

# Lab5 CUCKOO hashing

---

## Background

---

### Hashing

哈希表（散列表，Hash Table）具有 3 个基本的操作：

1. `Lookup(key)`：在哈希表中查找 Key，如果 key 在表中存在则返回对应的 value，否则返回 没
2. `Insert(key, value)`：如果 key 不在表中，则向表中增加 key 和 value
3. `Delete(key)`：从表中删除 key 和其对应的 value

即使表非常大，但依旧可能出现冲突（根据 Birthday Paradox [1]，在仅有 23 人的情况下，有两人生日相同的可能性高达 50%）。针对哈希冲突问题，通常采取以下两种解决方法：

1. 分离链表法（Separate Chaining）[2]，即教材 9.6.5 中的“开散列表”（Open Hashing）
  - 哈希表中的每个单元都指向一个链表，链表中的 Key 具有相同的哈希值
2. 开放地址法（Open Addressing）[3]
  - 允许元素溢出到其他空间，如教材中的线性探测、二次探测和再散列法

尽管上述解决方法预期的时间复杂度是  $O(1)$  的，但是最坏情况下，两种解决方法的时间复杂度高达  $O(N)$ （考虑每个插入的 Key 的哈希值均相同）。

### Cuckoo Hashing



布谷鸟，又称杜鹃、子规、喀咕。部分种类的布谷鸟会将他们的卵产在其他鸟的巢中，由其他鸟代为孵化和育雏 [4,5]。

## 基本介绍

Cuckoo Hashing 是一种特殊的哈希表实现方法，其综合使用以下两种思想，保证在最坏情况下，查找的时间复杂度为  $O(1)$ ：

1. 多选择哈希值（Multiple-Choice Hashing），即每一个元素有多种位置可选。

Cuckoo Hashing 使用两个数组存放 Key，每个数组对应一个哈希函数，分别为  $H_1$  和  $H_2$ 。因此，对于每个 key，使用这两个哈希函数可以计算出其在两个数组中的位置： $H_1(\text{key})$  和  $H_2(\text{key})$ ，该 key 如果存在哈希表中，则必定保存在其中一个位置上。

2. 重定位哈希（Relocation Hashing），即允许哈希表中的元素在存放之后重新移动。

在进行插入是，如果  $H_1(\text{key})$  和  $H_2(\text{key})$  均被其他 key 所占用，Cuckoo Hashing 需要进行重定位操作。这个过程类似于布谷鸟的将其他鸟的卵挤出巢外的行为，这也是该算法得名的原因。所以，在Cuckoo Hashing 中，向cuckoo hashing table中插入一个新的key可能会导致原来的旧值被踢到一个不同的地方。这个过程会产生以下两种结果：

- 如果被踢出的旧值有空位存放，那么不会产生任何问题
- 否则，踢出的旧值就会继续踢出其他的键。这个过程将会不断重复，直到最后一个被踢出的键能够找到空位存放或形成了一个环。如果整个过程形成了一个环，那么就需要重新选择哈希方法并对整个表进行重新哈希散列。重新哈希散列的过程可能会有多次，直到成功为止。

