Теплоемкость

Канал автора—https://t.me/kinenergy228

Содержание

1 Теплоемкость. Молярная теплоемкость.

По определению, **теплоёмкостью газа** называется отношение количества теплоты δQ, которое нужно сообщить данному телу для повышения его температуры на dT, к величине dT:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

У буквы Q следует писать δ а не d, так как теплота это не функция состояния. Если бы мы писали dQ, то получалось бы, что $dQ = Q_2 - Q_1$. Тогда Q_1 и Q_2 это теплоты в состояниях 1 и 2 сответственно. Но теплота в каком-то состоянии это что-то непонятное. Теплота это функция процесса, а не состояния. Поэтому записывая малое количество теплоты мы пишем δQ.

Тогда,

$$\delta Q = CdT \Rightarrow Q = \int_{T_1}^{T_2} CdT$$

Интеграл можно найти как площадь под графиком функции $C(T)$.

Введем понятие **молярной теплоемкости**, которой будем пользоваться чаще:

$$c = \frac{C}{\nu} = \frac{\delta Q}{\nu dT}$$

$$Q = \nu \int_{T_1}^{T_2} cdT$$

У молярной теплоемкости такая же размерность как и у универсальной газовой постоянной: $[c] = [R] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}$.

Если $c = const$, то:

$$Q = c\nu \int_{T_1}^{T_2} dT = c\nu(T_2 - T_1)$$

Полезно также вспомнить уравнение состояния в приращениях:

$$d(pV) = d(\nu RdT)$$

$$pdV + Vdp = \nu RdT$$

$V = const \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow Vdp = \nu RdT$

$p = const \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow pdV = \nu RdT$

В дальнейшем я буду говорить "телоемкость"имея ввиду именно молярную теплоемкость.

2 Теплоемкости в различных процессах

1) Изохорный ($V = const$)

$$V = const, \delta A = pdV = 0$$

$$\delta Q = dU + \delta A = dU$$

$$C_V = \frac{dU}{\nu dT} = \frac{\frac{i}{2}\nu RdT}{\nu dT}$$

$$C_V = \frac{i}{2}R$$

i — число степеней свободы газа (у одноатомных газов $i = 3$, у двухатомных газов $i = 5$)

2) Изобарный ($p = const$)

$$\delta Q = \frac{i}{2}\nu RdT + pdV = \frac{i}{2}\nu RdT + \nu RdT = \frac{i+2}{2}\nu RdT$$

$$C_p = \frac{i+2}{2}R$$

Заметим, что $C_p = C_V + R$. Это уравнение называется *уравнением Майера*. Его можно доказать строже (учитывая, что внутренняя энергия завсит еще и от объема). Подробнее смотрите тут на стр. 73

3) Изотермический ($T = const$)

$$T = const \Rightarrow dT = 0$$

$$C_T = \frac{\delta Q}{0}$$

$$C_T = \infty$$

Бесконечная теплоемкость означает, что для небольшого нагревания газа в изотермическом процессе нужно сообщить газу бесконечно большую теплоту.

4) Адиабатический ($Q = 0$)

$$C_{\text{ад}} = 0$$

5) Прямо-пропорциональная зависимость давления от объема ($p = \alpha V$, $\alpha = const$)

$$pdV + Vdp = \nu RdT \Rightarrow ||dp = \alpha dV|| \Rightarrow \alpha VdV + V \cdot \alpha dV = \nu RdT \Rightarrow 2\alpha VdV = \nu RdT$$

$$c\nu dT = \frac{i}{2}\nu RdT + pdV \Rightarrow c\frac{2\alpha VdV}{R} = \frac{i}{2}2\alpha VdV + \alpha VdV$$

Сокращая $\alpha V dV$ и упрощая получаем:

$$C_{p=\alpha V} = \frac{i+1}{2}R$$

6) **Общая формула теплоемкости**:

$$C = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT}$$

3 Политропический процесс

Политропический процесс — процесс с постоянной теплоемкостью. Оказывается, что для политропического процесса есть связь между давлением, объемом и теплоемкостью:

$$pV^n = const$$

, где $n = \frac{C-C_p}{C-C_V}$ — *показатель политропы*. Выведем эту формулу

$$C\nu dT = C_V \nu dT + pdV$$

$$(C - C_V)\nu dT = pdV = \frac{\nu RT}{V}dV$$

$$\frac{C - C_V}{R}\frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}$$

Проинтегрируем и не забудем константу интегрирования:

$$\frac{C - C_V}{R}\ln T = \ln V + const$$

Из свойств логарифма левую часть можно преобразовать:

$$\frac{C - C_V}{R}\ln T = \ln T^{\frac{C-C_V}{R}}$$

Если вспомнить, что разность логарифмов равна логарифму частного, то получаем:

$$\ln \frac{T^{\frac{C-C_V}{R}}}{V} = const$$

Потенциируя это выражение в e получаем:

$$\frac{T^{\frac{C-C_V}{R}}}{V} = const$$

$$\frac{T}{V^{\frac{R}{C-C_V}}} = const$$

$$\frac{\left(\frac{pV}{\nu R}\right)}{V^{\frac{R}{C-C_V}}} = const$$

$$\frac{pV}{V^{\frac{R}{C-C_V}}} = const \Rightarrow pV^{1-\frac{R}{C-C_V}} = const$$

$$pV^{\frac{C-C_p}{C-C_V}} = const$$

Доказали. Отдельно отметим показатель политропы для адиабатного процесса:

$$pV^{\gamma} = const$$

$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ — *показатель адиабаты* ($\gamma = \frac{5}{3}$ для одноатомного газа,$\gamma = \frac{7}{5}$ для двухатомного газа)

4 Задачи

4.1 Задача 1 (Росатом—2020)

Задача 7. (*«Росатом», 2020, 11*) В некотором тепловом процессе объем одноатомного идеального газа зависит от температуры по закону $V = \alpha T^{-\frac{5}{2}}$, где α — известная постоянная. Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе. Получает или отдает газ теплоту, если его объем возрастает?

$$V = const \cdot (pV)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow p^{-\frac{5}{2}} \frac{V^{-\frac{5}{2}}}{V} = const$$

$$p^{-\frac{5}{2}} V^{-\frac{7}{2}} = const$$

$$p^5 V^7 = const$$

$$pV^{\frac{7}{5}} = const$$

По свойству показателя политропы:

$$\frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{7}{5}$$

$$5C - \frac{25}{2}R = 7C - \frac{21}{2}R$$

$$C = -R$$

Если объем растет, то температура падает.

$$Q = C\nu\Delta T$$

$\Delta T < 0$, $C = -R < 0$

Тогда $Q > 0$ (если обьем возрастает, то газ получает теплоту).

4.2 Задача 2 (ПВГ—2018)

Задача 5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) При расширении одного моля одноатомного идеального газа зависимость его абсолютной температуры от произведённой им работы оказалась линейной:

$$T = T_0 - \frac{bA}{R}$$

(здесь R — универсальная газовая постоянная). При каких значениях b теплоёмкость газа в этом процессе отрицательна?

Найдем зависимость A от T:

$$A(T) = \frac{R(T_0 - T)}{b}$$

Отсюда выразим δA, продифференцировав выражение:

$$\delta A = -\frac{RdT}{b}$$

Найдем δQ (с учетом того, что $\nu = 1$):

$$\delta Q = \frac{3}{2}RdT - \frac{RdT}{b}$$

Найдем C:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\frac{3}{2}RdT - \frac{RdT}{b}}{dT} = \frac{3}{2}R - \frac{R}{b}$$

$$C < 0 \Rightarrow \frac{3}{2}R - \frac{R}{b} < 0$$

Решая неравенство, получаем ответ:

$$b \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$$

4.3 Задача 3 (Физтех—2016)

Задача 30. (*«Физтех», 2016, 10–11*) Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры T по закону

$$C = R\frac{T}{T_0}.$$

1) Найти температуру T_1, при нагревании до которой газ совершил работу, равную нулю.

2) Найти температуру T_2, при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

1) $T_1 = 2T_0$; 2) $T_2 = \frac{3}{2}T_0$

1) Запишем первое начало термодинамики в приращениях:

$$C\nu dT = \frac{3}{2}\nu R dT + \delta A$$

$$\nu R\frac{T}{T_0}dT = \frac{3}{2}\nu R dT + \delta A$$

Проинтегрируем выражение:

$$\frac{\nu R}{T_0}\int_{T_0}^{T_1} T dT = \frac{3}{2}\nu R\int_{T_0}^{T_1} dT + \int \delta A$$

Работа должна быть равной нулю, поэтому $\int \delta A = 0$:

$$\frac{\nu R}{T_0}\left(\frac{T_1^2}{2} - \frac{T_0^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_0) + 0$$

Упрощая, получаем квадратное уравнение:

$$T_1^2 - T_0^2 = 3T_0T_1 - 3T_0^2$$

$$T_1^2 - 3T_0T_1 + 2T_0^2 = 0$$

$$T_1 = \frac{3T_0 + T_0}{2} = 2T_0$$

2)

$$\nu R\frac{T_2}{T_0}dT = \frac{3}{2}\nu R dT + \delta A$$

Если обьем принимает минимальное значение, то $dV = 0$.
Тогда $\delta A = pdV = 0$:

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{3}{2}$$

$$T_2 = \frac{3}{2}T_0$$

4.4 Задача 4 (ПВГ—2014)

Задача 36. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Один моль гелия, занимавший объём $V = 10$ л, нагрели в процессе, в котором его молярная теплоёмкость равнялась $C_\mu = 2{,}3R$ ($R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная). При этом давление гелия увеличилось на 0,2%. На сколько см^3 изменился объём гелия в этом процессе?

Выведем два уравнения для малого процесса
(процесс малый, если $\frac{\Delta p}{p}, \frac{\Delta V}{V}, \frac{\Delta T}{T} \ll 1$)

1)

$$pV = \nu RT \Rightarrow (p + \Delta p)(V + \Delta V) = \nu R(T + \Delta T)$$

Если упростить, то получим:

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

2) Продифференцируем уравнение политропичнского процесса (дифференциал произведения):

$$pV^n = const \Rightarrow npV^{n-1}dV + dp \cdot V^n = 0$$

Разделим на V^{n-1}:

$$npdV + dp \cdot V = 0$$

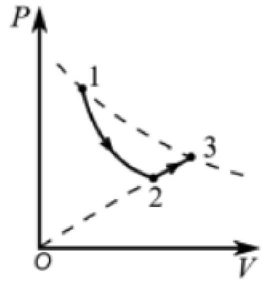
$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{n}\frac{dp}{p}$$

Последнее уравнение решает нашу задачу ($\frac{\Delta p}{p} = 0{,}002, n = \frac{2{,}3-2{,}5}{2{,}3-1{,}5} = -\frac{1}{4}$):

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{-4\Delta p}{p}$$

$$\Delta V = 4V\frac{\Delta p}{p} = 80 \text{ см}^3$$

4.5 Задача 5 (Физтех—2018)



Задача 25. (*«Физтех», 2018, 11*) Газообразный гелий расширяется в процессе 1–2 с постоянной теплоёмкостью. Затем газ расширяется в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). Работа, совершённая газом в процессе 1–2, в 4 раза больше работы, совершённой газом в процессе 2–3. Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

1) Найти отношение количества теплоты, полученной газом в процессе 2–3, к работе газа в процессе 2–3.

2) Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 1–2.

1) $\frac{Q_{23}}{A_{23}} = 4$; 2) $C = -\frac{R}{2}$

1) Запишем Q_{23} через молярную теплоемкость для процесса $p = \alpha V$:

$$Q_{23} = (\frac{3}{2}R + \frac{R}{2})\nu(T_3 - T_2) = 2\nu R(T_3 - T_2)$$

Найдем A_{23} через первый закон термодинамики:

$$A_{23} = Q_{23} - \Delta U_{23} = 2\nu R(T_3 - T_2) - \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \frac{1}{2}\nu R(T_3 - T_2)$$

$$\frac{Q_{23}}{A_{23}} = \frac{2\nu R(T_3 - T_2)}{\frac{1}{2}\nu R(T_3 - T_2)} = 4$$

2)

$$A_{12} = 4A_{23}$$

$$Q_{12} - \Delta U_{12} = 4A_{23}$$

$$C\nu(T_2 - T_1) - \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 2\nu R(T_3 - T_2)$$

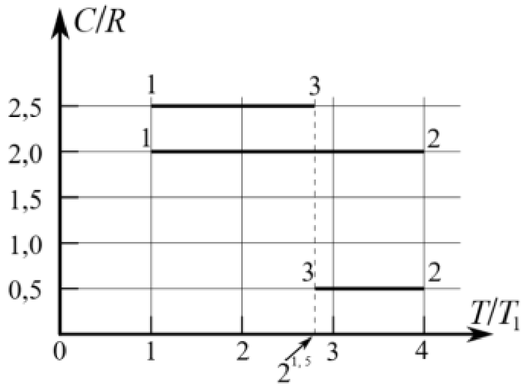
$$T_1 = T_3 \Rightarrow C(T_2 - T_1) - \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = 2R(T_1 - T_2)$$

$$C - \frac{3}{2}R = -2R$$

$$C = -\frac{R}{2}$$

4.6 Задача 6 (Физтех—2023)

