

Algoritmi e strutture dati

Matteo Mazzaretto

2024

ATTENZIONE: questo file è una rivisitazione personale delle domande chieste all'orale di algoritmi disponibili sul MEGA nel
2024/2025

**Se trovate errori segnalatemi pure, oltretutto non c'è nessuna
pretesa di correttezza perfetta o altro**

Indice

1	Complessità problema	1
2	Cos'è un heap, complessità ricerca massimo	1
3	Metodo del limite e dimostrazione	1
4	Definizione albero binario, BST, complessità ricerca	1
5	Dimostrazione che il limite degli ordinamenti è nlogn	2
6	Complessità quicksort e spiegazione breve algoritmo, caso medio, peggiore e perché tante ripartizioni sono caso medio	2
7	Counting sort, perché non si può usare sempre per ottenere ordinamento lineare, condizione affinché $\Theta(n)$, Radix Sort	3
8	Tabella hash: complessità inserimento e rimozione, chaining e open addressing	4
9	Doppio hashing (come scegliere le funzioni)	4
10	Max-heap e heapsort	4
11	Funzionamento e complessità maxHeapify e buildMaxHeap, complessità inserimento	5
12	Cos'è heap, complessità insert in heap	6
13	Definizione di RB-Tree e costo inserimento	7
13.1	Definizione funzioni	8
14	Perché preferire BST a tabelle hash	11
15	Definizione di sottostringa e sottosequenza e numero di sottostringe e sottosequenze in una stringa	11
16	Diversi tipi di ordine per calcolare elementi nella programmazione dinamica	12
17	Generico algoritmo top down memoizzato	12
18	Codici di Huffman	13

19 Quale tra gli esercizi di programmazione dinamica svolti a lezione non si risolveva solo risolvendo sottoproblemi	13
20 Definizione e vantaggi della memoizzazione	13
21 Codici Prefisso	14
22 Scansione riempimento della tabella di LCS	14
23 Differenza tra approccio top-down e bottom-up per la programmazione dinamica. Vantaggi e svantaggi di entrambi	15

1 Complessità problema

Dato un problema P, la complessità di P è la complessità del più efficiente algoritmo che lo risolve.

Per complessità di algoritmo si intende il suo limite stretto, ovvero quando limite inferiore (Ω) e il suo limite superiore (O) coincidono

2 Cos'è un heap, complessità ricerca massimo

L'heap è un albero ordinato binario quasi completo implementato come array, in cui $\forall i$ il suo figlio sinistro ha indice $2*i$ e il suo figlio destro $2*i+1$. La radice dell'heap è l'elemento con indice 1 nell'array e il genitore di ogni nodo si trova troncando il risultato di $i/2$.

$\forall i \geq n/2$ (dove n è la dimensione dell'array) è una foglia, ovvero non ha né figli sinistri né figli destri.

Se si parla di max-heap, la complessità di ricerca del massimo è $O(1)$ poiché il massimo è sempre il primo elemento dell'array. Il max-heap ha proprietà che ogni nodo è \geq discendenti e \leq antenati

3 Metodo del limite e dimostrazione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0 \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \rightarrow f(n) = O(g(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

Foto dimostrazione

4 Definizione albero binario, BST, complessità ricerca

Per albero binario si intende una struttura dati in cui ogni nodo non foglia ha uno o due figli, e una foglia non ha nodi figli.

Per albero binario di ricerca si intende un albero binario ordinato tc \forall nodo x

- 1) \forall nodo y sottoalbero sx $y.key \leq x.key$
- 2) \forall nodo y sottoalbero sx $y.key \geq x.key$

Questa è una proprietà globale dell'albero, se fosse solo locale (come negli

heap) l'albero non sarebbe più di ricerca

La complessità della ricerca è $O(h)$, dove $h = \log n$ se albero bilanciato

5 Dimostrazione che il limite degli ordinamenti è $n \log n$

Il limite degli ordinamenti sfrutta l'albero di decisione, il quale è un albero che descrive in maniera astratta l'esecuzione di algoritmi su input di dimensione n in cui ogni foglia rappresenta una e una sola permutazione dell'input, e ogni permutazione è rappresentata da almeno una foglia. Se ciò non avviene vuol dire che l'algoritmo non è corretto

