Метод виртуальных перемещений

Канал автора—https://t.me/kinenergy228

Содержание

1 Задача 1 **3**

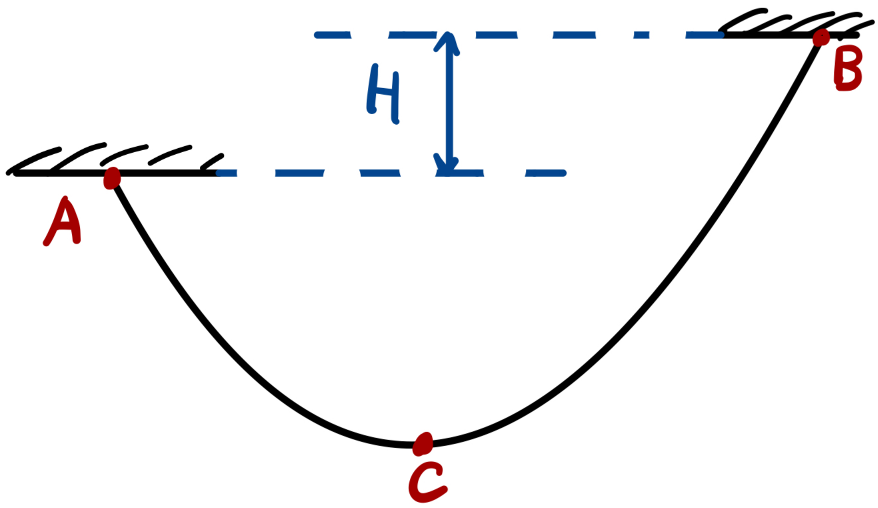
2 Задача 2 (Физтех — 2016) **6**

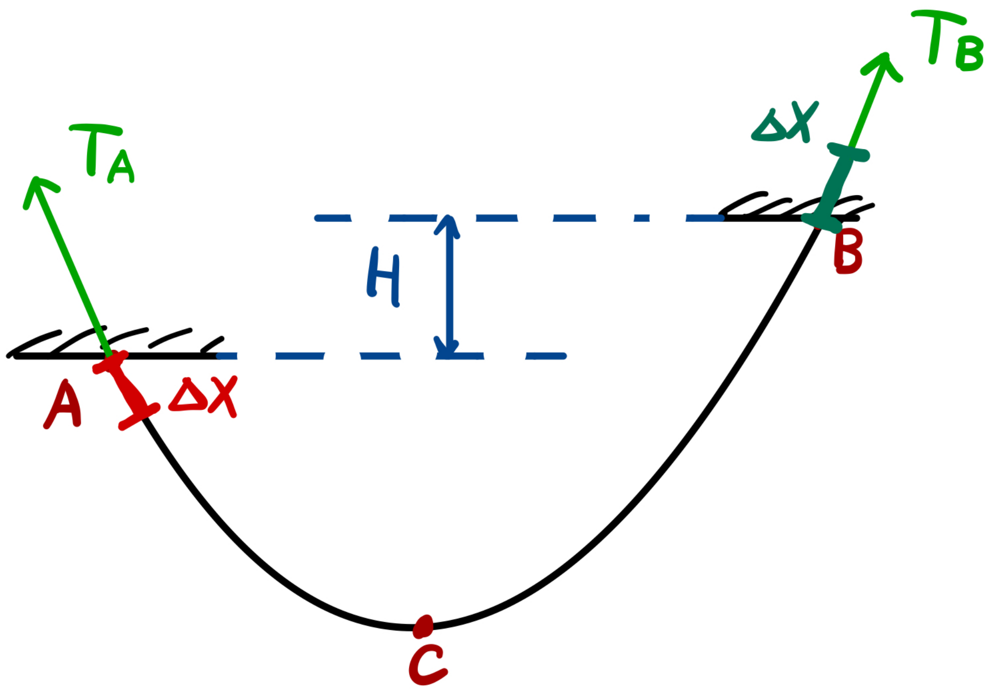
3 Задача 3 (Кубок ЛФИ) **8**

4 Задача 4 (Росатом — 2022) **9**

1 Задача 1

Условие: Однородная гибкая цепочка длиной L подвешена за свои концы в точках A и B так, как показано на рисунке. Точка C — самая нижняя точка цепочки. Силы натяжения цепочки в точках A, B и C составляют T_A, T_B, T_C соответственно. Найти высоту H между концами цепочки.





