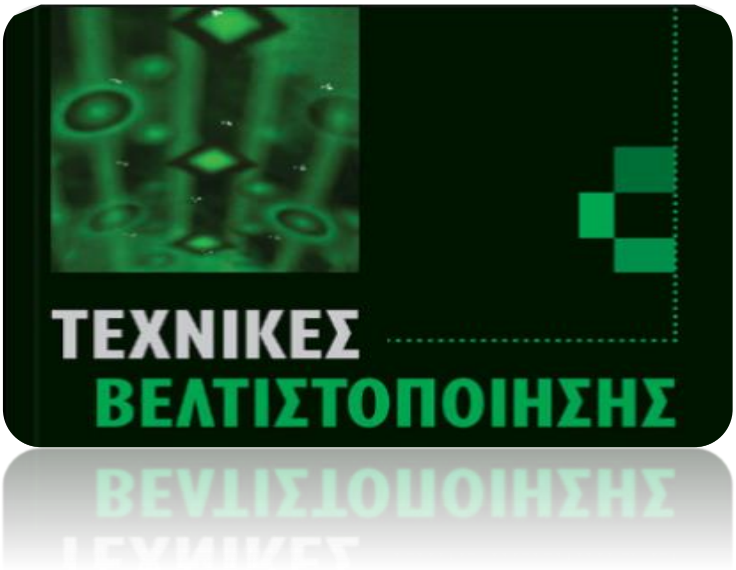


ΕΥΓΕΝΙΑ ΔΟΥΜΟΥ

evgedoum@ece.auth.gr

ΑΕΜ: 10178

3η Εργαστηριακή Άσκηση:

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου Με Προβολή

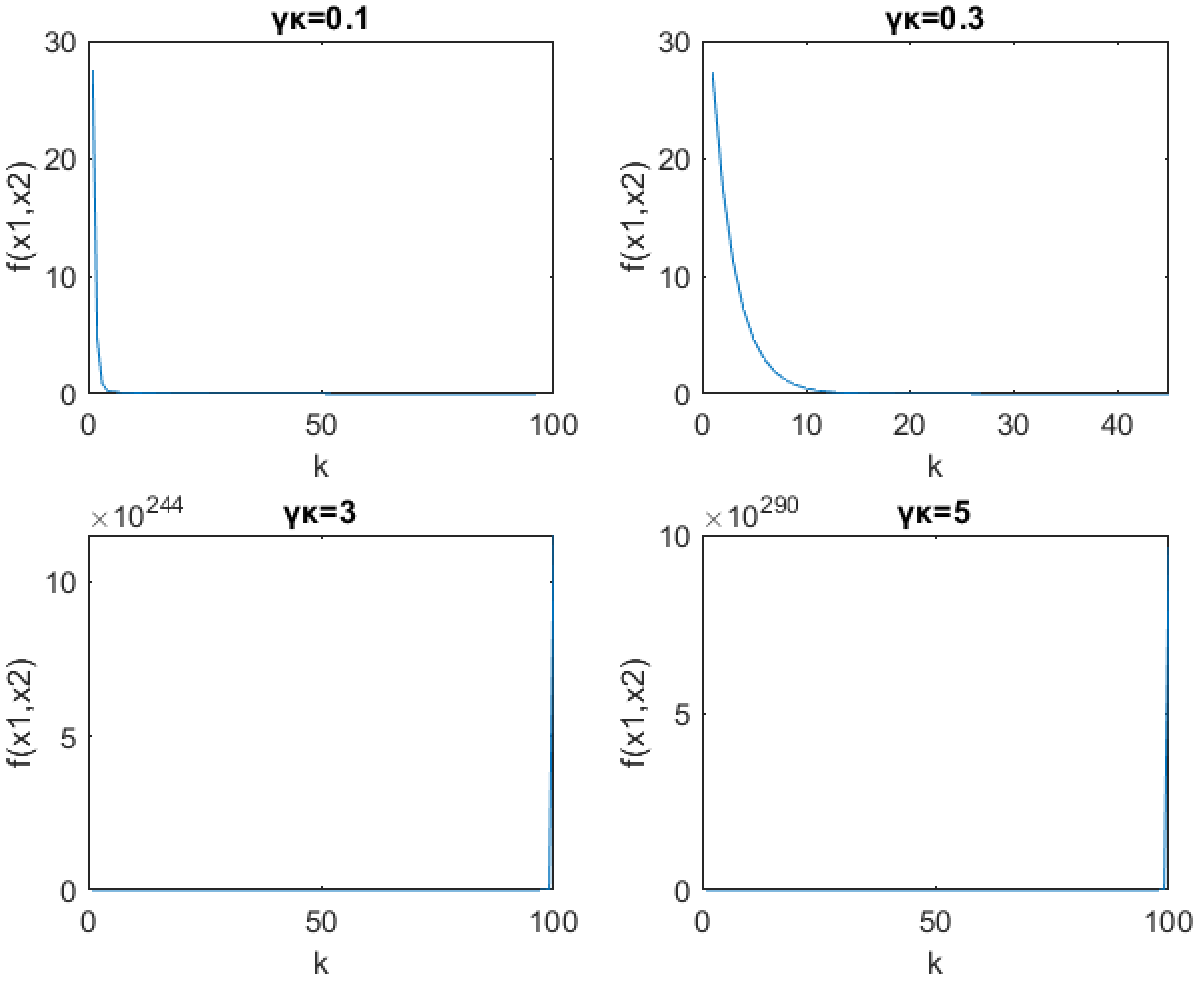
Οι γραφικές παραστάσεις προκύπτουν από υλοποίηση στο Matlab της κάθε μεθόδου , εφαρμόζοντας τον κώδικα στην δοσμένη συνάρτηση πολλών μεταβλητών

