Магнетизм

Канал автора—https://t.me/kinenergy228

Содержание

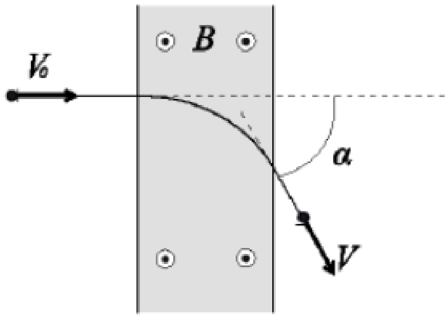
1 Движение частиц в магнитном поле

1.1 Задача — 1 (База)

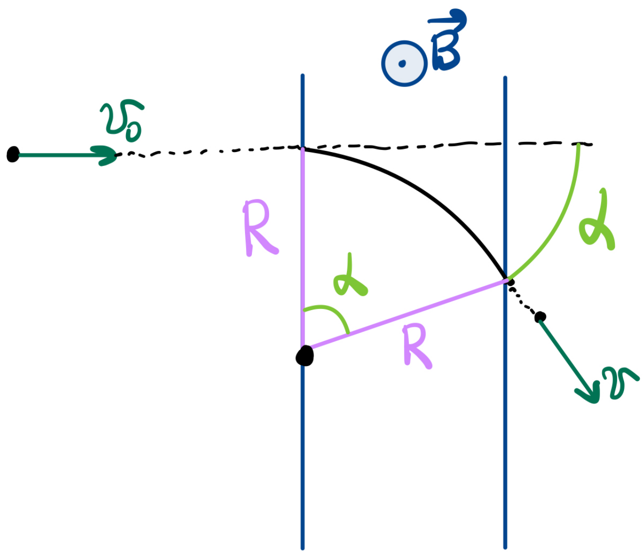
Задача 10. (*«Физтех», 2016, 11*) Частица массой $m = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл пролетает область однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}03$ Тл, изменив направление своего движения на угол $\alpha = 0{,}8$ рад (см. рисунок). Начальная скорость частицы перпендикулярна границе поля и силовым линиям поля.

1) Найти отношение скорости v при вылете из поля к скорости v_0 при влёте в поле. Дать объяснение.

2) Найти время пролёта частицы через магнитное поле.



1) $v/v_0 = 1$; 2) $t = \frac{m\alpha}{qB} = 550$ нс



1) Вспомним формулу для силы Лоренца:

$$\vec{F}_{\text{л}} = q[\vec{v},\vec{B}]$$

Так как векторное произведение скорости частицы $\vec{v}$ и вектора магтиной индукции $\vec{B}$ направлен перпендикуляно обоим векторам, то сила Лоренца будет перпендикулярна скорости частицы в любой момент врменеи (пока частица находится в поле). Тогда сила Лоренца совершает нулевую работу. А так как других сил нет ($mg \ll F_{\text{л}}$), то выходит, что энергия частицы сохраняется. Тогда:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = v_0$$

2) Сразу после влета в поле частица начнет двигаться по окружности радиуса R. Найдем радиус. запишем второй закон Ньютона на направление нормали:

$$F_{\text{л}} = ma_{\text{n}} = m\frac{v_0^2}{R}$$

$$qv_0 B \sin 90^\circ = m\frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{qB}$$

Теперь найдем угловую скорость ω:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{m}$$

Если ввести понятие удельного заряда $\gamma = \frac{q}{m}$, то формула перепишется в следующем виде:

$$\omega = \gamma B$$

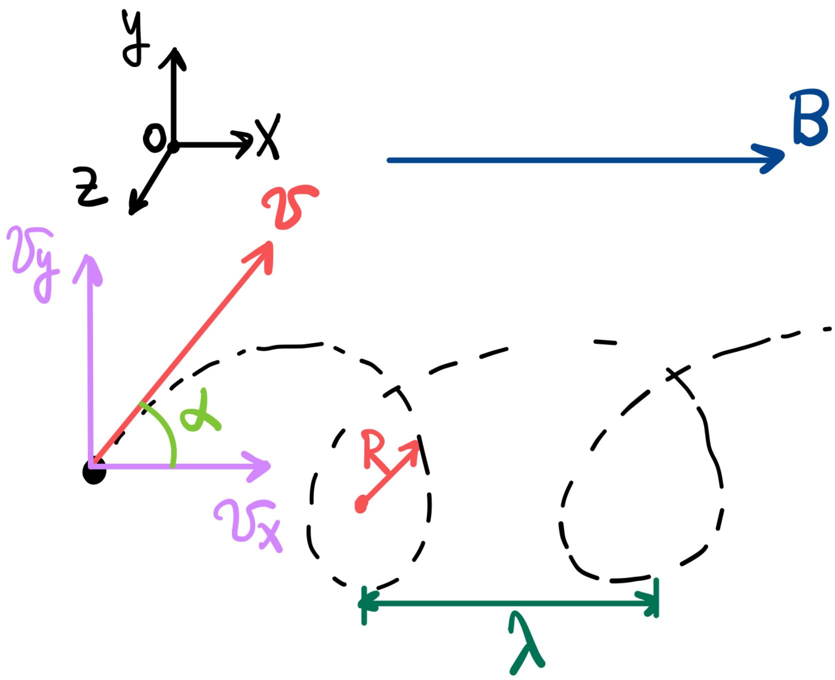
Запишем выражение для угловой скорости по определению:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow t = \frac{\alpha}{\omega}$$

$$t = \frac{\alpha}{\gamma B} = \frac{\alpha m}{qB} = 550 \text{ нс}$$

1.2 Задача – 2 (Винтовая линия)

Задача 14. (*Винтовая линия*) В область однородного магнитного поля B влетает заряженная частица, скорость v которой направлена под острым углом α к вектору магнитной индукции. Объясните, почему траекторией частицы будет винтовая линия. Найдите радиус и шаг этой винтовой линии. Масса частицы равна m, заряд равен q.



1) Разложим скорость частицы v на две компоненты — v_x и v_y. Заметим, что $\vec{v_x} \parallel \vec{B}$, а значит, что v_x не будет давать вклада в силу Лоренца (т.к $[\vec{v_x}, \vec{B}] = 0$). Тогда сила Лоренца будет создаваться лишь благодаря $v_y = v\sin\alpha$ и ее модуль будет равен:

$$F_{\text{л}} = qv\sin\alpha B$$

По правилу левой руки определяем, что сила Лоренца будет всегда лежать в плоскости ZOY и не будет давать вклад в движение по оси X. Получается, что по оси X у нас равномерное прямолинейное движение, а в плоскости ZOY движение по окружности. Сложением двух этих движений и является винтовая линия.

2) • Радиус окружности R найдем из 2ЗН:

$$F_{\text{л}} = m\frac{v^2\sin^2\alpha}{R}$$

$$qvB\sin\alpha = m\frac{v^2\sin^2\alpha}{R} \Rightarrow R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$$

• Шаг винтовой линии λ — расстояние, которое частица проходит по оси X за время одного полного обращения в плоскости ZOY. Сначала найдем период обращения T:

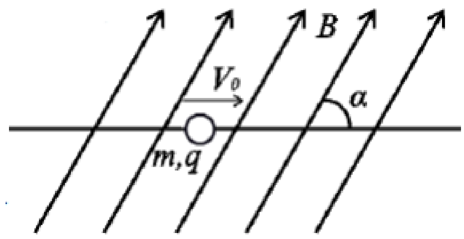
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Теперь найдем шаг:

$$\lambda = v_x T = v\cos\alpha\frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}$$

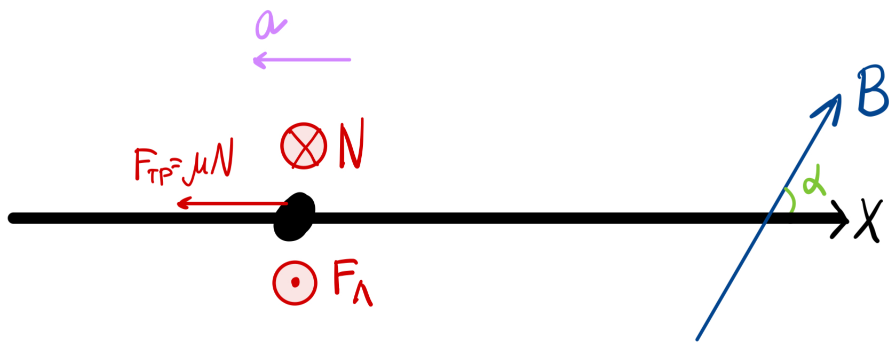
1.3 Задача — 3 (Интегрируем)

Задача 20. (*«Физтех», 2016, 11*) Бусинка массой m с положительным зарядом q может скользить вдоль закреплённой длинной спицы. Бусинка со спицей помещены в однородное магнитное поле с индукцией B (см. рисунок). Угол между вектором индукции и спицей равен $\alpha = \arcsin\frac{2}{5}$. Бусинке сообщают скорость v_0. Коэффициент трения между бусинкой и спицей равен μ. Действие силы тяжести не учитывать.



