Теорема Гаусса
и ее применения

Канал автора—https://t.me/kinenergy228

Содержание

P.S. Содержание и все, что выделено красным, можно тыкать

1 Поток вектора напряженности

Перед определением потока вектора напряженности поймем, что вообще такое ***поток***. Для этого можно провести параллель с потоком воды, текущей со скоростью ϑ и пронизывающей некоторую площадку S (площадка определяется вектором $\vec{S} = S\vec{n}$, где $\vec{n}$ - вектор нормали к площадке).

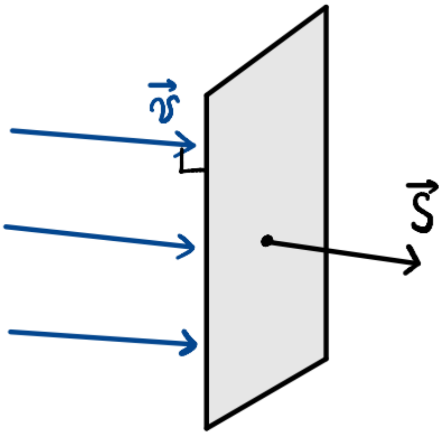


Рис. 1.1

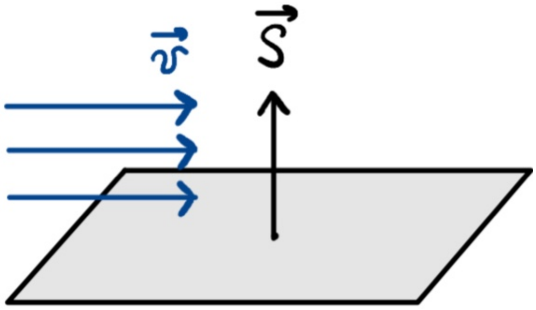


Рис. 1.2

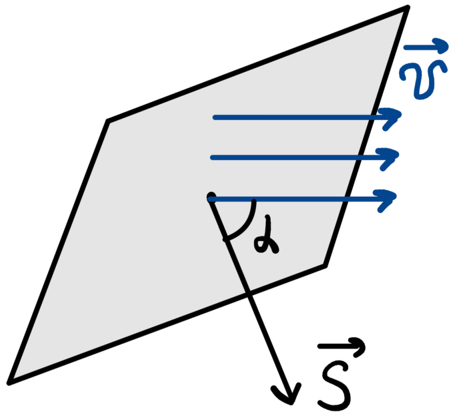


Рис. 1.3

Для ситуации, изображенной на рисунке 1.1 ($\vec{\vartheta} \parallel \vec{S}$) поток будет равен:

$$\Phi = \vartheta S$$

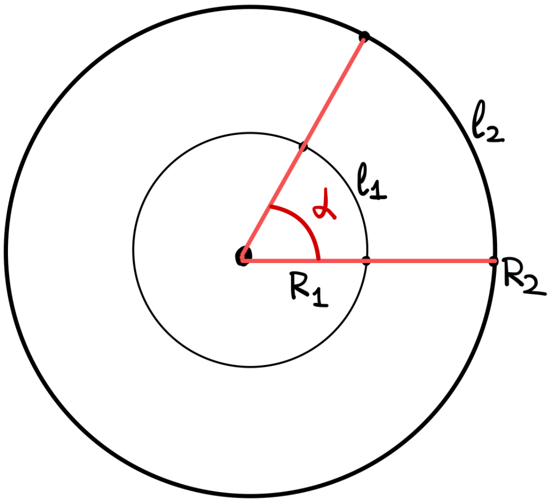
Очевидно, что для ситуации с рисунка 1.2 ($\vec{\vartheta} \perp \vec{S}$) поток будет равен нулю(вода просто не попадает на площадку), т.е. $\Phi = 0$
Что делать с третьей ситуацией, когда вода течет под углом к площадке? Тогда можно сказать, что: $\boxed{\Phi = \vec{\vartheta}\vec{S}}$ (скалярное произведение)
Абсолютно аналогично можно определить и поток вектора напряженности электрического поля[1]:

$$\boxed{\Phi = \vec{E}\vec{S}} \tag{1}$$

[1] поток прямо пропорционален числу силовых линий, проходящих через площадку

2 Телесный угол

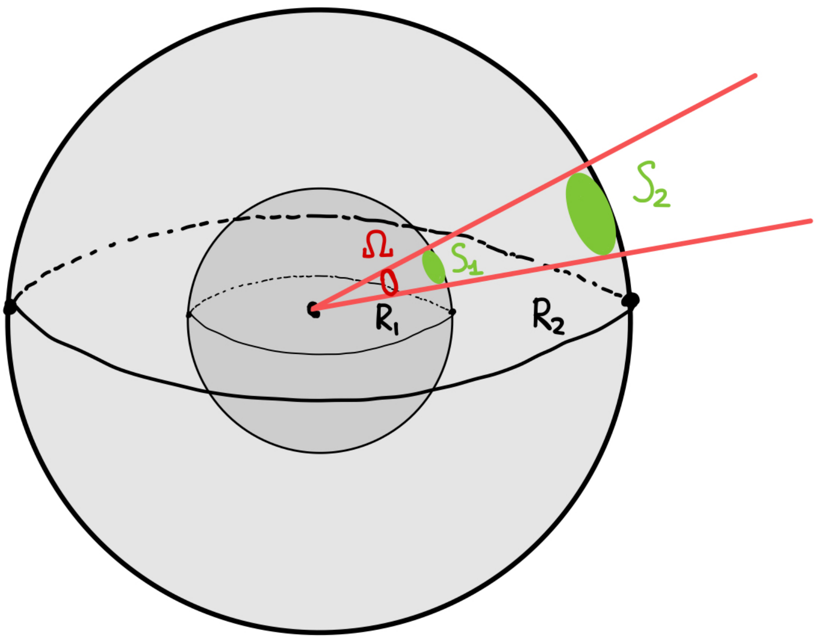
Далее нужно познакомиться с понятием ***телесного угла***. Но сначала вспомним как определяется плоский угол



По определению:

$$\alpha = \frac{\ell_1}{R_1} = \frac{\ell_2}{R_2} = const$$

Очень похоже можно определить и телесный угол Ω, только вместо окружностей будут сферы



$$\boxed{\Omega = \frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2} = const} \tag{2}$$

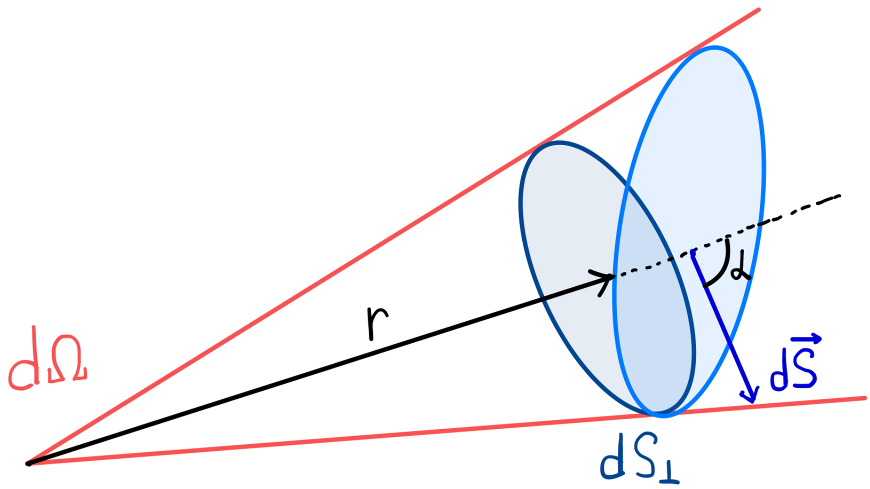
В формуле (2) S_1 и S_2 — площади сферических сегментов, которые "выделяет" на сферах данный телесный угол. Если вспомнить выражение для площади сферического сегмента и подставить ее в (2), то получится еще одна формула для телесного угла:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha) \tag{3}$$

, где α — угол полураствора конуса, соответствующего телесному углу Ω.