Bisogna comunque dire che $\Omega(n \log n)$ si applica solo agli algoritmi che usano confronto tra elementi

Foto dimostrazione

6 Complessità quicksort e spiegazione breve algoritmo, caso medio, peggiore e perché tante ripartizioni sono caso medio

Il quicksort è un algoritmo del tipo divide et impera, il quale, prendendo un pivot, porta alla sinistra dell'array gli elementi \leq e alla destra gli elementi \geq tramite la funzione Partition (divide), e successivamente esegue ricorsivamente il quicksort sulla parte sinistra e parte destra della partizione (impera)

```
1 QuickSort(A, p, r)
2 if p < r
3     q = Partition(A, p, r)
4     QuickSort(A, p, q-1)
5     QuickSort(A, q+1, r)
```

La sua complessità nel caso peggiore è del tipo $O(n^2)$ perché il caso peggiore avviene quando l'array è già ordinato e si avrebbe un tempo di esecuzione $T(n) = T(n-1) + \Omega(n) + T(0)$ poiché $T(n) = \sum_{i=1}^n (a(n-i) + b)$

La sua complessità nel caso medio è del tipo $O(n \log n)$

Il partizionamento proporzionale o sbilanciato, studiandolo tramite gli alberi di ricorsione, porta a dire che l'altezza dell'albero è di tipo logaritmica con una forma del tipo $T(n) = \Omega(n) + T(k) + T(n-k-1)$ che porta ad affermare che $T(n) \leq cn \log n$ (base del partizionamento) $\rightarrow T(n) = O(n \log n)$

7 Counting sort, perché non si può usare sempre per ottenere ordinamento lineare, condizione affinché $\Theta(n)$, Radix Sort

Il counting sort è un ottimo algoritmo di ordinamento in tempo lineare ma richiede delle ipotesi che restringano l'input, ovvero che sia un array di interi compresi fra 0 e $k > 0$

$$\begin{cases} \text{Input } A[1...n] \text{ con } A[j] \in [0,1,\dots,k] \\ \text{Output } B[1..n] \text{ copia di } A \text{ ordinata} \end{cases}$$

```

1 CountingSort(A,B,k)
2
3 C[0...k] riempito di tutti 0
4 for j=1 to A.length
5   C[A[j]]++
6 for i=1 to k
7   C[i]=C[i]+C[i-1]
8 for j=A.length down to 1
9   B[C[A[j]]]=A[j]
10  C[A[j]]--

```

Inoltre, se $k=O(n) \rightarrow$ costo $O(n)$ in quanto il costo totale è $\Theta(n+k)$ Oltre tutto ha il conto di essere un algoritmo instabile, ovvero che, se sono presenti delle ripetizioni, non è detto che esse mantengano l'ordine iniziale nell'array ordinato

RadixSort è un tipo di algoritmo di ordinamento lineare che ordina, dato d =numero cifre significative, i numeri presenti nell'array per cifra significativa con un algoritmo stabile. Nella modalità MDM ordina dalla cifra più significativa, nella modalità LSD ordina dalla cifra meno significativa

Per il RadixSort si usa il Counting Sort, quindi ogni iterazione ha $\Theta(n+b)$ e con d =numero iterazioni si ha $\Theta((n+b)d)$

$b=O(1)/O(n) \rightarrow \Theta(nd)$

se $d=1 \rightarrow \Theta(n)$

Spazio: $\Theta(n+b)$

```

1 RadixSort(A,d)
2 for j=1 to d
3   ordina A rispetto alla cifra j-esima
4   con algoritmo stabile

```

8 Tabella hash: complessità inserimento e rimozione, chaining e open addressing

Le tabelle hash sono molto efficienti, in quanto hanno un costo medio di $\Theta(1)$ e un costo peggiore di $\Theta(n)$

L'idea delle tabelle hash è usare uno spazio proporzionale al numero di elementi nella struttura

Con le funzioni di hash ci possono essere più risultati uguali poiché gli hashing non sono iniettive

L'inserimento e la rimozione hanno la grandissima qualità di essere entrambe $O(1)$

