Кинематические связи

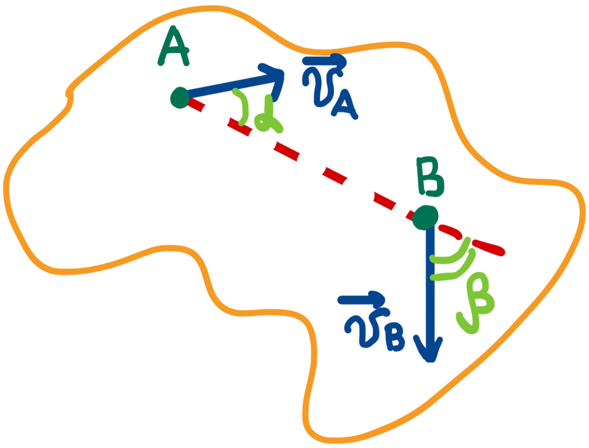
Канал автора—https://t.me/kinenergy228

Содержание

Кинематические связи — ограничения, накладываемые на кинематические величины (скорости, координаты, ускорения), характеризующие движущиеся тела или системы тел, связанные со свойствами этих тел или систем. Начнем с кинематической связи твердого тела.

1 Твердое тело (закон палочки)

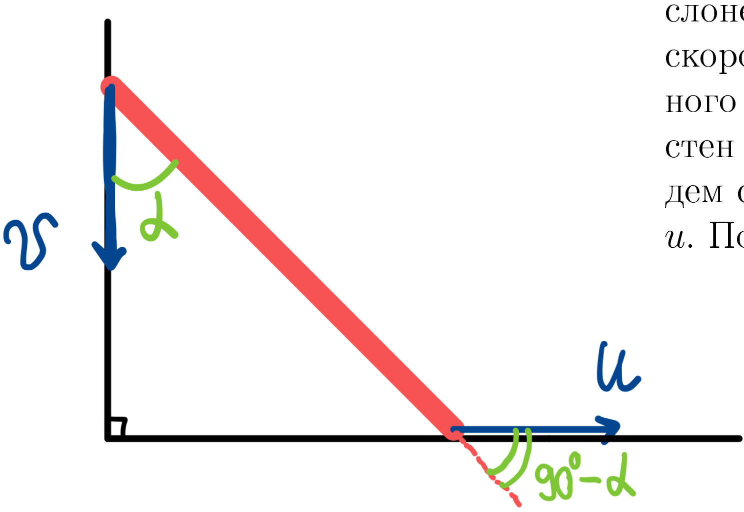
Твердым называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого с течением времени не меняется.



Пусть у нас есть твердое тело, которое как-то движется[1]. Выделим на этом теле точку A, движущуюся со скоростью $\overrightarrow{v_A}$, и точку B, движущуюся со скоростью $\overrightarrow{v_B}$.
Так как тело твердое, то расстояние AB в процесее движения меняться не должно. Тогда можно утверждать, что проекции скоростей точек A и B на AB равны:

$$\boxed{v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta} \tag{1}$$

Другими словами, на сколько точка A сближается с B, на столько же B отдаляется от A. Это уравнение часто называют законом палочки или условием неразрывности стержня. Рассмотрим классический пример:



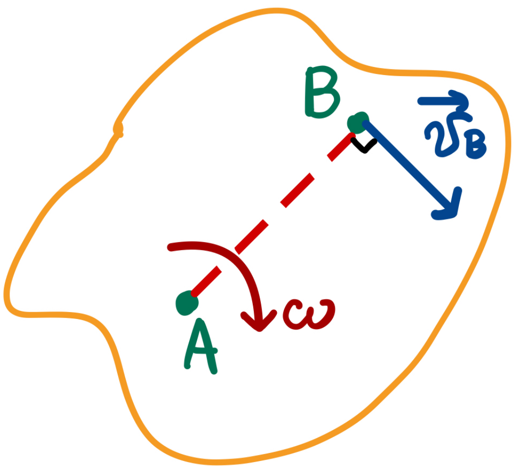
Пусть у нас есть стержень, прислоненный к стенке. Известно, что скорость конца стержня, прислоненного с стенке, равна v, а также известен угол наклона стержня α. Найдем скорость другого конца стержня u. По закону палочки:

$$v\cos\alpha = u\cos(90^\circ - \alpha)$$

$$u = \frac{v\cos\alpha}{\sin\alpha} = v \operatorname{ctg}\alpha$$

[1] почти всегда мы будем рассматривать только плоское движение

2 Мгновенный центр скоростей



Вернемся к закону палочки:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$$

Что будет, если скорость точки A в данный момент времени равна нулю. Тогда или $v_B = 0$ (тело просто покоится) или $\cos\beta = 0$. Если $\cos\beta = 0$, то $v_B \perp AB$. Тогда можно сказать, что тело в данный момент времени как-бы вращается вокруг точки A. Тогда точка A называется **мгновенным центром скоростей(МЦС)**.

Тогда можно сказать, что другие точки тела вращаются вокруг МЦС с некоторой угловой скоростью ω. Эту угловую скорость можно легко найти:

$$\omega = \frac{v_B}{AB}$$

Можно доказать, что угловая скорость вращения твердого тела является характеристикой всего тела (а не выбранных точек), а также не зависит от выбора системы отсчета.