Сделаем виртуальное перемещение цепочки вправо вдоль нее самой на расстояние Δx ($\Delta x \ll L$). Заметим, что это эквивалентно тому, что мы возьмем кусок цепочки длиной Δx у точки A и переместим его к точке B.

Тогда согласно методу виртуальных перемещений можно записать:

$$A_{T_A} + A_{T_B} + A_{\text{силы тяжести}} = 0$$

$A_{T_A} = -T_A\Delta x$ (работа отрицательна, так как сила и перемещение куска цепочки направлены противоположны, см. рисунок)
$A_{T_B} = T_B\Delta x$ (работа положительна, так как сила и перемещение куска цепочки направлены в одну сторону, см. рисунок)
$A_{\text{силы тяжести}} = -\Delta mgH$ (Δm — масса куска цепочки длиной Δx; работа отрицательна, так как сила тяжести направлена вниз, а кусок цепочки перемещается вверх)

Итак,

$$-T_A\Delta x + T_B\Delta x - \Delta mgH = 0$$

Разделим на Δx:

$$-T_A + T_B - \frac{\Delta m}{\Delta x}gH = 0$$

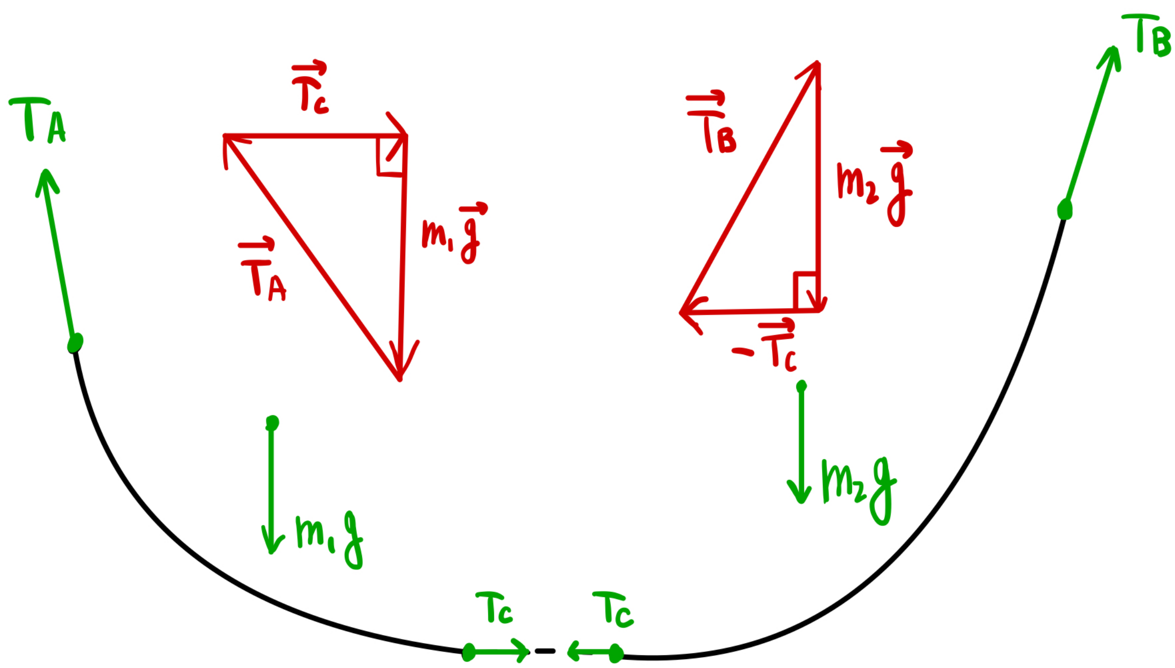
Цепочка однородна, поэтому:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m}{L}$$

, где m — масса всей цепочки

Получаем выражение для H:

$$H = \frac{(T_B - T_A)L}{mg}$$



Чтобы найти массу цепочки, разделим ее на две части по точке C.