## 具体操作

### 插入 Insert

预期复杂度： $O(1)$ ，在最坏情况下会进行重新哈希（即重新散列）

插入操作的流程如下：

1. 计算 key 在两个数组中的位置  $H_1(\text{key})$  和  $H_2(\text{key})$ ；
2. 如果  $H_1(\text{key})$  是空闲的，则将 key 插入到  $H_1(\text{key})$  中，插入过程结束；
3. 如果  $H_2(\text{key})$  是空闲的，则将 key 插入到  $H_2(\text{key})$  中，插入过程结束；
4. 进行 Kick 操作：将 key 插入到  $H_1(\text{key})$  中，并将  $H_1(\text{key})$  中原有的  $\text{keyh1}$  拿出来，计算其在第二个数组中的位置  $H_2(\text{keyh1})$ ，
  - 如果该位置空闲，则将  $\text{keyh1}$  存放在  $H_2(\text{keyh1})$ ，插入过程结果；
  - 如果该位置（ $H_2(\text{keyh1})$ ）被占用，将  $\text{keyh1}$  存放到该位置，并将该位置原有的  $\text{keyh1h2}$  拿出来，计算  $\text{keyh1h2}$  在第一个数组中的位置  $H_1(\text{keyh1h2})$ ，重复进行 Kick 操作。
  - Kick 操作不断进行，有两种结果：
    - 最终找到一个空位，成功完成了插入操作；
    - 位置链产生了一个环，说明无法通过一系列 Kick 操作完成插入，需要进行 resize/rehash 操作。
5. resize/rehash：将哈希表中的两个数组分别扩充为原来的两倍，并将其中保存的值重新进行哈希，并进行位置调整：

- hash function

```
H1(key) = key%size;
H2(key) = (key/size)%size;
//size: size of a single hash table
```

- resize
  - 形成环的时候，进行扩容，大小变为原表的2倍。
- rehash

- 扩大哈希表容量之后，需要对原有的键值对进行rehash，重新放入新的哈希表中。**这里规定rehash 顺序为**，从 table0 到 table1，每个数组中从小到大进行遍历，将每个位置上的键值对进行rehash，最后再将手中剩余的一个键值对插入新表。
- 即，如伪代码所示：

```
for i from 0 to table_size
    rehash(table0[i])
for i from 0 to table_size
    rehash(table1[i])
insert(remain_key)
```

6. **注意**：如果插入的 key-value 对中的 key 已经在 hash table 中存在，则更新 value

7. **关于环的检测**：如果一次插入操作触发了  $2 * \text{size}$  次 kick 操作，则认定为存在环。其中 size 为单个数组的大小。

## 查询(Lookup)

最坏时间复杂度： $O(1)$

通过两个哈希函数，最多只需要检查两个位置，就能找到需要查找的目标，或得出该 key 不在哈希表中。

```
/*
procedure:
    step1: use function `hash` to get the target positions
    step2: compare values stored in hash table with your target and get the right answer
*/
```

## 删除>Delete)

最坏时间复杂度： $O(1)$

先查找，如果找到则进行删除操作。

```
/*
procedure:
    step1: use function `hash` to get the possible positions
    step2: compare values stored in hash table with your target and get the right answer
    step3: remove the value stored in target position
*/
```

## 实例解析

接下来，我们尝试通过一系列例子来理解cuckoo hash的相关操作。

回顾一下我们使用的2个hash函数分别为：

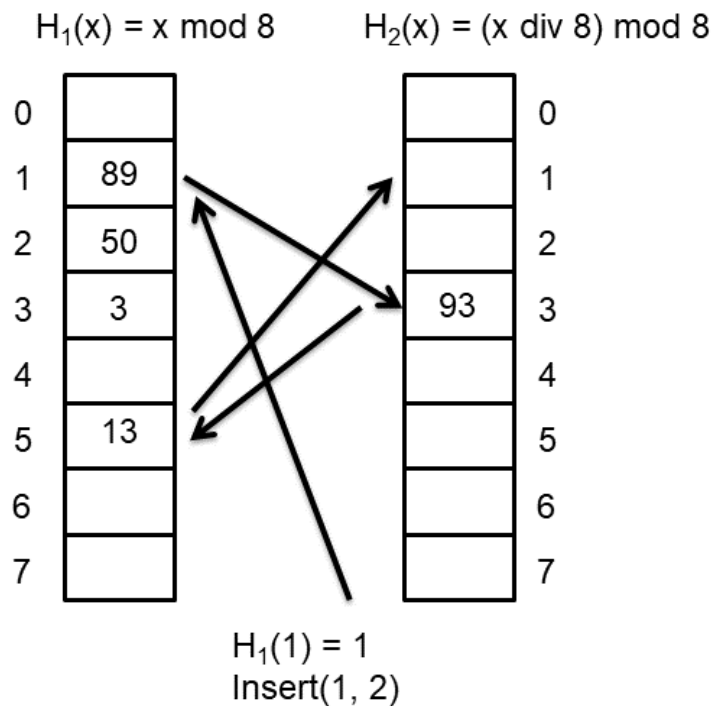
```
H1(key) = key % size;  
H2(key) = (key / size) % size;  
//size: size of a single hash table
```