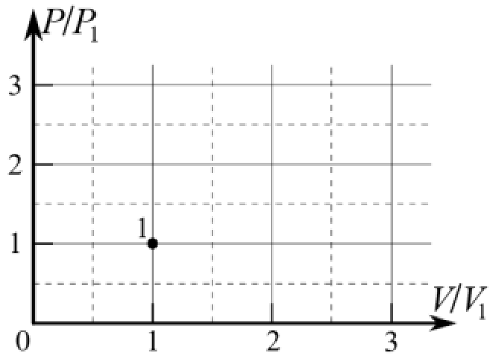
4. Тепловой двигатель работает по циклу 1-2-3-1. Рабочее вещество – один моль одноатомного идеального газа. Для вычисления КПД цикла ученик десятого класса построил график зависимости молярной теплоемкости C газа (в единицах универсальной газовой постоянной R) от температуры в процессах: 1-2, 2-3, 3-1 (см. рис.). Температура газа в состоянии 1 $T_1 = 400$ К, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



1) Найдите работу A_{12} газа в процессе 1-2.

2) Найдите КПД η цикла.

3) Постройте график цикла в координатах $(P/P_1, V/V_1)$, где P_1 и V_1 давление и объём в состоянии 1. Для построения графика перенесите шаблон (см. ниже) в чистовик своей работы. Точка 1 на графике соответствует состоянию 1 газа в цикле.



1) $C_{12} = 2R$:

$$A_{12} = Q_{12} - \Delta U_{12} = C_{12}\nu(T_2 - T_1) - \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R T_1 = 4986 \text{ Дж}$$

2) $\eta = 1 + \frac{Q_{23}+Q_{31}}{Q_{12}}$:

$$C_{12} = 2R \Rightarrow Q_{12} = 2\nu R(T_2 - T_1) = 6\nu R T_1$$

$$C_{23} = \tfrac{1}{2}R \Rightarrow Q_{23} = \tfrac{1}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \nu R T_1(\sqrt{2} - 2)$$

$$C_{31} = \tfrac{5}{2}R \Rightarrow Q_{31} = \tfrac{5}{2}\nu R(T_1 - T_3) = \tfrac{5}{2}\nu R T_1(1 - 2\sqrt{2})$$

$$\eta = 1 + \frac{\sqrt{2} - 2 + \frac{5}{2}(1 - 2\sqrt{2})}{6} = \frac{6{,}5 - 4\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}14$$

3) Процесс 1-2:

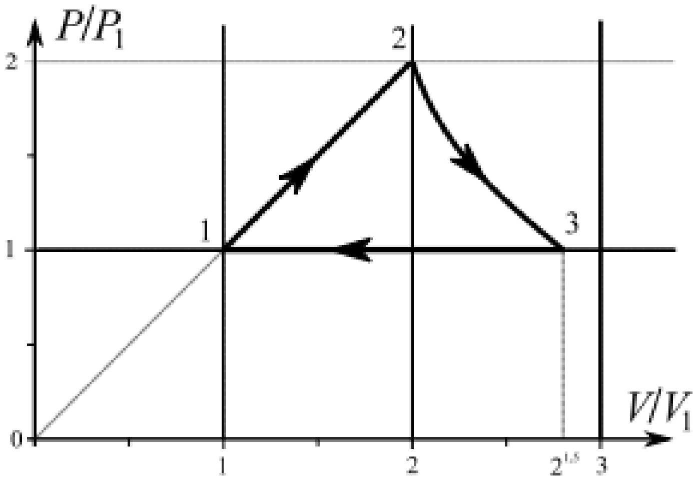
$$pV^{\frac{2R-2,5R}{2R-1,5R}} = const \Rightarrow pV^{-1} = const \Rightarrow p = const \cdot V$$

Процесс 2-3:

$$pV^{\frac{0,5R-2,5R}{0,5R-1,5R}} = const \Rightarrow pV^{2} = const$$

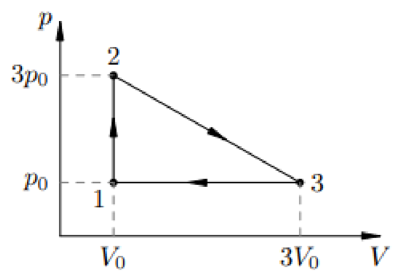
Процесс 3-1:

$$pV^{\frac{2,5R-2,5R}{2,5R-1,5R}} = const \Rightarrow pV^{0} = const \Rightarrow p = const$$



4.7 Задача 7 (неполитропический процесс)

Задача 2. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изохоры 1–2, участка 2–3 линейной зависимости давления от объёма и изобары 3–1 (см. рисунок; координаты точек 1, 2 и 3 указаны). Рабочим веществом служит одноатомный идеальный газ. Вычислите КПД этого двигателя.



