Постановка задачи

В данной лабораторной работе необходимо построить имитационную модель системы массового обслуживания (СМО).

Построить немарковские модели, когда один или оба потока событий являются потоками Эрланга.

Тип модели – вероятностный.

Неконтролируемые факторы – поток заявок, интенсивность потока заявок; контролируемые – поток обслуживания, интенсивность потока обслуживания.

Исходные данные

$R = 18, m = 21, \lambda = \rho, \mu = 1.$

Теоретическая часть

M – Марковский поток

E_R – поток Эрланга

R – порядок потока Эрланга

m – количество мест в очереди

N – среднее количество заявок в системе

ρ – нагрузка на СМО

λ – интенсивность поток заявок

μ – интенсивность потока обслуживания

$\tau_{\text{вх}}$ – интервал входного потока

$\tau_{\text{вых}}$ – интервал выходного потока

t_i – момент времени

k_i – количество заявок в системе в момент времени t_i

P_k – вероятность того, что в системе находится k заявок

$D\ (\rho)$ – дисперсия

$\sigma\ (\rho)$ – среднее квадратичное отклонение

Математическая модель по классификации Кендалла:

$< M \mid M \mid 1 \mid m >$

M – Марковский поток заявок

M – Марковский поток обслуживания

1 – количество каналов обслуживания

m – количество мест в очереди

Нагрузка на СМО

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (1)$$

Интервал входного потока

$$\tau_{\text{вх}} = -\frac{1}{\lambda} * \ln U \qquad (2)$$

Интервал выходного потока

$$\tau_{\text{вых}} = -\frac{1}{\mu} \ln U \qquad (3)$$

Интервал входного потока Эрланга

$$\tau_{\text{вх}} = -\frac{1}{\lambda * R} * \ln U \qquad (4)$$

Интервал выходного потока Эрланга

$$\tau_{\text{вых}} = -\frac{1}{\mu * R} \ln U \qquad (5)$$

Среднее число заявок в системе

$$N(\rho, m) = \sum_{k=0}^{m+1} k * P_k = \sum_{k=0}^{m+1} k * \rho^k * P_o$$

$$k * \rho^k = \rho * \frac{d}{d\rho} \rho^k$$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}$$

$$N(\rho, m) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} * \rho * \frac{d}{d\rho} \sum_{k=0}^{m+1} \rho^k$$

$$\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{m+1}\rho^k = \sum_{k=0}^{m+1} k*\rho^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} k*\rho^{k-1} = \frac{1+(mp-m+\rho-2)*\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2}$$

$$N(\rho,m) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}*\rho*\frac{1+(mp-m+\rho-2)*\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2} =$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho^{m+2}}*\frac{1+(mp-m+\rho-2)*\rho^{m+1}}{1-\rho} \qquad (6)$$

Среднее число заявок в системе при $\rho = 1$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m+1}\rho^k} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

$$\lim_{\rho=1} P_o(\rho) = \lim_{\rho=1}\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{m+2} \text{ (по правилу Лопиталя)}$$

$$P_o(\rho = 1) = \frac{1}{m+2}$$

$$N(\rho = 1, m) = \sum_{k=0}^{m+1} k*P_k = \sum_{k=0}^{m+1} k*\rho^k*P_o$$

$$k*\rho^k = \rho*\frac{d}{d\rho}\rho^k$$

$$N(\rho = 1, m) = \frac{1}{m+2}*\rho*\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{m+1}\rho^k$$

$$\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{m+1}\rho^k = \sum_{k=0}^{m+1} k*\rho^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} k*\rho^{k-1} = \frac{(m+2)*(m+1)}{2} \text{ при } \rho = 1$$

$$N(\rho = 1, m) = \frac{1}{m+2}*\rho*\frac{(m+2)*(m+1)}{2} = \frac{m+1}{2} \qquad (7)$$

Метод Монте-Карло

1. У поступившей заявки есть 3 варианта последующих действий:
   - Если канал обслуживания и очередь пусты, то заявка поступает на обслуживание. Генерируем СВ $U \in [0; 1]$. Рассчитываем $\tau_{\text{вх}}$ для следующей заявки по формуле (2) и $\tau_{\text{вых}}$ для данной заявки по формуле (3).
   - Если канал обслуживания занят, но в очереди есть свободное место, то заявка поступает в очередь. Генерируем СВ $U \in [0; 1]$. Рассчитываем $\tau_{\text{вх}}$ для следующей заявки по формуле (2).
   - Если канал обслуживания и очередь заняты, то заявка уходит в отказ. Генерируем СВ $U \in [0; 1]$. Рассчитываем $\tau_{\text{вх}}$ для следующей заявки по формуле (2).
2. Когда заявка обслужена, то она уходит из системы.
3. В данной работе количество заявок в системе измерялось после каждых 10 обслуженных. То есть, как только 10 заявок покинули систему, то проверяется состояние системы. Количество заявок – k_i.
4. Определяем среднее количество заявок в системе для каждого ρ по формуле.