Если подставить площадь сферы $S = 4\pi R^2$ в формулу (2), то получим, что полный телесный угол $\Omega_{\text{полн}}$, который соответствует всему пространству, равен 4π.

Далее поговорим про элементарный (малый) телесный угол $d\Omega$:

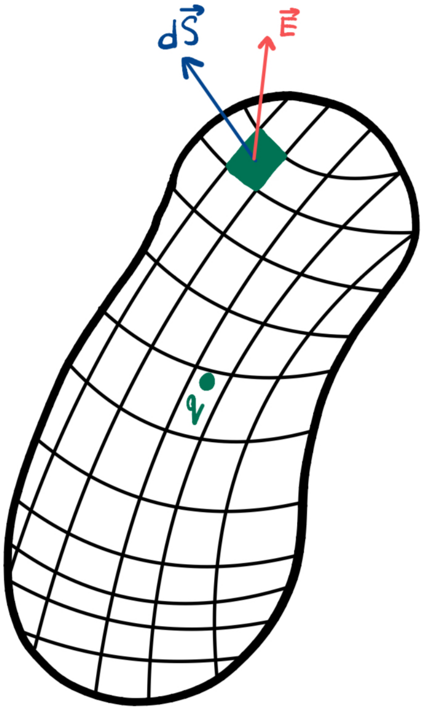


Понятно, что под углом $d\Omega$ видна площадка $dS_\perp$, которая перпендикулярна радиус-вектору. Но ведь под таким же углом видна и площадка dS. Из геометрии понятно, что $dS_\perp = dS\cos\alpha$, тогда:

$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} \tag{4}$$

3 Теорема Гаусса

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства теоремы Гаусса.



Пускай у нас есть точечный заряд q. Окружим его произвольной выпуклой поверхностью. Выберем на этой поверхности малую площадку $d\vec{S}$, которую пронизывает вектор напряженности $\vec{E}$. Тогда элементарный поток через эту площадку:

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S}$$

Тогда полный поток через всю поверхность:

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S}$$

Теперь если подставить формулу для напряженности точечного заряда $\vec{E} = \frac{kq\vec{r}}{r^3}$, то

$$\Phi = \oint \frac{kq}{r^3} \vec{r} d\vec{S} = kq \oint \frac{r dS \cos\alpha}{r^3} = kq \oint \frac{dS \cos\alpha}{r^2}$$

Чему равно подынтегральное выражение в правой части? По формуле (4) это элементарный телесный угол $d\Omega$, под которым видна площадка dS:

$$\Phi = kq \oint d\Omega$$

Интеграл берется по замкнутому контуру, а полный телесный угол равен 4π, значит:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

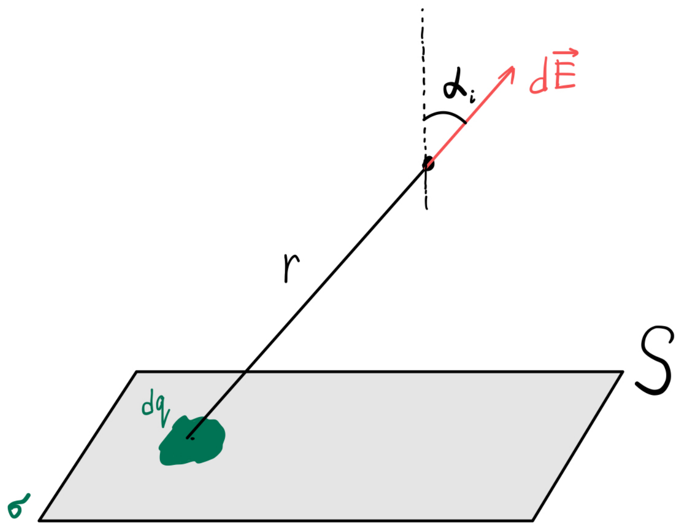
1) А если внутри поверхности не один заряд, а несколько? Тогда в правой части выражения (5) будет стоять суммарный заряд внутри поверхности.
2) А что если заряды располагаются на границе поверхности? Тогда все очень плохо и не стоит выбирать такие поверхности.

Итак, ***теорема Гаусса***: *поток вектора напряжённости электрического поля через любую произвольно выбранную замкнутую поверхность равен суммарному заряду, находящемуся внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную:*

$$\oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \tag{6}$$

Если сумму в правой части формулы еще понятно как считать, то интеграл в левой части не очень. Но нас спасает то, что замкнутую поверхность можно выбирать произвольно. Это сильно упростит нам жизнь, в чем вы еще убедитесь.

4 Нормальная компонента поля плоского распределения зарядов



Пускай у нас есть площадка S, равномерно заряженная с поверхностой плотностью зарядов σ (т.е. $\sigma = \frac{dq}{dS} = const$). Выделим на этой площадке заряд $dq = \sigma dS$. Тогда напряженность поля от него:

$$d\vec{E} = \frac{k\sigma dS\vec{r}}{r^3}$$

Тогда нормальная компонента поля по модулю:

$$dE_{\text{n}} = \frac{k\sigma dS \cos\alpha_{\text{i}}}{r^2}$$

Полная нормальная компонента напряженности от всей площадки будет равна:

$$E_{\text{n}} = \int\limits_S dE_{\text{n}} = \int\limits_S \frac{k\sigma dS\cos\alpha_{\text{i}}}{r^2} = k\sigma \int\limits_S \frac{dS\cos\alpha_{\text{i}}}{r^2}$$

Подыинтегральное выражение нам уже знакомо. Это телесный угол[2], под которым из данной точки виден заряд dq:

$$E_{\text{n}} = k\sigma \int\limits_S d\Omega$$

Итак,

$$\boxed{E_{\text{n}} = k\sigma\Omega} \tag{7}$$

5 Гравитационная теорема Гаусса

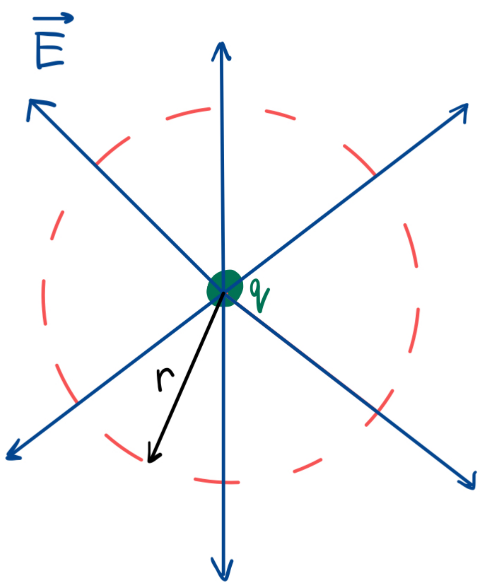
Гравитационное и электростатическое поля очень похожи(закон Кулона и закон Всемирного тяготения тому подтверждение). Поэтому неудивительно, что аналог теоремы Гаусса есть и у этого поля. Выглядит эта формула так:

$$\oint\limits_S \vec{g}d\vec{S} = 4\pi G \sum_i m_{\text{i}} \tag{8}$$

, где g—ускорение свободного падения, G—гравитационная постоянная.