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathrm{f(x)} = \frac{1}{3} \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 \ , \ x = [x_1 \quad x_2]^T$$

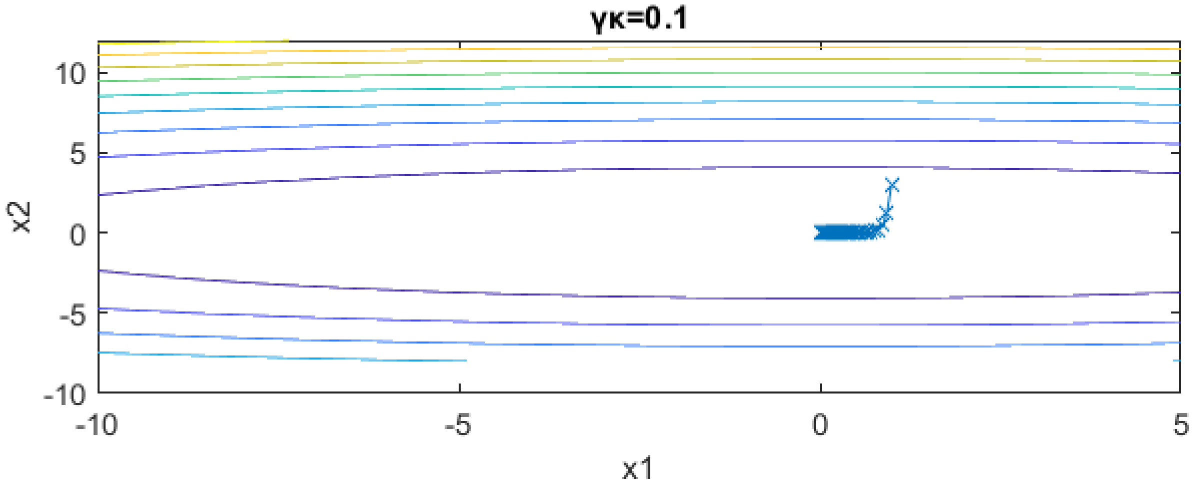
Θέμα 1: Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (E1.m & megistikathodos.m)