$$N(\rho) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} k_i \qquad (8)$$

5. Находим среднее квадратичное отклонение через дисперсию, используя формулы:

   Дисперсия

$$D(\rho) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(k_i - N(\rho))^2 \qquad (9)$$

   Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(\rho) = \sqrt{D(\rho)} \qquad (10)$$

Были построены графики зависимости среднего количества заявок в системе (N) и среднего квадратичного отклонения (S) от нагрузки на СМО (ρ) – $N(\rho)$ и $S(\rho)$ для разных вариантов моделей.

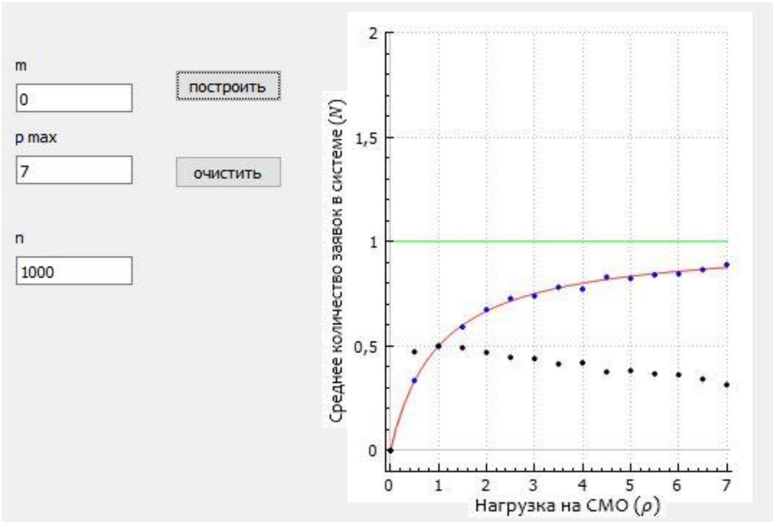

Рис.1. Модель $< M \mid M \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при m=0, n=1000

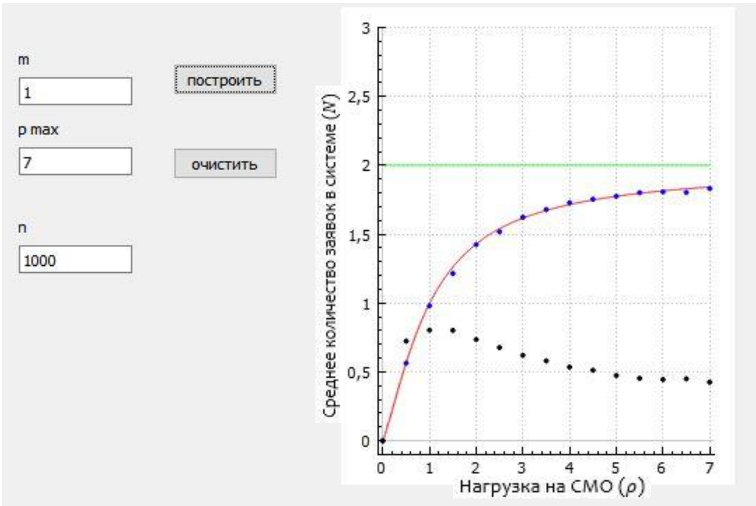

Рис.2. Модель $< M \mid M \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при m=1, n=1000