6 Поля различных тел

6.1 Поле точечного заряда



[2] Ω – телесный угол, под которым из данной точки видна вся площадка S

Найдем поле точечного заряда, найдем $E(r)$. Сначала нужно выбрать поверхность, для которой будем писать теорему Гаусса. Из симметрии поля точечного заряда можно утверждать, что его поле радиальное (как на рисунке). Тогда будет разумно выбрать сферу радиуса r нашей гауссовой поверхностью. Итак,

$$\oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Как посчитать скалярное произведение из левой части? Так так поле радиально, а наша поверхность это сфера, то угол между $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ равен $0°$, тогда:

$$\vec{E} d\vec{S} = E dS \cos\alpha = E dS$$

Так как поле радиально, то E можно вынести за знак интеграла и получится:

$$E \oint\limits_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Интеграл стал гораздо проще. Это площадь гауссовой поверхности. Так как это сфера, то:

$$\oint\limits_S dS = 4\pi r^2$$

Получаем, что

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

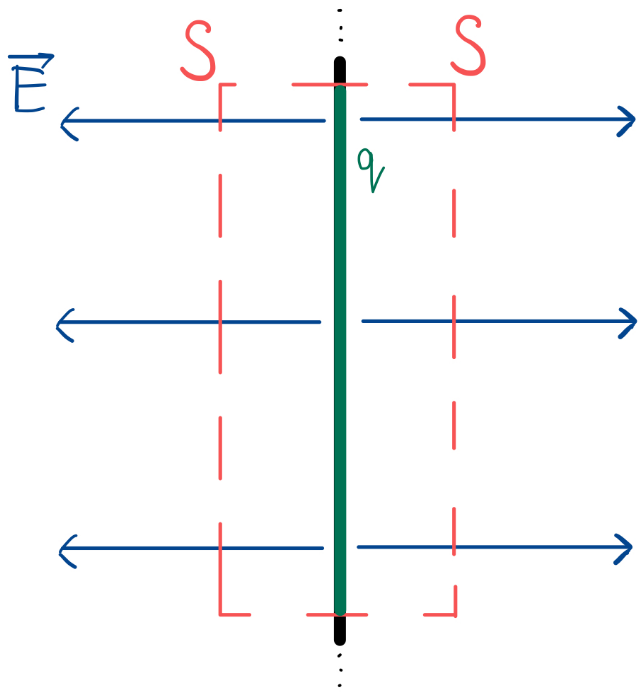
Итак,

$$\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kq}{r^2}}$$

Только что с помощью теоремы Гаусса была выведена формула для поля точечного заряда. Но ведь саму теорему мы доказывали используя это соотношение (это ведь закон Кулона).Так что же фундаментальнее: теорема Гаусса или закон Кулона? Оказывается, первое[3]. Дело в том, что переносчиком силы является поле, которое распространяется хоть и очень быстро, но с ограниченной скоростью (скоростью света). Поэтому если расположить заряды достаточно далеко друг от друга, то можно заметить нарушение закона Кулона.

[3]теорема Гаусса это одно из уравнений Максвелла

6.2 Поле бесконечной плоскости



Пусть у нас есть бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностой плотностью зарядов $\sigma > 0$. Из симметрии можно утверждать, что поле направлено перпендикулярно плоскости. Тогда выберем нашей гауссовой поверхностью параллелепипед с площадью боковой стороны S. Внутри этой поверхности находится заряд $q = \sigma S$. Почему именно параллелепипед? Потому что тогда $\vec{E}\vec{S} = ES\cos\alpha = ES$. Запишем для этой поверхности теорему Гаусса:

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

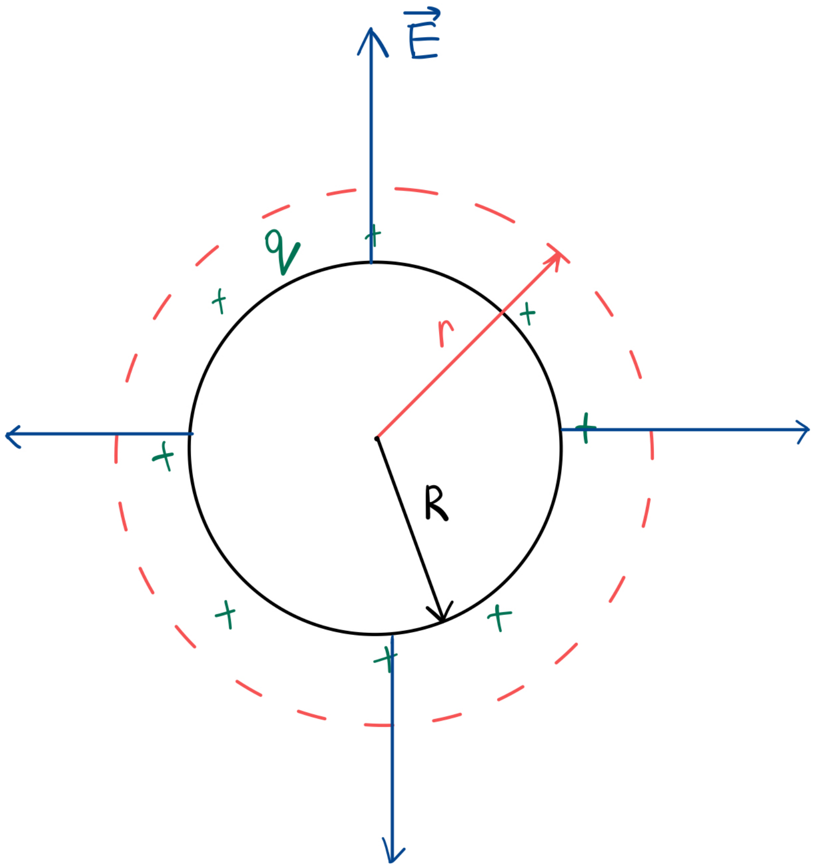
Сокращая S, получаем:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Заметим, что поле не зависит от расстояния до плоскости. Почему так станет ясно, если вывести эту формулу с помощью выражения (7). Телесный угол, под которым видна плоскость, не зависит от расстояния до нее и всегда равен 2π (так как бесконечная плоскость "занимает" половину пространства, а полное пространство соответствует телесному углу, равному 4π):

$$E_\text{n} = E = k\sigma \cdot 2\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

