = u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$



$\mathrm{Dom}(f) = IR$

$\mathrm{Rang}(f) = \{0; 1\}$

10. Función de Polinomios de Grado n:
$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n$
donde: a_1, a_2, …, a_n son constantes, además $a_0 \neq 0$, $n > 0$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

11. Función Racional:

$F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$,

$g(x) \neq 0$

$\mathrm{Dom}(f) = IR - \{x/\ g(x) = 0\}$

CLASES DE FUNCIONES

1. **FUNCIÓN INYECTIVA (UNIVALENTE Ó 1 *a* 1)**
$f: A \to B$, es inyectiva si $\forall\, x_1, x_2 \in D_f$; se verifica:
Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
2. **FUNCIÓN SURYECTIVA, O SOBREYECTIVA**
$f: A \to B$, es suryectiva si:
$\forall\, y \in B, x \in A/(x,\ y) \in f$ ó $\mathrm{Ran}(f) = B$
3. **FUNCIÓN BIYECTIVA:** $f: A \to B$ es biyectiva si f es inyectiva y suryectiva a la vez.

FUNCION PAR E IMPAR

FUNCIÓN PAR: Se caracteriza por ser simétrica respecto al eje Y, es decir se cumple:
Si $x \in D_f \to -x \in D_f$, $\wedge$ $f(x) = f(-x), \forall x \in D_f$

FUNCIÓN IMPAR: Se caracteriza por ser simétrica respecto al origen, esto es:

$x \in D_f \to -x \in D_f$, $\wedge$ $f(x) = -f(-x), \forall\, x \in D_f$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea "f" una función real de variable real talque $f(x+2) = x^2 + x$ .Calcular:
$J = \dfrac{f(a+3) - f(a-3)}{2a-3}$, $a \neq 3/2$

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

Solución:

Calculando $f(x)$

$f(x+2-2) = (x-2)^2 + (x-2)$

$f(x) = (x-2)^2 + (x-2)$

Entonces:

$f(a+3) = (a+3-2)^2 + (a+3-2)$

$f(a+3) = (a+1)^2 + (a+1)$

$f(a+3) = a^2 + 2a + 1 + a + 1$

$f(a+3) = a^2 + 3a + 2$

De manera análoga para $f(a-3)$

$f(a-3) = a^2 - 9a + 20$

Remplazamos en "J":

$J = \dfrac{a^2 + 3a + 2 - (a^2 - 9a + 20)}{2a-3} = \dfrac{12a - 18}{2a-3}$,

$a \neq 3/2$

$J = \dfrac{6(2a-3)}{2a-3} = 6$, $a \neq 3/2$

$J = 6$

2. Si f es una función definida por:
$f(x) = \sqrt{25 - x^2} - 2$
Entonces determine el: $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{rang}(f)$
A) $[2, 3]$
B) $[-5, 2]$
C) $[-2, 3]$
D) $[-5, 5]$
E) $[-3, 3]$

Solución:

De la raíz cuadrada se tiene que:

$25 - x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 25$

Por propiedad de inecuaciones:

$-5 \leq x \leq 5$ …$(*)$

Por lo tanto el dominio será:

$\mathrm{Dom}(f) = [-5, 5]$

Elevando al cuadrado $(*)$:

$0 \leq x^2 \leq 25$

Multiplicamos por (– 1):

$-25 \leq -x^2 \leq 0$

Sumamos 25:

$0 \leq 25 - x^2 \leq 25$

Sacamos raíz cuadrada:

$0 \leq \sqrt{25 - x^2} \leq 5$

Restamos 2

$-2 \leq \underbrace{\sqrt{25 - x^2} - 2} \leq 3$

De donde:

$-2 \leq f(x) \leq 3$

$\mathrm{Rang}(f) = [-2, 3]$

$\therefore \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Rang}(f) = [-2, 3]$

3. Dadas las funciones :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \geq 1 \\ -x, & \text{si } x < -1 \end{cases} \quad y$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x-1, & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

Hallar: $J = (f-g)(12) + (f-g)(-5)$

A) -11
B) $-\frac{12}{13}$
C) $-\frac{11}{12}$
D) $-\frac{11}{13}$
E) $\frac{11}{12}$

Solución:

$J = f(12) - g(12) + f(-5) - g(-5)$

$J = \frac{1}{12} - (12-1) - (-5) - (-5)$

$J = \frac{1}{12} - 11 + 5 + 5J = \frac{-11}{12}$

$J = \frac{-11}{12}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si la relación:
$R = \{(1,2a),(2,7),(5,1),(1,3a-5),(7,9)\}$
Es una función, la suma de los elementos del rango de dicha función es:
A) 22
B) 15
C) 27
D) 16
E) 10

2. Sea f una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x$,encontrar el valor de $f(-1)$
A) 2
B) 5
C) 7
D) 4
E) 11

3. Encontrar el dominio de la siguiente función:$f(x) = \sqrt{1-3x}$
A) $< -\infty \frac{1}{3}, >$
B) $< \frac{1}{3}, \infty^+ >$
C) $[\frac{1}{3}, \infty^+ >$
D) $< -\infty, \frac{1}{3}]$
E) $< -\frac{1}{3}, \infty^+ >$

4. Encontrar el dominio de la siguiente función:$g(x) = \frac{4x+x^2}{x^2-1}$
A) $\mathbb{R} - \{-1,1\}$
B) $\mathbb{R}$
C) $\mathbb{R} - \{-1\}$
D) $\mathbb{R} - \{-2,2\}$
E) $\mathbb{R} - \{2\}$

5. Dados el conjunto de pares ordenados:
$F = \{(3,2a+3b);(-1,5);(a+b,3);(6,7);(3,4);(2,2a-b);(2,-4)\}$
Evaluar "a" y "b" para que F sea una función, indicar como respuesta:
$Df \cap Rf$
A) $\{1\}$
B) $\{6\}$
C) $\{3\}$
D) $\{4\}$
E) $\{2\}$

6. Hallar el dominio de:
$f(x) = \sqrt{4-x^2}$
A) [1,2]
B) $< \infty, -2]$
C) [-2,2]
D) $< \infty^-, \infty^+ >$
E) $\emptyset$

7. Sean f y g funciones definidas por las ecuaciones:
$f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$
Hallar: $\frac{f(a^2+h)-g(a)}{h+3}, h \neq 0$
A) 1
B) 0
C) 3
D) 7
E) 5

8. Dados los conjuntos A y B definidos de la siguiente forma :
$A = \left\{\frac{x\epsilon Z}{-4} < x+2 < 12\right\};$
$B = \{x\epsilon N \;/15 < x^2 \leq 100\}$
¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A \times B$?
A) 101
B) 112
C) 103
D) 124
E) 105

9. Sean$A = \{2,4,6,8\}\; y\; B = \{1,3,5\}$, definimos una relación $R\; de\; A\; en\; B\; asi$:
$R = \{(x;y)\epsilon AxB \;/x < y \wedge x \geq 2\}$
Determinar $D_R \cup R_R$
A) $\{1,2,3,4\}$
B) $\{2,4,6,8\}$
C) $\{2,3,4,5\}$
D) $\{5,6,7,8\}$
E) $\{1,3,5,7\}$

10. Dados los conjuntos :
$A = \{-1,2\}; B = \{0,3\}; C = \{4,1,2\}$
¿Cuántos elementos tiene el conjunto $B \times (C - A)$?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