Esistono due modi di costruire una tabella hash: chaining e open addressing

Con il chaining se $h(x_1.key) = h(x_2.key)$ allora la cella in cui entrambi finiscono viene implementata come una lista e viene considerato un fattore di carico $\alpha = \frac{n}{m}$ con n =elementi memorizzati e m =celle tabella

Bisogna però mettere in evidenza la distribuzione degli input e la qualità della funzione hash, la quale idealmente dovrebbe avere probabilità di assegnare ogni elemento in input con probabilità $1/m$

Nell'open addressing tutti gli elementi dell'insieme dinamico vengono memorizzati nella tabella

9 Doppio hashing (come scegliere le funzioni)

Date $h_1(k)$ e $h_2(k)$ hash unarie $h(k,i) = (h_1(k) + i(h_2(k))) \bmod m$: la condizione è che $h_2(k)$ e m (celle tabella) siano coprimi

Ma come fare in modo che $h(k,0) \dots h(k,m-1)$ è permutazione?

$$(h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m = (h_1(k) + i'h_2(k)) \bmod m$$

$$(h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m - (h_1(k) + i'h_2(k)) \bmod m = 0$$

$$(h_1(k) + ih_2(k) - h_1(k) - i'h_2(k)) \bmod m = 0 \rightarrow (ih_2(k) - i'h_2(k)) \bmod m = 0$$

$$m \text{ divide } (i - i') \text{ e } 0 <= i - i' <= (m-1) \rightarrow i - i' = 0 \rightarrow i = i'$$

$$m \text{ primo } h_2(k) < m \rightarrow h_2(k) = 1 + k \bmod m', m' < m$$

10 Max-heap e heapsort

Il max-heap è un albero binario ordinato quasi completo costruito come array, il quale ha le proprietà degli heap (figlio destro, sinistro e parent) in cui l'elemento massimo è il primo elemento dell'array, ogni nodo è \leq antenati e \geq discendenti

L'heap sort è un algoritmo di ordinamento che sfrutta l'array costruito come

heap per ordinarlo e ha complessità $O(n \log n)$

```
1 HeapSort(A)
2
3 BuildMaxHeap(A)
4 for i=A.length down to 2
5   A[1]$\iff$A[i]
6   A.size=A.size-1
7   MaxHeapify(A,1)
```

Invariante è che $A[1..i]$ sia MaxHeap e che $A[i+1..n]$ sia ordinato

Inizio: $A[1..n]$ è maxHeap

Iterazione: $A[1..i]$ è MaxHeap perché MaxHeapify su 1 funziona, il più grande va in fondo quindi $A[i+1..n]$ ordinato

Fine: $A[1]$ MaxHeap, $A[2..n]$ ordinato

11 Funzionamento e complessità maxHeapify e buildMaxHeap, complessità inserimento

MaxHeapify(A, i) assume che i due sottoalberi di $A[i]$ siano MaxHeap e costruisce un MaxHeap in $A[i..n]$ col seguente algoritmo:

```
1 MaxHeapify(A, i)
2
3 l=left(i) r=right(i)
4 if(l<=A.size) and (A[l]>A[i])
5   max=l
6 else
7   max=i
8 if(r<=A.size) and (A[r]>A[max])
9   max=r
10 if max!=i
11   swap(A,i,max)
12   MaxHeapify(A,max)
```

Esso ha una complessità di $O(\log n)$ Invece BuildMaxHeap è una funzione per costruire un MaxHeap partendo dall'array A , e sapendo che ogni foglia è $\geq (n/2)$ si costruisce il seguente algoritmo:

```

1 BuildMaxHeap(A)
2
3 for i=(A.length)/2 down to 1
4     MaxHeapify(A,i)

```

il quale costruisce continuamente MaxHeap partendo dal presupposto che una foglia è già MaxHeap

Ha una complessità di $O(n\log n)$ perché esegue $n/2$ volte un algoritmo di complessità $O(\log n)$

Ma, volendo essere più precisi, si arriva ad una complessità di $O(n)$.

Foto dimostrazione.

12 Cos'è heap, complessità insert in heap

Spiegazione heap fatta sopra.