6.3 Поле сферы



Пусть у нас есть равномерно заряженная сфера радиуса R и несущая заряд q. Тут надо рассмотреть два различных случая.
Случай 1) Поле внутри сферы($r < R$). Внутри сферы зарядов нет, поэтому в правой части теоремы Гаусса будет стоять ноль, а значит и поле будет равно нулю.
Случай 2) Поле снаружи сферы($r > R$). Из симметрии, поле сферы будет направлено радиально. Тогда выберем гауссовой поверхностью сферу радиуса r. Получаем:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Итак,

$$E(r > R) = \frac{kq}{r^2}$$

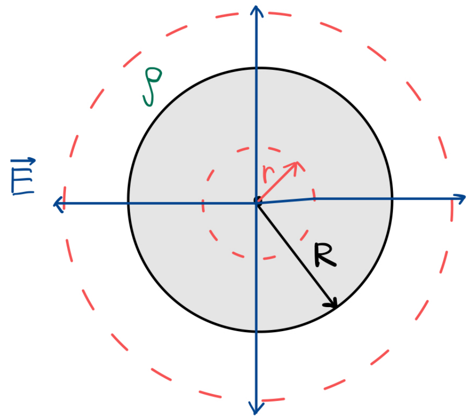
Получается, что снаружи сфера ведет себя как точечный заряд.

Итак[4],:

$$\boxed{E(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R \\ \frac{kq}{r^2}, & \text{если } r > R \end{cases}}$$

[4]поле на границе сферы не определено

6.4 Поле шара



Пусть у нас есть шар радиуса R, равномерно заряженный с обьемной плотностью зарядов ρ (т.е. $\rho = \frac{dq}{dV} = const$). Рассмотрим два случая.
Случай 1) Поле внутри шара($r \leq R$). Выберем гауссовой поверхностью сферу радиуса r, тогда:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$q(r)$ — заряд внутри гауссовой поверхности. Он равен:

$$q(r) = \rho V(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Подставляя и упрощая, получаем:

$$E(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

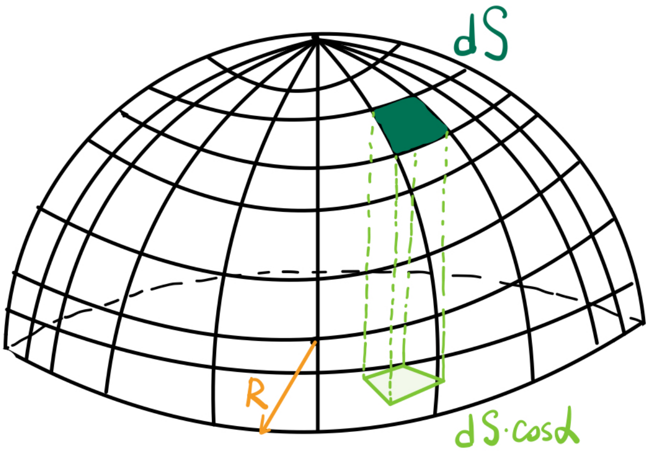
Случай 2) Поле снаружи шара($r \geq R$). Аналогично сфере, снаружи шар ведет себя как точечный заряд:

$$E(r \geq R) = \frac{kq}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Итак,

$$\boxed{E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, & \text{если } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, & \text{если } r \geq R \end{cases}}$$

6.5 Поле полусферы



Пусть у нас есть полусфера радиуса R, равномерно заряженная с поверхностной плотностью зарядов σ. Найдем поле в центре полусферы. Из симметрии понятно, что поле не будет иметь тангенциальной составляющей, тогда $E = E_\text{n}$. Выделим на полусфере малый заряд $dq = \sigma dS$. Тогда поле от него в центре полусферы:

$$dE = \frac{k\sigma dS}{R^2}$$

А нормальная составляющая:

$$dE_\text{n} = \frac{k\sigma dS \cos\alpha}{R^2}$$

Тогда полная напряженность от всей полусферы:

$$E = E_\text{n} = \int\limits_S dE_\text{n} = \frac{k\sigma}{R^2}\int\limits_S dS\cos\alpha$$

Заметим, что подынтегральное выражение это проекция площадки dS на основание полусферы, а значит:

$$\int\limits_S dS\cos\alpha = \pi R^2$$

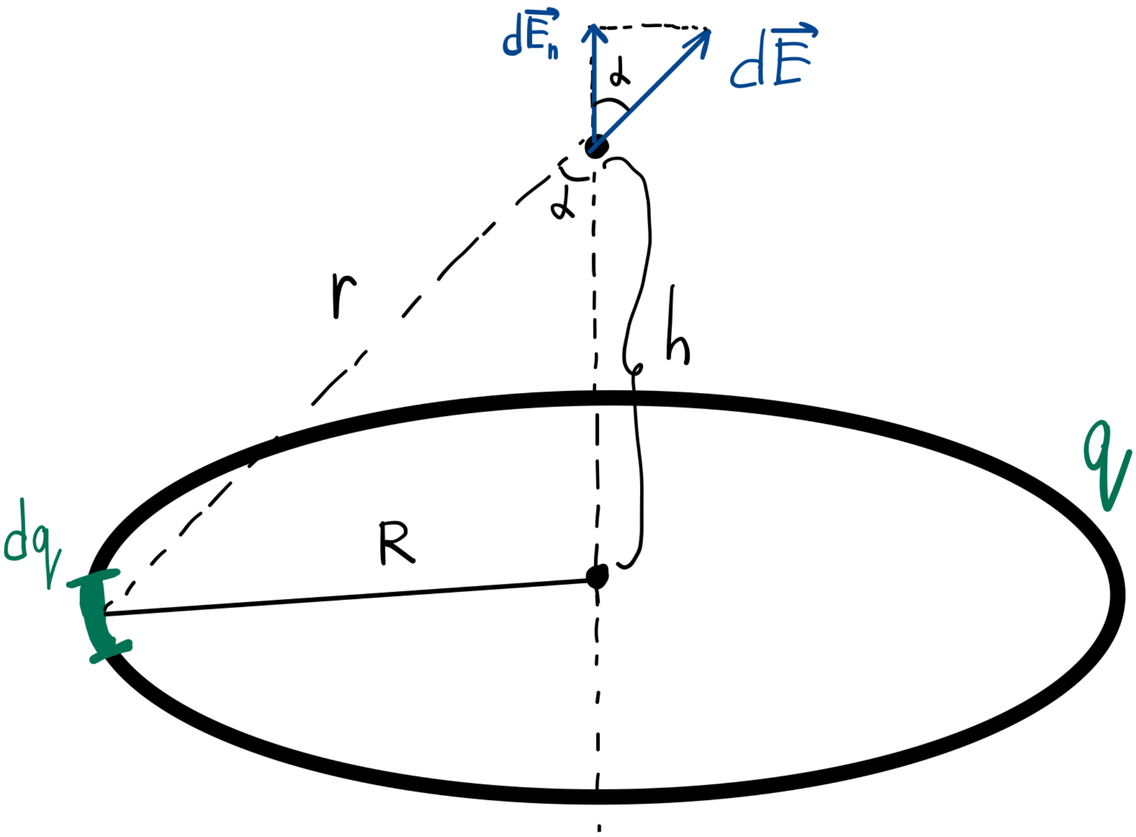
Тогда:

$$E = \frac{k\sigma}{R^2}\pi R^2$$

Итак,

$$\boxed{E = k\pi\sigma = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}}$$