Рассмотрим левую часть цепочки, массой m_1. На нее действуют силы[1]: T_A, T_C, $m_1 g$. Нарисуем векторный треугольник из эти трех сил (см. рисунок). Этот треугольник прямоугольный (так как T_C направлена горизонтально, ведь C — нижняя точка цепочки), поэтому по теореме Пифагора:

$$T_A^2 = T_C^2 + (m_1 g)^2$$

Аналогично для правого куска нити, массой m_2:

$$T_B^2 = T_C^2 + (m_2 g)^2$$

Итак, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} T_A^2 = T_C^2 + (m_1 g)^2 \\ T_B^2 = T_C^2 + (m_2 g)^2 \\ m_1 + m_2 = m \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим m:

$$m = \frac{\sqrt{T_A^2 - T_C^2} + \sqrt{T_B^2 - T_C^2}}{g}$$

Подставляя это в выражения для H, получаем ответ:

$$H = L \cdot \frac{T_B - T_A}{\sqrt{T_A^2 - T_C^2} + \sqrt{T_B^2 - T_C^2}}$$

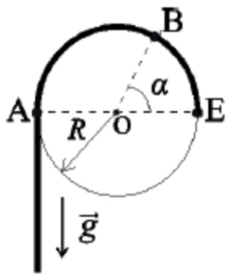
[1] точка приложения силы тяжести не обязательно расположена на самой нити

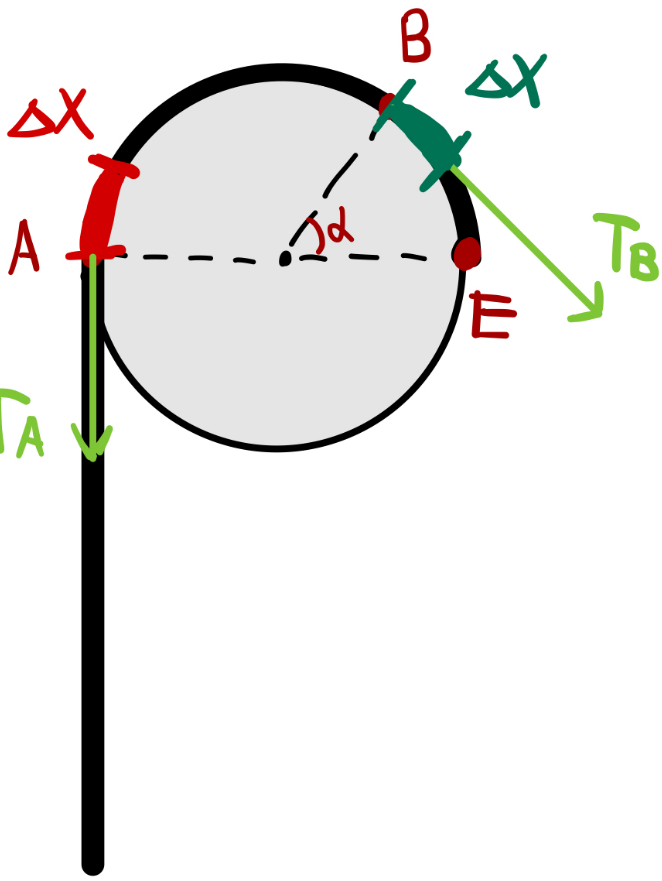
2 Задача 2 (Физтех — 2016)

Задача 2. (*«Физтех», 2016, 10–11*) На гладком закреплённом бревне радиусом R висит массивный однородный канат массой m и длиной $l = 7R$, прикреплённый к бревну в точке E (см. рисунок). Точка E и ось O бревна находятся в одной горизонтальной плоскости.

1) Найти силу натяжения каната в точке A.

2) Найти силу натяжения каната в точке B такой, что угол EOB равен α ($\sin\alpha = 2/3$).