1) Найти силу трения, действующую на бусинку в момент, когда ее скорость станет $v_0/3$.

2) На какое расстояние сместится бусинка к моменту, когда ее скорость станет $v_0/3$?



1) На бусинку будут действовать три силы: сила трения, сила Лоренца и сила реакции спицы. По правилу левой руки определяем, что сила Лоренца направлена на нас, а значит, что сила реакции направлена от нас и равна по модулю силе Лоренца (чтобы бусинка двигалась только вдоль спицы). Тогда по закону Амонтона-Кулона:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu F_{\text{л}} = \mu q v B \sin\alpha$$

Получем ответ на первый вопрос задачи:

$$F_{\text{тр}}\left(\frac{v_0}{3}\right) = \frac{1}{3}\mu q v_0 B \frac{2}{5} = \frac{2}{15}\mu q v_0 B$$

2) Найдем зависимость $x(v)$. запишем 2ЗН:

$$-F_{\text{тр}} = m\frac{dv}{dt}$$

$$-\mu q v B \sin\alpha = m\frac{dv}{dt}$$

Умножаем обе части на dt и замечаем, что $vdt = dx$ и интегрируем:

$$-\mu qB\sin\alpha dx = mdv$$

$$-\mu qB\sin\alpha\int\limits_0^x dx = m\int\limits_{v_0}^v dv$$

$$-\mu qB\sin\alpha x = m(v - v_0) \Rightarrow x(v) = \frac{m(v_0 - v)}{\mu qB\sin\alpha}$$

Получаем ответ на второй вопрос задачи:

$$x\left(\frac{v_0}{3}\right) = \frac{m\frac{2}{3}v_0}{\mu qB\frac{2}{5}} = \frac{5mv_0}{3\mu qB}$$

Можно пойти дальше. Найдем зависимость $v(t)$. Запишем 2ЗН и разделим переменные (для удобства сделаем замену $\beta = \mu qB\sin\alpha$):

$$-\beta\int\limits_0^t dt = m\int\limits_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

$$-\beta t = m\ln\frac{v}{v_0}$$

$$\beta t = m\ln\frac{v_0}{v}$$

$$e^{\frac{\beta}{m}t} = \frac{v_0}{v} \Rightarrow v(t) = \frac{v_0}{e^{\frac{\beta t}{m}}}$$

Теперь найдем зависимость $x(t)$:

$$x(t) = \int\limits_0^t v(t)dt = v_0\int\limits_0^t \frac{dt}{e^{\frac{\beta t}{m}}} = v_0\left(\frac{-1}{\frac{\beta}{m}e^{\frac{\beta t}{m}}}\right)\Bigg|_0^t$$

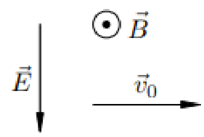
$$x(t) = v_0\left(\frac{1}{\frac{\beta}{m}} - \frac{1}{\frac{\beta}{m}e^{\frac{\beta t}{m}}}\right)$$

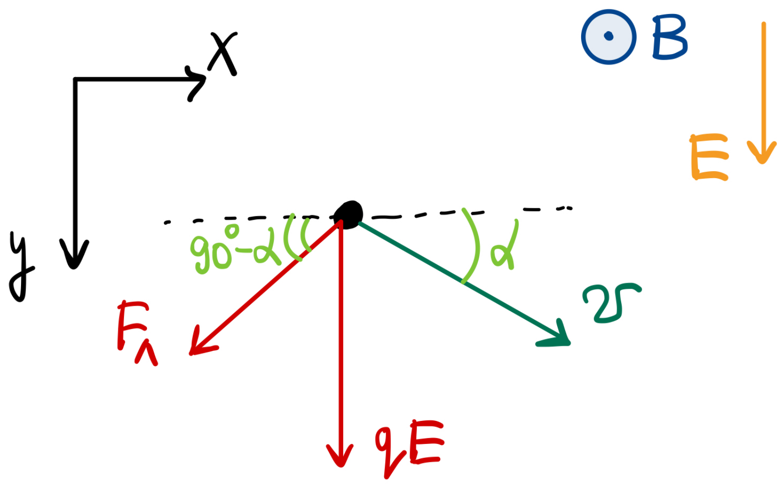
$$x(t) = mv_0\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta e^{\frac{\beta t}{m}}}\right)$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{\beta}\left(1 - e^{\frac{-\beta t}{m}}\right)$$

1.4 Задача — 4 (Скрещенные поля)

Задача 47. (*МФТИ, 1992*) Заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. В некоторый момент времени её скорость $\vec{v}_0$ перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (см. рисунок). Чему будет равно отношение изменения кинетической энергии к начальной кинетической энергии частицы в те моменты, когда вектор её скорости будет перпендикулярен $\vec{v}_0$, если известно, что $E/(v_0 B) = \beta \ll 1$?





Пусть скорость частицы в какой-то момент времени направлена под углом α к оси X. Запишем 2ЗН в проекции на ось X:

$$-F_{\text{л}} \cos(90^\circ - \alpha) = m\frac{dv_x}{dt}$$

$$-qBv\sin\alpha = m\frac{dv_x}{dt}$$

Заметим, что $v\sin\alpha = v_y$:

$$-qv_yB = m\frac{dv_x}{dt}$$

Умножаем обе части на dt:

$$-qB \cdot v_y dt = m dv_x$$

Заметим, что $v_y dt = dy$:

$$-qBdy = mdv_x$$

Если скорость v станет перпендикулярна v_0, то $v_x = 0$, поэтому правильно пишем пределы интегрирования:

$$-qB\int\limits_0^y dy = m\int\limits_{v_0}^0 dv_x$$

$$qBy = mv_0 \Rightarrow y = \frac{mv_0}{qB}$$

Сила Лоренца совершает нулевую работу, поэтому работу будет совершать только электрическая сила, которая является потенциальной, поэтому:

$$A_{\text{эл}} = qEy = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$2qE\frac{mv_0}{qB} = m(v^2 - v_0^2)$$

$$\frac{2Ev_0}{B} = v^2 - v_0^2$$

Из условия определяем, что $\frac{E}{B} = \beta v_0$:

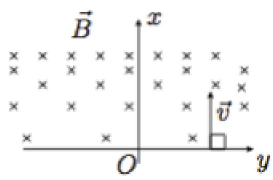
$$2\beta v_0^2 = v^2 - v_0^2 \Rightarrow v^2 = v_0^2(2\beta + 1)$$

Расписываем относительное изменение кинетической энергии:

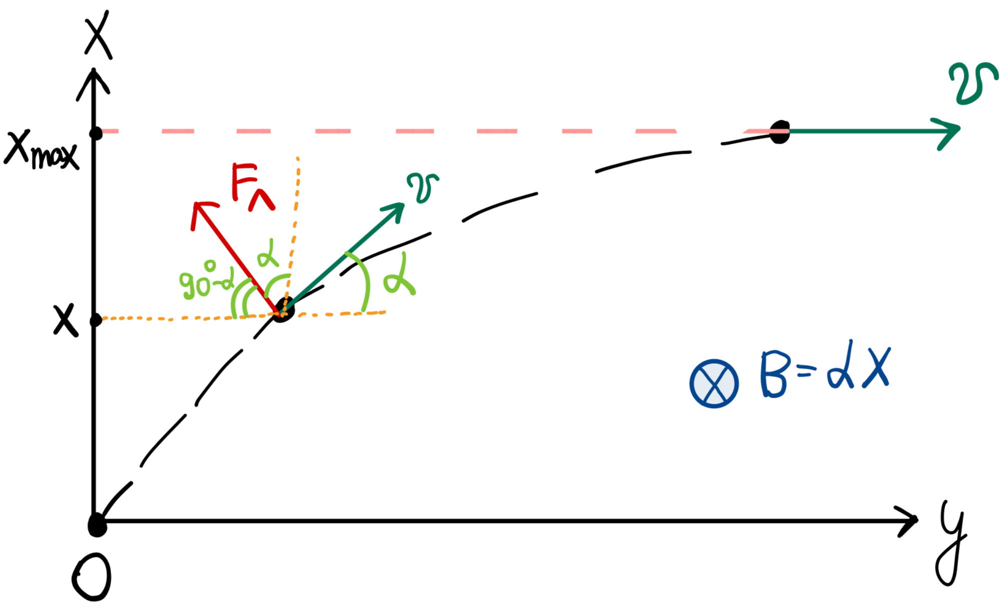
$$\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = \frac{v^2}{v_0^2} - 1 = \frac{v_0^2(2\beta + 1)}{v_0^2} - 1 = 2\beta$$

1.5 Задача — 5 ($B = \alpha x$)

Задача 26. (*Всеросс., 2003, финал, 11*) В неоднородном магнитном поле с индукцией $B = \alpha x$ ($x \geqslant 0$) (рис.) стартует частица массой m и зарядом q с начальной скоростью v, направленной вдоль оси Ox. Определите максимальное смещение $x_{\max}$ частицы вдоль оси x.



$$\boxed{x_{\max} = \sqrt{\frac{2mv}{|q|\alpha}}}$$



Пусть в какой-то момент времени скорость частицы составляет угол α с осью Y. Запишем 2ЗН на ось Y:

$$-F_{\text{л}} \sin\alpha = m\frac{dv_y}{dt}$$

$$-qB \cdot v \sin\alpha = m\frac{dv_y}{dt}$$

$$-qBv_x = m\frac{dv_y}{dt}$$

$$-qBdx = mdv_y$$

$$-q\alpha x dx = mdv_y$$

Если смещение вдоль оси X максимально, то скорось частицы целиком направлена вдоль оси Y(модуль скорости не меняется):

$$-q\alpha \int\limits_0^{x_{max}} xdx = m\int\limits_0^{v} dv_y$$

$$-q\alpha\frac{x_{max}^2}{2} = mv$$

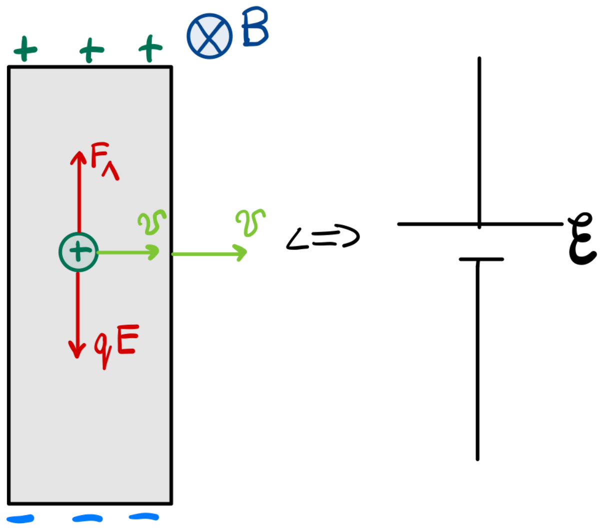
Траектория частицы на рисунке изображена для отрицательного заряда, поэтому можно убрать минус в фомуле поставив модуль у заряда:

$$|q|\alpha\frac{x_{max}^2}{2} = mv \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{2mv}{|q|\alpha}}$$

2 Проводники в магнитном поле

2.1 Задача — 6 (Эффект Холла)

Условие: Металлический стержень длиной l, расположенный в горизонтальной плоскости, движется относительно лаборатории равномерно и поступательно в вертикальном однородном магнитном поле B. Скорость v стержня горизонтальна и направлена перпендикулярно стержню. Найдите разность потенциалов (ЭДС) между концами стержня.



Рассмотрим положительно заряженную частицу, находящуюся в проводнике. В среднем, она движется горизонтально со скорость v, равной скорости проводника[1]. По правилу левой руки определяем, что сила Лоренца направлена вверх. Тогда в верхней части проводника будут скапливаться положительные заряды, а в нижней части — отрицательные. Эти заряды создадут электрическое поле, направленное вниз. Спустя очень малое время электрическая сила скомпенсирует силу Лоренца и движения зарядов прекратится. Заряды на краях проводника перестанум меняться и наступит установившийся режим.

$$F_{\text{л}} = qE$$

$$qvB = qE \Rightarrow E = vB$$

Если режим установился, то проводник можно заменить батарейкой (если проводник с нулевым сопротивлением, то идеальной) с ЭДС $\mathscr{E}$. Распишем напряженность E через ЭДС:

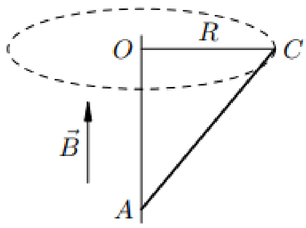
$$\mathscr{E} = El$$

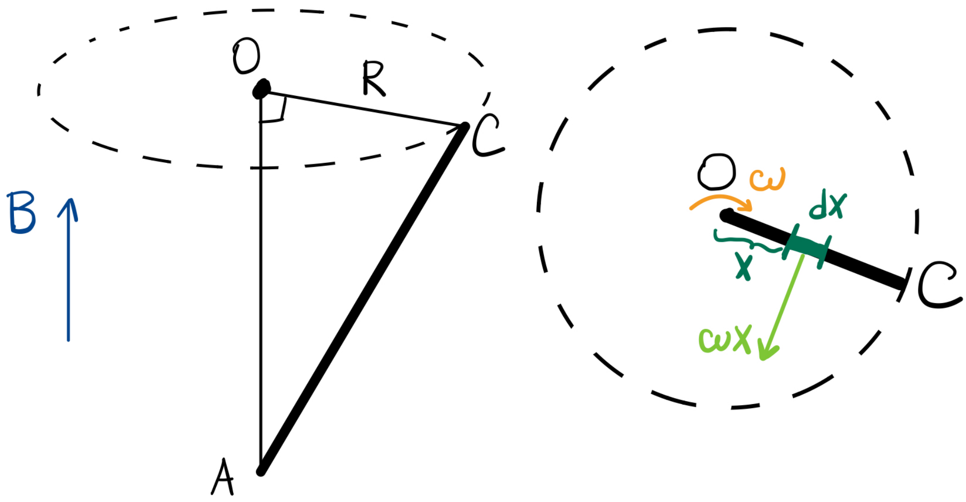
$$\mathscr{E} = Bvl$$

[1]Подробнее смотрите тут

2.2 Задача — 7 (ЭДС при вращении)

Задача 19. (*МФТИ, 2002*) Металлический стержень AC одним концом (точка A) шарнирно закреплён на вертикальном диэлектрическом стержне AO. Другой конец (точка C) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити OC длиной $R = 1$ м (см. рисунок). Стержень AC вращается вокруг стержня AO в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна $B = 10^{-2}$ Тл. Угловая скорость вращения стержня AC равна $\omega = 60$ рад/с. Определить разность потенциалов между точками A и C.





