相容连续范畴 *

朱润秋,卢涛,马晶晶

(淮北师范大学数学科学学院，安徽淮北235000) †

摘要

摘要: 本文给出了相容定向完备范畴的概念及在此结构下的 way-below 关系与连续性, 讨论了相容定向完备范畴上的辅关系特别是 way-below 关系的一些性质, 证明了在相容连续范畴中 way-below 关系满足强插值性质. 最后给出了相容连续范畴的一个刻画定理, 即相容定向完备范畴L 是相容连续的当且仅当对任意的$x \in obL, \downarrow x$ 是连续范畴.

关键词: *相容定向完备范畴; 连续; way-below关系; 插值性质*

摘要

Consistently Continuous Category

(School of Mathematical Sciences, Huaibei Normal University,
Huaibei, Anhui, 235000, PR China)

Abstract: In this paper, we introduce the concepts of the consistently directed complete categories and the relation of way-below in this structure. After that a concept of continuous and the properties of the way below relation on consistently directed complete categories are discussed. It is proved that the way-below relation satisfies the strong interpolation property in a consistently continuous category. At last, it is showed that a consistently directed complete category L is consistently continuous if and only if for all $x \in obL, \downarrow x$ is a continuous.

keywords: *consistently directed complete category; continuous; the way below relation; interpolation property*

连续格概念是著名逻辑学家 Scott 引入的, 它在研究计算机语言时有着重要作用. 后来, 人们推广连续格概念, 将其中关键的双小于移植到偏序集上, 得到连续偏序集概念[1, 2]. 近年来理论计算机中研究的各种 Domain 则是特殊的连续偏序集, 它们一般具有良好的局部性质.

从范畴论角度看, 一个偏序集是一个小的 thin, skeletal 范畴[3]. 文献[4]将偏序集上的 way-below 关系推广到任意小范畴上, 在任意小范畴上引入连续性, 证明了连续范畴有许多类似于连续偏序集的好的性质. 本文借助文献[5]中提出的相容定向完备集的定义, 引入了相容定向完备范畴的概念,并将 way-below 关系转移到相容定向完备范畴上, 给出了相容连续范畴的概念. 证明了在相容连续范畴中 way-below 关系$\Rightarrow$ 满足强插值性质. 最后给出了相容连续范畴的一个刻画定理, 即相容定向完备范畴 L 是相容连续的当且仅当对任意的 $x \in obL,\downarrow x$ 是连续范畴.

*基金项目：国家自然科学基金资助项目(11171156), 安徽省自然科学研究项目(KJ2012Z358)

†作者简介：朱润秋(1988-),女,安徽宿州人,硕士生,主要从事格上拓扑学理论的研究

1 预备知识

在本文中, 所涉及到的范畴都为小范畴. 记一个范畴L 中的态射为$\rightarrow$. 对任意的$x \in obL$, 记$\downarrow x = \{y \in obL : y \rightarrow x\}$.

定义 1.1 [4] 设L 是一个小范畴, $D : J \rightarrow L$ 是一个J 型图. 如果对任意的$j, j' \in obJ$ 都存在$i \in obJ$ 使得$D(j) \rightarrow D(i)$, $D(j') \rightarrow D(i)$, 则称D 是一个定向图表.

$$\begin{tikzcd} & D(i) & \\ D(j) \arrow[ur, "\lambda_j"] & & D(j') \arrow[ul, "\lambda_{j'}"'] \end{tikzcd}$$

若L 中每一个定向图表D 的上确界$colimD$ 都存在, 则称L 是一个定向完备范畴.

定义 1.2 [4] 设L 是一个定向完备范畴, $x, y \in obL$, 称x way-below 于y, 记作$x \Rightarrow y$, 当且仅当对每一个定向图表D, 若存在态射$y \rightarrow colimD$, 则总有$d \in obL$, 使得$x \rightarrow d$.

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, dotted] & colimD \\ x \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r] & d \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

若对任意的$x \in obL$, $\{u \in obL : u \Rightarrow x\}$是定向的且$x = \coprod\{u \in obL : u \Rightarrow x\}$, 则称$L$ 是一个连续范畴.