1) Для ответа на первый пункт рассмотрим свешивающийся кусок каната. На него действует сила тяжести и сила натяжения в точке А, направленная вверх:

$$T_A = m_{\text{свеш}} g$$

Найдем массу свешивающеся части каната:

$$m_{\text{свеш}} = \sigma(l - \pi R)$$

,где σ — погонная плотность каната (масса единицы длины). Так как канат однороден, то $\sigma = \frac{m}{l} = const$

Подставляя, получаем:

$$m_{\text{свеш}} = \frac{m(7R - \pi R)}{7R} = \frac{7-\pi}{7}m$$

Итак, получаем ответ на первый пункт:

$$T_A = \frac{7-\pi}{7}mg$$

2) Сделаем виртуальное пермещение куска нити длиной Δx из точки A в точку B. По метоуд виртуальных перемещений:

$$A_{T_A} + A_{T_B} + A_{\text{силы тяжести}} = 0$$

$A_{T_A} = -T_A \Delta x$ (тут мы рассматриваем часть каната, находящуюся на нити, поэтому T_A направлена вниз)
$A_{T_B} = T_B \Delta x$
$A_{\text{силы тяжести}} = -\Delta mgH = -\Delta mg \cdot R\sin\alpha$

$$-T_A\Delta x + T_B\Delta x - \Delta mg \cdot R\sin\alpha = 0$$

$$-T_A + T_B - \frac{\Delta m}{\Delta x}gR\sin\alpha = 0$$

Канат однородный, поэтому $\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m}{l}$

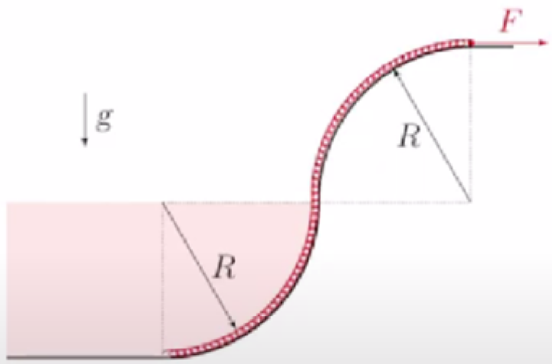
$$T_B = T_A + \frac{mgR\sin\alpha}{l}$$

$$T_B = \frac{7-\pi}{7}mg + \frac{2}{21}mg$$

$$T_B = \frac{23-3\pi}{21}mg$$

3 Задача 3 (Кубок ЛФИ)

1. *(5 баллов)* На гладкой поверхности лежит тонкая массивная цепочка массой M (см. рис.). Нижняя половина цепочки находится в жидкости с плотностью втрое меньшей плотности материала цепочки. Поверхность состоит из двух частей, представляющих из себя четверти окружности одинакового радиуса. Какую силу F необходимо приложить к верхнему концу цепочки, чтобы она не скользила? Ускорение свободного падения g.



Рассмотрим виртуальное пермещение куска цепочки длиной Δx из нижнего положения в верхнее. Тогда:

$$A_F + A_{\text{силы тяжести}} + A_{\text{силы Архимеда}} = 0$$

$A_F = F\Delta x$
$A_{\text{силы тяжести}} = -\Delta m g \cdot 2R$
$A_{\text{силы Архимеда}} = \rho_{\text{жидкости}} g \Delta V R = \frac{1}{3} g\rho \cdot S\Delta x R$, где S — площадь поперечного сечения цепочки, ρ — плотность цепочки

$$F\Delta x - \Delta m g \cdot 2R + \frac{1}{3} g\rho S\Delta x R = 0$$

Заметим, что $\rho S\Delta x = \Delta m$ и разделим все на Δx:

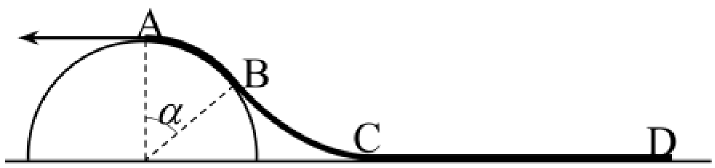
$$F - \frac{\Delta m}{\Delta x} \cdot 2gR + \frac{1}{3}\frac{\Delta m}{\Delta x} gR = 0$$