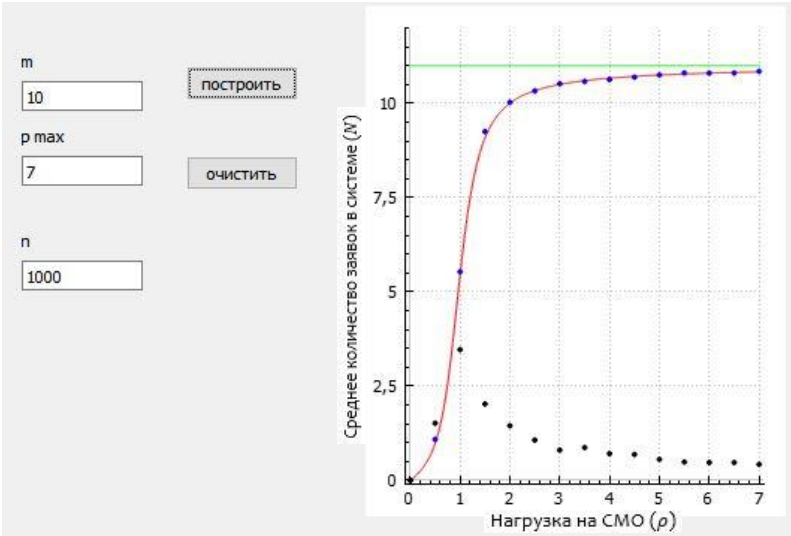

Рис.3. Модель $< M \mid M \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при m=10, n=1000

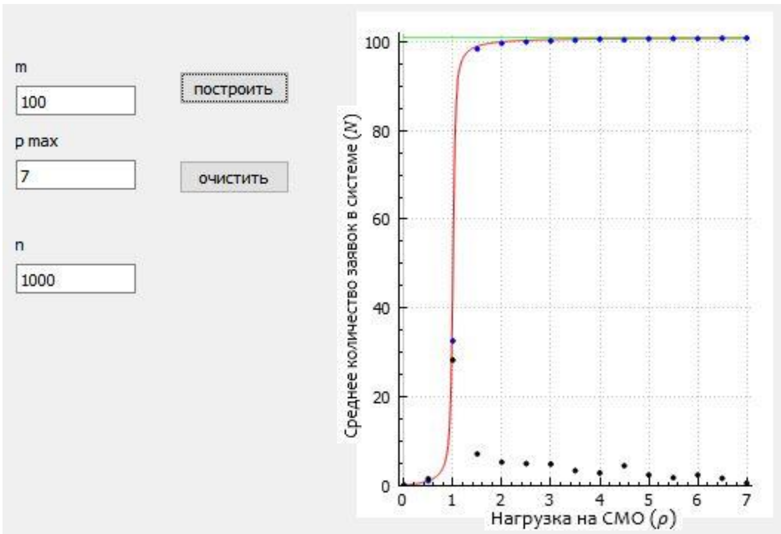

Рис.4. Модель $< M \mid M \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при m=100, n=1000

Построим немарковские модели, когда один или оба потока событий являются потоками Эрланга с помощью метода Монте-Карло.

Результаты

Варианты моделей:

1. $< M \mid E_R \mid 1 \mid m >$

M – Марковский поток заявок

E_R – Эрланговский поток обслуживания

1 – количество каналов обслуживания

m – количество мест в очереди

В данном случае $\tau_{\text{вх}}, \tau_{\text{вых}}$ по формулам (2) и (5) соответственно.

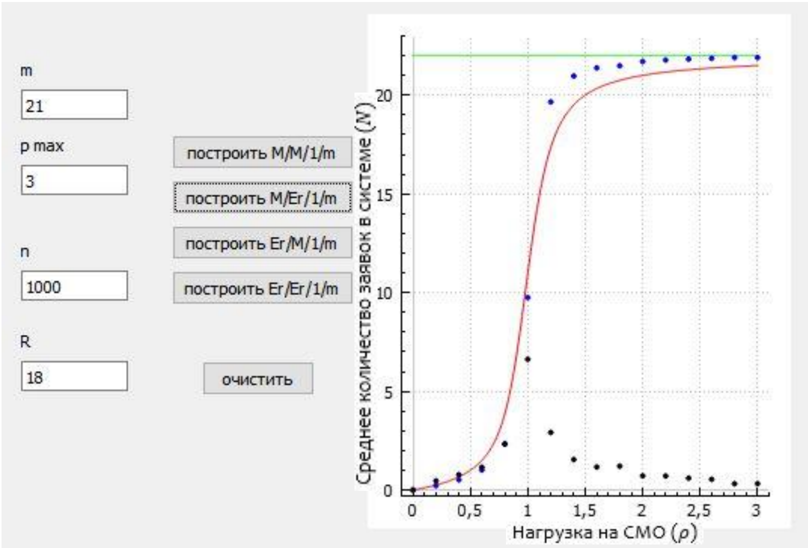

Рис.5. Модель $< M \mid E_R \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при n=1000