我们令初始的 $size = 8$ ，假定算法执行过程中的中间状态如下图所示，其中，

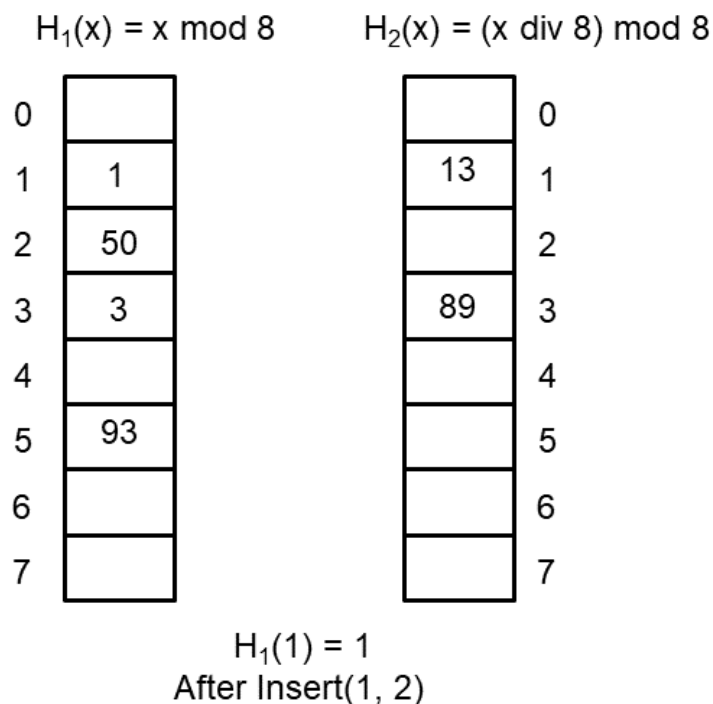
- 我们将左边的数组命名为table 0，使用 $H_1$ 作为哈希函数
- 右边的数组称为table 1，使用 $H_2$ 作为哈希函数：

$H_1(x) = x \bmod 8$		$H_2(x) = (x \div 8) \bmod 8$	
0			0
1	89		1
2	50		2
3	3	93	3
4			4
5	13		5
6			6
7			7

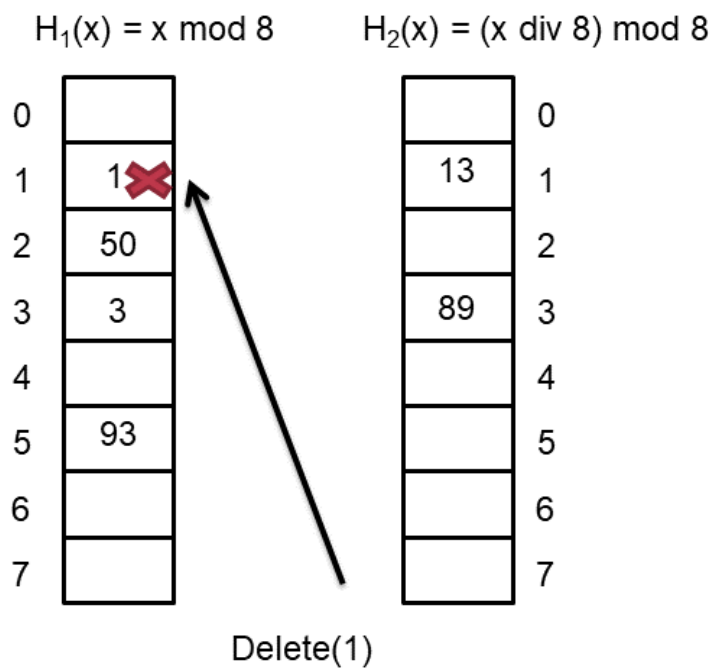
这时，我们插入键值对(key=1,val=2), 算法执行的中间过程如下图，其中的箭头表示每一次“kick”的过程：