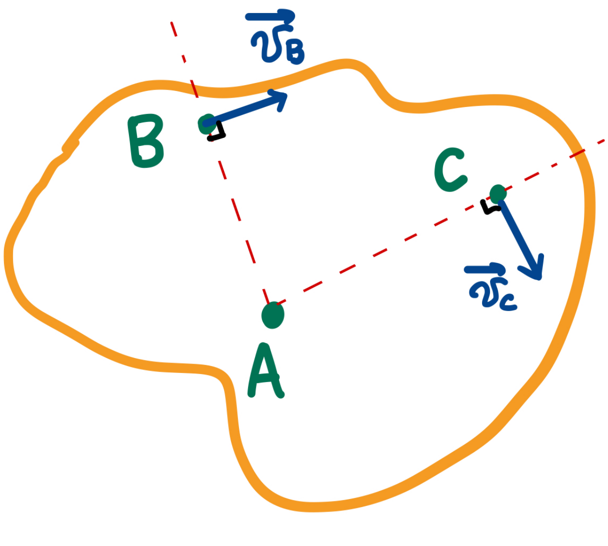
Очень важно понимать, что:

1)МЦС не обязательно лежит внутри тела

2)Конкретная точка является МЦС только в данный момент времени. В следующий момент времени МЦС будет являться другая точка

Как определить положение МЦС?

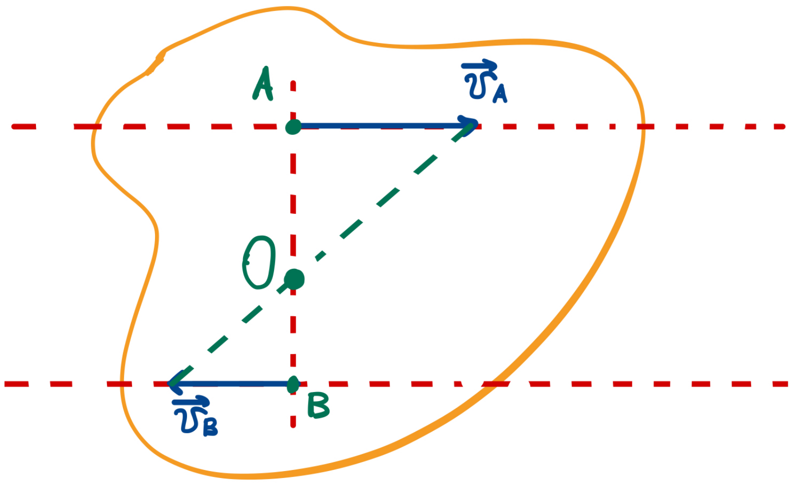
1)



Если нам известны направления скоростей двух каких-нибудь точек тела, B и C. Нужно провести перпендикуляры к скоростям этих точек. Пересечение этих перпендикуляров (точка A) и будет искомым МЦС.

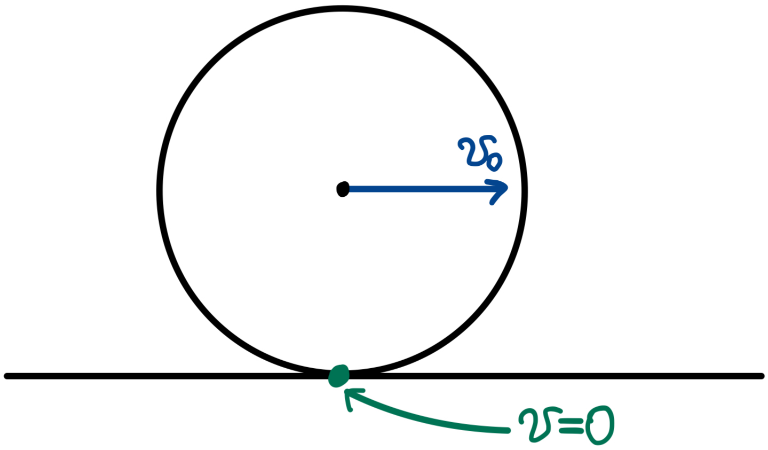
2) Можно перейти в систему отсчета, в которой скорость некоторой точки тела равна нулю. тогда эта точка и будет искомым МЦС.

3)

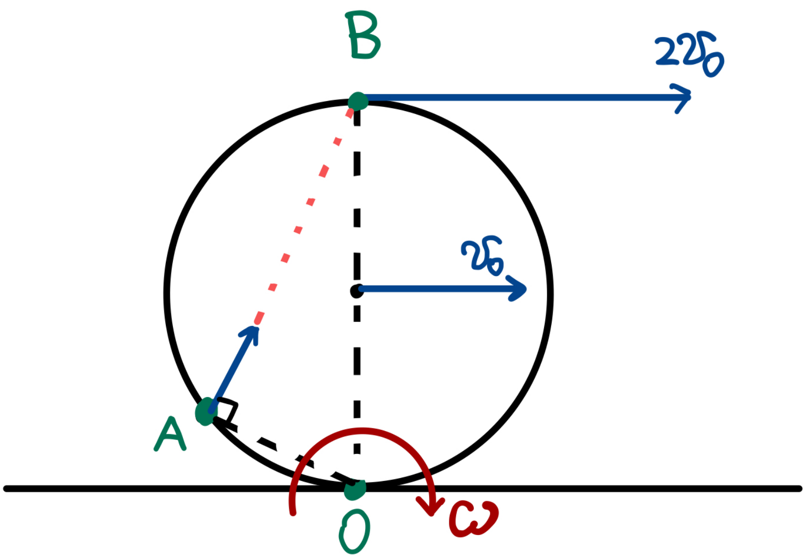


А что если скорости двух точек параллельны? Тогда нужно соединить концы векторов этих скоростей. Точка пересечения прямой, проходящей через две эти точки, и прямой, соединяющей концы векторов, и будет искомым МЦС(точка O).

3 Движение без проскальзывания. Качение



Пусть есть колесо радиуса R (скорость центра колеса — v_0), которое катится по горизонтальной поверхности *без проскальзывания*. Если тело движется без проскальзывания, то скорость точки тела, касающейся поверхности, равна (по модулю и векторно) скорости поверхности. Если скорость поверхности равна нулю, то и скорость точки контакта тела с поверхностью равна нулю. Тогда эта точка является МЦС (по определению).