6.6 Поле кольца



Пусть у нас есть кольцо радиуса R заряженное зарядом q. Найдем поле кольца на расстоянии h от от центра кольца.
Выделим на кольце малый заряд dq. Поле от него в данной точке:

$$d\vec{E} = \frac{k\vec{r} \cdot dq}{r^3}$$

Понятно, что общая тангенциальная составляющая поля от всего кольца будет равна нулю[5].Модуль нормальной составляющей поля малого заряда:

$$dE_{\mathrm{n}} = \frac{k \cdot dq}{r^2} \cos\alpha$$

Из геометрии,

$$\cos\alpha = \frac{h}{r}$$

Подставляем и упрощаем:

$$dE_{\mathrm{n}} = \frac{kh \cdot dq}{r^3} = \frac{kh \cdot dq}{(\sqrt{R^2 + h^2})^3}$$

[5]так как для любой точки кольца есть симметричная относительно центра кольца точка, и тангенциальные напряженности этих точек "убьют" друг друга

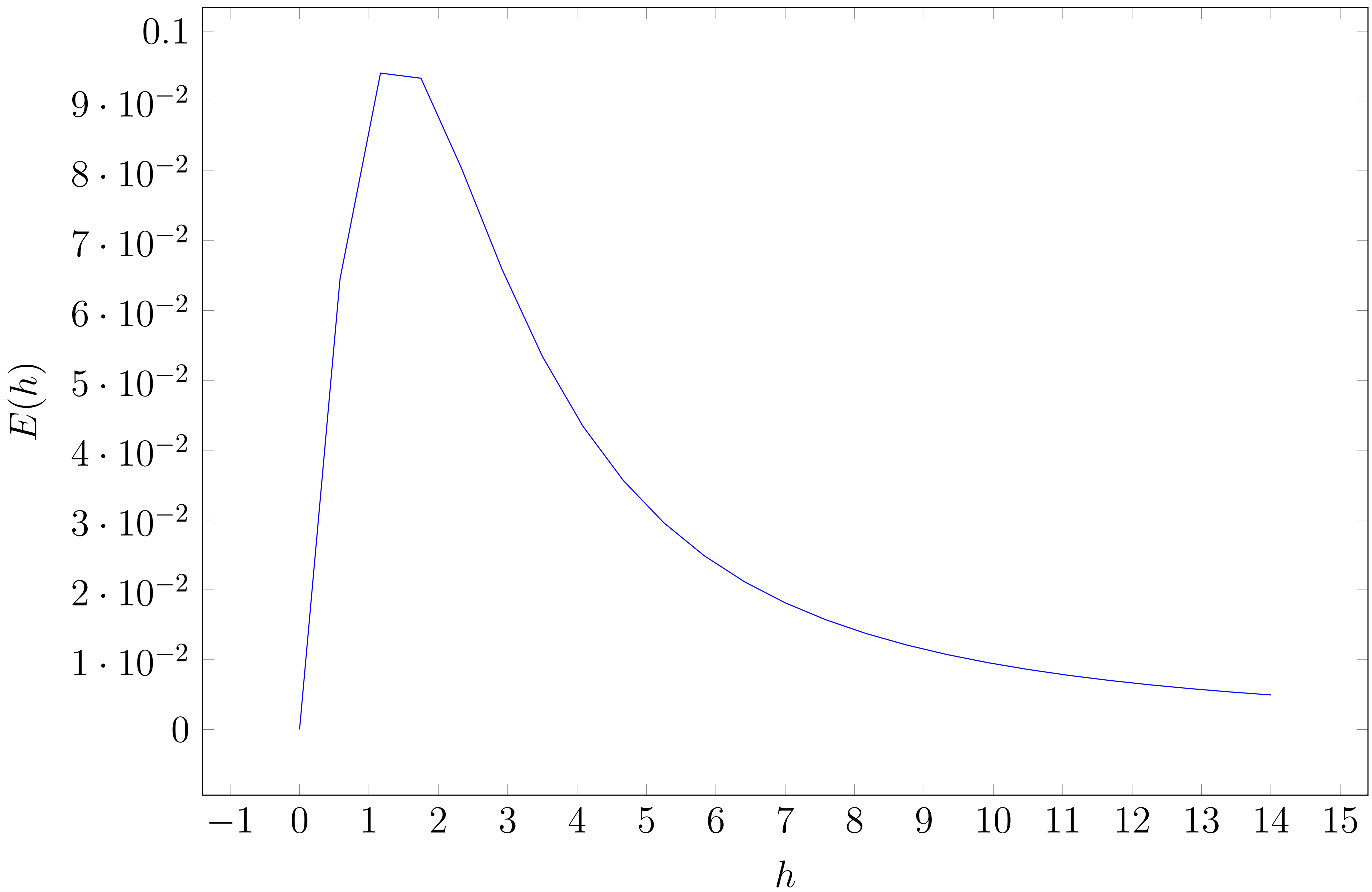
Теперь найдем поле от всего кольца:

$$E = \int dE_{\text{n}} = \int \frac{kh \cdot dq}{(\sqrt{R^2 + h^2})^3} = \frac{kh}{(\sqrt{R^2 + h^2})^3} \int dq = \frac{kh}{(\sqrt{R^2 + h^2})^3} \cdot q$$

Итак,

$$\boxed{E(h) = \frac{kqh}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Интересно посмотреть на график этой функции[6]:



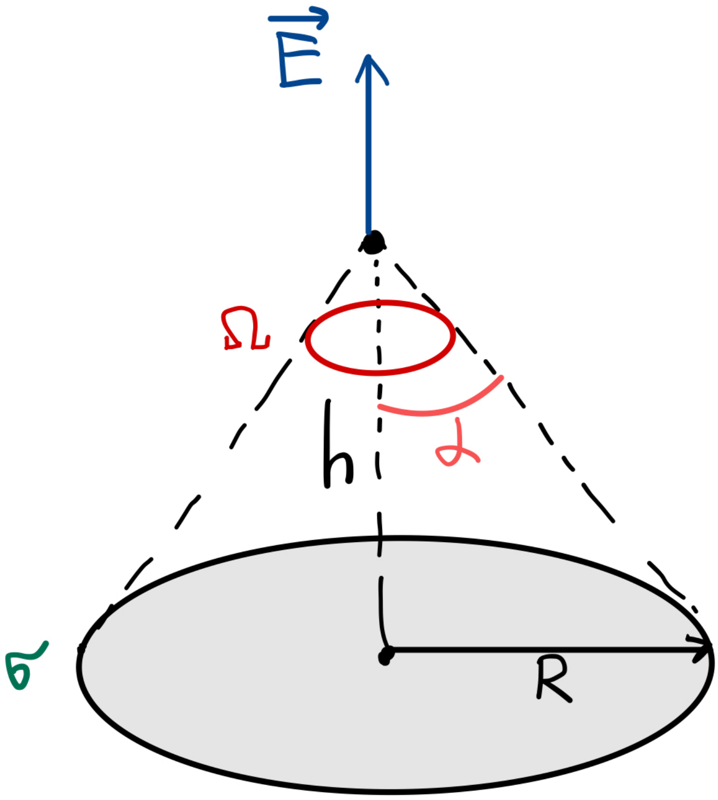
Посмотрим, что будет при $h \gg R$. Тогда R^2 в знаменателе можно пренебречь и получится:

$$E = \frac{kqh}{(h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{kq}{h^2}$$

А ведь это поле точечного заряда. И действительно, вдали от кольца кольцо неотличимо от точки и их поля совпадают.