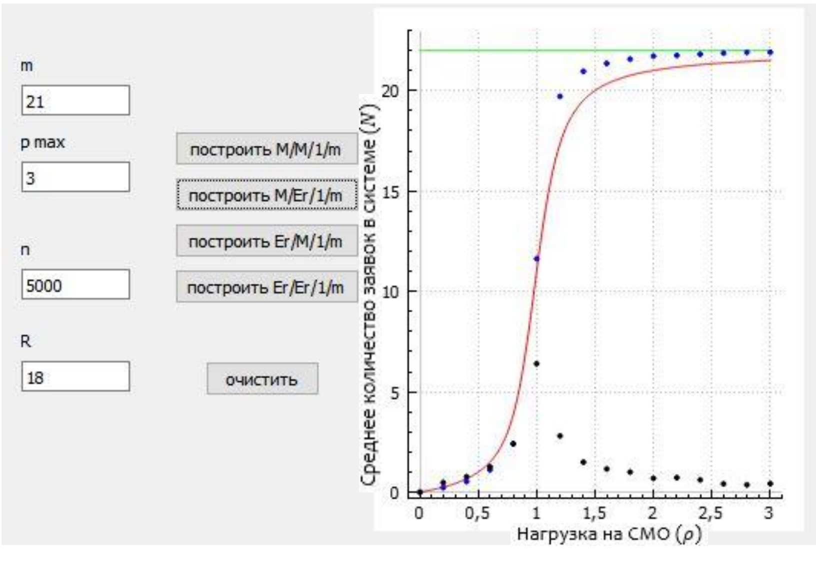

Рис.6. Модель $< M \mid E_R \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при n=5000

2. $< E_R \mid M \mid 1 \mid m >$

E_R – Эрланговский поток заявок

M – Марковский поток обслуживания

1 – количество каналов обслуживания

m – количество мест в очереди

В данном случае $\tau_{\text{вх}}, \tau_{\text{вых}}$ по формулам (4) и (3) соответственно.

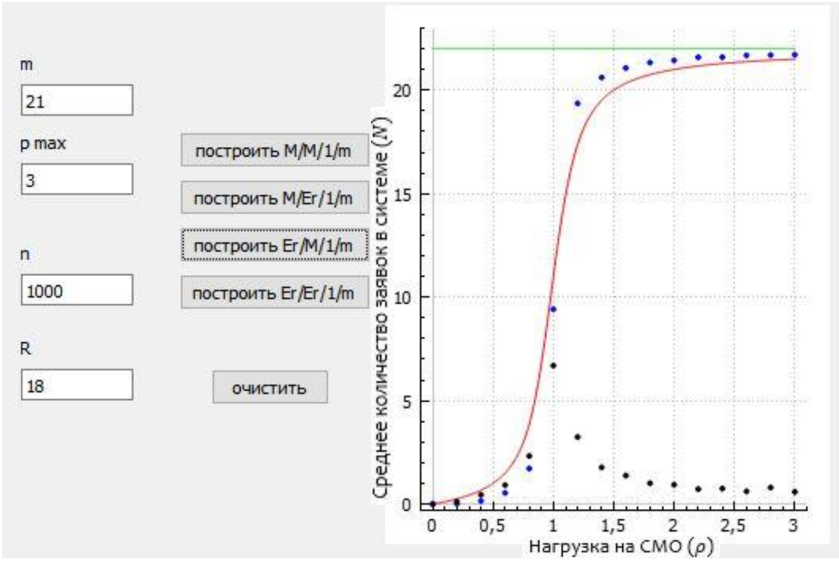

Рис.7. Модель $< E_R \mid M \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при n=1000

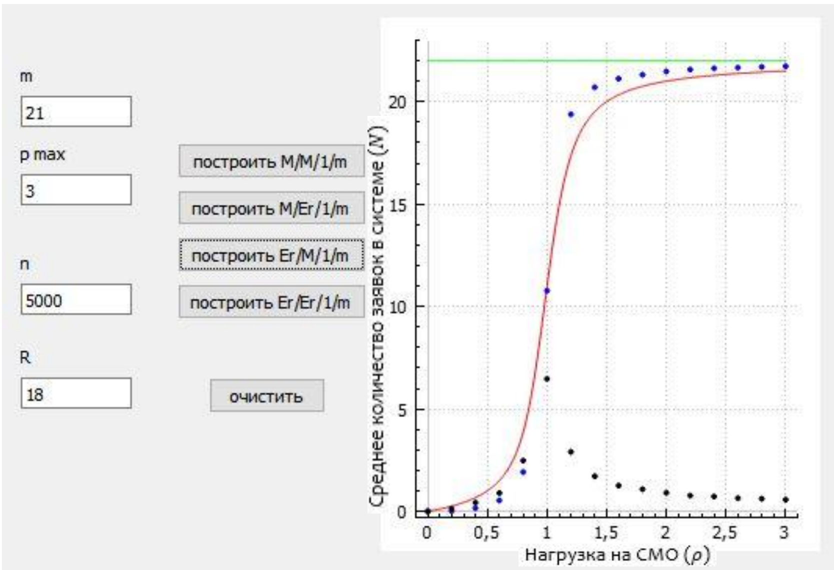

Рис.8. Модель $< E_R \mid M \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при n=5000