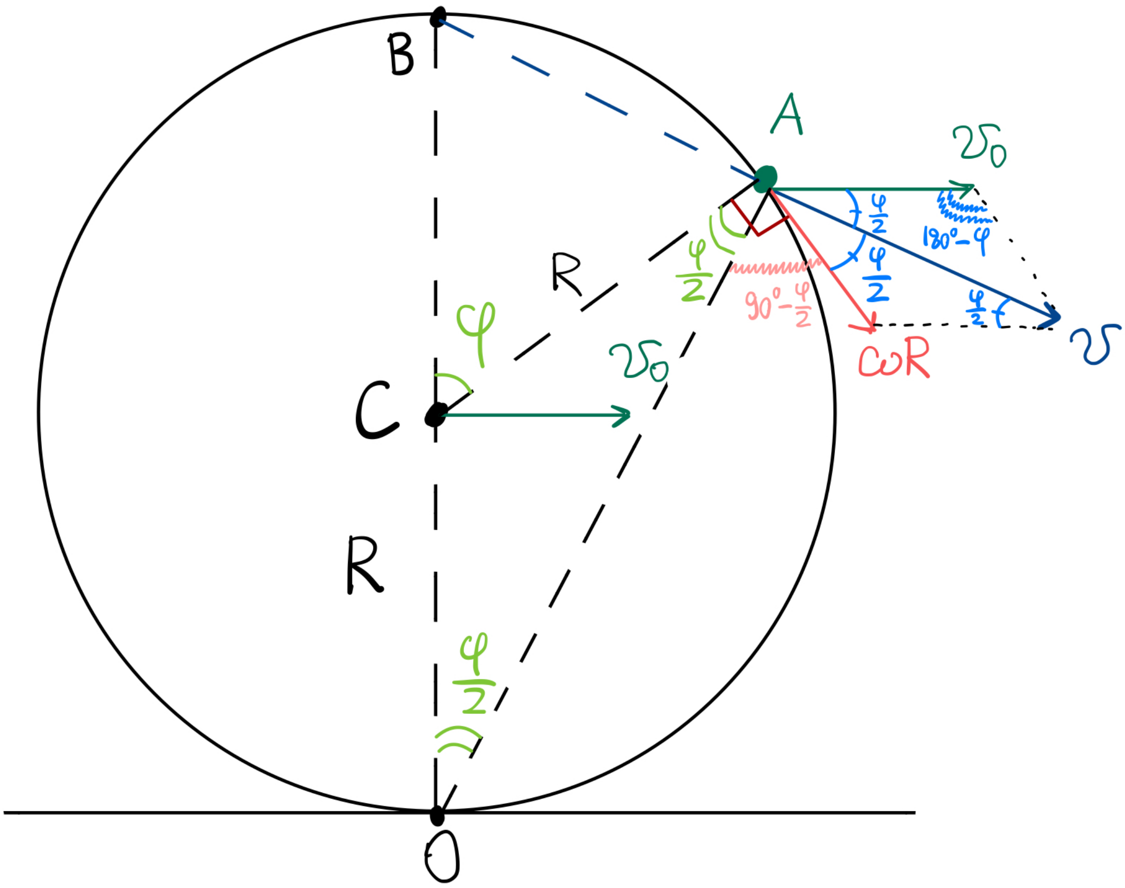
Тело вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O:

$$\omega = \frac{v_0}{R}$$

Тогда скорость верхней точки колеса:

$$v_B = \omega \cdot 2R = \frac{v_0}{R} \cdot 2R = 2v_0$$

Мы также можем определить, куда будет направлена скорость произвольной точки колеса (точка A). Так как точка O — МЦС, то скорость точки A будет направлена перпендикулярна OA. Также заметим, что треугольник OAB прямоугольный. Поэтому скорость точки A направлена вдоль AB, к точке B[2].



Определим модуль скорости произвольной точки колеса в зависимости от угла φ. Скорость точки складывается из двух скоростей: скорости центра колеса v_0 и вращательной скорости ωR. Если колесо движется без проскользывания, то $v_0 = \omega R$, поэтому паралеллограмм векторов скоростей будт ромбом, а значит диагонали это биссектрисы.

Угол BCA центральный, а угол COA вписанный, поэтому:

$$\angle COA = \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{\varphi}{2} = \angle CAO$$

Вращательная скорость направлена перепендикулярно AC, а полная скорость направлена перпендикулярно OA. Далее находим все углы(см. рис) и записываем теорему косинусов для треугольника скоростей:

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 R^2 - 2v_0\omega R \cdot \cos(180° - \varphi)$$

[2]или от точки B, в зависимости от расположения точки A

Упрощая выражения и используя формулу $\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{2}$, получаем:

$$v(\varphi) = 2v_0\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$$

Можно по приколу найти кинетическую энергию колеса. Формула $\frac{mv_0^2}{2}$ работает только для поступательно движушегося тела. Если движение тела более сложное, то поможет следующая теорема:

Теорема Кенига: *кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы M, мысленно сосредоточенной в ее центре масс C и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчета, начало координат которой совпадает с центром масс системы:*

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{Mv_c^2}{2} + K_{\text{отн}}$$

Короче говоря, кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии тел в СО центра масс.