[6] максимум будет в $h_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

6.7 Поле круга



Пусть у нас есть круг радиуса R заряженный с поверхностной плотностью зарядов σ. Найдем поле на оси круга на расстоянии h от центра.
По той же причине, что и в прошлом пункте, будет только нормальная составляющая поля. Воспользуемся формулами (3) и (7):

$$E = k\sigma\Omega = k\sigma \cdot 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

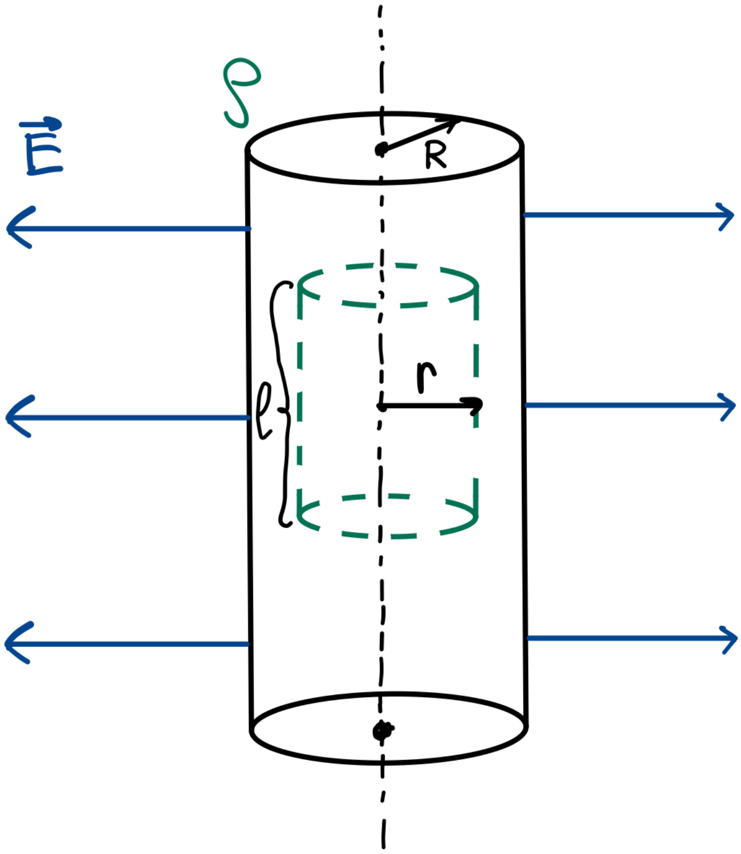
Из геометрии,

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

Подставляя, получаем:

$$\boxed{E(h) = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right)}$$

6.8 Поле бесконечного цилиндра



Пусть у нас есть бесконечный цилиндр радиуса R, равномерно заряженный с поверхностной плотностью зарядов ρ. Из симметрии цилиндра можно утверждать, что поле направлено перпендикулярно цилиндру.
Выберем гауссовой поверхностью цилиндр радиуса r и длиной ℓи рассмотрим два случая:
1 случай) Поле внутри цилиндра($r \leq R$). Площадь его првверхности, контактирующей с полем, равна $2\pi r\ell$. Обьем цилиндра(полностью заполнен зарядами) — $\pi r^2\ell$. Тогда по теореме Гаусса:

$$E \cdot 2\pi r\ell = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2\ell$$

Упрощая, получаем:

$$E(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

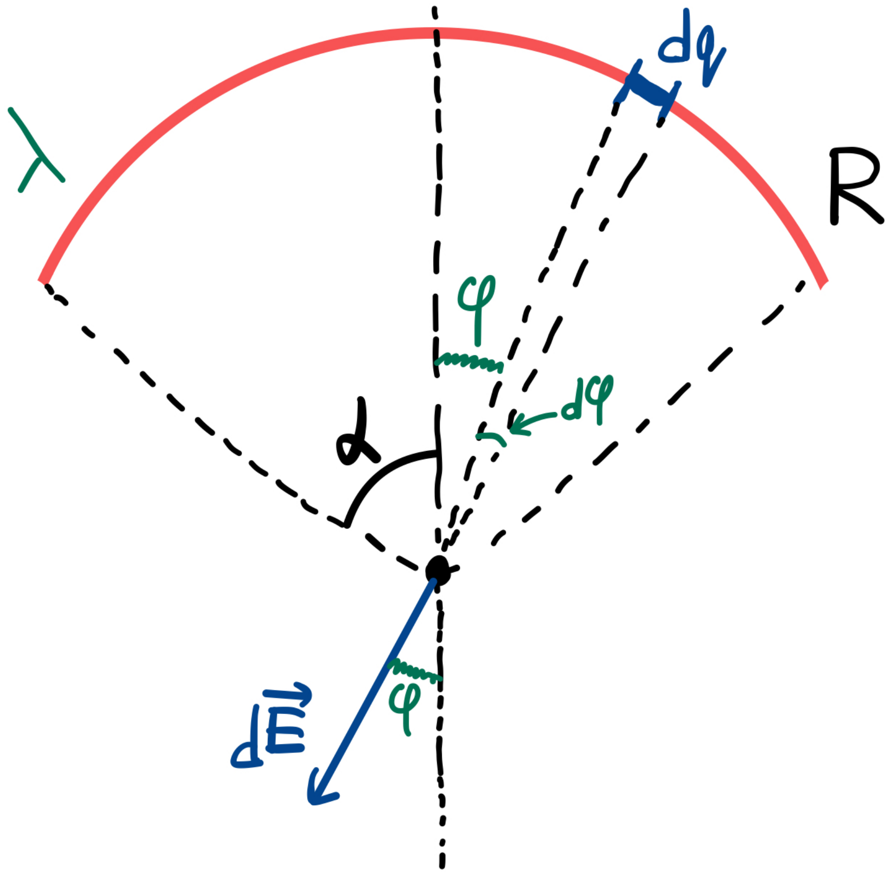
2 случай) Поле снаружи цилиндра($r \geq R$). Обьем цилиндра, заполненный зарядами, равен $\pi R^2\ell$. В итоге получаем:

$$E(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

Итак,

$$\boxed{E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}, & \text{если } r \leq R \\ \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, & \text{если } r \geq R \end{cases}}$$