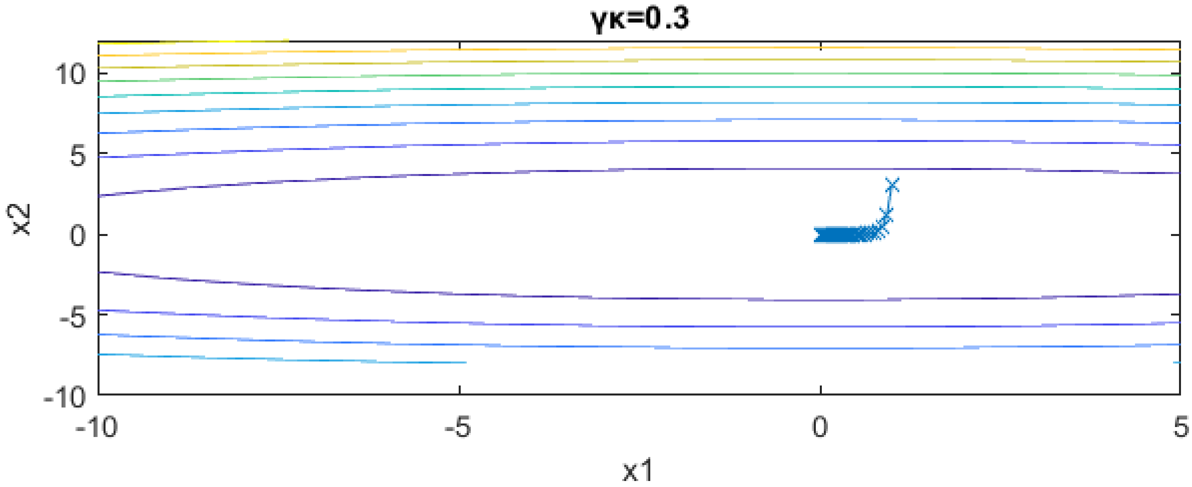
Στεθερό ε = 0.001 και μεταβλητό γ_κ και τυχαίο αρχικό σημείο εκκίνησης (1,3)