Давайте докажем эту теорему. Скорость i-той точки складывается из скорости относительно центра масс $\vec{v}_{\text{iотн}}$ и скорости центра масс $\vec{v}_c$:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{iотн}} + \vec{v}_c$$

Запишем кинетическую энергию системы через сумму кинетических энергий всех точек системы:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i(\vec{v}_{\text{iотн}} + \vec{v}_c)^2}{2} = \sum_i \frac{m_i v_{\text{iотн}}^2}{2} + \sum_i m_i \vec{v}_{\text{iотн}}\vec{v}_c + \sum_i \frac{m_i v_c^2}{2} \tag{2}$$

Вспомним определение скорости центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{M} \Rightarrow M\vec{v}_c = \sum_i m_i(\vec{v}_{\text{iотн}} + \vec{v}_c) = \sum_i m_i\vec{v}_{\text{iотн}} + \sum_i m_i\vec{v}_c$$

Заметим, что:

$$\sum_i m_i\vec{v}_c = \vec{v}_c\sum_i m_i = M\vec{v}_c$$

Тогда:

$$M\vec{v}_c = \sum_i m_i\vec{v}_{\text{iотн}} + M\vec{v}_c$$

Получается, что:

$$\sum_i m_i \vec{v}_{i\text{отн}} = 0$$

Подставляя это в (2):

$$K = \sum_i \frac{m_i v_{i\text{отн}}^2}{2} + 0 + \sum_i \frac{m_i v_c^2}{2} = K_{\text{отн}} + \frac{M v_c^2}{2}$$

Теорема доказана. Теперь найдем кинетическую энергию катящегося колеса:

$$K = \frac{M v_0^2}{2} + K_{\text{отн}}$$

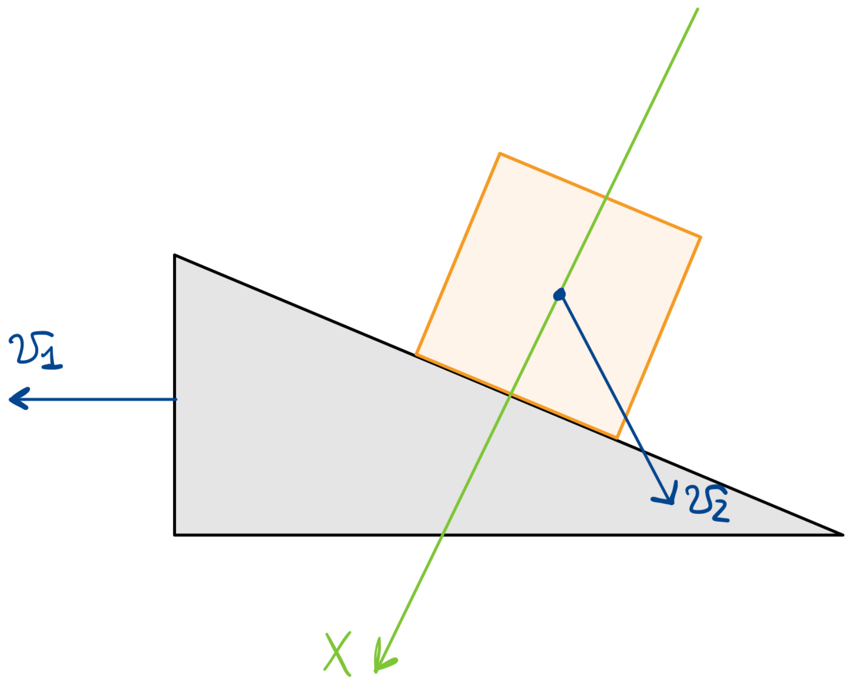
Если колесо катится без проскальзывания, то $v_{i\text{отн}} = v_0$:

$$K_{\text{отн}} = \sum_i \frac{m_i v_0^2}{2} = \frac{M v_0^2}{2}$$

Итак, кинетическая энергия равномерно катящегося со скоростью центра v_0 колеса массы M равна:

$$K = M v_0^2$$

4 Движение без отрыва

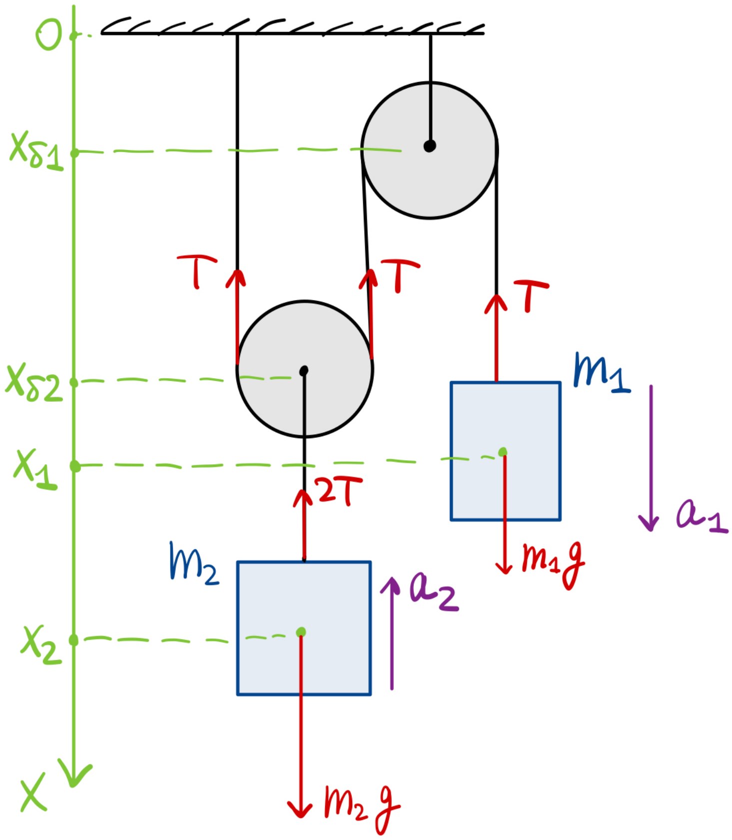


Пусть у нас есть клин и кубик, скользящий по клину *без отрыва*. Тогда проекции скоростей (и ускорений) этих тел на ось, перпендикулярную плоскости скольжения, должны быть равны:

$$v_{1x} = v_{2x}$$

Если это условие не выполняется, то одно тело будет "выезжать"из под другого и произойдет отрыв.

5 Идеальная нить. Формула Эйлера



Рассмотрим конкретный пример. Пусть у нас есть система из идеальных блоков и нитей как на рисунке. Все нити *невесомы* и *нерастяжимы*. Нужно найти ускорения грузов.