Разложим стержень AC на две взаимно перпендикулярные части — AO и OC. Заметим, что стержень AO параллелен индукции B, поэтому на него не будет действовать сила Лоренца, а значит и не будет возникать разности потенциалов на концах этого стержня ($\varphi_O - \varphi_A = 0$).
Рассмотрим стержень OC. Он перпендикулярен вектору магнитной индукции, поэтому на нем будет возникать разность потенциалом. Так как стержешь движется по окружности, то у разных его частей будет разная скорость. Рассмотрим малый элемент стержня dx, находящийся на расстоянии x от точки O. Этот малый элемент движется с постоянной скоростью. Запишем выражение для разности потенциалов на нем пользуясь результатом из прошлой задачи (по правилу левой руки определяем, что $\varphi_O > \varphi_C$):

$$d\varphi = Bvdx$$

$$d\varphi = B\omega x dx$$

$$\int_{\varphi_C}^{\varphi_O} d\varphi = B\omega \int_0^R x dx$$

$$\varphi_O - \varphi_C = B\omega \frac{R^2}{2}$$

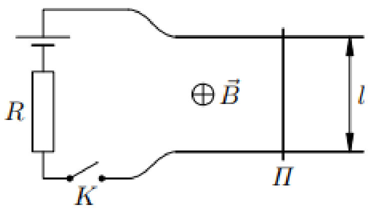
$$\varphi_O - \varphi_C = \frac{1}{2}B\omega R^2$$

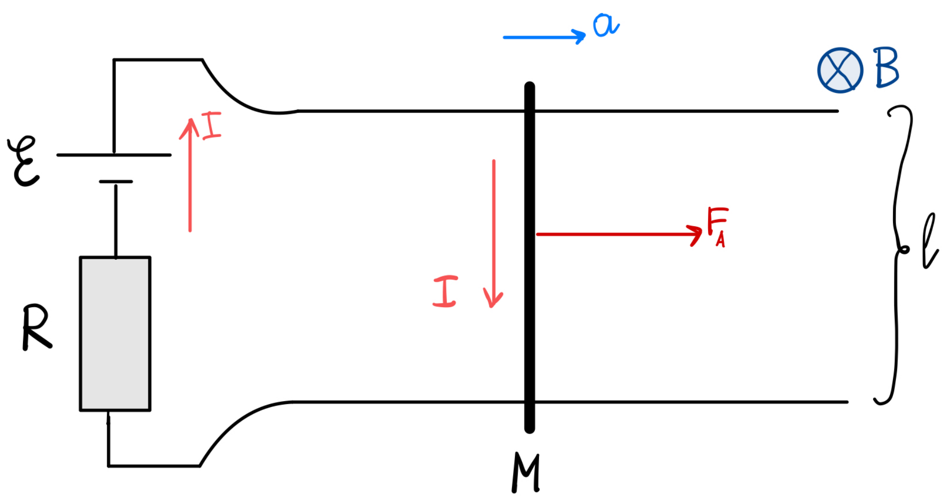
А так как $\varphi_A = \varphi_O$, то:

$$\varphi_A - \varphi_C = \frac{1}{2}B\omega R^2 = 0{,}3 \text{ В}$$

2.3 Задача — 8 (Движение стержня)

Задача 16. (*МФТИ, 1997*) На двух длинных гладких параллельных и горизонтально расположенных проводящих штангах лежит проводящая перемычка массой M. Расстояние между штангами равно l. Через резистор сопротивлением R и разомкнутый ключ K к штангам подключена батарея с некоторой постоянной ЭДС (см. рисунок). Штанги расположены в области однородного магнитного поля с вертикально направленной индукцией B. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, сопротивлением штанг и перемычки, определить ускорение перемычки сразу после замыкания ключа, если известно, что после замыкания ключа максимальная установившаяся скорость, которую приобретает перемычка, равна v_0.





Рассмотрим произвольный момент времени. Сила Ампера, действующая на проводник, направлена вправо. Напишем 2ЗН:

$$F_\text{а} = Ma$$

$$BIl = Ma$$

Чему равна сила тока I? Так как перемычка движется в магнитном поле, то на ней возникает разность потенциалов $\mathscr{E}_\text{перемычки}$. Перемычку можно представить как идеальную батарейку, плюс которой сверху, а минус снизу. Тогда напряжение на резисторе равно:

$$U_R = \mathscr{E} - \mathscr{E}_\text{перемычки}$$

$$U_R = \mathscr{E} - Bvl$$

По закону Ома:

$$I = \frac{\mathscr{E} - Bvl}{R}$$

Подставляем в 2ЗН:

$$Bl\frac{\mathscr{E} - Bvl}{R} = Ma$$

Если скорость частицы установилась, то $a = 0$, поэтому:

$$Bl\frac{\mathscr{E} - Bv_0l}{R} = 0$$

$$\mathscr{E} = Bv_0l$$

Теперь рассмотрим момент сразу после замыкания ключа. Запишем 2ЗН:

$$F_{\text{а}0} = Ma_0$$

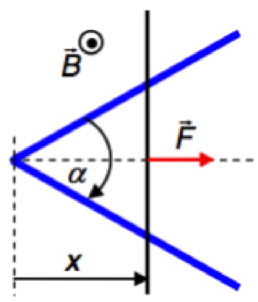
$$BI_0l = Ma_0$$

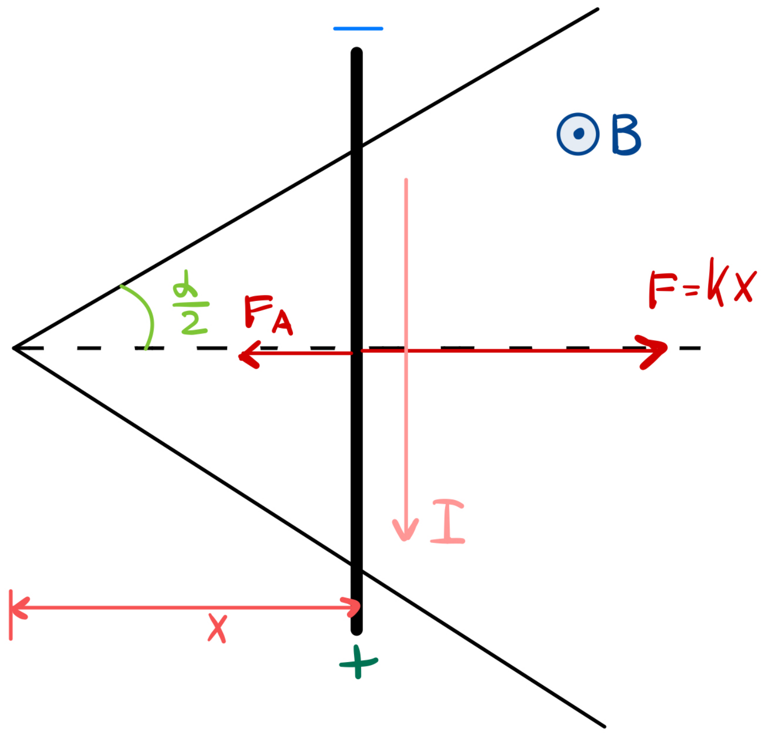
$$B\frac{\mathscr{E}}{R}l = Ma_0$$

$$a_0 = \frac{B\mathscr{E}l}{MR}$$

2.4 Задача — 9 (Движение стержня — 2)

Задача 36. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 2019, 10–11*) Проводник, согнутый под углом α, расположен в горизонтальной плоскости. Металлический стержень может без трения скользить перпендикулярно биссектрисе угла. Индукция однородного вертикального магнитного поля равна B. К стержню приложена горизонтальная сила $F = kx$, где расстояние x отсчитывается от вершины угла. Определить максимальную скорость стержня. В процессе движения стержень не теряет контакта с обеими сторонами угла. Сопротивление единицы длины стержня равно ρ, сопротивление проводника и контакта пренебрежимо мало.





На проводнипк действует сила $F = kx$ и сила Ампера $F_{\text{а}} = BIL$.
Разберемся с силой Ампера. Если проводник находится от вершины угла на расстоянии x, то его длина L равна:

$$L = 2x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

На концах проводника возникает ЭДС величиной:

$$\mathscr{E} = BvL = 2Bvx\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Тогда сила тока I:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{2Bvx\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\rho L} = \frac{Bv}{\rho}$$

Итак, сила Ампера равна:

$$F_{\text{а}} = \frac{2xB^2v\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\rho}$$

Запишем 2ЗН:

$$kx - \frac{2xB^2v\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\rho} = ma$$

Если скорость максимальна, то $a = 0$, поэтому:

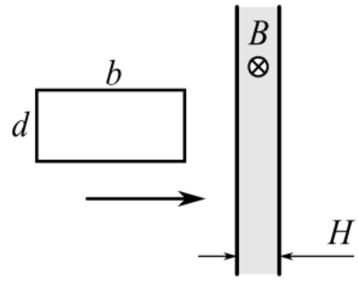
$$kx - \frac{2xB^2v_{\text{уст}}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\rho} = 0$$

Сокращая x, получаем ответ:

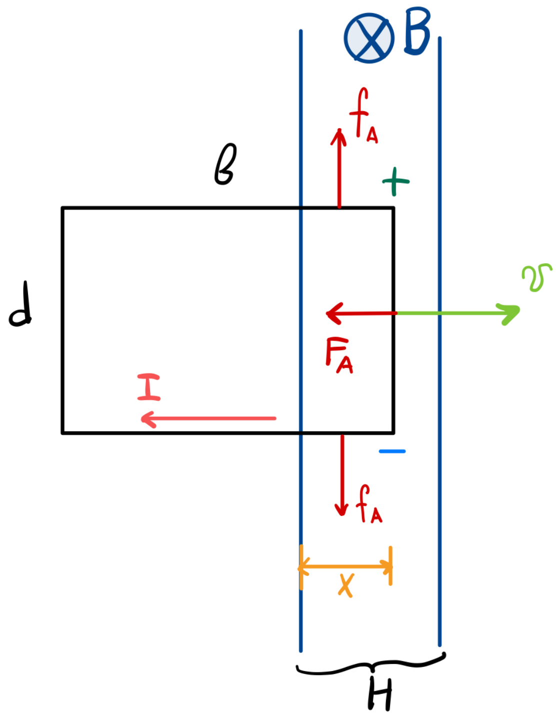
$$v_{\text{уст}} = \frac{k\rho}{2B^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

2.5 Задача — 10 (Рамка проходит через поле)

Задача 33. (*«Физтех», 2021, 11*) Прямоугольная проводящая рамка массой m со сторонами d и $b = 2d$ движется по гладкой горизонтальной поверхности стола со скоростью V_0 перпендикулярно правой стороне рамки (см. рис.). Сопротивление рамки R. На пути рамки находится область однородного магнитного поля с индукцией B. Ширина поля $H = d/3$, индукция поля вертикальна, скорость рамки перпендикулярна границе поля. Известно, что рамка, двигаясь поступательно, проходит поле и покидает его. Индуктивность рамки не учитывать. Заданными считать m, d, V_0, R, B.



1. Определить ускорение рамки сразу после вхождения в поле.
2. Найти скорость V_1 рамки при выходе правой стороны рамки из поля.
3. Найти скорость V_2 рамки после выхода рамки из поля.



1) Рассмотрим момент вхождения рамки в поле. Тогда на правой стороне рамки будет возникать ЭДС, равная:

$$\mathscr{E}_0 = Bv_0d$$

По 2ЗН:

$$F_{a0} = ma_0$$

$$B\frac{\mathscr{E}_0}{R}d = ma_0$$

$$a_0 = \frac{B\mathscr{E}_0 d}{mR} = \frac{B^2v_0d^2}{mR}$$

2) Пусть рамка вьехала в поле на расстояние x и имеет скорость v. Заметим, что ЭДС будет возникать только на правой стороне рамки (скорость частиц на верхней и нижней сторонах рамки не направлена к концам стороны) и равна Bvd.
Силы Ампера, действующие на верхнюю и нижнюю части сторон рамки, находящиеся в поле, равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому они убиваются. По 2ЗН:

$$-B\frac{Bvd}{R}d = m\frac{dv_x}{dt}$$

Умножим обе части на dt и заметим, что $vdt = dx$:

$$-\frac{B^2d^2}{R}dx = mdv_x$$

$$-\frac{B^2d^2}{R}\int\limits_0^H dx = m\int\limits_{v_0}^{v_1} dv_x$$

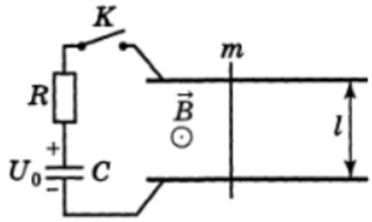
$$-\frac{B^2d^2}{R}H = m(v_1 - v_0)$$

$$v_1 = v_0 - \frac{B^2d^2}{mR}H = v_0 - \frac{B^2d^3}{3mR}$$

3) После того, как правая сторона рамки выехала из поля, скорость рамки не будет меняться (можно обьяснить это тем, что поток, а следовательно и ЭДС индукии, через контур будет равен нулю, так как $\frac{dS}{dt} = 0$, а можно сказать что тогда суммарное возникающее ЭДС будет равно нулю) до тех пор, пока левая сторона рамки не вьедет в поле. Далее можно рассмотреть все аналогично пункту 2,а можно заметить, что выезд рамки симметричен выезду, поэтому результат получится аналогичным:

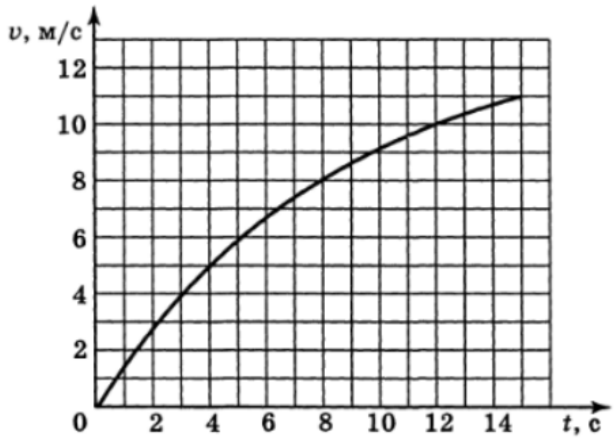
$$v_2 = v_1 - \frac{B^2d^2}{mR}H = v_0 - \frac{2B^2d^3}{3mR}$$

2.6 Задача — 11 (Движение стержня — 3)



Задача 51. (*Всеросс., 1998, финал, 11*) На двух гладких горизонтальных и параллельных рельсах, расстояние между которыми $l = 2$ м, находится тонкая проводящая перемычка массой $m = 0{,}01$ кг. Рельсы через ключ K и резистор сопротивлением $R = 14$ кОм подключены к конденсатору, заряженному до некоторого напряжения U_0. Рельсы расположены в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, перпендикулярном их плоскости (рис. справа).

На рисунке ниже приведена экспериментально снятая зависимость скорости v перемычки от времени t после замыкания ключа K.



Пренебрегая омическим сопротивлением проводов, рельс и перемычки, по заданному графику $v(t)$ определите:

1) начальное напряжение U_0 на конденсаторе;
2) ёмкость конденсатора;
3) установившуюся скорость перемычки.

1) Ток сразу после замыкания ключа равен $I_0 = \frac{U_0}{R}$. Будет действовать только сила Ампера, поэтому:

$$F_{а0} = ma_0$$

$$B\frac{U_0}{R}l = ma_0$$

По графику определяем, что $a_0 \approx 1{,}5$ м/с^2 (тангенс угла наклона касательной):

$$U_0 = \frac{mRa_0}{Bl} \approx 105 \text{ В}$$

2) Рассмотрим произвольный момент времени. Напряжение на конденсаторе равно U. Если проводник движется со скоростью v, то на его концах возникает ЭДС, равная Bvl, полярность которой противоположна полярности конденсатора, поэтому сила тока равна:

$$I = \frac{U - Bvl}{R}$$

По 2ЗН:

$$F_{\text{а}} = ma$$

$$B\frac{U - Bvl}{R}l = ma$$

$$U = \frac{maR}{Bl} + Bvl$$

Запишем 2ЗН еще раз, умножив обе части на dt:

$$Bl \cdot Idt = mdv$$

Вспомним, что $Idt = -dq$ (минус, так как ток падает):

$$-Bldq = mdv$$

Вспомним, что $dq = CdU$ и интегрируем:

$$-BCl\int\limits_{U_0}^{U} dU = m\int\limits_{0}^{v} dv$$

$$-BCl(U - U_0) = mv$$

$$BCl(U_0 - U) = mv$$

Итак, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными, U и C:

$$\begin{cases} U = \frac{maR}{Bl} + Bvl \\ BCl(U_0 - U) = mv \end{cases}$$

По графику выберем удобную точку, например $v \approx 8$ м/с, $a \approx \frac{8}{11}$ м/с^2. Тогда подставляя первое уравнение во второе, получаем:

$$BCl\left(U_0 - \frac{maR}{Bl} + Bvl\right) = mv$$

$$C = \frac{mv}{Bl\left(U_0 - \frac{maR}{Bl} + Bvl\right)} \approx 1 \text{ мФ}$$