3. $< E_R \mid E_R \mid 1 \mid m >$

E_R – Эрланговский поток заявок

E_R – Эрланговский поток обслуживания

1 – количество каналов обслуживания

m – количество мест в очереди

В данном случае $\tau_{\text{вх}}, \tau_{\text{вых}}$ по формулам (4) и (5) соответственно.

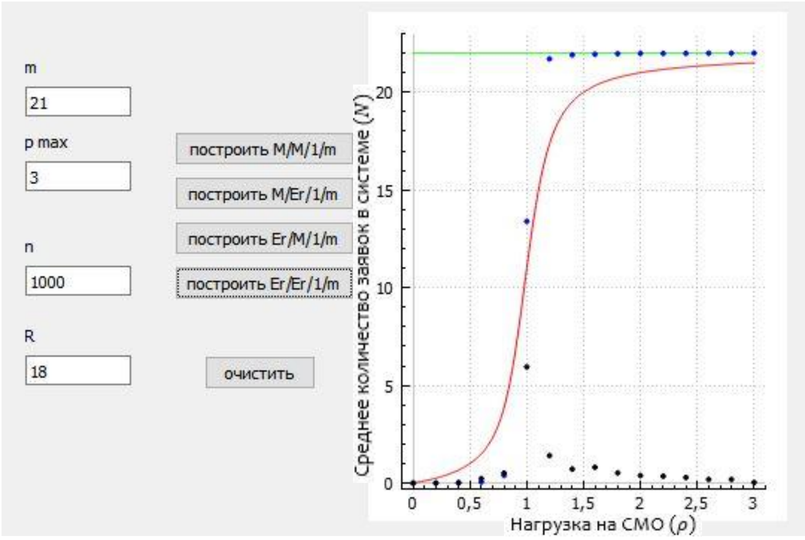

Рис.9. Модель $< E_R \mid E_R \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при n=1000

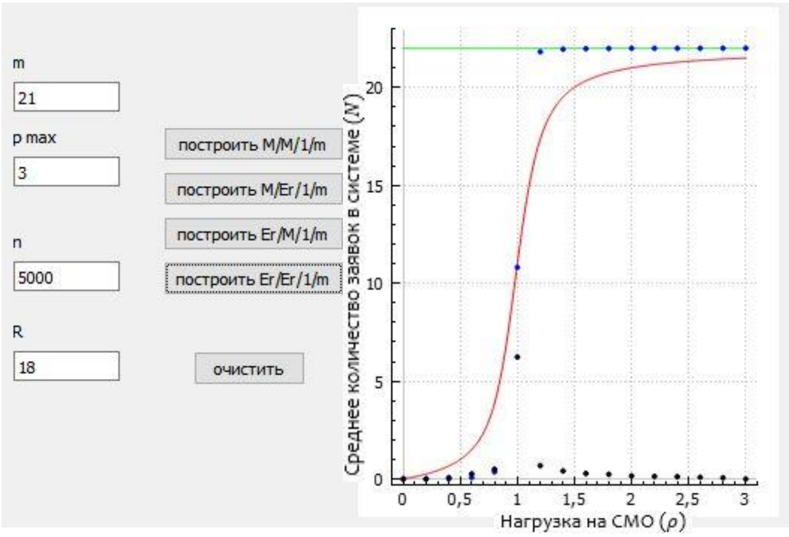

Рис.10. Модель $< E_R \mid E_R \mid 1 \mid m >$. Графики $N(\rho), S(\rho)$ при n=5000

Вывод

В ходе лабораторной работы была построена имитационная модель системы массового обслуживания (СМО).

Модель $< M \mid M \mid 1 \mid m >$ совпадает с теоретической, так как используются только марковские потоки.

Представлены такие варианты моделей, как $< M \mid E_R \mid 1 \mid m >$, $< E_R \mid M \mid 1 \mid m >$, $< E_R \mid E_R \mid 1 \mid m >$, где один или оба потока являются потоками Эрланга.

Из графиков видно, что из данных вариантов наиболее приближена к теоретической модель $< E_R \mid M \mid 1 \mid m >$. Наибольшие расхождения с теорией у модели $< E_R \mid E_R \mid 1 \mid m >$, так как используются только потоки Эрланга.