Если нить невесома, то сила натяжения в любом ее сечении одна и та же. Если нить нерастяжима, то ее длина не меняется (константа).

Пусть на первый груз со стороны нити действует сила T. Тогда на левый блок вверх действует сила $2T$, а значит вниз на этот блок будет действовать такая же по модулю сила $2T$ (т.к. блоки идеальны, а значит их масса равна нулю и силы действующие на блоки всегда скомпенсированы). Нити невесомы, значит на второй груз будет тоже действовать сила $2T$.

Запишем второй закон Ньютона для первого и второго груза в проекции на Ox:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_{1x} \\ m_2 g - 2T = m_2 a_{2x} \end{cases}$$

У нас получилась система из двух линейных уравнений с тремя неизвестными(T, a_1, a_2). Необходимо еще одно уравнение. Это и есть кинематическая связь на нерастяжимость нити.

Запишем координаты всех тел на оси X. Выберем ноль в координате потолка. Тогда запишем длину самой длинной нити через координаты тел:

$$L = (x_{б2} - 0) + \pi R + (x_{б2} - x_{б1}) + \pi R + (x_1 - x_{б1})$$

$$L = 2x_{б2} - 2x_{б1} + x_1 + 2\pi R$$

πR — длина части нити, находящейся на блоке (как мы дальше увидим, от нее ничего не зависит).

Продифференцируем это выражение по времени дважды[3]:

$$\ddot{L} = 2a_{б2x} - 2a_{б1x} + a_{1x}$$

Слагаемое $2\pi R$ уничтожилось, так как это константа, а производная константы равна нулю.

Чему равно $\ddot{L}$? Так как нить нерастяжима, то ее длина постоянна, значит $\ddot{L} = 0$:

$$2a_{б2x} - 2a_{б1x} + a_{1x} = 0$$

Если проделать аналогичные действия для нити, связывающей второй груз и подвижный блок, то получится очевидный результат: $a_{б2} = a_2$.

Неподвижный блок неподвижен (удивительно), а значит $a_{б1} = 0$.

Итак,

$$2a_{2x} = -a_{1x}$$

$$a_{1x} = -2a_{2x}$$

Минус означает то, что ускорения смотрят в разные стороны.

Теперь уравнений хватает:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_{1x} \\ m_2 g - 2T = m_2 a_{2x} \\ a_{1x} = -2a_{2x} \end{cases}$$

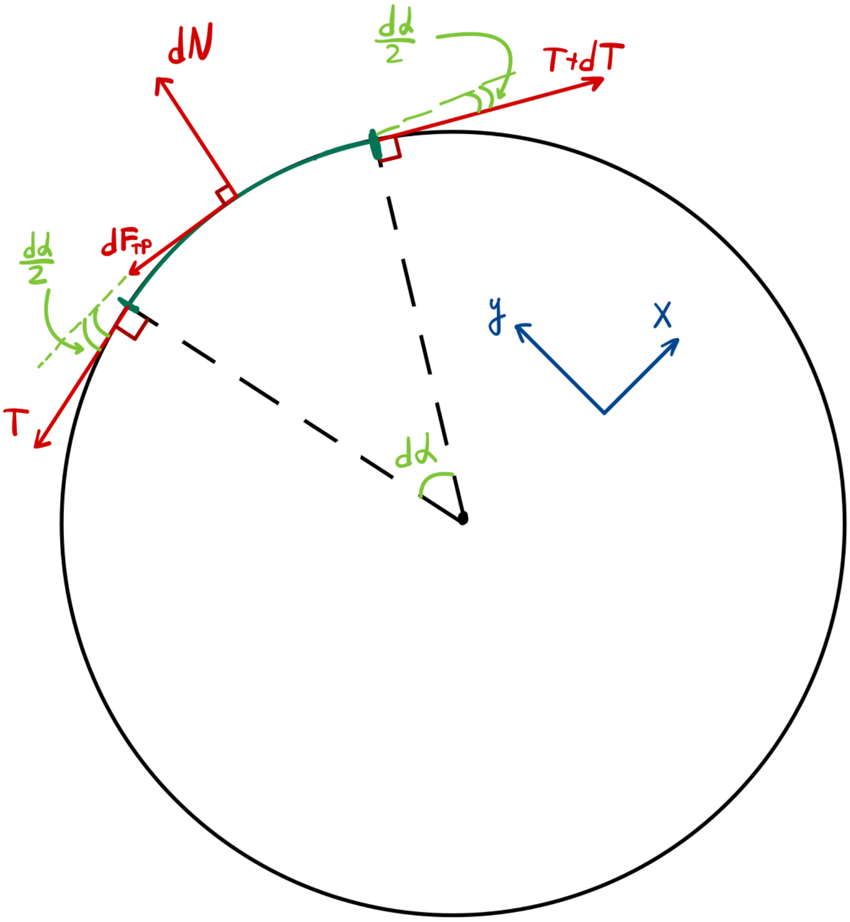
Решая систему, получаем:

$$a_{1x} = 2g\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}$$

$$a_{2x} = g\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}$$

Все задачи на нити решаются идентично.
Много подобных задач разобрано тут.

[3]получающиеся при этом ускорения это ускорения в проекции на ось X



Что делать, если нить трется о блок? Тогда сила натяжения нити не будет одинакова в любом ее сечении.
Рассмотрим блок с коэффициентом трения μ, на который намотана нить. Выделим малый кусок нити, опирающийся на угол $d\alpha$. Пусть сила натяжения левого конца нити равна T, а правого $T + dT$. Они направлены перпендикулярно радиусам, проведенным в концы нити. На блок также будет действовать сила реакции опоры со стороны блока dN, направленная перпендикулярно куску нити, а также сила трения $dF_{\text{тр}}$, направленная перпендикулярно dN. Из геометрии получаем, что углы с T равны $\frac{d\alpha}{2}$ (см.рис.).