Главная проблема это разобраться с процессом 23. Подводится или отводится в нем теплота? Запишем первое начало термодинамики в дифференциальном виде (в приращениях):

$$\delta Q = \frac{3}{2}\nu R dT + p dV$$

Мы понимаем как меняется давление и объем, но ничего не знаем про температуру, поэтому попытаемся от нее избавиться. Найдем уравнение прямой $p(V)$:

$$\frac{p - p_2}{p_3 - p_2} = \frac{V - V_2}{V_3 - V_2}$$

$$\frac{p - 3p_0}{p_0 - 3p_0} = \frac{V - V_0}{3V_0 - V_0} \Rightarrow p(V) = p_0 \left(4 - \frac{V}{V_0}\right)$$

Запишем уравнение состояния и подставим туда $p(V)$ чтобы выразить $T(V)$:

$$p(V) \cdot V = \nu R \cdot T(V)$$

$$T(V) = \frac{p_0}{\nu R}\left(4V - \frac{V^2}{V_0}\right)$$

Зависимость квадратичная, график — парабола ветвями вниз, проходит через ноль. График постройте сами. В δQ фигурирует dT, поэтому продифференцируем $T(V)$:

$$dT = \frac{4p_0 dV}{\nu R} - \frac{2p_0 V dV}{\nu R V_0} = \frac{2p_0 dV}{\nu R}\left(2 - \frac{V}{V_0}\right)$$

Подставляем все в δQ:

$$\delta Q = \frac{3}{2}\nu R \cdot \frac{2p_0 dV}{\nu R}\left(2 - \frac{V}{V_0}\right) + p_0\left(4 - \frac{V}{V_0}\right) dV$$

$$\delta Q = 3p_0 dV \left(2 - \frac{V}{V_0}\right) + p_0 dV \left(4 - \frac{V}{V_0}\right)$$

$$\delta Q = 4p_0 dV\left(2{,}5 - \frac{V}{V_0}\right)$$

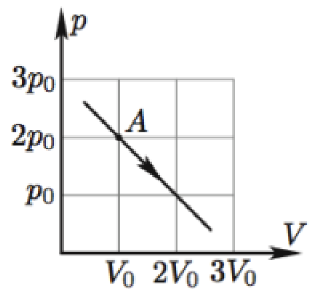
Теперь понятно, что теплота сначала подводится, а потом отводится. Найдем до какого момента теплота подводится:

$$\delta Q > 0 \Rightarrow 2{,}5 - \frac{V}{V_0} > 0 \Rightarrow V < 2{,}5V_0$$

Получается, что при $0 < V < 2{,}5V_0$ тепло подводится, при $2{,}5V_0 < V < 3V_0$ тепло отводится.
Мы делим процесс 23 на два процесса, про которые все известно. Дальше задача превращается в классическую задачу про цикл. Решите ее сами в качестве упражнения и убедитесь, что ответ $\eta = \frac{4}{15}$.

4.8 Задача 8 (Всерос—2004)

Задача 38. (*Всеросс., 2004, финал, 10*) С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс (рис.). Найдите теплоёмкость газа в точке A. В какой точке процесса теплоёмкость газа максимальна?



Запишем общую формулу для теплоемкости:

$$C = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT}$$

Далее по аналогии с прошлой задачей находим $p(V)$ а потом и $T(V)$:

$$p(V) = p_0\left(3 - \frac{V}{V_0}\right)$$

$$T(V) = \frac{p_0}{\nu R}\left(3V - \frac{V^2}{V_0}\right) \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{\nu R}\left(3 - \frac{2V}{V_0}\right)$$

$$C = C_V + \frac{p_0\left(3 - \frac{V}{V_0}\right)}{\nu} \frac{\nu R}{p_0\left(3 - \frac{2V}{V_0}\right)}$$

$$C(V) = C_V + R \cdot \frac{3V_0 - V}{3V_0 - 2V}$$

Найдем теплоемкосит в точке A:

$$C_A = C(V_0) = C_V + R \cdot \frac{2V_0}{V_0} = \frac{7}{2}R$$

Теперь найдем максимальную теплоемкость. Теплоемкость будет максимальна и равна ∞, если знаменатель обнулится. Тогда:

$$3V_0 - 2V_{max} = 0 \Rightarrow V_{max} = 1{,}5V_0$$

Тогда точка, в которой теплоемкость максимальна, имеет координаты $(1{,}5V_0; 1{,}5p_0)$
Канал автора—https://t.me/kinenergy228