

# Primo appello algebra e matematica discreta

## Traccia 2

2023/2024

### 1 Quiz matematica discreta

1. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- a) In un albero con 4 vertici c'è almeno un vertice di grado 3 T  F
- b) Un grafo connesso planare con 5 vertici e 7 archi ha 4 facce T  F
- c) Esiste un grafo (semplice) con sequenza di gradi 4,2,2,1,1 T  F
- d) Il grafo completo  $K_3$  è un grafo euleriano T  F
- e) Il complementare di un albero con 4 vertici ha 2 archi T  F
- f) Il grafo bipartito completo  $K_{2,2}$  è un grafo 2-regolare T  F
- g) Il grafo completo  $K_n$  ha  $n(n-1)$  archi T  F
- h) Il grafo bipartito completo  $K_{2,3}$  è un grafo hamiltoniano T  F
- i) La relazione di ricorrenza  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  è una relazione di ricorrenza lineare di grado 2 T  F
- j) Gli anagrammi (anche privi di significato) della parola EDERE sono 20 T  F
- k) Siano  $a, b, n \in \mathbb{Z}$  con  $n > 0$ . Se  $\text{MCD}(a, b)$  non divide  $n$  allora la congruenza  $ax \equiv b \pmod{n}$  non ha soluzioni T  F

Si indichi la risposta corretta ai seguenti quesiti:

1. Quale è la soluzione della relazione di ricorrenza  $a_n = 8a_{n-1}$ , con condizione iniziale  $a_0 = -1/8$ ?

- a)  $a_n = -8n \cdot \frac{1}{8}$
- b)  $a_n = -8^{n-1}$
- c)  $a_n = (-8)^{n-1}$
- d)  $a_n = 8n \cdot \frac{1}{8}$

2. Il numero di modi in cui si possono distribuire 13 oggetti identici in 5 scatole è:

- a)  $\binom{13}{5}$
- b)  $\binom{18}{5}$
- c)  $\binom{17}{4}$
- d) nessuna delle risposte precedenti

### 2 Esercizi algebra

#### Esercizio 1

Siano  $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 3 & -2\alpha - 2 & \alpha \\ -1 & \alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix}$  e  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$  dove  $\alpha \in \mathbb{C}$

- a) Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si risolva il sistema lineare  $A(\alpha)x = b$

- b) Sia  $A=A(0)$  la matrice che si ottiene ponendo  $\alpha=0$ . Si stabilisca se  $A$  è diagonalizzabile oppure no. Si richiede di motivare la risposta  
c) Sia  $A=A(0)$  la matrice che si ottiene ponendo  $\alpha=0$ . Si calcoli l'inversa  $A^{-1}$  della matrice  $A$

### Esercizio 2

Si calcoli la matrice di passaggio  $M_{B \leftarrow B'}$  da  $B'$  a  $B$ , dove  $B$  e  $B'$  sono le seguenti basi ordinate di  $\mathbb{R}^2$ :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } B' = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

N.B. non si richiede di verificare che  $B$  e  $B'$  siano due basi di  $\mathbb{R}^2$

### Esercizio 3

Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- a) La matrice  $A$  è unitariamente diagonalizzabile (si dica il perché)  
b) Si trovino una matrice unitaria  $U$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $A = UDU^H$   
N.B. non si richiede di calcolare  $U^H$