11. Sea el conjunto $A = \{1,2,3\}$;indicar una relación que no corresponde al producto cartesiano $A \times A$
A) $\{(1,1);(1,2);(1,3)\}$
B) $\{(2,1);(2,2),(3,2)\}$
C) $\{(2,2);(3,1);(1,2)\}$
D) $\{(1,2).(2,1)\}$
E) $\{(1,2);(2,3);(3,0)\}$

12. Si $f(x) = x - 1$
Donde $x = -1,0,1,2,3$
Determinar: el conjunto de f.
A) $\{(-1,-2);(0,-1);(1,0);(2,1);(3,2)\}$
B) $\{(-1,-1);(-1,0);(-1,2);(-1,3);(-1,1)\}$
C) $\{(0,1);(0,0);(0,-1);(0,2);(0,3)\}$
D) $\{(1,2);(2,3);(2,0);(2,2);(2,-1)\}$
E) $\{(-1,-2);(0,1);(1,0);(-2,-1);(3,2)\}$

13. Si el $D_f \epsilon [-3,2]$
Determinar el rango de la función:
$f(x) = 2 - 3x$
A) $[4,11]$
B) $[-4,-11]$
C) $[-4,11]$
D) $\langle -\infty, 4]$
E) $[11, +\infty\rangle$

14. Dados los conjuntos: $A = \{2,5,7\}$ y $B = \{3,4\}$ Calcular la suma de los elementos del rango de la siguiente relación R de A en B.
$R = \{(a,b) \,/\, a \,\epsilon A \;\wedge b \epsilon B \wedge a + b > 8\}$
A) 11
B) 7
C) 8
D) 14
E) 19

15. Calcular el número de elementos del conjunto:$(A - C) \cup B$;donde :
$A \times B =$
$\{(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,3);(2,4)\} \wedge$
$C = \{1,5,6\}$
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

16. Sean f y g funciones definidas por las ecuaciones :
$f(x) = x + 3 \;\; y \;\; g(x) = x^2$
Hallar: $\frac{f(-1)-g(-1)}{g(5)}$
A) 1
B) 25
C) 5
D) $\frac{1}{5}$
E) $\frac{1}{25}$

17. Hallar la suma de coeficientes de la función cuadrática que cumple:
f (2) = 6; f(0) = 4 y f(– 1) = 7
A) 1
B) $\frac{5}{3}$
C $\frac{11}{3}$
D) $\frac{13}{3}$
E) $\frac{7}{3}$

18. Dada la $f(x) = \begin{cases} 3x - 1; & x > 3 \\ x^2 - 2; & -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3; & x < -2 \end{cases}$, calcule el valor de
E = f (2) + f (–1) + f (– 3) + f (4)
A) 3
B) 5
C) 7
D) 9
E) 11

19. Dada la función: f(x) = mx + b, $\forall$ x $\in$ IR, si se sabe que f (3) = 11; f (– 3) = 6. Hallar m +b.
A) $\frac{28}{3}$
B) $\frac{28}{5}$
C) $\frac{8}{3}$
D) $\frac{5}{3}$
E) $\frac{11}{3}$

20. Si f(x + 4) = x^2 + 3x, hallar f(a + 1)
A) $a^2 - a$
B) $a^2 - 3a$
C) $a^2 - 2a$
D) $a^2 - 5a$
E) $a^2 - 4a$

21. Determine el rango de la función f(x) = $x^2 - 169$
A) [– 18; +∞)
B) [0; +∞)
C) [– 169; +∞)
D) (– 169; + ∞)
E) [– 13; 16)

22. Sean las funciones f(x) = x + 5 y
h(x) = $\frac{x^2 + 2x}{2}$.
Calcular: h (f (h (f (2)))).
A) 4250/7
B) 425/8
C) 5621/8
D) 2200/2
E) 4221/8

23. Si f es una función real de variable real tal que:
f (2x – 5) = $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}$. Hallar f (3)
A) 4
B) 6
C) 1
D) 2
E) 8

24. Si f(x) = 2x – 3; g(x) = $\frac{1}{2}$(x + 3).
Entonces evaluar (f o g)$^{-1}$(1).
A) 4
B) 3
C) – 1
D) 2
E) 1

25. Hallar el dominio de:
f(x) = $\frac{x^5-5x^4+6x^3}{x(x-2)(x-3)}$
A) $IR\ -[0;2;3]$
B) [1, 2,3]
C) IR
D) IR ,2
E) 3

SEMANA Nº 12
LOGARÍTMO, COLOGARÍTMO Y ANTILOGARÍTMO

DEFINICIÓN: El logaritmo del número N (N > 0) en una base b (b > 0 ∧ b ≠ 1) se define Así.

$$log_b N = x \quad \leftrightarrow \quad b^x = N$$

Ejemplo:

$\log_2 128 = x \quad \leftrightarrow \quad 2^x = 128$
$2^x = 2^7$
$x = 7$

SISTEMAS DE LOGARÍTMOS: Existen infinitos sistemas, los de mayor aplicación matemática son los logaritmos decimales y los logaritmos naturales:

1. **SISTEMA LOGARITMOS DECIMALES:**
Notación: Log $_{10}$ N = Log N = x, se lee el logaritmo decimal del número N. (N > 0)

2. **SISTEMA DE LOGARITMOS NATURALES:**
Notación: Log$_e$N = Ln = x, se lee logaritmo natural del número N. Donde: e = 2, 71828…

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS: Las propiedades generales de los logaritmos son las siguientes:

1. El logaritmo de la unidad es cero:
Log $_b$ 1 = 0, ∀ b > 0 ∧ b ≠ 1
2. El logaritmo de la base es uno:
Log $_b$ b = 1, ∀ b > 0 ∧ b ≠ 1
3. El logaritmo de un producto:
Log $_b$ (A.B) = Log $_b$ A + Log $_b$ B
4. El logaritmo de un cociente:
Log $_b$ $\left(\frac{A}{B}\right)$ = Log $_b$ A – Log$_b$ B
5. El logaritmo de una potencia: Log$_b$ A ^{n} = n Log$_b$ A
6. El logaritmo de una raíz:
Log $_b$ $\sqrt[n]{A}$ = $\frac{1}{n}$ Log $_b$ A
7. Si N y b se elevan a un mismo exponente (no nulo) o si se extraen de ambos radicales del mismo índice (no nulo) el logaritmo no se altera:
$\log_b N = \log_{b^p} N^p = \log_{\sqrt[p]{b}} \sqrt[p]{N}$, $p \neq 0$
8. Cambio de base, sea:
a = la base desconocida, y
b = la base conocida, entonces:
Log $_a$ N = $\frac{\log_b N}{\log_b a}$
9. Regla de la cadena:
Log $_b$ a. Log $_a$ b = 1 → Log $_b$ a = $\frac{1}{\log_a b}$
10. $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$
11. $b^{\log_b N} = N$
12. Si se invierte la base de un logaritmo, este cambia de signo:
$\log_{\frac{1}{b}} N = -\log_b N$

COLOGARITMO Y ANTILOGARITMO

1. **COLOGARITMO:** El cologaritmo de un número N (N > 0) en base b (b > 0 ∧ b ≠ 1), se denota por: Colog$_b$N y se define como: Colog$_b$ N = Log $_b$ ($\frac{1}{N}$) = – Log $_b$ N

2. **ANTILOGARITMO:** Esta es otra forma de denotar a la función exponencial, se denota y define por:
Antilog$_b$x = exp. $_b$ (x) = b ^{x}

EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Si $\log_3\left(\frac{5x-1}{3x-5}\right)=2$, Calcular: $J=\frac{x^{x+\log_7 5}}{5^{\log_7 2}}$

A) 0
B)1
C)2
D)3
E)4

Solución:

$\log_3\left(\frac{5x-1}{3x-5}\right)=2$

$\frac{5x-1}{3x-5}=3^2$

$5x-1=27x-45$

$-22x=-44$

$x=2$

Remplazando en "J" se tiene:

$J=\frac{2^{2+\log_7 5}}{5^{\log_7 2}}=\frac{2^2.2^{\log_7 5}}{5^{\log_7 2}}$

$J=\frac{4.5^{\log_7 2}}{5^{\log_7 2}}$

$J=4$

2. Calcular:

$J=\frac{1}{\log_a bc+1}+\frac{1}{\log_b ac+1}+\frac{1}{\log_c ab+1}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Solución:

$J=\frac{1}{\log_a bc+\log_a a}+\frac{1}{\log_b ac+\log_b b}+\frac{1}{\log_c ab+\log_c c}$

$J=\frac{1}{\log_a abc}+\frac{1}{\log_b abc}+\frac{1}{\log_c abc}$

$J=\log_{abc} a+\log_{abc} b+\log_{abc} c$

$J=\log_{abc} abc \ \rightarrow \ J=1$

3. Si $\log_2 5=a$, $\log_5 75=b$, Calcular :

$J=\log_2 3$

A) $a-b-2$
B) $a(b+2)$
C) $a(ab-2)$
D) $ab-2$
E) $a(b-2)$

Solución:

Sabemos que:

$\log_5 75=\log_5 5^2.3=\log_5 5^2+\log_5 3$

$\log_5 75=2+\log_5 3$

$b=2+\log_5 3$

$\log_5 3=b-2$

En "J" se tiene:

$J=\log_2 3=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=\frac{b-2}{\frac{1}{\log_2 5}}$

$J=\frac{b-2}{\frac{1}{a}}=a(b-2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el producto de raíces de la siguiente ecuación: $x^{\log_3 x^3}=3^{12}$

A) 1
B) 12
C) 11
D) 5
E) 3

2. Mostar el equivalente de:

$\text{Colog}_6\, Anti \log_8(\log_2 3+1)$

A) 2
B) 5
C) – 3
D) 1
E) 0

3. Evaluar "x" en

$(\log_x 9)^2-4\log_x 9+4=0$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

4. Calcular: $\log_5 9.\log_2 7.\log_9 16.\log_7 5$

A) 1
B) 0
C) 2
D) – 1
E) 4

5. Calcular: $25^{\log_{16} 12^{\log_5 4}}$

A) 11
B) 12
C) 13
D) 22
E) 31

6. Resolver:

$\log x-2=\frac{1}{2}[\log 18-2\log 25+\log 8]$

A) 25
B) 38
C) 45
D) 46
E) 48

7. Resolver: $x^{\frac{\log 5 \log_5 x}{\log_5 x}}=5$

A) 251
B) 425
C) 3125
D) 547
E) 456

8. Resolver: $(e^x - 3)(e^x - 5) = 35)$
A) $\ln 10$
B) $\ln 11$
C) $\ln 5$
D) $\ln 8$
E) $\ln 12$

9. Resolver: $\log {}^{\log x}\sqrt{z} = x$
A) x
B) $-x$
C) x^x
D) $2x$
E) x^{-x}

10. Hallar el logaritmo de: $\sqrt[7]{\sqrt{256}}$ En base $\sqrt{8}$
A) $\frac{8}{21}$
B) $\frac{5}{21}$
C) $\frac{4}{21}$
D) $\frac{2}{21}$
E) $\frac{1}{21}$

11. Calcular "x" en:

$\log_{15\sqrt{27}} 3\sqrt[5]{9} = \sqrt{47 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[5]{29 + \sqrt[3]{x}}}}$
A) $\frac{7}{3}$
B) 32
C) 7
D) $\frac{7}{5}$
E) 27

12. Resolver: $\log x^{\log x} - \log x - 6 = 0$
A) 10^3
B) $\{10^{-2}; 10^3\}$
C) 10^{-2}
D) $\{10^2; 10^3\}$
E) $\{10; 10^3\}$

13. Resolver: $\sqrt[12]{10}^{\,\frac{1}{x} - \log \sqrt[x]{x}} = \sqrt[5]{2}$
A) $\frac{4}{5}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{5}{4}$
E) $\frac{3}{5}$

14. Si $x = 2^{\log_3 a}$, al calcular el valor de $K = \left(3^{\log_a x} + 7x^{\log a^3}\right)^{1/2}$

resulta:
A) -2
B) 2
C) -4 ó 4
D) 4
E) -4

15. Hallar el valor de "x" en: $\log_x(1/81) = \log_8(1/16)$

A) 8
B) 16
C) 27
D) $\frac{3}{4}$
E) $-\frac{4}{3}$

16. $35 \log_b \sqrt[7]{25} = 2$, el valor de la base:

A) 3 125
B) 512
C) 125
D) 21
E) 225

17. El resultado de simplificar $A = (co\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{1/3})(\log_9 4^{32}) + (anti\log_5(\log 9))(4^{\log 3})$

es:
A) 32
B) 24
C) 20
D) 36
E) 25

18. Si $\log 3 = a$ y $\log 2 = b$, el valor de $\log(5!)$ es:
A) 3a + b +1
B) a – b + 2
C) 3a – 2b + 1
D) a + 2b + 1
E) 2b – a + 1

19. En la expresión: $\log_{\sqrt{2}} 10.\log_{100} \sqrt{2} = \sqrt{x}$, el valor de x:
A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{8}$
D) $-\frac{1}{2}$
E) $-\frac{1}{4}$

20. Si $m = \log_{16} 4$ y $n = \log_{3\sqrt{5}} \sqrt{5}$, calcular el valor de: $J = m + n$
A) 1
B) 5
C) 2
D) 4
E) 3

21. Calcular el valor de: $J = \log_5 \sqrt{300}$, si $\log_5 2 = a$ y $\log_5 3 = 2b$
A) $a + b + 1$
B) $a + b$
C) $a - b + 1$
D) $a + b - 1$
E) $2a + b - 2$

22. Hallar el valor de "x" sabiendo que se cumple la siguiente igualdad:
    $\log_b 32 . \log_x b = 5$
    A) 1
    B) 4
    C) 3
    D) 5
    E) 2

23. Calcular "x" en: $(\log_b x)^{(\log_b x)^{(\log_b x)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = b$
    A) b^b
    B) $b^{b^{-1}}$
    C) b^{b^b}
    D) b
    E) $b^{b^{b^b}}$

24. Calcular n:
    $\log_3 x . \log_x 2x . \log_{2x} n = \log_x x^2$
    A) 1
    B) 3
    C) 6
    D) 9
    E) 12

25. Calcular: $x = \log_2 \log_3 3^{\log_{1.5} 2.25}$
    A) 0
    B) 1
    C) – 1
    D) 2
    E) – 2

SEMANA Nº 13
ECUACIONES E INECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

ECUACIÓN EXPONENCIAL:

DEFINICIÓN: La ecuación exponencial es aquella que contiene una incógnita o incógnitas como exponente.