6.9 Поле дуги окружности



Пусть у нас есть дуга окружности радиуса R, опирающаяся на центральный угол 2α, равномерно заряженная с линейной плотностью зарядов λ (т.е. $\lambda = \frac{dq}{d\ell} = const$). Найдем поле дуги в центре окружности.
Выделим на дуге малый заряд $dq = \lambda d\ell$, который отклонен от оси симметрии дуги на угол φ и виден из данной точки под углом $d\varphi$. Тогда модуль поля от него в данной точке:

$$dE = \frac{kdq}{R^2} = \frac{k\lambda d\ell}{R^2}$$

Нормальная компонента поля:

$$dE_{\text{n}} = \frac{k\lambda d\ell}{R^2} \cos\varphi$$

Из геометрии(из определения линейного угла):

$$d\ell = Rd\varphi$$

Подставляем,

$$dE_{\text{n}} = \frac{k\lambda}{R}\cos\varphi d\varphi$$

Чтобы найти поле от всей дуги, проинтегрируем это выражение по всей дуге (от -α до α),

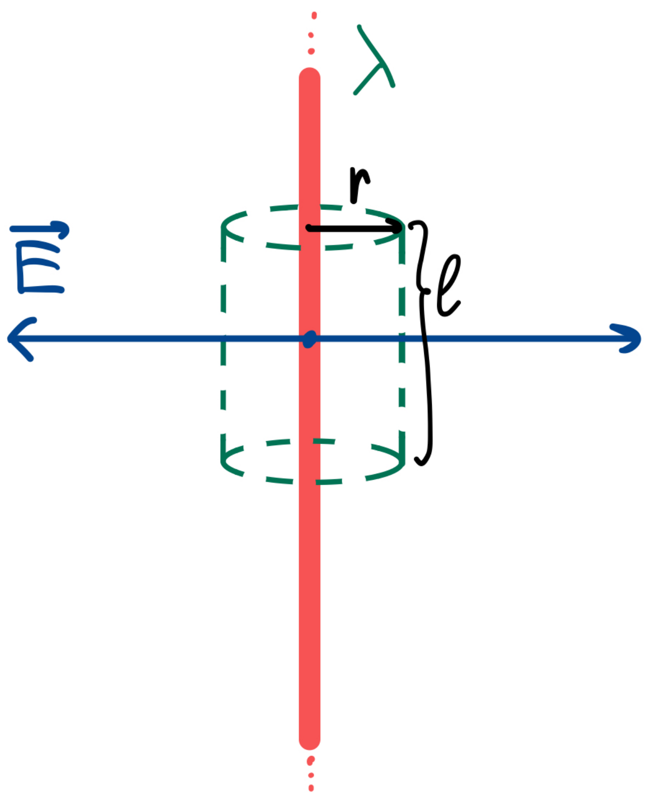
$$E = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = \frac{k\lambda}{R}(\sin(\alpha) - \sin(-\alpha)) = \frac{k\lambda}{R}(\sin(\alpha) + \sin(\alpha))$$

Итак,

$$\boxed{E = \frac{2k\lambda\sin\alpha}{R}}$$

Заметим, что если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то получится формула для поля полуокружности: $E = \frac{2k\lambda}{R}$. Важное замечание: поле дуги и поле отрезка имеют очень тесную связь. Подробнее смотрите тут и тут.

6.10 Поле бесконечной нити



Пусть у нас есть бесконечная нить, равномерно заряженная с поверхностой плотностью зарядов λ.

Аналогично полю бесконечного цилиндра, поле бесконечной нити направлено перпендикулярно нити. Выберем гауссовой поверхностью цилиндр длины ℓ и радиуса r. Тогда:

$$E \cdot 2\pi r\ell = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda\ell$$

Итак,

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} = \frac{2k\lambda}{r}}$$

7 Несколько интересных задач

7.1 Сила взаимодействия сторон куба

Задача: С какой силой расталкиваются равномерно заряженные грани куба? Поверхностная плотность заряда граней σ, длина ребра куба ℓ.

Решение: По теореме Гаусса, поток поля вектора напряженности через все грани равен:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{общ}}}{\varepsilon_0} = \frac{6\sigma\ell^2}{\varepsilon_0}$$

Выделим одну грань на кубе. Тогда поток вектора напряженности через эту грань:

$$\frac{1}{6}\Phi = \frac{\sigma\ell^2}{\varepsilon_0}$$

Поток от этой грани через нее саму:

$$\Phi^* = \frac{\sigma\ell^2}{2\varepsilon_0}$$

Тогда поток от остальных пяти граней через выбранную:

$$\Phi - \Phi^* = \frac{\sigma\ell^2}{2\varepsilon_0}$$

Тогда сила, действующая на выбранную грань со стороны остальных:

$$F = \frac{(\Phi - \Phi^*)\sigma\ell^2}{\ell^2} = \frac{\sigma^2\ell^2}{2\varepsilon_0}$$

7.2 Колебания внутри Земли

Задача: В проекте из области фантастики предлагается прорыть между Москвой и Парижем прямолинейный железнодорожный тоннель длиной S = 2400 км. Вагон ставят на рельсы в начале тоннеля в Париже и отпускают без начальной скорости.
1) Через какое время вагон достигнет середины тоннеля?
2) Найдите скорость вагона в середине тоннеля.
Землю считать шаром радиуса R = 6400 км с одинаковой плотностью по всему объёму. Вращение Земли, сопротивление воздуха и все виды трения при движении не учитывать.

Решение:
1)Сначала выведем зависимость ускорения свободного падения g от расстояния до центра Земли r.
При $r \geq R$ (M—масса Земли, ρ—плотность Земли):

$$mg = \frac{GmM}{r^2}$$

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

Найдем ускорение свободного падения на поверхности Земли:

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

При $r \leq R$.Будем пользоваться гравитационной теоремой Гаусса, формулой (8). Выберем гауссовой поверхностью сферу радиуса r. Тогда:

$$g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

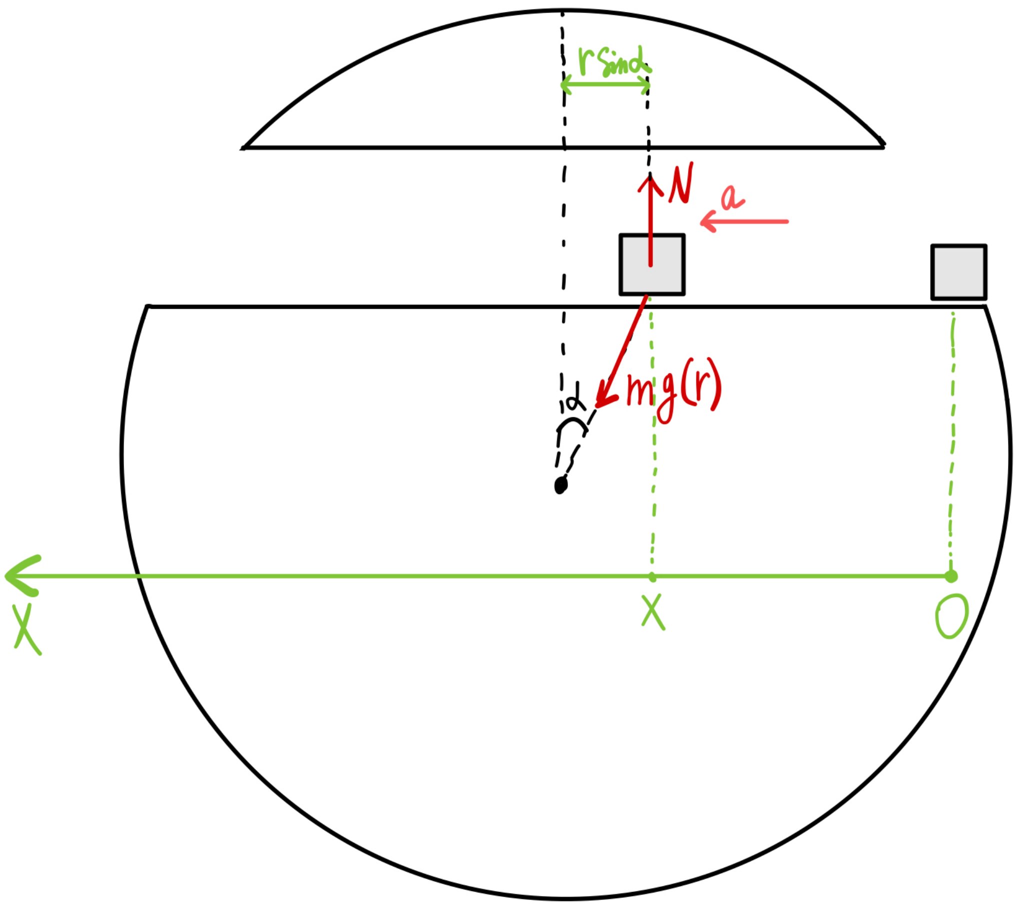
Упрощая, получаем:

$$g(r) = \frac{4}{3}\rho \cdot G\pi r$$

Так как $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, то $\frac{4}{3}\rho = \frac{M}{\pi R^3}$. Поставляем,

$$g(r) = G\pi r\frac{M}{\pi R^3} = \frac{GMr}{R^3} = \frac{g_0 R^2 r}{R^3} = g_0\frac{r}{R}$$

Отметим, что ускорение свободного падения внутри Земли линейно растет с расстоянием.



2)Пусть тело находится на расстоянии x от точки старта.
Второй закон Ньютона на Ox:

$$mg(r)\sin\alpha = ma_x$$

Сокращая массу и использовать то, что $g(r) = g_0\frac{r}{R}$, получаем:

$$\frac{g_0}{R}r\sin\alpha = a_x$$

Из геометрии,

$$r\sin\alpha + x = \frac{S}{2} \Rightarrow r\sin\alpha = \frac{S}{2} - x$$

Подставляем,

$$g_0\frac{r}{R}\left(\frac{S}{2} - x\right) = a_x$$

Упрощая, получаем,

$$a_x + \frac{g_0}{R}x = \frac{g_0}{R}\frac{S}{2}$$

У нас получилось уравнение гармонических колебаний вида $a_x + \omega^2 x = \omega^2 x_1$, где x_1—координата положения равновесия(и действительно, в координате $\frac{S}{2}$ тело будет в равновесии). Тогда,

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

Соответственно период колебаний,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

Тогда искомое время,

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 12 \text{ мин}$$

Скорость вагона в середине тоннеля это максимальная скорость тела, поэтому:

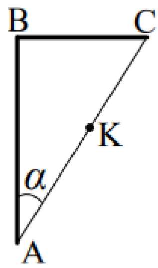
$$v = v_{\max} = \omega\frac{S}{2} = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{g_0}{R}} \approx \ 1{,}5 \text{ км/с}$$

7.3 Гроб с Физтеха

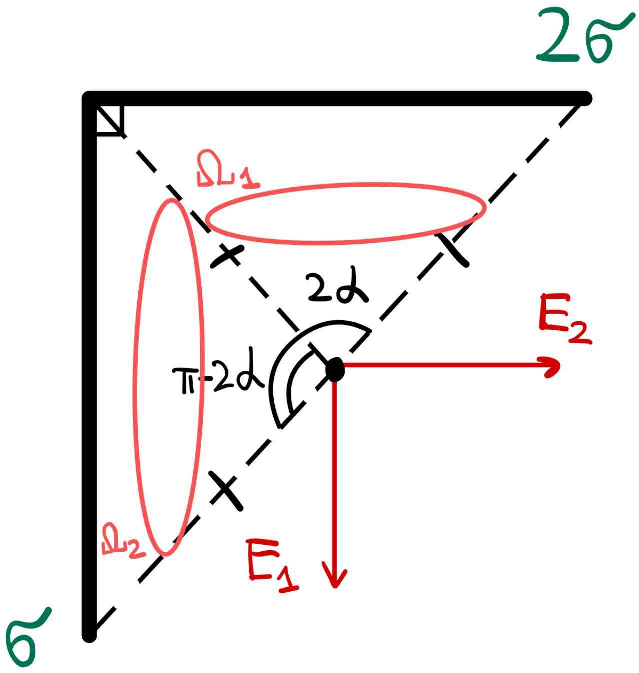
3. Две бесконечные плоские прямоугольные пластины AB и BC перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром B. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру B.

1) Пластина BC заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha = \pi/4$. Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC, если пластину AB тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?

2) Пластины BC и AB заряжены положительно с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = 2\sigma, \sigma_2 = \sigma$, соответственно. Угол $\alpha = \pi/7$. Найти напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC.



1)До заряжания второй пластины напряженность была E. После заряжания к этой напряженности добавилась такая же, направленная перпендикулярно первой, тогда суммарная напряженность будет $\sqrt{E^2 + E^2} = E\sqrt{2}$. Значит напряженность увеличится в $\sqrt{2}$ раз.



2)Здесь нужно понять связь между линейням углом и соответствующим ему телесным углом. Так как полный телесный угол равен 4π, а полный линейный равен 2π, то $\Omega_\alpha = 2\alpha$.
По формуле (7), напряженность E_1 от верхней пластины равна:

$$E_1 = 2k\sigma\Omega_1$$

Из связи линейного и телесного углов можно записать:

$$\Omega_1 = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$$

Тогда,

$$E_1 = 8k\sigma\alpha = \frac{8}{7}k\pi\sigma$$

Аналогичные рассуждения для второй пластины,

$$E_2 = k\sigma\Omega_2$$

$$\Omega_2 = 2(\pi - 2\alpha)$$

$$E_2 = 2k\sigma(\pi - 2\alpha)$$

$$E_2 = \frac{10}{7}k\pi\sigma$$

По теореме Пифагора:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\frac{64}{49}k^2\pi^2\sigma^2 + \frac{100}{49}k^2\pi^2\sigma^2} \Rightarrow E = \frac{2\sqrt{41}}{7}k\pi\sigma$$

Канал автора—https://t.me/kinenergy228