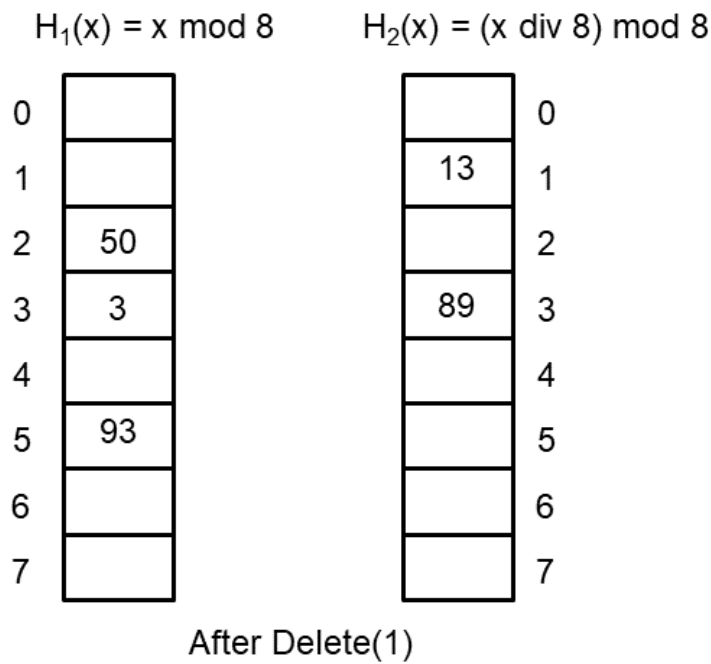
具体来说，当我们调用 `Insert(1,2)` 时，key值为1，这时我们先使用  $H_1(1) = 1 \bmod 8 = 1$ ，得出将要插入的位置为左边数组的1位置。但该位置上已经有89，则我们需要将89 "kick" 出去。于是我们对89应用  $H_2$ ，得出  $(89 \div 8) \bmod 8 = 3$ ，则移动到右边数组的2位置。接下来的93和13以此类推，最终  $H_2(13) = 1$ ，而右边数组位置1有空位，则将13kick到该位置，至此插入过程完成，程序状态如下图所示：



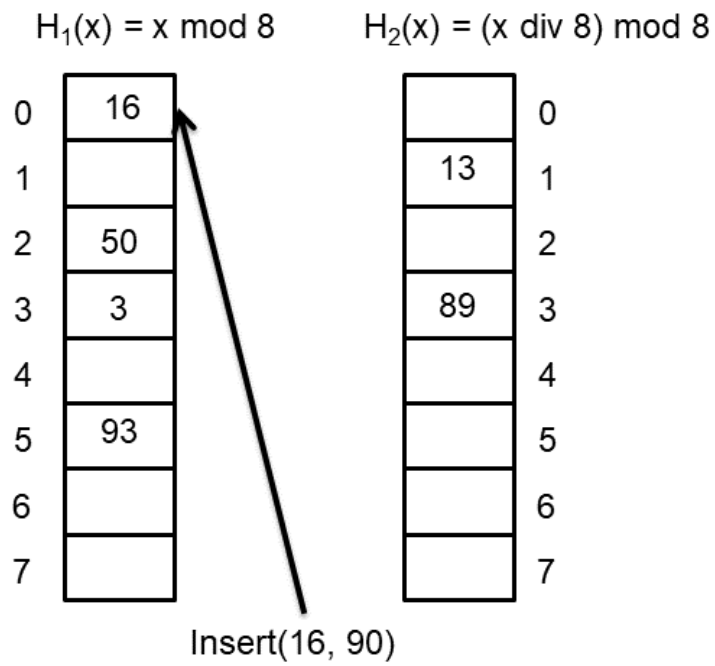
接着，我们调用 `delete(1)` 删除key=1的键值对，删除过程如下图：