命题 1.3 [4] 设L是一个余完备范畴, 则对任意的$u, x, y, z \in obL$下列结论成立:

(1) 若$x \Rightarrow y$, 则$x \rightarrow y$;

(2) 若$u \rightarrow x \Rightarrow y \rightarrow z$, 则$u \Rightarrow z$;

(3) $0 \Rightarrow x$.

定义 1.4 [4] 设L是一个范畴且具有初始对象, 称obL上的一个二元关系$\prec$为辅关系, 若对任意的$u, x, y, z \in obL$,$\prec$ 满足下列条件:

(1) 若$x \prec y$ 成立, 则$x \rightarrow y$ 成立;

(2) 若$u \rightarrow x \prec y \rightarrow z$, 则$u \prec z$ 成立;

(3) $0 \prec y$.

我们记 obL 上的所有的辅关系构成的集合为$Aux(obL)$, 由命题1.3 可知, way-below 关系 $\Rightarrow$ 是一个辅关系.

2 相容定向完备范畴

定义 2.1 设$D : C \rightarrow L$是L 中一个定向图表, 若存在$x \in obL$ 使得D 是$\downarrow x$ 的子图表, 则称D 为相容定向图表.

定义 2.2 设 L 是小范畴, 如果L 中每一个相容定向图表D 的上确界$colimD$ 都存在, 则称L 是相容定向完备范畴.

例 2.3 实数集$\mathbf{R}$ 和自然数集$\mathbf{N}$ 关于通常序作为范畴都是相容定向完备范畴.

注 定向完备范畴一定是相容定向完备范畴, 但反之不然. 如例2.3中两个范畴都是相容定向完备范畴,但它们都不是定向完备范畴, 因为它们按通常序都不是定向完备的.

定义 2.4 设L 是一个相容定向完备范畴, $x, y \in obL$,x way-below 于y,记作$x \Rightarrow y$ 当且仅当对L 中任意一个相容定向图表$D: C \to L$, 如果存在态射$y \to colimD$, 则总有$d \in D(obC)$, 使得$x \to d$ 成立.

命题 2.5 设L 是相容定向完备范畴, 则对任意的$u, x, y, z \in obL$, 下列结论成立:

(1) 若$x \Rightarrow y$, 则$x \to y$;

(2) 若$u \to x \Rightarrow y \to z$, 则$u \Rightarrow z$;

(3) 若L 有初始对象0, 则$0 \Rightarrow x$.

证明 (1) 取 $D(obC) = y$, 若$x \Rightarrow y$, 由定义2.4知, $x \to y$.

(2) 设 $u \to x \Rightarrow y \to z$, 对$L$ 中每一个相容定向图表$D: C \to L$, 如果存在态射$z \to colimD$, 那么有$y \to colimD$,因$x \Rightarrow y$, 则存在$d \in D(obC)$, 使得$x \to d$, 又$u \to x$, 则$u \to d$, 因此$u \Rightarrow z$.

(3) 对L 中每一个相容定向图表$D: C \to L$, 如果存在态射$x \to colimD$, 因0是初始对象, 则总有$d \in D(obC)$, 使得$0 \to d$, 故$0 \Rightarrow x$.

我们记 $\Uparrow x = \{v \in obL : x \Rightarrow v\}$,$\Downarrow x = \{u \in obL : u \Rightarrow x\}$, 分别称为 x 在 L 中的 way-below 上集和下集.

定义 2.6 设L 是相容定向完备范畴, 若对每一个$x \in obL$, $\Downarrow x$ 是相容定向图表, 且$x = \amalg \Downarrow x$, 则称L 是相容连续范畴.

定义 2.7 设L 是相容定向完备范畴, 称定义在obL 上的辅关系$\prec$ 为逼近的, 如果$\{u \in obL : u \prec x\} = s_{\prec}(x)$ 是相容定向的且对任意的$x \in obL$, $x = \amalg\{u \in obL : u \prec x\} = \amalg s_{\prec}(x)$.

我们记obL 上的所有逼近的辅关系构成的集合为$App(obL)$. 由定义2.6可知, 在相容连续范畴中 way-below 关系$\Rightarrow$ 是逼近的辅关系.