3) Если скорость установилась, то $a_{\text{уст}} = 0$, поэтому:

$$U = Bv_{\text{уст}}l$$

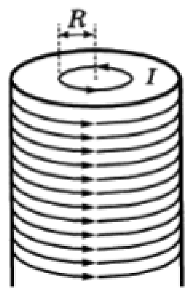
Подставляем это во второе уравнение системы:

$$BCl(U_0 - Bv_{\text{уст}}l) = mv_{\text{уст}}$$

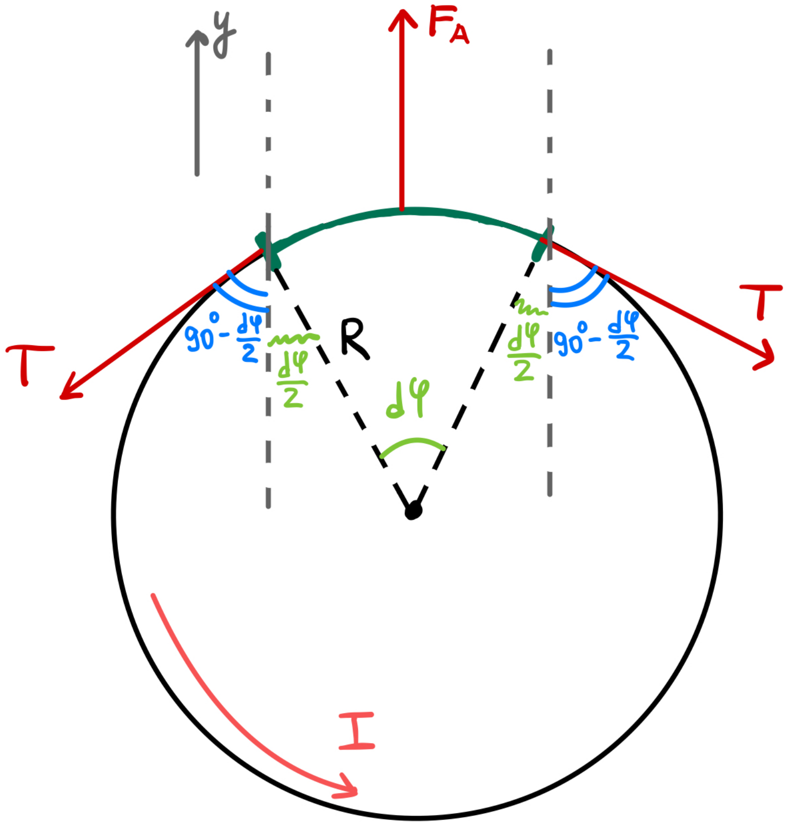
$$v_{\text{уст}} = \frac{BlCU_0}{B^2l^2C + m} \approx 15 \text{ м/с}$$

2.7 Задача — 12 (Натяжение рамки)

Задача 11. (*Всеросс., 1995, финал, 10*) Внутри длинного соленоида вдали от его торцов магнитное поле однородно и его индукция равна B. Один из торцов соленоида закрывают картонным диском, на котором соосно закрепляют небольшой круговой виток из проволоки так, что центр витка совпадает с осью соленоида (рис.). Найдите силу натяжения проволоки витка, если его радиус равен R, а сила тока протекающего по нему равна I.



$\boxed{T = \frac{1}{2}BIR}$



Пусть индукция на торце соленоида равна B_1.
Рассмотрим малый элемент кругового витка с током, опирающийся на угол $d\varphi$. Длина элемента равна $Rd\varphi$. На него действует сила Ампера и две силы натяжения, направленные по касательной к окружности. Введем ось Y, направленную вертикальной вверх и спроецируем на нее 2ЗН:

$$F_{\text{а}} = 2T\cos\left(90^\circ - \frac{d\varphi}{2}\right)$$

$$B_1IRd\varphi = 2T\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$$

Вспомним, что синус малого угла равен этому малому углу, поэтому:

$$B_1IRd\varphi = 2T\frac{d\varphi}{2} = Td\varphi$$

Сокращая $d\varphi$, получаем:

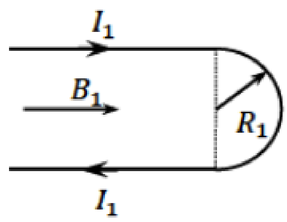
$$T = B_1IR$$

Далее нужно обладать знанием древних русов и знать, что если индукция в центре соленоида равна B, то индукция на торце соленоида равна $\frac{B}{2}$, поэтому[2]:

$$T = \frac{1}{2}BIR$$

2.8 Задача — 13 (Сила Ампера и кривой проводник)

Задача 16. (*МОШ, 2016, 11*) А) Проводник с током I_1, состоящий из двух параллельных участков, соединённых проволочной полуокружностью радиусом R_1, помещён в однородное магнитное поле индукцией B_1, направленное вдоль параллельных участков провода (верхний рисунок). Определите модуль силы, с которой магнитное поле действует на этот провод с током.



Горизонтальные участки параллельны вектору индукции, поэтому они не будут давать вклад в силу Ампера. Разобьем полуокружность на много маленьких частей длиной dl. Сила Ампера, действующая на этот малый элемент, равна:

$$d\vec{F}_{\text{а}} = I_1[\vec{dl},\vec{B_1}]$$

[2]Подробнее смотрите тут в §50

Тогда суммарная сила Ампера равна:

$$\vec{F}_{\text{а}} = \int\limits_l d\vec{F}_{\text{а}} = I_1 \int\limits_l [\vec{dl}, \vec{B}_1]$$

$$\vec{F}_{\text{а}} = I_1 \left[\int\limits_l \vec{dl}, \vec{B}_1 \right]$$

Чему равен интеграл $\int\limits_l \vec{dl}$? Это вектор, соединяющий конечную (нижнюю) и начальную (верхнюю) точку полуокружности и по модулю равен $2R_1$. Тогда модуль силы Ампера равен:

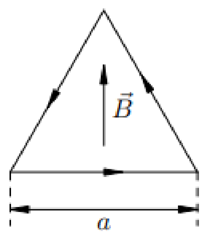
$$F_{\text{а}} = I_1 \cdot 2R_1 \cdot B_1 \cdot \sin\left(2\vec{R}_1; \vec{B}_1\right)$$

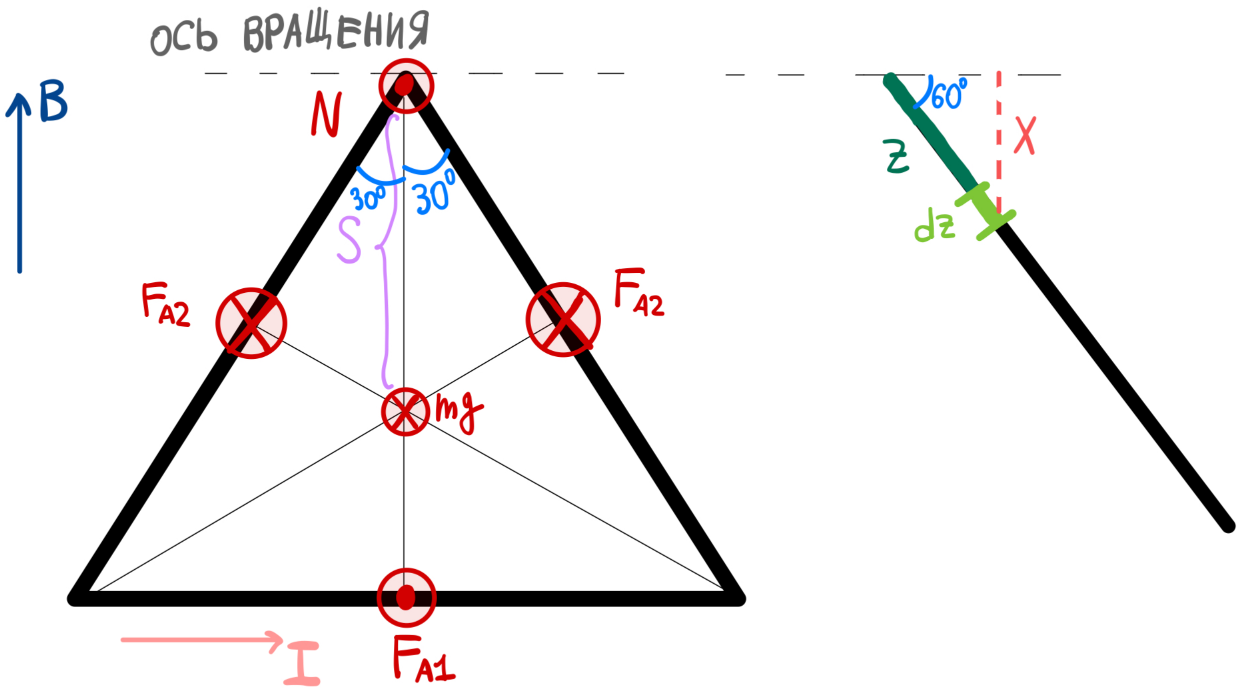
Угол между $\vec{R}_1$ и $\vec{B}_1$ равен 90°, поэтому:

$$F_{\text{а}} = 2B_1 I_1 R_1$$

2.9 Задача — 14 (Момент силы Ампера)

Задача 27. (*МФТИ, 1999*) На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая тонкая рамка из однородного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной, равной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны одной из сторон рамки (см. рисунок). Масса рамки m, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?





