

Primo appello algebra e matematica discreta

Traccia 1

2023/2024

1 Quiz matematica discreta

1. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- a) Il grafo completo K_4 è un grafo euleriano [T] [F]
- b) Il grafo bipartito completo $K_{2,2}$ è un grafo hamiltoniano [T] [F]
- c) Il grafo bipartito completo $K_{2,3}$ è un grafo 2-regolare [T] [F]
- d) In un albero con 3 vertici c'è almeno un vertice di grado 2 [T] [F]
- e) Esiste un grafo (semplice) con sequenza di gradi 5,2,1,1,1 [T] [F]
- f) Un grafo connesso planare con 5 vertici e 2 facce ha 6 archi [T] [F]
- g) Il complementare di un albero con 4 vertici è un albero [T] [F]
- h) Il grafo completo K_n ha $(n)(n+1)/2$ archi [T] [F]
- i) Gli anagrammi (anche privi di significato) della parola EDERE sono 120 [T] [F]
- j) Siano $a, b, n \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$. Se $x_0 \in \mathbb{Z}$
è una soluzione della congruenza $ax \equiv b \pmod{n}$, anche $x_0 - n$ lo è [T] [F]
- k) La relazione di ricorrenza $a_n = a^2_{n-1}$ è una relazione di ricorrenza lineare di grado 2

Si indichi la risposta corretta ai seguenti quesiti:

1. Il numero di modi in cui si possono distribuire 12 oggetti identici in 4 scatole è:

- a) $\binom{16}{4}$
- b) $\binom{15}{3}$
- c) $\binom{12}{4}$
- d) nessuna delle risposte precedenti

2. Quale è la soluzione della relazione di ricorrenza $a_n = 8a_{n-1}$, con condizione iniziale $a_0 = -8$?

- a) $a_n = (-8)^{n+1}$
- b) $a_n = -8n - 8$
- c) $a_n = -8^{n+1}$
- d) $a_n = 8n - 8$

2 Esercizi algebra

Esercizio 1

Siano $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 3\alpha + 2 & \alpha \\ -1 & -\alpha & \alpha + 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$

- a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si risolva il sistema lineare $A(\alpha)x = b$

- b) Sia $A=A(0)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha=0$. Si stabilisca se A è diagonalizzabile oppure no. Si richiede di motivare la risposta
c) Sia $A=A(0)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha=0$. Si calcoli l'inversa A^{-1} della matrice A

Esercizio 2

Si calcoli la matrice di passaggio $M_{B \leftarrow B'}$ da B' a B , dove B e B' sono le seguenti basi ordinate di \mathbb{R}^2 :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

N.B. non si richiede di verificare che B e B' siano due basi di \mathbb{R}^2

Esercizio 3

Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- a) La matrice A è unitariamente diagonalizzabile (si dica il perché)
b) Si trovino una matrice unitaria U ed una matrice diagonale D tali che $A = UDU^H$
N.B. non si richiede di calcolare U^H