1. γ_κ = 0.1
2. γ_κ = 0.3
3. γ_κ = 3
4. γ_κ = 5



Ισχύουν οι περιορισμοί $-10 \leq x_1 \leq 5$ και $-8 \leq x_2 \leq 12$

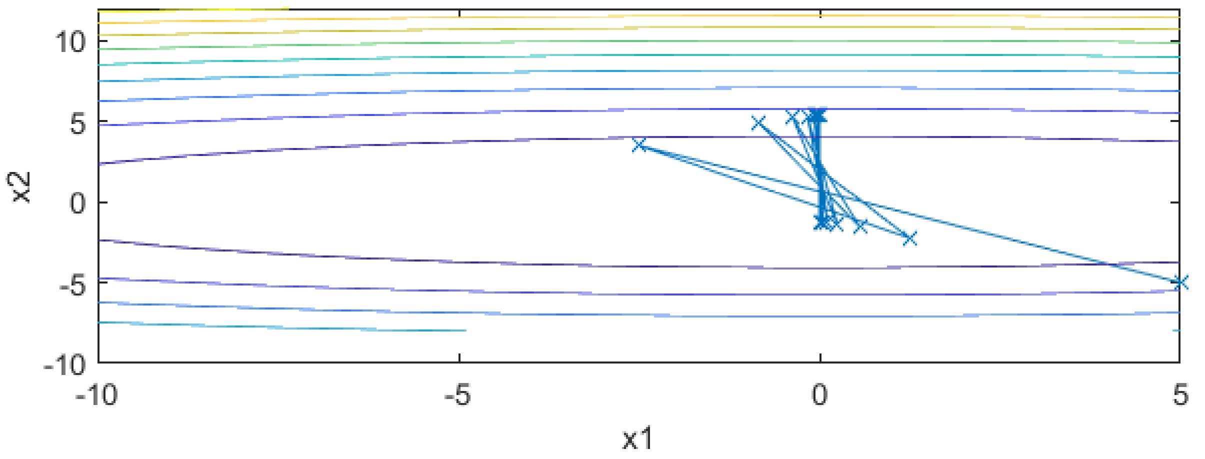


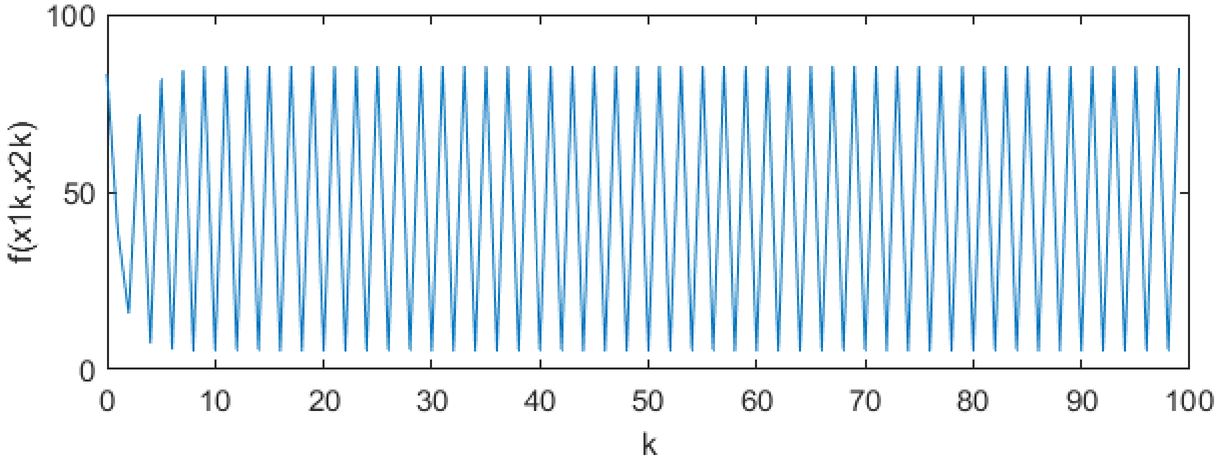


<u>Θέμα 2:</u> Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

(E2.m & mkathodosprovoli.m)

Στεθερό ε = 0.01 και $γ_κ$ = 0.5 , s_k = 5 και αρχικό σημείο εκκίνησης (5,-5)