下面, 我们就定义在相容定向完备范畴上的辅关系及way-below关系的性质进行一些讨论.

命题 2.8 在相容定向完备范畴中, way-below 关系包含于所有逼近的辅关系.

证明 设$y \Rightarrow x, \prec \in App(obL)$, 则$\{u \in obL : u \prec x\}$ 是相容定向图表, 且$\forall x \in obL$, $x = \amalg\{u \in obL : u \prec x\}$. 于是, $\exists u$使得$y \to u \prec x$, 由定义1.4(2)可得 $y \prec x$, 故 way-below 关系$\Rightarrow$ 包含于所有逼近的辅关系

命题 2.9 设L 是相容定向完备范畴, 则L 是相容连续范畴当且仅当 way-below 关系$\Rightarrow$ 是obL 上最小的逼近辅系.

证明 由定义2.6及定义2.7可知, L 是相容连续范畴当且仅当 way-below 关系$\Rightarrow$ 是逼近的辅关系,再由命题2.8, way-below 关系是最小的逼近辅关系, 故结论得证.

我们称小范畴L 上的辅关系$\prec$ 满足强插值性质, 若对任意的$x, z \in obL$ 满足条件:

$$\text{若} x \prec y \text{ 且} z \nrightarrow x \text{ ,则存在} y, \text{ 使得} x \prec y \prec z \text{ 且} x \neq y. \text{(SI)}$$

称$\prec$ 满足插值性质, 若对任意的$x, z \in obL$, 下面较弱条件成立:

若$x \prec y$, 则存在y, 使得$x \prec y \prec z$.(INT)

易知,若条件(SI)成立则条件(INT)一定成立. 文献[4]中命题2给出, 在连续范畴中 way-below 关系$\Rightarrow$ 满足插值性质, 那么在相容连续范畴中, 这一性质是否仍成立, 并且能否加强呢?

命题 2.10 设L 是相容定向完备范畴, 则obL 上的任何逼近的辅关系$\prec$ 满足下列条件: 对任意的$x, z \in obL$,

(1) 对L 中任一相容定向图表$D : C \to L$, 若$x \Rightarrow z, z \nrightarrow x$ 且存在态射$z \to colimD$, 则总有$y \in D(obC)$, 使得$x \prec y$ 且$x \neq y$.

(2) 若$x \Rightarrow z$ 且$z \nrightarrow x$, 则存在y, 使得$x \prec y \prec z$ 且$x \neq y$.

证明 (1) 设$D : C \to L$ 是L 中任一相容定向图表, 且存在态射$z \to colimD$. 令$I = \amalg\{s_{\prec}(d) : d \in D(obC)\}$, 由辅关系$\prec$ 是逼近的知$s_{\prec}(d)$ 是相容定向的且$colimI = \amalg\{\amalg s_{\prec}(d) : d \in D(obC)\} = \amalg D = colimD \leftarrow z$. 因此, 若$x \Rightarrow z$, 则$\exists i \in I$, 使得$x \to i$, 亦即$\exists d \in D(obC)$, 使得$x \to i \prec d$, 于是$x \prec d$. 由于$z \nrightarrow x$, 又$z \to colimD$, 所以$\exists e \in D(obC)$, 使得$e \nrightarrow x$. 令$y$ 为d 与e 在D 中的上界, 则y 满足条件: $y \in D(obC)$, 使得$x \prec y$ 且$x \neq y$.
(2) 取$s_{\prec}(z) = \{y \in obL : y \prec z\}$, 由于$\prec$ 是逼近的, 则$s_{\prec}(z)$ 是相容定向的且$z = \amalg s_{\prec}(z) = colimD$. 如果$x \Rightarrow z$ 且$z \nrightarrow x$, 由(1)知,可找到$y \in D(obC)$, 使得$x \prec y$ 且$x \neq y$, 从而有$x \prec y \prec z$ 且$x \neq y$.

由命题2.9及命题2.10可得如下结论:

定理 2.11 在相容连续范畴中 way-below 关系$\Rightarrow$ 满足强插值性质, 即若$x \Rightarrow z$ 且$z \nrightarrow x$, 则存在y, 使得$x \Rightarrow y \Rightarrow z$ 且$x \neq y$.