Запишем второй закон Ньютона на оси X и Y:

$$\begin{cases} (T + dT)\cos\frac{d\alpha}{2} - T\cos\frac{d\alpha}{2} - dF_{\text{тр}} = 0 \\ dN - 2T\sin\frac{d\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

Так как углы малые, то:

$$\cos\frac{d\alpha}{2} = 1$$

$$\sin\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$$

Также вспомним закон Амонтона-Кулона:

$$dF_{\text{тр}} = \mu dN$$

Итак,

$$\begin{cases} dF_{\text{тр}} = dT = \mu dN \\ dN = T d\alpha \end{cases}$$

Получаем,

$$dT = \mu T d\alpha$$

$$\frac{dT}{T} = \mu d\alpha$$

Проинтегрируем,

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\varphi} d\alpha$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\varphi$$

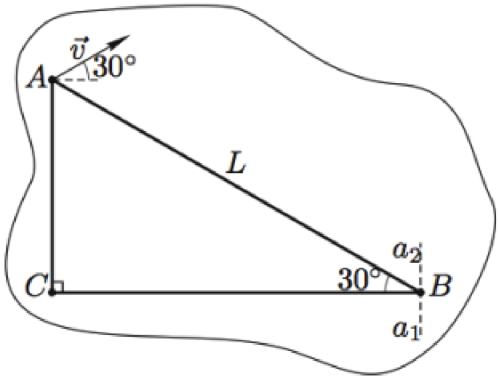
$$T_2 = T_1 e^{\mu\varphi}$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* Зависимость получилась экспоненциальная (а значит даже при малых коэффициентах трения сила натяжения может расти очень быстро). φ — угол закрутки нити о блок. Если нить замотали на блок n раз, то $\varphi = 2\pi n$.

6 Задачи

6.1 Задача 1 (закон палочки)

Задача 10. (*Всеросс., 2007, финал, 9*) По гладкой горизонтальной поверхности скользит пластинка, на которой отмечены три точки A, B и C, лежащие в вершинах прямоугольного треугольника с углом 30° при вершине B (см. рисунок). Гипотенуза треугольника равна L. В некоторый момент времени скорость точки A равна по модулю v_0 и направлена под углом 30° к катету BC. Известно также, что скорость точки B в этот момент времени направлена вдоль линии a_1a_2, параллельной катету AC.



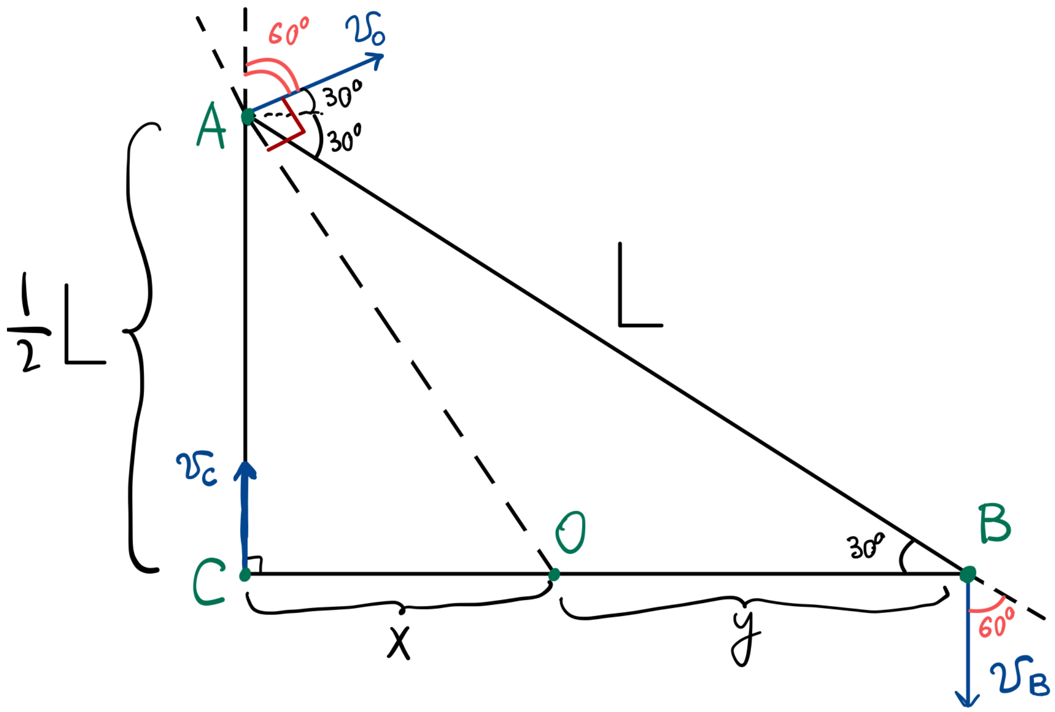
Определите:

1) модуль и направление скорости точки B;

2) модуль и направление скорости точки C;

3) положение точки O, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Изобразите на чертеже векторы скоростей точек B и C, а также положение точки O.



Сначала найдем скорость точки B. По условию, она может быть направлена или вверх, или вниз. Если она будет направлена вверх, то стержень AB разорвет, так как оба конца стержня будут двигаться навстречу друг другу, его длина будет уменьшаться и его разорвет. Тогда скорость направлена вниз.