L'insert ha complessità di tipo $O(\log n)$ e l'algoritmo è costruito così:

```

1 Insert(A,k)
2
3 A.size=A.size+1
4 A[A.size]=k
5 MaxHeapifyUp(A,A.size)

```

Questo algoritmo sfrutta MaxHeapifyUp che ha la proprietà di costruire un MaxHeap di $A[i..n]$ partendo da un nodo "basso", forse maggiore di altri nodi (quindi \geq antenati) che rovina le proprietà di MaxHeap ripristinandole con questo algoritmo:

```

1 MaxHeapifyUp(A,i)
2
3 if (i>1) and (A[i]>A[parent(i)])
4     swap(A,i,parent(i))
5     MaxHeapifyUp(A,parent(i))

```

13 Definizione di RB-Tree e costo inserimento

I Red-Black trees sono BST in cui i nodi hanno i soliti attributi assieme all'attributo color, il quale può essere Red/Black

T.nil è un nodo con tutti gli attributi il cui colore è Black e si considera come una foglia "collegata" alla radice e a tutte le foglie dell'albero

Queste sono le sue proprietà:

- 1) ogni nodo ha uno e un solo colore
- 2) la radice è Black
- 3) le foglie (T.nil) sono Black
- 4) i figli di un nodo Red sono Black
- 5) \forall nodo x, \forall cammino x→foglia ha lo stesso numero di nodi Black. Vale per tutti i nodi \iff vale per la radice

Inoltre:

1) se elimino i nodi Red ogni cammino radice→foglia avrà la stessa lunghezza come un albero completo

2) in ogni cammino i nodi rossi sono al più la metà

$$h \leq 2\log_2(n+1)$$

$n(x)$ =numero nodi interni in T_x , $bh(x)$ =numero nodi Black incontrati

Inoltre $n(x) \geq 2^{bh(x)} - 1$ Il costo dell'inserimento è incredibilmente $O(h)$, dove $h = \log n$, ma è fattibile \iff il nodo da inserire ha colore RED

13.1 Definizione funzioni

La funzione Insert è definita così:

```
1 RB-Insert(T, z)
2
3     Insert(T, z)
4     z.color=RED
5     RB-InsertFixUp(T, z)
```

Con RB-InsertFixUp definita così:

```
1 RB-InsertFixUp(T, z)
2
3 while(z.p.color==RED)
4     if(z.p==z.p.p.left)
5         y=z.p.p.right
6         if(y.color==RED)           //CASO 1
7             y.color=BLACK
8             z.p.color=BLACK
9             z.p.p.color=RED
10            z=z.p.p
11        else                     //CASO 2
12            if(z==z.p.right)      //CASO 2.1
13                Left(T,z.p)
14                z=z.left
15                z.p.color=BLACK
16                z.p.p.color=RED
17                Right(T,z.p.p)
18            else                  //CASO 2.2
19                Right(T,z.p)
20                z=z.right
21                z.p.color=BLACK
22                z.p.p.color=RED
23                Left(T,z.p.p)
24            endif
25        endif
26    endif
27    else if(z.p==z.p.p.right)
28        (duale)
29 endwhile
30 T.root.color=BLACK
```

La funzione RB-Delete è definita così

```
1 RB-Delete(T, z)
2
3 y = z
4 originalcolor = y.color
5 if (z.left == T.nil)
6     x = z.right
7     Transplant(T, z, z.right)
8 elif (z.right == T.nil)
9     x = z.left
10    Transplant(T, z, z.left)
11 else
12     y = Min(z.right)
13     originalcolor = y.color
14     x = y.right
15     if(y!=z.right)
16         TransPlant(T,y,y.right)
17         y.right=z.right
18         y.right.p=y
19     else
20         x.p=y
21         Transplant(T,z,y)
22         y.left=z.left
23         y.left.p=y
24         y.color=z.color
25     if(originalcolor==BLACK)
26         RB-DeleteFixUp(T,x)
```