Ejemplos:
1) $5^x = 125$
2) $6^{x+y} = 216$
3) $2^{4^{x^2+y^2}} = 256$

Para resolver una ecuación exponencial se hace uso de las siguientes propiedades:

1. $a^x = a^y \leftrightarrow x = y$; a > 0 ∧ a ≠ 1
2. Se hace un cambio de variable: $k^x = y$, se tendrá una ecuación algebraica respecto a y.
3. $a^x = b^x \rightarrow a = b$, a> 0 ∧ b> 0
4. $(x^{x^n})^n = (x^n)^{x^n}$
5. Si, $x^{x^{x^{x^x}}} = a^{a^{a^{a^a}}}$ entonces x = a, ∀ x ≠ 0. Por analogía matemática.

ECUACIÓN LOGARÍTMICA:

DEFINICIÓN: Estas ecuaciones presentan por lo menos, una incógnita bajo el operador logarítmico.

Ejemplos:

1. Log $_2$ $(x^2 + 7x + 12) = x + 2$
2. 2x + $\log_3 8$ = 9 (no es ecuación logarítmica)

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LOGARÍTMICA:

Para obtener la solución de la ecuación: $\log_b P(x) = \log_b Q(x)$. Se hace uso de los siguientes criterios:

1. Se debe analizar la base y las expresiones P(x) y Q(x) que dependen de la incógnita, que garanticen la existencia del logaritmo. Se debe hallar los valores de la incógnita que satisface la relación:
   P(x)> 0 ∧ Q(x)>0 ∧ b>0∧ b≠ 1
2. Los posibles valores de la incógnita se halla resolviendo la ecuación: P(x) = Q(x).
3. Las soluciones de la ecuación logarítmica se determinan interceptando los valores obtenidos en el paso (1) y (2)

INECUACIONES EXPONENCIALES:
Sean las inecuaciones exponenciales: $b^{P(x)} > b^{Q(x)}$ ∨ $b^{P(x)} < b^{Q(x)}$

Donde P(x) y Q(x) son funciones en términos de x. Entonces:

1. Si b > 1 se tiene:
   $b^{P(x)} > b^{Q(x)} \leftrightarrow$ P(x) > Q(x)
   $b^{P(x)} < b^{Q(x)} \leftrightarrow$ P(x) < Q(x)

2. Si 0 < b < 1 se tiene:
   $b^{P(x)} > b^{Q(x)} \leftrightarrow$ P(x) < Q(x)
   $b^{P(x)} < b^{Q(x)} \leftrightarrow$ P(x) > Q(x)

INECUACIONES LOGARÍTMICAS:

Se presentan dos casos:

1. Si x > 0, b > 1; m ∈ IR, entonces:
   a) $\log_b x > m \leftrightarrow x > b^m$
   b) $\log_b x < m \leftrightarrow x < b^m$

2. Si x > 0; 0 < b < 1, m ∈ IR, entonces:

a) $\log_b x > m \leftrightarrow 0 < x < b^m$

b) $\log_b x < m \leftrightarrow x > b^m$

EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Si :$4^x - 4^{x-1} = 24$ Hallar el valor de $J = (2x)^x$
   A) $\sqrt{5}$
   B) $5\sqrt{5}$
   C) 5
   D) 25
   E) $25\sqrt{5}$
   Solución:
   Del dato: $4^x - 4^x 4^{-1} = 24$
   Factorizando 4^x en el primer miembro:
   $4^x\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 24 \to 4^x\left(\frac{3}{4}\right) = 24 \to 4^x = 32$
   $\to \ 2^{2x} = 2^5 \to 2x = 5 \quad \to x = \frac{5}{2}$
   Remplazando en "J" se tiene:
   $J = (2.\frac{5}{2})^{\frac{5}{2}} = \sqrt{5^5} \to J = 25\sqrt{5}$
   Rpta: E

2. Si "x" es un entero positivo que verifica la relación: $\sqrt[4]{(0,8)^{(x-3)/4}} > \sqrt[8]{(0,64)^{(x-2)/5}}$
   Podemos afirmar que:
   A) Hay infinitas soluciones
   B) El mayor valor de x es 11
   C) el menor valor es 15
   D)7 es una solución
   E) La suma de todas las soluciones es 21
   Solución:
   Expresando la inecuación con exponente fraccionario: $(0,8)^{\frac{x-3}{16}} > (0,8)^{\frac{2(x-2)}{40}}$
   Como la base es menor que: 1 se cumple que:
   $\frac{x-3}{16} < \frac{2(x-2)}{40} \to \frac{x-3}{4} < \frac{x-2}{5}$
   $\to 5x - 15 - (4x - 8) < 0 \to x < 7$
   Como $x \in \mathbb{Z}^+$, entonces: $x = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ Luego la suma de todas las soluciones es: 21.
   Rpta: E

3. Sea la inecuación: $2^{\log x} < x^3$
   Determine el conjunto solución.
   A) $\langle 2, \infty\rangle$
   B) $\langle 3, \infty\rangle$
   C) $\langle 0, \infty\rangle$
   D) $\langle 1, \infty\rangle$
   E) $\langle 8, \infty\rangle$
   Solución:
   De: $\log x$ se tiene: $x > 0$
   Tomando logaritmo en ambos lados de la inecuación: $\log 2^{\log x} < \log x^3$
   $\log x \log 2 < 3\log x \to x\log 2 - 3\log x < 0$
   Factorizando $\log x\,(\log 2 - 3) < 0$
   Como:$(\log 2 \ - 3) < 0$
   $\to \ \log x \underbrace{(3 - \log 2)}_{+} > 0$
   $\to \ \log x > 0 \ \to \quad x > 1$
   $C.S: \langle 1, \infty\rangle$
   Rpta: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve la siguiente ecuación:
   $4^{x-1} - 3.2^{x+1} + 32 = 0$
   A) 1
   B) 4
   C) 7
   D) 2
   E) 0

2. Evaluar x: $\left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{9^x}} = \frac{1}{\sqrt[9]{3}}$
   A) 0.5
   B) 0.2
   C) 3
   D) 4
   E) 7

3. Evaluar:
   $3^{2x+1} - 5^{x+0.5} = 9^x + 5^{x-0.5}$
   A) 0
   B) 2
   C) 3
   D) 9
   E) 0,5

4. Resolver la ecuación:
   $(a^{x-1})^{x+2} = (a^{x+5})^{x-2}$ El valor de "x" es:
   A) 1
   B) 4
   C) 3
   D) 7
   E) 5

5. Si:$8^x - 8^{x-1} = 14$ hallar el valor de :
   $P = (3x)^x$
   A) $\frac{3}{4}$
   B) $\frac{4}{3}$
   C) $\frac{2}{3}$
   D) $\frac{3}{2}$
   E) $\frac{7}{3}$

6. Hallar el valor de $J = \sqrt[6]{x+1}^{\sqrt[6]{x+1}^{\sqrt[6]{x+1}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ si : $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$
A) 6
B) 5
C) 4
D) 3
E) 2

7. Hallar conjunto solución de:
$\sqrt[x+1]{8^{x+3}} < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$
A) $< -\infty; -1 > \cup < 1; \infty >$
B) $< -1; 1 >$
C) $[-1; 1]$
D) $< -1; 1 > \cup < 3; \infty >$
E) $< -\infty; 1 > \cup < 5; \infty >$