Запишем закон палочки для стержня AB:

$$v_0 \cos(30^\circ + 30^\circ) = v_B \cos(60^\circ)$$

$$v_B = v_0$$

Теперь найдем скорость точки C. Рассмотрим стержень CB. Скорость точки B направлена перпендикулярно CB, а тогда и скорость точки C должна быть направлена перпендикулярно CB (или вверх, или вниз). Если она направлена вниз, то в стержне CA концы будут двигаться в противоположные стороны и стержень разорвет. Тогда скорость точки C направлена вверх. Запишем закон палочки для стержня CA:

$$v_C = v_0 \cos(60^\circ)$$

$$v_C = \frac{1}{2} v_0$$

В третьем вопросе нужно найти МЦС. Проведем перпендикулярны к скоростям v_A и v_B. Их пересечение (точка O) — МЦС. МЦС лежит на CB и делит его на два отрезка длиной x и y. Запишем угловую скорость вращения тела воуркг МЦС ω через скорости точек C и B и расстояния до МЦС:

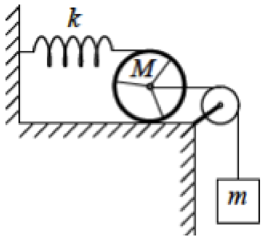
$$\omega = \frac{v_C}{x} = \frac{v_B}{y}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{v_C}{v_B} = \frac{1}{2}$$

Заметим, что $\frac{x}{y} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$. Тогда точка O лежит на биссектрисе угла CAB (по свойству биссектрисы).

6.2 Задача 2 (теорема Кенига)

Задача 15. (*МОШ, 2017, 11*) Найти собственную частоту малых колебаний груза m в системе, изображённой на рисунке. Обруч M катается без проскальзывания, массой спиц по сравнению с массой обруча пренебречь.



$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{2M+m}}$$

Найдем начальную деформацию пружины d записав правило моментов относительно точки касания колеса и поверхности (сила натяжения нити T равна mg):

$$TR = kd \cdot 2R \Rightarrow d = \frac{mg}{2k}$$

Пусть груз сместился вниз на x и приобрел скорость v. Тогда запишем кинетическую энергию системы:

$$K = K_{\text{груза}} + K_{\text{колеса}}$$

$$K_{\text{груза}} = \frac{mv^2}{2}$$

$$K_{\text{колеса}} = Mv^2 (\text{по теореме Кенига})$$

Найдем изменение потенциальной энергии системы (уровень нулевой потенциальной энергии выберем на уровне пола):

$$\Delta\Pi = \Delta\Pi_{\text{груза}} + \Delta\Pi_{\text{колеса}}$$

$$\Delta\Pi_{\text{груза}} = -mgx$$

Если скорость груза v, то скорость центра колеса тоже равна v (нерастяжимость нити). Тогда скорость точки крепления пружины к колесу (верхняя точка колеса) равна $2v$. Тогда если груз опустился на x, то пружина растянулась еще на $2x$:

$$\Delta\Pi_{\text{колеса}} = \frac{k(d+2x)^2}{2}$$

Запишем закон сохранения энергии для системы и продифференцируем его по времени:

$$K + \Delta\Pi = const$$

$$\dot{K} + \Delta\dot{\Pi} = 0$$

$$(mv\dot{v} + 2Mv\dot{v}) + (-mg\dot{x} + k(2x+d) \cdot 2\dot{x}) = 0$$

$$\dot{x}\ddot{x}(m + 2M) - mg\dot{x} + 2k\dot{x}(2x + d) = 0$$

Сокращая $\dot{x}$ и упрощая:

$$\ddot{x}(m + 2M) + 4kx = mg - 2kd$$

$mg - 2kd$ равно нулю, поэтому:

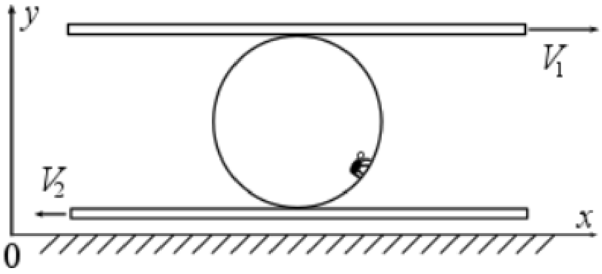
$$\ddot{x} + \frac{4k}{2M + m}x = 0$$

Получилось уравнение гармонических колебаний вида $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, поэтому:

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{2M + m}}$$

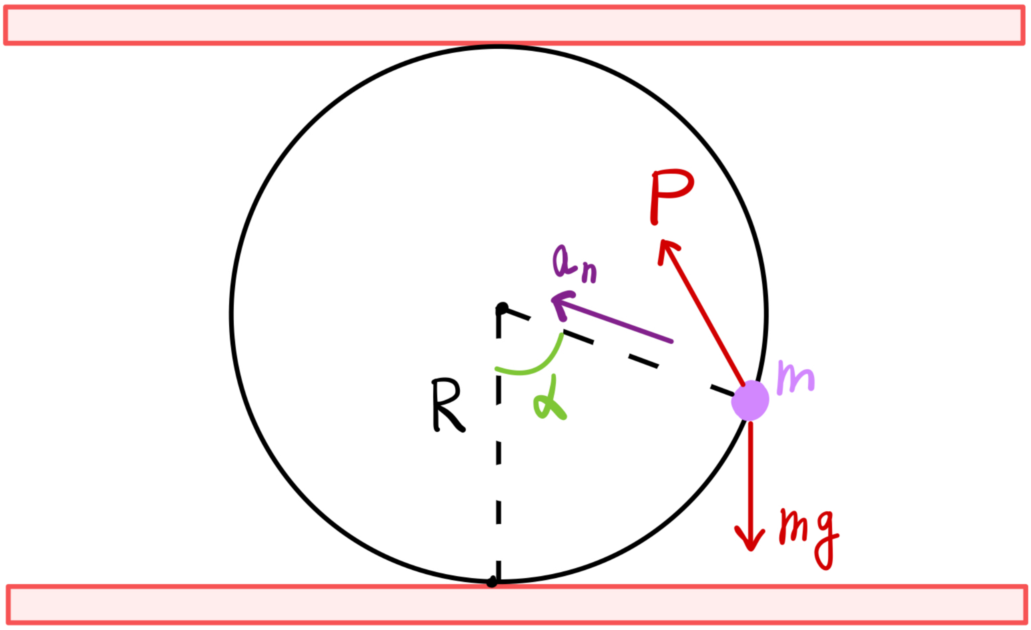
6.3 Задача 3 (колесо)

2. Тонкостенный полый шар радиуса $R = 0{,}1$ м зажат между двумя горизонтальными параллельными пластинами, одна из которых движется вправо со скоростью $V_1 = 0{,}6$ м/с, а вторая - влево со скоростью $V_2 = 0{,}4$ м/с. Проскальзывания между пластинами и шаром нет. На внутренней поверхности полого шара сидит жук массы $m = 1$ г. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1) Найдите скорость V центра шара.