RB-DeleteFixUp definita così:

```

1 RB-DeleteFixUp(T,x)
2 while (x != T.root and x.color == BLACK)
3     if (x == x.p.left)
4         w = x.p.right
5         if(w.color == RED)
6             w.color = BLACK
7             x.p.color = RED
8             Left(T, x.p)
9             w = x.p.right
10            if(w.left.color == BLACK and w.right.color == BLACK)
11                w.color = RED
12                x = x.p
13            elif (w.right.color == BLACK)
14                w.left.color = BLACK
15                w.color = RED
16                Right(T, w)
17                w = x.p.right
18                w.color = x.p.color
19                x.p.color = BLACK
20                w.right.color = BLACK
21                Left(T, x.p)
22                x=T.root
23            else
24                w = x.p.left
25                if(w.color == RED)
26                    w.color = BLACK
27                    x.p.color = RED
28                    Right(T, x.p)
29                    w = x.p.left
30                    if(w.right.color == BLACK and w.left.color == BLACK)
31                        w.color = RED
32                        x = x.p
33                    elif (w.left.color == BLACK)
34                        w.right.color = BLACK
35                        w.color = RED
36                        Left(T, w)
37                        w = x.p.left
38                        w.color = x.p.color
39                        x.p.color = BLACK
40                        w.left.color = BLACK
41                        Right(T, x.p)
42                        x=T.root
43        endif
44    x.color=BLACK

```

14 Perché preferire BST a tabelle hash

In realtà non c'è esattamente una struttura preferibile in quanto tutte hanno sia dei pregi che dei difetti

Gli BST sono molto utili se è necessario un ordinamento all'interno della struttura, e oltretutto ha la proprietà di eseguire la maggior parte delle operazioni (se bilanciato) in tempo $O(\log n)$

Invece le tabelle hash sono utili per mettere in corrispondenza una data chiave con un dato valore.

Inoltre in una tabella di hashing ben dimensionata il costo medio di ricerca di ogni elemento è indipendente dal numero di elementi

Il loro problema è che nei casi peggiori hanno un caso spaziale di $O(n)$ ma come costo medio $O(1)$

15 Definizione di sottostringa e sottosequenza e numero di sottostringe e sottosequenze in una stringa

Dato un alfabeto finito Σ , una stringa $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ $x_i \in \Sigma$ per $1 \leq i \leq m$ è una concatenazione finita di simboli in Σ

Lunghezza di X : $|X| = m$

Σ^* è l'insieme di tutte le stringhe di lunghezza finita costruibile su Σ

Stringa vuota: $\xi \in \Sigma^*$ per convenzione

Una sottostringa di X :

$X_{i \dots j} = \langle x_i, \dots, x_j \rangle$

$1 \leq i \leq j \leq m$

Quante sono le sottostringe di una stringa?

$$1 + m + \binom{m}{2} \text{ (scelta di 2 indici estremi)} = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} = \Theta(m^2)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m 1 = 1 + \sum_{i=1}^m (m - i + 1) = 1 + \frac{m(m+1)}{2} = \Theta(m^2)$$

Una sottosequenza di X :

Z è sottosequenza di X se esiste una successione crescente di indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ tale che $z_j = x_{i_j}$, $1 \leq j \leq k$

Quante sono le sottosequenze di una stringa?

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$$

16 Diversi tipi di ordine per calcolare elementi nella programmazione dinamica

Disclaimer: non sapevo bene cosa intendesse per ordine In generale, l'algoritmo di programmazione dinamica si basa su una tabella (o matrice) in cui vengono calcolati i valori per tutti i sottoproblemi, e l'ordine con cui questi valori vengono calcolati è importante per garantire che ogni elemento venga calcolato solo dopo che tutti gli elementi di cui dipende sono già stati calcolati

Gli ordini di calcolo più comuni sono i row-major e i column-major
Possibilità di cambiamento dell'ordine:

Nel contesto della programmazione dinamica, l'ordine di calcolo può essere modificato a condizione che rispetti le dipendenze tra gli elementi

Se un elemento dipende da altri, è necessario calcolarlo solo dopo che questi altri elementi sono stati già calcolati

17 Generico algoritmo top down memoizzato

Un algoritmo top-down memoizzato è una tecnica di programmazione dinamica in cui il problema viene risolto ricorsivamente e i risultati intermedi vengono memorizzati in una struttura dati (tipicamente un array o una tabella) per evitare di ricalcolarli più volte

Questo approccio è particolarmente utile per risolvere problemi in cui ci sono sovrapposizioni di sottoproblemi