3 相容定向完备范畴的一个刻画

设 L 为一个小范畴, 对任意的 $x \in obL$, 易知$\downarrow x = \{y \in obL : y \to x\}$ 是一个小范畴.

命题 3.1 若 L 是相容连续范畴,则对任意的$x \in obL$, $\downarrow x$ 是连续范畴且对任意的$x \in obL, u \in ob\downarrow x$, u 在$\downarrow x$ 中的 way-below 下集$\Downarrow_x u$ 与u 在L 中的 way-below 下集$\Downarrow u$ 相同, 即$\Downarrow_x u = \Downarrow u$.

证明 设L 是相容连续范畴, $\forall x \in obL, \forall u \in ob\downarrow x$. 若$y \Rightarrow u$, 显然有$y \Rightarrow_x u$, 即$\Downarrow u \subseteq \Downarrow_x u$. 又若$y \Rightarrow_x u$, 由$\Downarrow u \subseteq \Downarrow_x u \subseteq \downarrow x$ 知$\Downarrow u$ 是定向的且 $u = \amalg \Downarrow u$, 则$\exists v \in \Downarrow u$, 使得$y \to v \Rightarrow u$, 于是由命题2.5(2)知, $y \Rightarrow u$, 因此$\Downarrow_x u = \Downarrow u$. 从而$\Downarrow_x u$是定向的且$u = \amalg \Downarrow u = \amalg \Downarrow_x u$, 所以$\downarrow x$ 是连续范畴,故结论得证.

命题 3.2 若L 是相容定向完备范畴,且对任意的$x \in obL$, $\downarrow x$ 都是连续范畴,则L 是相容连续范畴.

证明 考虑任一$x \in obL$, 只要证$\Downarrow x = \Downarrow_x x$, 便可由$\downarrow x$ 连续得$\Downarrow x$ 是定向的且$x = \amalg \Downarrow x$. 事实上, 若$y \Rightarrow x$, 显然有$y \Rightarrow_x x$, 即$\Downarrow x \subseteq \Downarrow_x x$.又若$y \Rightarrow_x x$ 但$y \not\Rightarrow x$, 则存在定向图表$D : C \to L$ 使得$colimD = z \leftarrow x$ 而$\forall d \in D(obC), y \nrightarrow d$. 由于$\downarrow z$ 是连续的且$x \in ob\downarrow z$, 则由命题3.1知, $\downarrow x$ 也是连续的且x 在$\downarrow z$ 中的 way-below 下集$\Downarrow_z x = \Downarrow_x x$, 故由$y \Rightarrow_x x \to z$ 可得$y \Rightarrow_z x$. 又由$colimD = z \leftarrow x$, 得$\exists d \in D(obC)$ 使得$y \to d$ 成立, 这与上面的假设矛盾, 所以$y \Rightarrow x$, 因此$\Downarrow_x x = \Downarrow x$. 由$\downarrow x$ 是连续的,则$\Downarrow_x x$ 是定向的且$x = \amalg \Downarrow_x x$, 从而$\Downarrow x$ 是定向的且$x = \amalg \Downarrow x$, 故L 是相容连续范畴.

综合命题3.1和命题5可得如下相容连续范畴的一个刻画定理:

定理 3.3 设L 是相容定向完备范畴, 则L 是相容连续范畴当且仅当对任意的$x \in obL$, $\downarrow x$ 是连续范畴.

$\overrightarrow{shuxue} \Downarrow$

$a^2 + b^2 = c_2^2$

a a

x x

参考文献

[1] Gierz G, Hofmann KH, Keimel K, etal.Continuous Lattice and Domains [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.23-33.

[2] 郑崇友,樊磊,崔宏斌.Frame与连续格.北京:首都师范大出版社,2000:1-33.

[3] 贺伟,范畴论[M].北京:科学出版社,2006.

[4] 卢涛,王习娟,贺伟.连续范畴[J].南京师大学报（自然科学版）,2008,31(3):12-15.

[5] 徐罗山.相容连续偏序集及其定向完备化[J].扬州大学学报（自然科学版）,2000,3(1):1-10.