2) Найдите максимальную силу P_{MAX}, с которой жук действует на шар.



1) Перейдем СО нижней плиты. Тогда нижняя точка колеса будет покоиться, а верхняя двигаться со скоростью v_1+v_2. Скорость центра колеса в СО нижней плиты будет равна $\frac{v_1+v_2}{2}$. Тогда скорость центра колеса в СО Земли:

$$v = \frac{v_1+v_2}{2} - v_2 = \frac{v_1-v_2}{2}$$

2)Динамику будем писать в СО, где центр колеса равна нулю. Нужно от всех скоростей вычесть скорость колеса v. Тогда скорость жука будет постоянна и равна $u = \frac{v_1+v_2}{2}$.

На жука действует сила тяжести и сила со стороны колеса (она не обязана всегда быть направленной к центру колеса). Жук будет иметь только нормальную сотавляющую ускорения $a_n = \frac{u^2}{R}$.

Запишем второй закон Ньютона на оси Y и X:

$$\begin{cases} P_y - mg = ma_n \cos\alpha \\ P_x = ma_n \sin\alpha \end{cases}$$

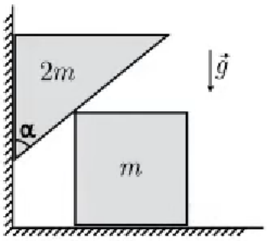
$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{(ma_n \sin\alpha)^2 + (ma_n \cos\alpha + mg)^2}$$

$$P = \sqrt{m^2 a_n^2 + m^2 g^2 + 2m^2 a_n g \cos\alpha}$$

Сила будет максимальна, если $\cos\alpha = 1$, тогда:

$$P_{max} = \sqrt{(mg + ma_n)^2} = mg + \frac{mu^2}{R} = 0{,}0125 \text{ Н}$$

6.4 Задача 4 (движение без отрыва)

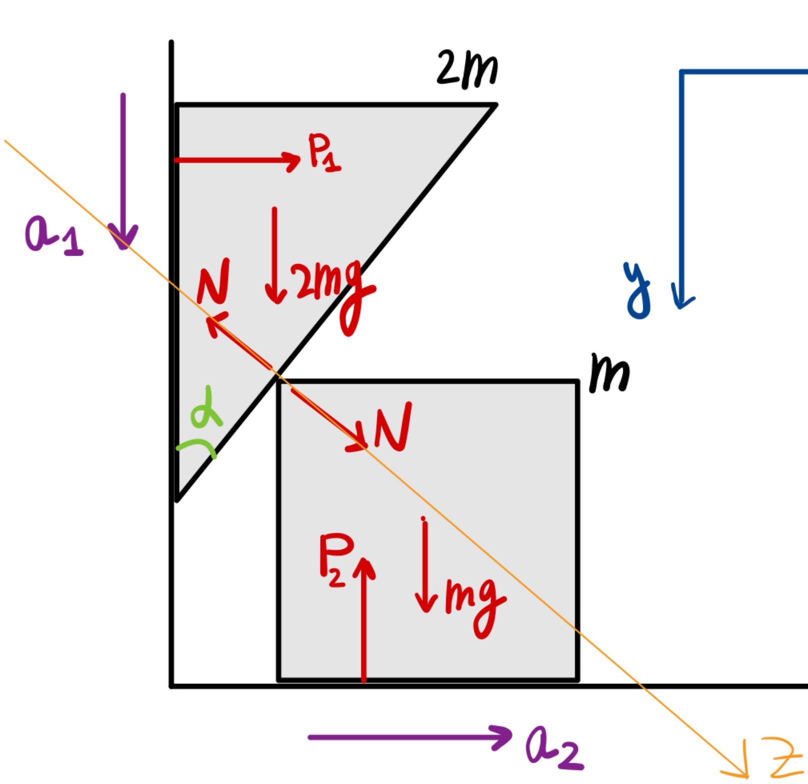


Клин массой $2m$ с углом $\alpha = 60^0$ при вершине может двигаться поступательно по вертикальным направляющим. Боковой стороной он касается кубика массой m, лежащего на горизонтальной поверхности. Первоначально клин и кубик удерживают в покое.

1) Найти ускорение, с которым будет двигаться клин, если его отпустить.

2) С какой силой при этом будет давить кубик на горизонтальную поверхность?

Трением между всеми поверхностями пренебречь. Кубик движется поступательно.



Запишем кинсвязь движения без отрыва для ускорений (проекции ускорения тел на ось, порпендикулярную плоскости скольжения — Oz):

$$a_{1z} = a_{2z}$$

$$a_1 \sin\alpha = a_2 \cos\alpha$$

$$a_1 = a_2 \operatorname{ctg}\alpha$$

Второй закон Ньютона для клина и кубика на Oy:

$$\begin{cases} 2mg - N\sin\alpha = 2ma_1 \\ N\cos\alpha = ma_2 \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе найдем N:

$$2\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2mg - N\sin\alpha}{N\cos\alpha}$$

$$N = \frac{2mg\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}$$

Подставив N в первое уравнение системы, найдем искомое a_1:

$$a_1 = g - \frac{g\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{2}{5}g$$

Второй закон Ньютона для кубика на Oy:

$$N\sin\alpha + mg = P_2$$

Находим искомое P_2:

$$P_2 = \frac{2mg\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} + mg = \frac{11}{5}mg$$

Канал автора—https://t.me/kinenergy228