Ecco come funziona un algoritmo top-down memoizzato:

Struttura di base:

Top-down: Inizialmente, l'algoritmo tenta di risolvere il problema principale
Memoizzazione: Quando l'algoritmo si trova a dover calcolare un sottoproblema che è già stato risolto in precedenza, invece di ricalcolarlo, recupera il valore dalla memoria

Passaggi:

Definisci la funzione ricorsiva che calcola il risultato

Usa una tabella (o array) per memorizzare i risultati già calcolati

Prima di calcolare un valore, verifica se è già presente nella tabella

Se il valore è già calcolato, restituisco direttamente, altrimenti, calcolalo e memorizzalo

18 Codici di Huffman

I codici di Huffman sono una classe di codici ricavati da un albero binario ottimale per la compressione dei file

In questo albero, ogni carattere del file è rappresentato da un percorso che si sviluppa verso il basso, inserendo un 0 o un 1 nei rami sinistro o destro (questo dipende dalla convenzione utilizzata)

I codici di Huffman sono particolarmente adatti per file con un alfabeto a frequenza variabile

L'output di questo algoritmo rappresenta un *encoding* ottimale per questo tipo di file, poiché garantisce che l'encoding di ogni carattere non sia mai un prefisso dell'encoding di un altro carattere

Questo rende l'encoding decifrabile e consente di comprimere i dati al massimo, riducendo la dimensione del file

19 Quale tra gli esercizi di programmazione dinamica svolti a lezione non si risolveva solo risolvendo sottoproblemi

Uno degli esempi è il modo di risolvere il problema delle LIS (Longest Increasing Subsequence) poiché è necessario avere sottoproblemi più vincolati, in quanto $\text{LIS}(x_{i+1}) = \langle \text{LIS}(x_i), x_{i+1} \rangle$ funzionerebbe solo per alcuni casi

Una possibile soluzione è avere un sottoproblema con proprietà aggiuntive, ovvero calcolare la più lunga IS di x_i che termina proprio con x_i

Definizione: $Z = \text{LIS}(x_i)$ è la più lunga tra le $\text{IS}(x_i)$ con $Z = \langle z_1, \dots, z_k \rangle = \langle x_{i1}, \dots, x_{ik} \rangle$ con $x_{ik} = x_i$

20 Definizione e vantaggi della memoizzazione

La memoizzazione è una tecnica utilizzata nella programmazione dinamica che consente di evitare la risoluzione ripetuta di sottoproblemi, un fenomeno che può diventare particolarmente problematico in esempi come il calcolo della *Longest Common Subsequence (LCS)*, della *Longest Increasing Subsequence (LIS)*, o anche in problemi più semplici come la sequenza di *Fibonacci*. In pratica, la memoizzazione consiste nel salvataggio dei risultati dei sottoproblemi risolti in una struttura dati, in modo che ogni sottoproblema venga calcolato solo una volta.

Successivamente, se il sottoproblema viene richiesto di nuovo, il risultato viene recuperato dalla struttura dati, evitando di ricalcolarlo.

Inoltre, la memoizzazione consente di ridurre drasticamente la complessità di un algoritmo

Ad esempio, nel caso del calcolo della LCS, si passa da una complessità di $\Theta\left(\binom{m}{n}\right)$ a una complessità di $\Theta(m \cdot n)$, grazie alla memorizzazione dei risultati intermedi

21 Codici Prefisso

Nel contesto dei codici di Huffman, un *codice prefisso* è un tipo di codice in cui nessun codice assegnato a un simbolo è un prefisso del codice assegnato a un altro simbolo

Questo è un requisito fondamentale per garantire che l'encoding sia decifrabile in modo univoco, senza ambiguità

Il codice di Huffman è progettato in modo che ogni carattere venga rappresentato da una sequenza di bit, e questi bit sono scelti in modo tale che nessuna sequenza di bit (associata a un carattere) sia un prefisso di un'altra. Questo permette di distinguere facilmente i simboli durante la decodifica, senza la necessità di un separatore speciale tra i codici.