•На рамку действует:
1) сила тяжести mg, направленная от нас и приложенная к точке пересечения медиан (и высот и биссектрис) треугольника.
2) сила Ампера $F_{\text{а}1}$, действующая на нижнюю сторону рамки и направленная на нас.
3) две силы Ампера $F_{\text{а}2}$, действующие на две другие стороны рамки и направленные от нас.
4) понятно, что если рамка начнет вращаться, то она будет вращаться относительно прямой, параллельной основанию треугольника и проходящей через верхнюю точку рамки (см. рис.). Тогда после начал вращения вся сила реакции опоры N будет сосредоточена в одной точке (верхняя точка рамки) и направлена на нас.

• 1)Разберемся с $F_{\text{а}1}$. Эта сила по модулю равна BIa. Ее момент относительно оси вращения равен:

$$\mathscr{M}_{\text{а}1} = F_{\text{а}1} a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BIa^2$$

2) Разберемся с силой тяжести. Ее момент отнгсительно оси вращения равен:

$$\mathscr{M}_{\text{тяж}} = mgS = \frac{\sqrt{3}}{3} mga$$

3) Момент силы N равен нулю, т. к. сила лежит на оси вращения.
4) Разберемся с силой $F_{\text{а}2}$. По модулю она равна (с учетом того, что угол между B и стороной равен 30°):

$$F_{\text{а}2} = BIa \sin 30^\circ = \frac{1}{2} BIa$$

Рассмотрим малый элемент длиной dz, находящийся на правой стороне рамки на расстоянии z от верхней точки рамки (см. рис.). Тогда момент этого элемента относительно оси вращения равен:

$$d\mathscr{M}_{\text{а}2} = \frac{1}{2} BIdz \cdot x = \frac{1}{2} BIdz \cdot z \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} BIzdz$$

Тогда суммарный момент силы для всей стороны равен:

$$\mathscr{M}_{\text{а}2} = \int d\mathscr{M}_{\text{а}2} = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{3}}{4} BIzdz = \frac{\sqrt{3}}{4} BI \int\limits_0^a zdz = \frac{\sqrt{3}}{8} BIa^2$$

Момент силы Ампера для другой стороны считается аналогично.

- Рамка начнет вращаться, если:

$$\mathscr{M}_{\text{а}1} \geq \mathscr{M}_{\text{тяж}} + 2\mathscr{M}_{\text{а}2}$$

$$\mathscr{M}_{\text{а}1} - 2\mathscr{M}_{\text{а}2} \geq \mathscr{M}_{\text{тяж}}$$

Заметим, что в левой части неравенства стоит суммарный момент сил Ампера. Посчитаем его отдельно:

$$\mathscr{M}_{\text{а,сумм}} = \frac{\sqrt{3}}{2}BIa^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}BIa^2 = BI \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ это площадь нашего равностороннего треугольника:

$$\mathscr{M}_{\text{а,сумм}} = BIS$$

Тут возникает еще одно знание древних русов: если суммарная сила Ампера, действующая на рамку произвольной формы, равна нулю, то суммарный момент сил Ампера не зависит от выбора полюса и равен:

$$\mathscr{M}_{\text{а,сумм}} = BIS\sin\left(\vec{B};\vec{n}\right)$$

S — площадь рамки, $\vec{n}$ — вектор нормали к плоскости, в которой лежит рамка.

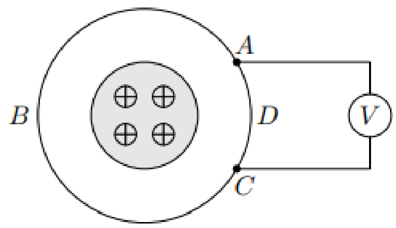
Подставляя все данные в неравенство, получаем ответ:

$$I \geq \frac{4mg}{3Ba}$$

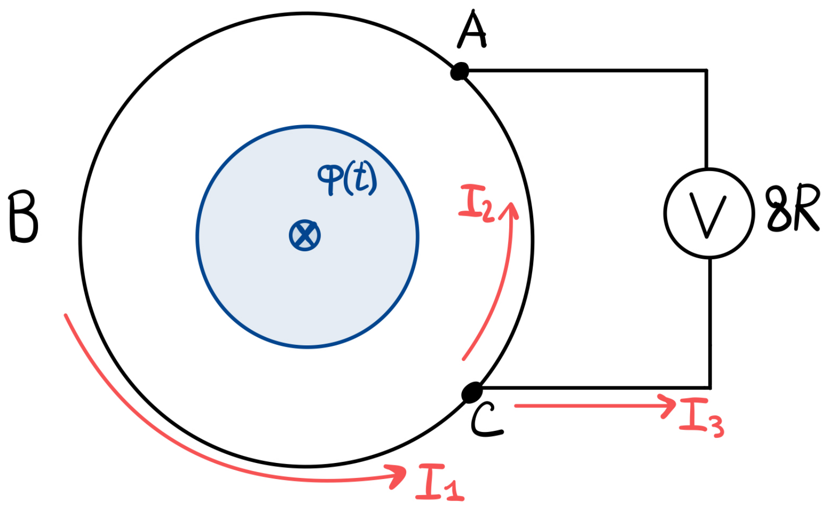
3 Электромагнитная индукция

3.1 Задача — 15 (Эффективное значение напряжения)

Задача 39. (*МФТИ, 2005*) Сопротивления участков ADC и CBA проволочного кольца равны R и $5R$ (см. рисунок). Кольцо пронизывается магнитным потоком $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$, где t — время, Φ_0 и ω — заданные константы. Магнитное поле полностью сосредоточено внутри кольца. Что покажет вольтметр переменного тока с сопротивлением $8R$, если его присоединить к точкам A и C? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



$\boxed{V_{эфф} = \frac{4\sqrt{2}}{53}\Phi_0\omega}$



Пусть в какой то момент времени токи текут как на рисунке. Тогда по первому правилу Кирхгофа для узла С:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Разобьем цепь на два контура — ABC и CVA. Изменяющееся магнитное поле есть только внутри контура ABC, поэтому там будет возникать ЭДС индукции, а в контуре CVA нет. По второму правилу Кирхгофа для контура ABC:

$$\mathscr{E}_i = I_1 R_{ABC} + I_2 R_{CDA}$$

ЭДС индукции найдем как минус производная магнитного потока по времени:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \omega \sin \omega t$$

С учетом того, что $R_{ABC} = 5R$ и $R_{CDA} = R$, получаем:

$$\Phi_0 \omega \sin \omega t = 5 I_1 R + I_2 R$$

По второму правилу Кирхгофа для контура CVA:

$$I_2 \cdot R - I_3 \cdot 8R = 0$$

Получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными, I_1, I_2 и I_3:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ \Phi_0 \omega \sin \omega t = 5I_1 R + I_2 R \\ I_2 R = I_3 8R \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем значение для I_3:

$$I_3 = \frac{\Phi_0 \omega \sin \omega t}{53R}$$

Тогда напряжение на вольтметре равно:

$$U_V = 8I_3 R = \frac{8}{53}\Phi_0 \omega \sin \omega t = U_0 \sin \omega t$$

Вольтметр будет показывать некоторое постоянное значение $U_{\text{эфф}}$, которое будет равно среднему значению напряжения на вольтметре. Но если усреднить напряжение на вольтметре, то получится ноль (т. к. среднее значение синуса равно нулю). Поэтому мы сначала возведем в квадрат, усредним, и возьмем от получившегося значения квадратный корень[3]:

$$U^2_{\text{эфф}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T U_0^2 \sin^2 \omega t dt$$