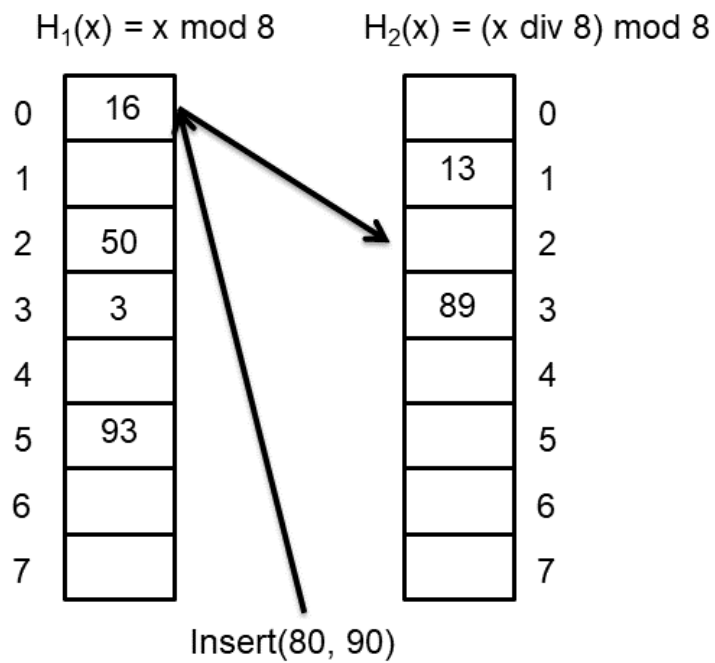
首先根据H1计算得出1的位置为左边数组的第1个位置，删除位置上的键值对。删除后的结果如图所示：