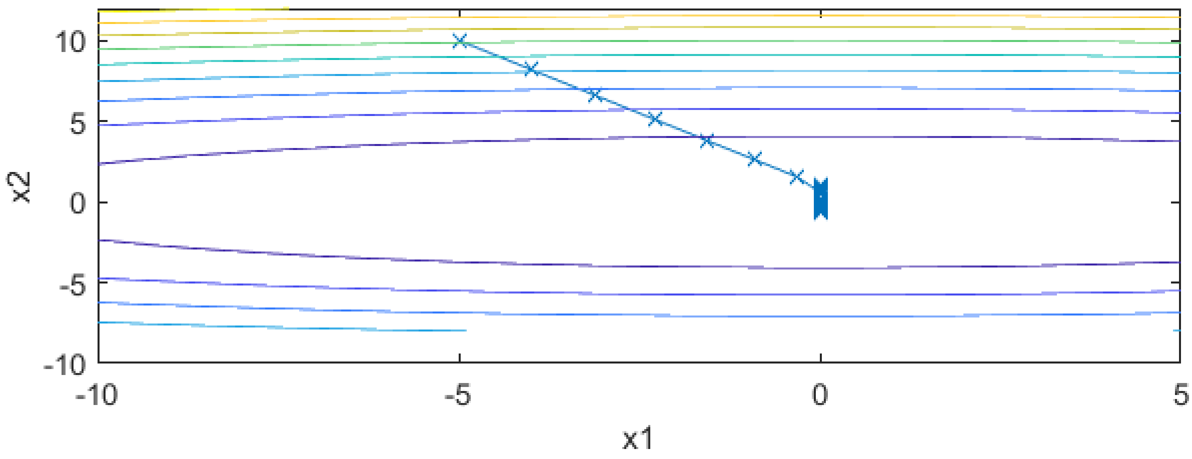


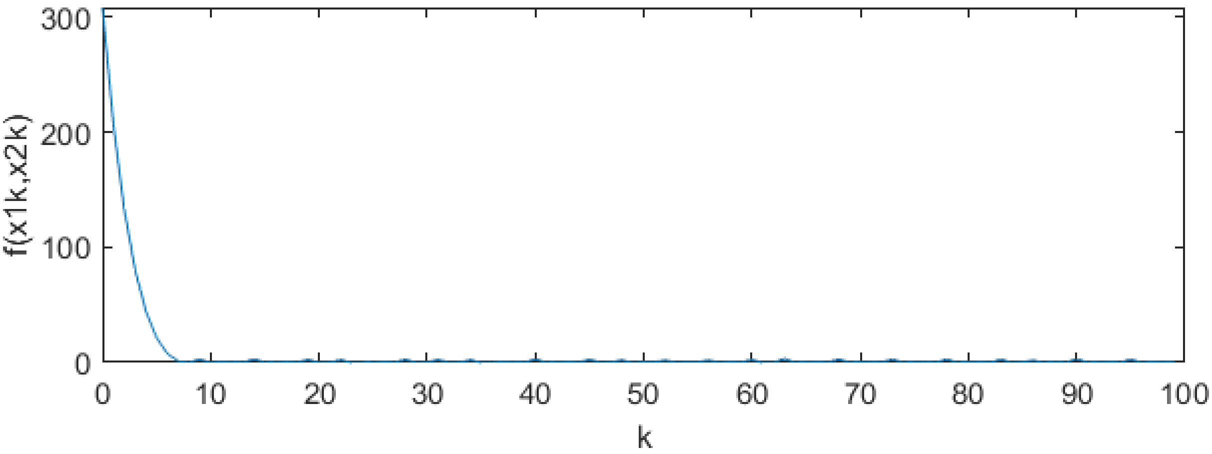


<u>Θέμα 3:</u> Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

(E3.m & mkathodosprovoli.m)

Στεθερό ε = 0.01 και $γ_κ$ = 0.1 , s_k = 15 και αρχικό σημείο εκκίνησης (-5,10)

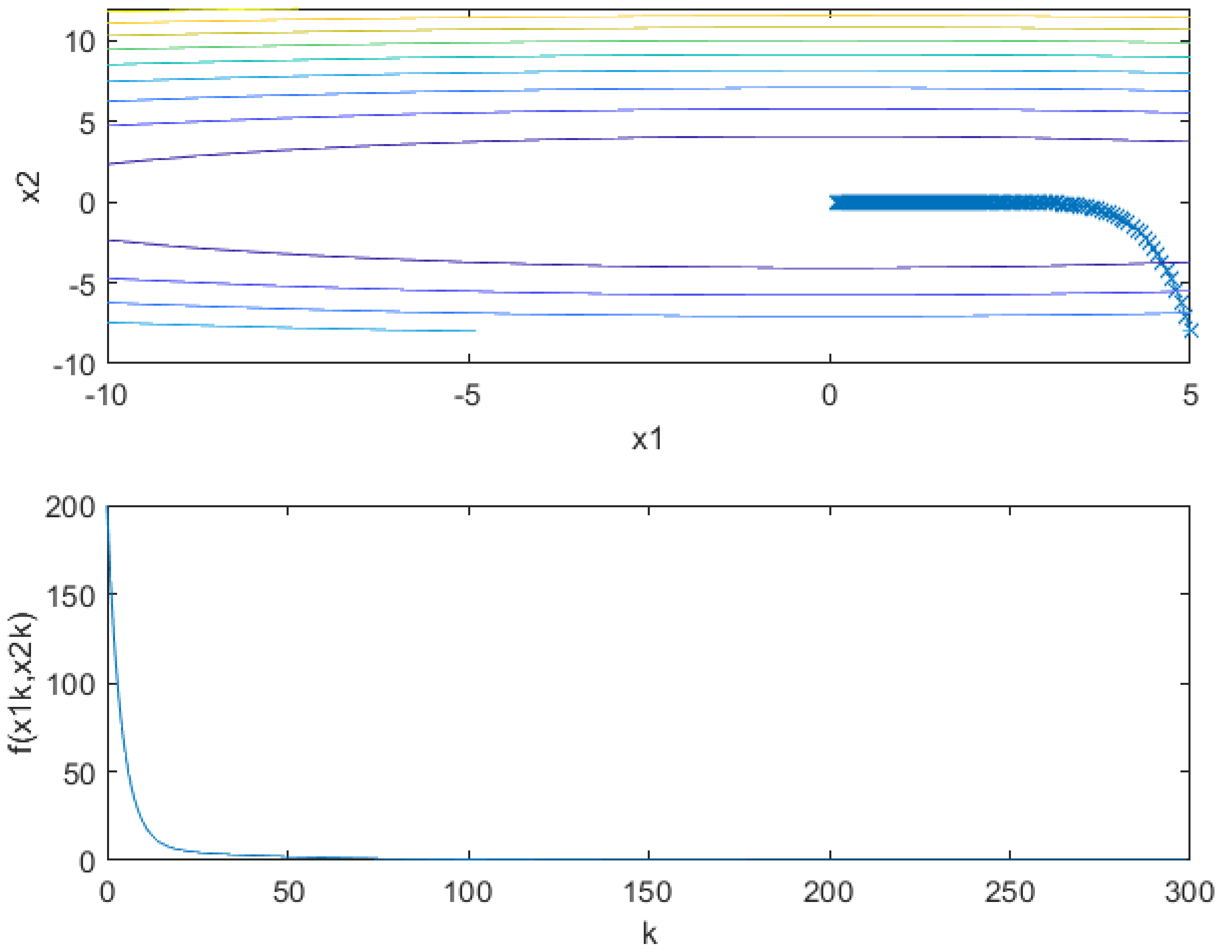




<u>Θέμα 4:</u> Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

(E4.m & mkathodosprovoli.m)