8. Si $\sqrt[(x+1)^2]{16} - x = 1$, $x > 0$, el valor de "x" es
A) $\frac{1}{2}$
B) 1
C) 2
D) $\frac{1}{3}$
E) 3

9. En la siguiente ecuación:
$16^{\sqrt{x}} - 256 = (60)4^{\sqrt{x}}$, el valor de x:
A) 3
B) 4
C) – 4
D) 9
E) 1

10. La solución de la ecuación:
$\log_x(x-5) = \log_x(7-x)$ Es:
A) 2
B) 4
C) 6
D) 7
E) 8

11. Resolver la siguiente inecuación: $\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3)$
A) $\langle -\frac{3}{5}, \frac{1}{2} \rangle$
B) $[-\frac{3}{5}, \frac{1}{3}]$
C) $\langle -\frac{3}{2}, \frac{1}{3} \rangle$
D) $\langle -\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \rangle$
E) $\langle -\frac{3}{5}, \frac{1}{3} \rangle$

12. En la siguiente ecuación: $y^{\log y} = \left(\frac{1000}{y}\right)^4$, el valor de $y^{1/2}$ es: variable y es:
A) 16
B) 25
C) 9
D) 10
E) 100

13. En la siguiente ecuación:
$y^{\log_y(y^2-5y)} = 36$ El valor de "y" es.
A) – 4
B) 2
C) 9 ó – 4
D) 3
E) E) 9

14. En la siguiente inecuación:
$$\log_{1/2}(x^2-8x+15) \le \log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{x^2-3x+2}$$
indicar cuántas soluciones enteras positivas existe.
A) 0
B) 3
C) 6
D) 2
E) 4

15. El conjunto de solución de la siguiente inecuación $\sqrt{\log_x\left(\frac{3-2x}{1-x}\right)} < 1$ es:
A) $\langle 2, +\infty \rangle$
B) $\left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$
C) IR
D) $[1, +\infty\rangle$
E) $[0, +\infty\rangle$

16. Hallar "x" en:
$2x^{x+1} - 2x^{x-1} + 2x^{x+2} - 2x^{x-2} = 336$
A) 2
B) 4
C) 5
D) 8
E) 6

17. La solución de la ecuación:
$\left(x^{3^{3^x}}\right)^{3^{3^2}} = x^{9^9}$ Es:
A) 8
B) 6
C) 5
D) 2
E) 3

18. Hallar el valor de: $J = x^4 + x^2 + 3$ para el valor de "x" que verifica la ecuación: $x^x = 8^{\sqrt{2}}$
A) 45
B) 55
C) 85
D) 75
E) 65

19. Si $6^{\log_2 3} + 10^{\log x} = 3^{\log_2 6} + \log_{\sqrt{x}} x$, el valor de x es:
A) 5
B) 1
C) 4
D) 2
E) 0

20. Resolver: $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -5$
$A)$ $x < 119$
B) $x \leq 119$
C) $x \geq 119$
D) $x > 119$
E) $x = 119$

21. Calcular:
$P = (\log_5 50 - \log_5 2)(\log_{12} 36 + \log_{12} 4)$
A) 1
B) 2
C) 7
D) 4
E) 0

22. Evaluar x: $8^{\log_8(4x-1)} = 2x + 9$
A)1
B) 2
C) 5
D) 4
E) 8

23. Calcular "x" $\log\sqrt{x} - \log\sqrt{5} = \frac{1}{2}$
A) 10
B) 20
C) 7
D) 4
E) 50

24. Si $\log_a bc = x^n$, $\log_b ac = y^n$ n$\log_c ab = z^n$, para todo $n \in \mathbb{R}$.calcular el valor de:
$$E = \frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{x^n+1} + \frac{1}{y^n+1} + \frac{1}{z^n+1}}\right]$$
A) $\frac{1}{n}$
B) n
C) $2n$
D) $\frac{n}{2}$
E) n^2

25. Al calcular el logaritmo de: $a^m\sqrt[n]{a}$ En base $a^n\sqrt[m]{a}$; donde m, n> 0, a> 0 y a$\neq$ 1;obtenemos:
A) $\frac{a}{m}$
B) $\frac{m}{n}$
C) mn
D) m
E) n

SEMANA N º 14
NÚMEROS COMPLEJOS

UNIDAD IMAGINARIA: Se llama así al número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Ejemplo: $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\mathrm{i}$

NÚMERO IMAGINARIO: Un número imaginario lo denotaremos por: bi donde:
b: es un número real.
i: unidad imaginaria.

POTENCIA DE LA UNIDAD IMAGINARIA:
$\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$
$\mathrm{i}^2 = -1$
$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$
$\mathrm{i}^4 = 1$
$\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$
$\mathrm{i}^6 = -1$
$\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$
$\mathrm{i}^8 = 1$
$\mathrm{i}^9 = \mathrm{i}$
$\vdots$

NÚMERO COMPLEJO EN FORMA BINÓMICA:
Al número $\mathrm{a} + \mathrm{bi}$ le llamaremos complejo en forma binómica.
El número "a" se le llama parte real del número complejo.
El número "b" se le llama parte imaginaria del número complejo.

OBSERVACIÓN: Al conjunto de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C} = \{\mathrm{a} + \mathrm{bi} \,/\, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}\}$
Los números complejos de la forma: $\mathrm{a} + \mathrm{bi}$ y – a – bise llaman opuestos.
Los números complejos de la forma:$\mathrm{a} + \mathrm{bi}$ y$\mathrm{a} - \mathrm{bi}$ se llaman conjugados.

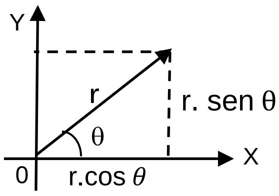
SUMA Y DIFERENCIA DE NÚMEROS COMPLEJOS:
$(\mathrm{a} + \mathrm{bi}) + (\mathrm{c} + \mathrm{di}) = (\mathrm{a} + \mathrm{c}) + (\mathrm{b} + \mathrm{d})\mathrm{i}$
$(\mathrm{a} + \mathrm{bi}) - (\mathrm{c} + \mathrm{di}) = (\mathrm{a} - \mathrm{c}) + (\mathrm{b} - \mathrm{d})\mathrm{i}$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS:
$$(\mathrm{a} + \mathrm{bi}).(\mathrm{c} + \mathrm{di}) = (\mathrm{ac} - \mathrm{bd}) + (\mathrm{ad} + \mathrm{bc})\mathrm{i}$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS:
$$\frac{\mathrm{a} + \mathrm{bi}}{\mathrm{c} + \mathrm{di}} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{bi}}{\mathrm{c} + \mathrm{di}} . \frac{\mathrm{c} - \mathrm{di}}{\mathrm{c} - \mathrm{di}} = \frac{\mathrm{ac} + \mathrm{bd}}{\mathrm{c}^2 + \mathrm{d}^2} + \frac{\mathrm{bc} - \mathrm{ad}}{\mathrm{c}^2 + \mathrm{d}^2}\mathrm{i}$$

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO:
El módulo o magnitud de un número complejo $z = a + bi$ viene dado por la siguiente expresión:
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO:



$z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

LA EXPONENCIAL COMPLEJA:
Cuando $z = a + bi$ la habíamos escrito $z = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$ también la podemos escribir $z = re^{i\theta}$ donde:

$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ Argumento de z

En particular, si se necesita multiplicar z consigo mismo n veces entonces:
$z^n = r^n.e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta))$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Siendo "i" la unidad imaginaria ,calcular el valor de la expresión:
$$J = \frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 \ldots + i^{1003}}{2 - i + i^2 - i^3}$$
A) – 1
B) 1
C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$
E) $\left(\frac{1}{2}\right)^i$

Solución:
$$J = \frac{\overbrace{i + i^2 + i^3 + i^4} + \ldots + \overbrace{i^{1000}} + i^{1001} + i^{1002} + i^{1003}}{2 - i + i^2 - i^3}$$
$$J = \frac{0 + \cdots + 0 + i^1 + i^2 + i^3}{2 - i - 1 + i}$$
$$J = \frac{i - 1 - i}{1}$$
$$J = -1$$

Rpta: (A)

2. La expresión $J = \frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3}$ es igual a:
A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

Solución:
Sabemos que: $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
Remplazando en "J"
$$J = \frac{2i(1+3i)}{-3+i} = \frac{2i(1+3i)(-3-i)}{(-3)^2 - i^2}$$
$$J = \frac{2i(-3-i-9i-3i^2)}{9-i^2} = \frac{2i(-3-10i+3)}{9+1}$$
$$J = \frac{-20i^2}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

Rpta: (D)

3. Efectuar:
$$J = \frac{12(\cos 15 + i\mathrm{sen}15)}{[3(\cos 41 + i\mathrm{sen}41)][2(\cos 64 + i\mathrm{sen}64)]}$$
A) 2
B) – 2
C) – 2i
D) i
E) 1

Solución:
$$J = \frac{12e^{15^0 i}}{\left(3e^{41^0 i}\right)\left(2e^{64^0 i}\right)}$$
$$J = 2e^{15^0 i - 41i - 64i}$$
$$J = 2e^{-90^0 i} = 2[\cos(-90) + i\mathrm{sen}(-90)]$$
$$J = 2[0 - i] = -2i$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular: $A = i^{123} + i^{432} + i^{678}$
A) 0
B) 1
C) – 1
D) i
E) $-i$

2. El valor de: $J = \left(-\sqrt{-1}\right)^{4n+3}$ donde "n" es un entero y positivo, es:
A) – 1
B) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$
C) i
D) $-i$
E) 1

3. Calcular: $M = \left(\frac{1+i^5}{1-i^5} + \frac{1-i^5}{1+i^5}\right)^2$
A) 0
B) 2
C) 4
D) $2i$
E) $5i$

4. Efectuar:
$A = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 \ldots\ldots + i^{1999}$
A) 0
B) 1
C) – 1
D) i
E) $-i$

5. Si: $\sqrt[3]{x+yi} = m + ni$
Calcular: $A = \left(1-\frac{x}{m^3}\right)\left(1+\frac{y}{n^3}\right)$
A) 1
B) 9
C) 2
D) 16
E) 3

6. Calcular "n", si:
$[(1+i)^9 + (1-i)^9]^n = 1024$
A) 5
B) 2
C) 1
D) 3
E) 4

7. Reducir: $R = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2\sqrt[9]{i}}}} - 1$
A) 0
B) 1
C) $2i$
D) i
E) – 1

8. Indicar el modulo: $Z = \frac{(1+i)^{22}}{(1-i)^{20}} + \frac{(1+i)^{20}}{(1-i)^{16}}$
A) 10
B) 20
C) 25
D) 12
E) 15

9. Indicar el módulo de: $z = \sqrt{\frac{(1+3i)(2+2i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{7}i)(1-i)}}$
A) 2
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{2}$
E) 3

10. Calcular "b" para que el complejo: $z = \frac{3+4i}{1+bi}$ Sea imaginario puro.
A) 0.5
B) 0.25
C) 0.6
D) 1.5
E) – 0.75

11. Dado los números complejos: $Z_1 = 2 - i$
$Z_2 = 4_\pi$ Calcular: $Z_1 Z_2$
A) – 8
B) $-8 + 4i$
C) i
D) $4i$
E) 4

12. Hallar el valor de "k" para que el cociente $\frac{2-ki}{k-i}$ sea un número real.
A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) 3
D) i
E) $\sqrt{2}i$

13. Determinar el valor de $a+b$ para que el cociente $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual a: $(\sqrt{2})_{135°}$
A) 11
B) 13
C) $4i$
D) i
E) 15

14. Dados: $Z_1 = -3 + 4i$; $Z_2 = 5 - 2i$ y $Z_3 = \frac{3}{2}$ $Z_4 = 7i$ Calcular: $Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$
A) $-28 - \frac{21}{2}i$
B) -28
C) $-\frac{21}{2}$
D) $-21 - \frac{28}{2}i$
E) $-28 + \frac{21}{2}i$

15. Del ejercicio anterior calcular: $(Z_1 - Z_2)\, Z_3$
A) $-12 + 9i$
B) $-2i$
C) $9i$
D) $-9 + 12i$
E) $9 + \frac{21}{2}i$

16. Si Z_1 y Z_2 son complejos conjugados tal que: $Z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
Calcular: $Z_1^{\,3} - 3Z_1.Z_2 + Z_2^{\,3}$
A) 1
B) $-i$
C) – 1
D) i
E) 0

17. Si $(a+bi)^2 = (a-bi)^3$ Calcular: $M = 2a(2a+1)$
A) 1
B) 0
C) 4
D) 7
E) 2

18. Sabiendo que: $\sqrt{A+Bi} = x + yi$
Hallar el valor de: $P = \frac{B^2}{y^2 A + y^4}$
A) 4
B) 5
C) 15
D) 2
E) $5i$

19. Para que valores reales de "a" el siguiente complejo: $\frac{(a-2)(a^2+a-8)i}{(a-2)+(a-1)}$ Es un número real.
A) 7
B) 4
C) 2
D) 8
E) 1

20. El valor simplificado de: $\left[i^{\frac{777!}{776!}}\right]^{i^{\binom{21}{15}}}$, es:

A) 0
B) – 1
C) 1
D) i
E) $-i$

21. Reducir:
$L = \sqrt[3]{2i-2} + \sqrt[3]{2i+2} + 1$
A) 2
B) 3
C) $3i$
D) i
E) 1

22. Simplificar: $N = \left[\dfrac{1-\frac{1-i}{1+i}}{1-\frac{1+i}{1-i}}\right]^{i^6+i^8+i^{10}}$
A) 1
B) i
C) $-i$
D) $2i$
E) – 1

23. Hallar un número complejo cuyo conjugado coincide con su cuadrado
A) $-\frac{1}{2} \pm 2\sqrt{2}$ i
B) $\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$ i
C) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$i
D) $-\frac{1}{2} + 3\sqrt{3}$ i
E) $-\frac{1}{4} \pm \sqrt{3}$ i

24. Hallar "n" en: $(1 + i)^n = 512\,i$
A) 2
B) 4
C) 9
D) 15
E) 18

25. Siendo z un número complejo, tal que:
z = $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^3}{(1-i)^2+(1+i)^3}$ Calcular el valor de: $\dfrac{\mathrm{Im}(z)-1}{\mathrm{Re}(z)+1}$
A) 2
B) – 1/2
C) 3
D) 1/2
E) 0

SEMANA Nº 15
MATRICES Y DETERMINANTES

MATRIZ: Una disposición rectangular de números o funciones, sujeta a determinadas reglas de operación, recibe el nombre de matriz.
Simbólicamente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Donde: m = número de filas; n = número de columnas y "m x n" indica el orden.
Si m = n es una matriz cuadrada.