接着我们看看成环的情况：我们连续插入16和80，如下图所示：

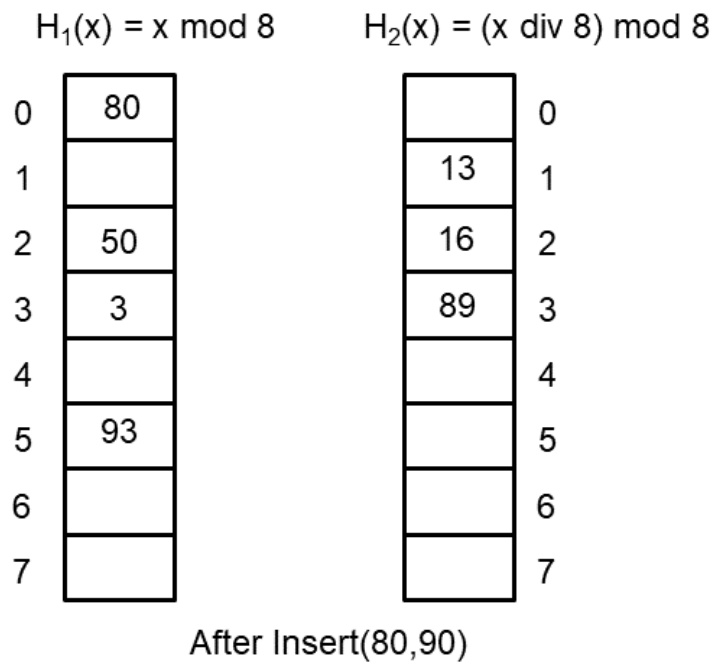


我们插入80，会造成kick 16的情况，之后成功插入

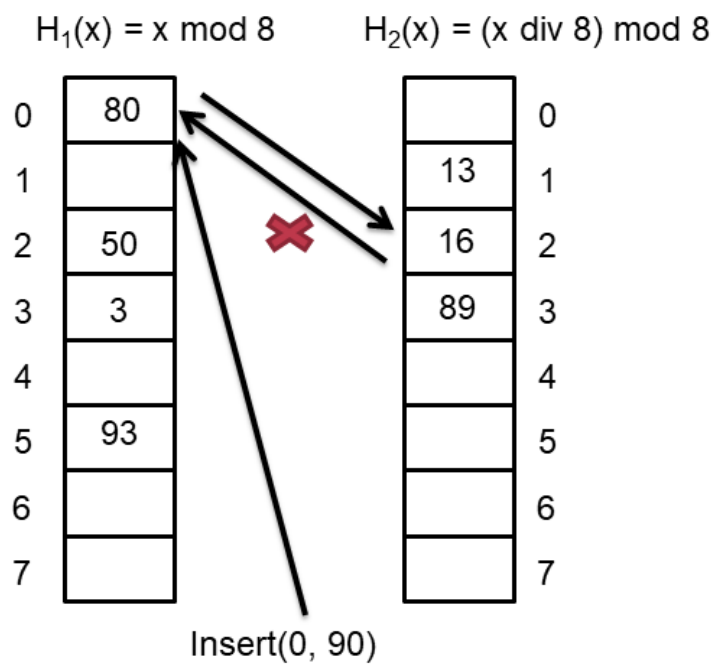


这时，算法的状态为：





这时我们插入0，就会出现成环的情况：



## 题目要求

### 总体要求：

实现上述Insert,Lookup,Delete操作，

- 为简化题目，题中出现的所有key，value都使用int类型。
- 2个数组的初始长度都为8。

### 具体要求：

1. 从标准输入中读入所需操作，输出到标准输出，评测会根据标准输出的内容判断算法实现是否正确
2. 从标准输入中读入M，代表M行操作
3. 读入M行操作时, 每行操作可能的情况为
  - `Insert key1`: 表示调用Insert(key,val)，若存在Kick，则输出Kick的路径操作
    - **kick路径的具体输出**
      - 针对每一次的kick操作
      - 输出 `Kick old_key with new_key in table table_no table_index`
      - 其中 `old_key` 是位置上原有的key值
      - `new_key` 是新的key值，用于替换旧值
      - `table_no`:代表选择的table，取值为0或1
      - `table_index`:代表选择的table中的index
    - **成环的具体输出：**
      - 判断出成环之后输出 `Loop Detect`
  - `Lookup key`: 表示调用Lookup(key)
    - 若key存在，则输出对应的val值
    - 若key不存在，则输出 `Key Not Found`
  - `Delete key`: 表示调用Delete(key)
    - 若key存在，则进行删除，不输出
    - 若key不存在，则输出 `Key Not Found`

### 测试样例：

```
M          // the number of lines below (M=9 here)
Insert key1 val1
Insert key2 val2
Insert key3 val3 // ==> output: Kick key1 with key3 in table 1 8
Lookup key1     // ==> output: val1
Lookup key5     // ==> output: Key Not Found
Delete key4     // ==> output: Key Not Found
Lookup key4     // ==> output: Key Not Found
Delete key1
Lookup key1     // ==> output: Key Not Found
```

# References

- [1]: Birthday Paradox <https://www.geeksforgeeks.org/birthday-paradox/>
- [2]: Hashing | Set 2 (Separate Chaining) <https://www.geeksforgeeks.org/hashing-set-2-separate-chaining/>
- [3]: Hashing | Set 3 (Open Addressing) <https://www.geeksforgeeks.org/hashing-set-3-open-addressing>
- [4]: 巢寄生 <https://zh.wikipedia.org/wiki/巢寄生>
- [5]: Cuckoo <https://en.wikipedia.org/wiki/Cuckoo>
- [6]: Cuckoo Hash 样例: <https://programming.guide/cuckoo-hashing.html>