La proprietà del codice prefisso è garantita dalla struttura ad albero binario dei codici di Huffman

Quando un albero di Huffman viene costruito, i caratteri più frequenti vengono assegnati a codici più brevi, mentre quelli meno frequenti ottengono codici più lunghi

L'albero binario è costruito in modo che ogni codice assegnato ai caratteri non sia un prefisso di un altro codice, rendendo l'encoding decifrabile in modo efficiente

L'assenza di prefissi tra i codici consente un'ottimizzazione delle operazioni di compressione e decodifica, in quanto un codice può essere interpretato completamente senza bisogno di ulteriori informazioni aggiuntive

22 Scansione riempimento della tabella di LCS

La scansione del riempimento della tabella di LCS può essere fatta o con scansione row-major (riga per riga) oppure scansione column-major (colonna per colonna)

Infatti, la tabella LCS è una tabella a due dimensioni, e per questo richiede una scansione del tipo sopracitato

Faccio un esempio con scansione row-major

```

1  for i = 0 to length(X)
2      L[i,0] = 0
3  for j = 1 to length(Y)
4      L[0, j] = 0
5  for i = 1 to length(X)
6      for j=1 to length(Y)
7          if(x[i] = y[j])
8              L[i,j] = 1+ L[i-1, j-1]
9          else
10             L[i,j] = max{L[i, j-1], L[i-1, j]}
11 return L[m, n]

```

23 Differenza tra approccio top-down e bottom-up per la programmazione dinamica. Vantaggi e svantaggi di entrambi

L'approccio *top-down* è una tecnica di risoluzione dei problemi in cui si parte dal problema globale, per poi suddividerlo ricorsivamente in sottoproblemi sempre più piccoli fino a risolverli

Dopo aver risolto i sottoproblemi, si risale per combinare i risultati e ottenere la soluzione del problema iniziale

Questo approccio è particolarmente utile quando i sottoproblemi sono ben definiti e si interconnettono in modo sincrono, come nel caso della sequenza di Fibonacci

L'approccio *bottom-up*, invece, è il contrario: si parte dal problema più piccolo, risolvendo prima i sottoproblemi di base, per poi combinare i risultati per risolvere problemi più grandi

Questo approccio è tipico di problemi come la *Longest Common Subsequence (LCS)*, in cui si risolvono prima le sequenze più corte per costruire progressivamente la soluzione completa, comunque in generale per problemi con ricorrenze

Entrambi gli approcci si prestano molto bene alla memoizzazione, che consente di evitare il ricalcolo di sottoproblemi già risolti, migliorando l'efficienza dell'algoritmo

Vantaggi dell'approccio top-down:

- È più naturale e intuitivo per problemi che si prestano a una soluzione ricorsiva
- È più facile da implementare in alcuni casi, in quanto si può risolvere

il problema direttamente in modo ricorsivo, con l'ausilio della memoizzazione per ottimizzare il calcolo

- È ideale per problemi in cui non si conosce in anticipo la dimensione della soluzione o la struttura dei sottoproblemi

Svantaggi dell'approccio top-down:

- Può comportare un overhead di memoria e tempo a causa delle chiamate ricorsive, specialmente per problemi che richiedono una grande quantità di memoria stack
- La ricorsione può essere meno efficiente rispetto a un approccio iterativo, a causa della gestione del controllo delle chiamate
- Non è sempre facile evitare il ricalcolo dei sottoproblemi senza una memoizzazione adeguata

Vantaggi dell'approccio bottom-up:

- Non comporta l'overhead della ricorsione, poiché i sottoproblemi vengono risolti in ordine crescente senza chiamate ricorsive
- È più efficiente in termini di memoria, in quanto non richiede lo stack di chiamate della ricorsione
- È spesso più semplice da ottimizzare, poiché i sottoproblemi vengono risolti in modo iterativo e non richiedono una gestione complessa della ricorsione

Svantaggi dell'approccio bottom-up:

- Può essere meno intuitivo per problemi che sono naturalmente ricorsivi, rendendo il codice più difficile da scrivere e leggere
- Potrebbe essere necessario allocare e gestire strutture dati di grandi dimensioni per risolvere il problema, il che può risultare inefficiente in termini di memoria per alcuni problemi
- In alcuni casi, l'approccio bottom-up potrebbe richiedere una maggiore complessità nell'organizzazione dei sottoproblemi