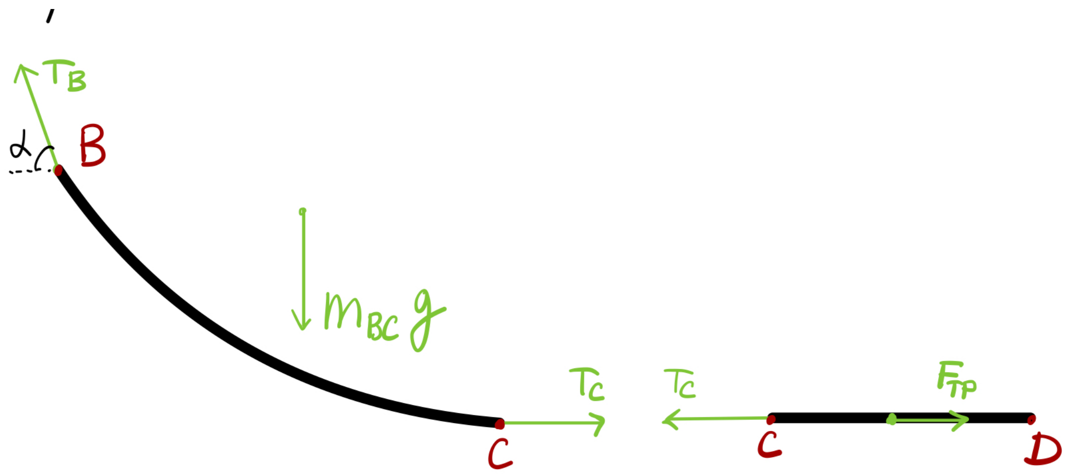
Цепочка однородна, поэтому $\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{M}{\pi R}$:

$$F = \frac{5}{3\pi} Mg$$

4 Задача 4 (Росатом — 2022)

4. Однородную нерастяжимую веревку, лежащую на горизонтальной поверхности, медленно втягивают на гладкий полушар, закрепленный на поверхности, действуя на ее конец некоторой силой. Когда конец веревки A оказывается в верхней точке полушара, веревка касается полушара участком AB, опирающимся на угол α, а длина «висящего» участка веревки BC втрое меньше ее участка CD, лежащего на поверхности (см. рисунок). Найти коэффициент трения между веревкой и поверхностью. Какой горизонтальной силой нужно в этот момент действовать на конец веревки A, если масса веревки m, масса куска CD — m_{CD}?





1) Для ответа на первый вопрос рассмотрим кусок BC. Из горизонтальных сил на него действуют силы T_B и T_C (из геометрии находим, что T_B составляет угол α с горизонтом). Веревка находится в равновесии, поэтому:

$$T_B \cos\alpha = T_C$$

Из векторного треугольника сил, действующих на BC, можно записать:

$$T_B = \frac{m_{BC}g}{\sin\alpha}$$

Поэтому,

$$T_C = m_{BC}g \operatorname{ctg}\alpha$$

Теперь рассмотрим кусок CD. На него действуют силы T_C и $F_{\text{тр}}$, поэтому:

$$F_{\text{тр}} = T_C = \mu m_{CD} g$$

$$m_{BC} g \operatorname{ctg} \alpha = \mu m_{CD} g$$

$$\mu = \frac{m_{BC}}{m_{CD}} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \alpha$$

2) Сделаем виртуальное перемещение куска веревки длиной Δx из точки B в точку A. Тогда:

$$A_{T_B} + A_F + A_{\text{силы тяжести}} = 0$$

$A_{T_B} = -T_B \Delta x$
$A_F = F\Delta x$
$A_{\text{силы тяжести}} = -\Delta m g R(1 - \cos\alpha) = -\Delta m g(1 - \cos\alpha) \cdot \frac{AB}{\alpha}$

$$-T_B \Delta x + F\Delta x - \Delta m g(1 - \cos\alpha) \cdot \frac{AB}{\alpha} = 0$$

$$-T_B + F - \frac{\Delta m}{\Delta x} g(1 - \cos\alpha) \frac{AB}{\alpha} = 0$$

$T_B = \frac{m_{BC} g}{\sin\alpha} = \frac{m_{CD} g}{3 \sin\alpha}$
$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m_{AB}}{AB} = \frac{m - 4m_{CB}}{AB} = \frac{m - \frac{4}{3} m_{CD}}{AB} = \frac{3m - 4m_{CD}}{3AB}$

$$F = \frac{m_{CD} g}{3 \sin\alpha} + \frac{3m - 4m_{CD}}{3AB} g(1 - \cos\alpha) \frac{AB}{\alpha}$$

$$F = \frac{m_{CD} g}{3 \sin\alpha} + \frac{(3m - 4m_{CD}) g(1 - \cos\alpha)}{3\alpha}$$

Канал автора—https://t.me/kinenergy228