Στεθερό ε = 0.01 και $γ_κ$ = 0.2 , s_k = 0.1 και αρχικό σημείο εκκίνησης (8,-10)



ΣΧΟΛΙΑ-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το ελάχιστο της συνάρτησης είναι το (0,0).
2. Θέτουμε max_step ίσο με 100 για να τερματίζουν οι αλγόριθμοι, πέρα του θέματος 4 όπου το max_step ορίστηκε μεγαλύτερο λόγω της αργής σύγκλισης.
3. Η μέθοδος στο ΘΕΜΑ 1 πλησιάζει αρκετά το ελάχιστο για τις μικρές τιμές του γ_κ, ενώ στις δύο τελευταίες περιπτώσεις η μέθοδος αποκλίνει αρκετά, παρατηρούμε και αύξηση στις τιμές της συνάρτησης.
4. Απόδειξη αποτελεσμάτων με μαθηματική αυστηρότητα:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο μέγιστης καθόδου: $x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)$

Δηλαδή: $\begin{cases} x_{1_{k+1}} = x_{1_k} - \gamma_k \frac{2}{3} x_{1_k} \\ x_{2_{k+1}} = x_{2_k} - \gamma_k 6x_{2_k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1_{k+1}} = (1 - \frac{2}{3}\gamma_k) x_{1_k} \\ x_{2_{k+1}} = (1 - 6\gamma_k) x_{2_k} \end{cases}$

Για να συγκλίνει η μέθοδος:

$$\begin{cases} \left|1 - \dfrac{2}{3}\gamma_k\right| < 1 \\ |1 - 6\gamma_k| < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 < 1 - \dfrac{2}{3}\gamma_k < 1 \\ -1 < 1 - 6\gamma_k < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 < -\dfrac{2}{3}\gamma_k < 0 \\ -2 < -6\gamma_k < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < \gamma_k < 3 \\ 0 < \gamma_k < \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Επομένως, θα πρέπει να ισχύει ο εξής περιορισμός: $\mathbf{0 < \gamma_k < 0.3}$

5. Στη <u>Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με Προβολή</u> χρησιμοποιείται η συνάρτηση provoli.m η οποία υπολογίζει βάσει του διαστήματος και των περιορισμών που έχουν τεθεί την προβολή του $x_k - s_k \nabla f(x_k)$ στο διάστημα X.

6. Στο <u>ΘΕΜΑ 2</u>
   $\gamma_k = 0.5 > 0.3$ επομένως η μέθοδος δε θα συγκλίνει, όπως φαίνεται και από την γραφική παράσταση αφού η $f(x_1, x_2)$ αλλάζει συνεχώς κατεύθυνση και δε πλησιάζει το σημείο ελαχίστου σε σύγκριση με τις δύο πρώτες περιπτώσεις του θέματος 1.
7. Στο <u>ΘΕΜΑ 3</u> και στο <u>ΘΕΜΑ 4</u>
   $\gamma_k = 0.1 < 0.3$ και $\gamma_k = 0.2 < 0.3$ αντίστοιχα, επομένως η μέθοδος θα συγκλίνει και στις δύο περιπτώσεις, όπως φαίνεται και από τις γραφικές παραστάσεις αφού η $f(x_1, x_2)$ και στα δύο θέματα είναι μια συνεχής συνάρτηση.

8. Στο <u>ΘΕΜΑ 4</u>
   το σημείο εκκίνησης (8,-10) δεν ανήκει στο κυρτό σύνολο των περιορισμών που έχουν οριστεί ($-10 \leq \mathrm{x}_1 \leq 5$ και $-8 \leq \mathrm{x}_2 \leq 12$), οπότε το σημείο εκκίνησης βάσει του αλγορίθμου της προβολής θα γίνει το (5,-8).