OBSERVACIÓN: Si una matriz es de orden "n x n", entonces se dice de orden "n".

IGUALDAD DE MATRICES: Dos matrices son iguales si y sólo si tiene el mismo orden y todos los elementos correspondientes son iguales.

OPERACIONES CON MATRICES:

SUMA DE MATRICES: La suma de dos matrices del mismo orden se efectúa sumando los elementos correspondientes.

DIFERENCIA DE MATRICES: La diferencia de dos matrices del mismo orden se efectúa restando los elementos correspondientes.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES: Si A es una matriz de orden "m x p" y B una matriz de orden "p x n"; el producto A.B se define como la matriz de orden "m x n" cuyo elemento de la i – ésima fila y la j – ésima columna se obtiene multiplicando los elementos de la i – ésima fila de A, por los elementos e la j – ésima columna de B, sumando después los resultados.

CLASES DE MATRICES:

MATRIZ IDENTIDAD: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a* 1.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

EJEMPLO DE MATRIZ SIMÉTRICA:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 9 & 2 & 7 \\ -6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal*

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA: Es la matriz que se obtiene de A al cambiar las filas por las columnas, o lo que es igual columnas por filas y se denota como: A^t

TRAZA DE UNA MATRIZ: Es la suma de los elementos de la diagonal principal.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ: El determinante viene a ser una función definida por:

$\det: M_{nxn} \to \mathbb{R}$

Notación: se denota como: $\det(A)$ ó $|A|$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to |A| = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\to |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{23}.a_{32}.a_{11} + a_{33}.a_{12}.a_{21})$$

OBSERVACIÓN: Este método es solo para matrices de orden 3

OBSERVACIÓN: Para matrices de orden 3, 4 ó más se puede utilizar el siguiente método:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Tomemos como referencia a la primera fila (en los ejercicios la fila ó columna que tenga más ceros)

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Donde los signos van intercalados empezando del elemento "a_{11}"

PROPIEDADES DE DETERMINANTES:

1. $|A| = |A^t|$
2. El determinante de una matriz A cambia de signo, si dos filas (ó columnas) se intercambian.
3. Si en una matriz A se tiene que en una fila (ó columna) es múltiplo de otra fila(ó columna) entonces el determinante de dicha matriz vale cero.
4. Si en una matriz A todos los elementos de una fila (ó columna) son ceros, entonces su determinante vale cero.
5. Si en una matriz A todos los elementos de una fila (ó columna) son multiplicados por un escalar "k", entonces el determinante de la matriz A queda multiplicado por k.
6. Si en una matriz A de orden "n" es multiplicado por un escalar "k", entonces el determinante de la matriz A queda multiplicado por k^n.
7. Si a una fila (ó columna) de una matriz A se le suma el múltiplo de otra fila (ó columna) se tendrá que el valor del determinante de A no varía.
8. El determinante de la matriz identidad es 1.
9. $|A.B| = |A|.|B|$
10. En general para matrices del mismo orden $|A + B| \neq |A| + |B|$

Ejemplo: Calcular el determinante de la matriz

$$J = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & -2 \\ 8 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:
Tomemos como referencia la fila 2 (por tener más ceros)

$$|J| = -8\begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 7 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Para el 1[er] determinante, como la fila 1 es múltiplo de la fila 3 por propiedad el determinante es cero

Para el 3[er] determinante

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (7)(2)(1) + (6)(-3)(-2) +$$

$$\begin{matrix} 7 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$(4)(6)(3) - [(-2)(2)(4) + (3)(-3)(7) + (1)(6)(6)]$$

Resolviendo se tiene: 165
Remplazando se tiene: $J = -(-3)(165)$
$\rightarrow J = 495$

INVERSA DE UNA MATRIZ: *Decimos que una matriz cuadrada A tiene inversa,* A^{-1} *si se verifica que:* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

NOTA: Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. La inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Dada la matriz A, definida por: $A = (a_{ij})_{3x4}$ tal que: $a_{ij} = \begin{cases} i - j\,; \text{si } i \neq j \\ i + j\,; \text{ si } i = j \end{cases}$

   Determine la suma de todos los elementos de A.

   A) 6
   B) 12
   C) 0
   D) 8
   E) 4

   Solución:

   Sabemos que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

   $a_{11} = 1 + 1 = 2,$
   $a_{12} = 1 - 2 = -1$
   $a_{13} = 1 - 3 = -2,$
   $a_{14} = 1 - 4 = -3$
   $a_{21} = 2 - 1 = 1,$
   $a_{22} = 2 + 2 = 4$
   $a_{23} = 2 - 3 = -1,$
   $a_{24} = 2 - 4 = -2$
   $a_{31} = 3 - 1 = 2$
   $a_{32} = 3 - 2 = 1$
   $a_{33} = 3 + 3 = 6$
   $a_{34} = 3 - 4 = -1$

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

   La suma de sus elementos de A es: 6

   Rpta: (A)

2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   Calcule $\mathrm{Tr}(A.B)$, donde Tr = traza de la matriz cuadrada.

   A) – 10
   B) – 5
   C) 0
   D) 5
   E) 10

   Solución:

   $$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   $$A.B = \begin{bmatrix} 1(0) + 2(-2) + 3(3) & 1(1) + 2(2) + 3(4) \\ 0(0) - 1(-2) - 2(3) & 0(1) - 1(2) - 2(4) \end{bmatrix}$$

   $$A.B = \begin{bmatrix} 5 & 17 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

   $\mathrm{Tr}(A.B) = 5 + (-10) = -5$

   Rpta: (B)

3. Calcular el determinante de:

   $$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

   A) – 3
   B) – 2
   C) – 1
   D) 0
   E) 1

   Solución:

   $$J = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

   $J = 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$
   $J = -3 + 12 - 9$
   $J = 0$

   Rpta: (D)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular "m", si: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & 12 \end{vmatrix} = 0$

   A) 5
   B) 7
   C) 6
   D) 8
   E) 4

2. Resolver: $\begin{vmatrix} x + 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + x$

   F) 1
   G) 3
   H) 2
   I) 4
   J) 7

3. Resolver: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$
A) 9
B) 1
C) 0
D) 3
E) – 3

4. Obtener $A\ x\ B$
$A = (6 \quad 8 \quad 11)_{1x3} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}_{3X1}$
A) 100
B) 185
C) 143
D) 205
E) 184

5. Calcular el determinante de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}$
A) 17
B) –32
C) 29
D) 44
E) 52

6. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & y \\ 3-y & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5-y & 2-x \\ x+1 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
Hallar A + C; si A = B
A) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

7. Si: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
Hallar AB
A) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 19 & -1 & 7 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

8. Calcular la matriz inversa de:
$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
A) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
B) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
C) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
D) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$
E) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

9. Calcular la traza (A– 4), sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
A) 34
B) 24
C) 16
D) 8
E) 6

10. Calcular el determinante de
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$
A) 0
B) 1
C) 3
D) 2
E) 4

11. Hallar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
E) $\nexists$

12. Si se cumple que: $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 8$ Con $x > 0$
Hallar "y" en $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$
A) – 4
B) – 2
C) – 3
D) – 5
E) – 1

13. Sea:$A = [a_{ij}] \in K^{3x2}$ / $a_{ij} = i + 2j$
Calcular: $J = a_{11} + a_{22} + a_{32}$
A) 16
B) 15
C) 14
D) 13
E) 12

14. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
Calcule $\mathrm{Tr}(A.B)$, donde Tr = traza de la matriz cuadrada.
A) – 10
B) – 5
C) 0
D) 5
E) 10

15. Calcular la traza de "x" en la ecuación: $Ax = AB - Bx$, donde:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$
A) 44
B) – 24
C) 23
D) 39
E) – 32

16. Si: $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

Entonces $A^5.B^7$ es igual a:
A) I_3
B) A
C) B
D) A^2
E) AB

17. Sea: $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ Calcular:
$A = A + 2A + 3A + \cdots nA$; n número natural.
A) 0
B) n
C) n/2
D) 10
E) 2^n

18. Sabiendo que la matriz
$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & y-x\\ 2x & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ Es simétrica. Calcular el valor de: $x^2 + y^2$.
A) 13
B) 12
C) 8
D) 9
E) 4

19. Si $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=2$, hallar el valor de:
$\begin{vmatrix}2+a & b\\ 2+c & d\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & d\\ 1 & b\end{vmatrix}$
A) 3
B) 4
C) 8
D) 2
E) 7

20. Dada la matriz A = $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, El valor de la Traza de (A^2 – 4A), es:
A) 14
B) 8
C) 12
D) 25
E) 10

21. Sean las matrices: A = $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$,
B = $\begin{bmatrix}0 & 3 & 7\\ 1 & 8 & 9\end{bmatrix}$ y C = $\begin{bmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$.
Si P = ABC, hallar la suma:
S = $p_{11} + p_{12} + p_{23}$
A) 282
B) 275
C) 255
D) 295
E) 258

22. Considere las matrices A = $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$,
B = $\begin{bmatrix}2 & b\\ b & c\end{bmatrix}$ y M = $\begin{bmatrix}2b+1 & 1\\ 2c & a\end{bmatrix}$
si A + B = $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Entonces la Traza (M) es:
A) 4
B) 2
C) 0
D) 3
E) – 1

23. El mayor número entero que satisface la inecuación $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -3 & x\end{vmatrix}$ > 0 es:
A) – 6
B) – 3
C) – 5
D) 3
E) 4

24. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$
$B=\begin{bmatrix}m & 1\\ n & 5\end{bmatrix}$ Si A y B son permutables respecto a la de multiplicación. Calcular los valores de m y n.
A) 4 y – 3
B) 2 y 3
C) – 3 y 4
D) 4 y 5
E) 3 y 5

25. Resolver la ecuación:
$$\begin{vmatrix}3 & x & -x\\ 2 & -1 & 3\\ x+10 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$
A) $-2 \pm \sqrt{22}$
B) $-4 \pm \sqrt{22}$
C) $4 \pm \sqrt{22}$
D) $-1 \pm \sqrt{22}$
E) $2 \pm \sqrt{22}$

SEMANA Nº 16
MICELANEA

1. Calcular el valor de: $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right]^{1/2}$
A) 5
B) 2
C) 9
D) 4
E) 1

2. Hallar x: $3^{3^{x-3}} = 27^{9^{x+2}}$
A) 1
B) – 2
C) 6
D) 4
E) – 6

3. Calcular = $\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$
   A) 16
   B) 2
   C) 3
   D) 4
   E) 8

4. Evaluar: $3^{2x+1} - 5^{x+0.5} = 9^x + 5^{x-0.5}$
   A) 0,5
   B) 0,2
   C) 0,55
   D) 2
   E) 8

5. Si los términos: $4x^{a-3}y^{b-1} \wedge x^{5-a}y^{2b}$
   Son semejantes; calcular a.b
   A) – 1
   B) 5
   C) 3
   D) – 4
   E) 2

6. Si $F(x) = \frac{x+2}{x-3}$ calcular: $N = F(2) + F(4)$
   A) – 1
   B) 2
   C) 5
   D) 4
   E) 6

7. Calcular "a – b" en el monomio
   P(x, y) = $\frac{x^{1+a}y^{2-b}}{x^{1-b}y^{2-a}}$ sabiendo que si
   G.A. (P) = 10 y G.R (y) = 4
   A) 1
   B) 0,5
   C) 7
   D) 4
   E) 3

8. sabiendo que: $a + b + c = 8$
   $a^2 + b^2 + c^2 = 24$ Calcular el valor de:
   $ab + ac + bc$
   A) 11
   B) 20
   C) 7
   D) 4
   E) 5

9. Si $x - y = 8$ calcular:
   $N = (x - 3y)^2 - 4y(2y - x) + 8$
   A) 41
   B) 72
   C) 7
   D) 4
   E) 5

10. Sabiendo que:
   $x - y = 2 \wedge x^3 - y^3 = 32$ Calcular: xy
   A) 1
   B) 2
   C) 7
   D) 4
   E) 5

11. Efectuar: $1+3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)$
   A) 16^4
   B) 2^{18}
   C) 7
   D) 4
   E) 2

12. Hallar la suma de coeficientes del resto de la división: $\dfrac{x^{367} - 2}{x^2 - x + 1}$
   A) – 1
   B) 2
   C) 6
   D) 4
   E) 5

13. Hallar el resto de: $\dfrac{(x^2 + 5x + 1)^3 - 3(x^2 + 5x + 2)^2 - 1}{x^2 + 5x - 1}$
   A) 1
   B) – 20
   C) 6
   D) 4
   E) 5

14. Para que el cociente: $\dfrac{x^{5n+3} - y^{5(n+6)}}{x^{n-1} - y^{n+2}}$
   sea notable, el valor de "n" debe ser
   A) 1
   B) 9
   C) 3
   D) 5
   E) 0

15. la suma del cociente es: $\dfrac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$
   A) 1
   B) 2
   C) 7
   D) 4
   E) 0

16. Determinar la suma de coeficientes:
   $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
   A) – 1
   B) 2
   C) 7
   D) 4
   E) 0

17. Calcular el número de factores primos:
   $P(x) = x^4 + x^2 + 1$
   A) 3
   B) 2
   C) 5
   D) 4
   E) 12

18. Reconocer un factor:
$P(x,y) = x^4y + x^2y^3 - x^3y^2 - xy^4$
A) x
B) y
C) x + y
D) $x^2 + y^2$
E) X – y

19. Transformar a radicales simples:
$N = \sqrt{2+\sqrt{3}}$
A) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
B) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$
C) 1
D) 0
E) 2

20. Mostrar un radical simple de:
$\sqrt{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}$ $0 < x < 1$
A) $\sqrt{1-x^2}$
B) 1
C) x
D) $\sqrt{x}$
E) 2

21. El denominador racionalizado
$R = \frac{1}{\sqrt[3]{15}-2}$
A) 1 B) 2 C) 11 D) 4 E) 3

22. Calcular el producto de raíces de la siguiente ecuación: $x^{\log_3 x^3} = 3^{12}$
A) 1
B) 2
C) 7
D) 4
E) 0

23. Obtener todos los valores de x
$C^{3x-2}_{x-2} + C^{3x-2}_{x-3} + C^{3x}_{x-3} = C^{3x+1}_{3x-16}$
A) 13
B) 26
C) 7
D) 4
E) 20

24. Calcular "x"
$2(5^{\log_7 x}) + 3(x^{\log_7 5}) = 125$
A) 21
B) 2
C) 17
D) 49
E) 50

25. Calcular: $16^{\log_9 8^{\log_4 3}}$
A) 10
B) 2
C) 7
D) 4
E) 8