Период синуса равен 2π, поэтому:

$$U^2_{\text{эфф}} = \frac{U_0^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \omega t dt = \frac{U_0^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt$$

$$U^2_{\text{эфф}} = \frac{U_0^2}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt - \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2\omega t}{2} dt\right)$$

Правый интеграл равен нулю, а левый равен π, поэтому:

$$U^2_{\text{эфф}} = \frac{U_0^2}{2}$$

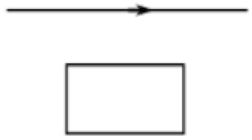
$$U_{\text{эфф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Итак, получаем ответ:

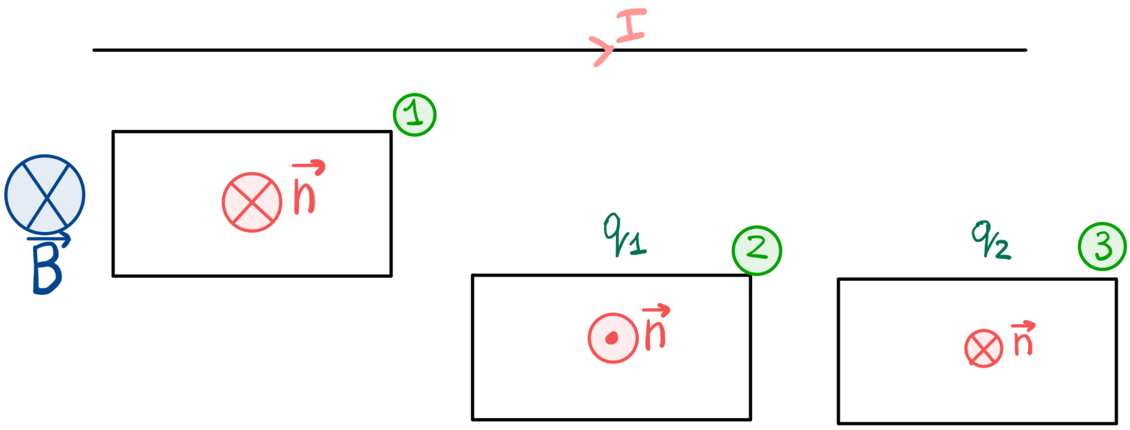
$$U_{\text{эфф}} = \frac{8}{53\sqrt{2}}\Phi_0 \omega$$

[3] Можно посмотреть тут

3.2 Задача — 16 (Связь потока и заряда)



Задача 41. (*«Росатом», 2019, 11*) Около очень длинного прямого провода, по которому течет постоянный ток, находится прямоугольная проводящая рамка. Длинная сторона рамки параллельна проводу. Если повернуть рамку на угол 180° вокруг дальней от провода стороны, по ней пройдет заряд q_1. Если рамку из исходного положения, не поворачивая, сдвинуть так, что ближняя к проводу сторона займет место дальней, по рамке пройдет заряд q_2. Какой заряд пройдет по рамке, если из первоначального положения унести её на очень большое расстояние?



• Сначала расчитаем, какой заряд проходит по контуру с сопротивлением R при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур, от значения $\Phi_{\text{нач}}$ до $\Phi_{\text{кон}}$. По закону электромагнитной индукции:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Сила тока I за малый промежуток времени:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = I dt$$

По закону Ома:

$$dq = \frac{\mathscr{E}_i}{R} dt$$

$$dq = -\frac{d\Phi}{R dt} dt = -\frac{d\Phi}{R}$$

Полный заряд, протекший по контуру, равен:

$$q = \int dq = \int\limits_{\Phi_{\text{нач}}}^{\Phi_{\text{кон}}} -\frac{d\Phi}{R}$$

$$q = \frac{\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}}}{R}$$

• По правилу правой руки (правилу буравчика) определяем, что в интересующей нас области вектор магнитной индукции направлен от нас. Но поле бесконечного провода не однородно. Оно убывает с увеличением расстояния до провода r:

$$B = \frac{const}{r}$$

• Пусть в начальном состоянии (состояние 1) поток равен Φ_1. Выберем для нашей рамки направление вектора нормали $\vec{n}$. Пусть в состоянии 1 он направлен от нас. Тогда вектор индукции и вектор нормали смотрят в одну сторону, поэтому их скалярное произведение положительно, а значит и Φ_1 положительный.

После того как рамку перевернули, ее вектор нормали стал смотреть на нас. Вектор индукции и вектор нормали смотрят в противоположные стороны, поэтому Φ_2 отрицательный. Заряд q_1 равен:

$$q_1 = \frac{\Phi_1 - (-\Phi_2)}{R} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{R}$$

В третьем состоянии вектор нормали направлен от нас, потомц что рамку не переворачивали, а просто сдвинули. Тогда Φ_3 положительный. Тогда:

$$q_2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Если рамку уносят на бесконечность, то Φ_3=0, так как на бесконечности поле равно нулю. Тогда:

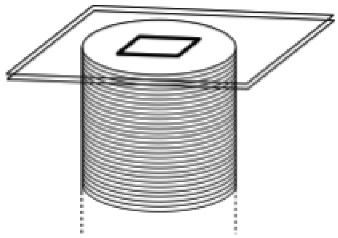
$$q_3 = \frac{\Phi_1 - 0}{R} = \frac{\Phi_1}{R}$$

Получилась система из трех уравнений с тремя неизвестными. Решая ее, получаем ответ:

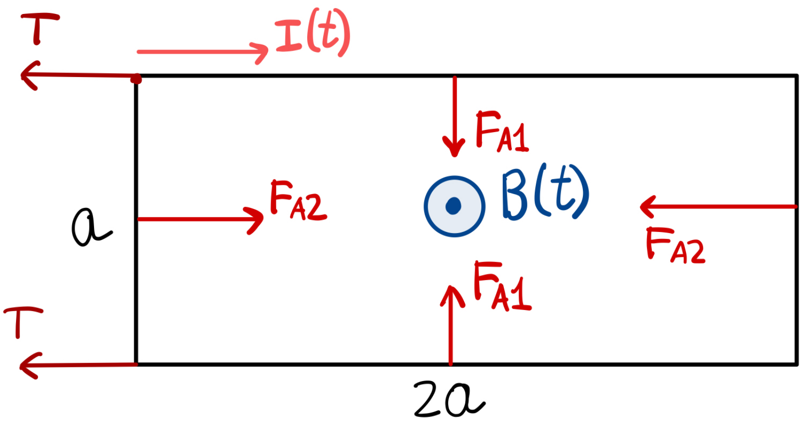
$$q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

3.3 Задача — 17 ("Со мной случился соленоид")

Задача 20. (*«Физтех», 2019, 11*) По длинному соленоиду пропускается переменный ток, изменяющийся по гармоническому закону с циклической частотой ω. В результате вдали от торцов соленоида возникает однородное магнитное поле с максимальной индукцией B_0. В плоскости торца соленоида между двумя закрепленными тонкими гладкими стеклянными пластинами помещена прямоугольная жесткая рамка из проволоки со сторонами a и $2a$ (см. рис.). Зазор между пластинами незначительно больше диаметра проволоки. Сопротивление единицы длины проволоки ρ. Индуктивность рамки не учитывать. Размеры рамки сравнимы с диаметром соленоида.



1. Найти максимальный ток в рамке.
2. Найти максимальную силу натяжения длинной стороны рамки.



1) Если ток I меняется по периодическому закону, то и индукция B тоже меняется по периодическому закону. Пусть по косинусу, тогда:

$$B_{\text{на торце}} = B(t) = B_{\text{max, на торце}} \cos \omega t$$

Если максимальная индукция в центре соленоида равна B_0, то максимальная индукция на торце соленоида равна $\frac{B_0}{2}$, поэтому:

$$B(t) = \frac{B_0}{2} \cos \omega t$$

Тогда поток Φ, пронизывающий контур, равен:

$$\Phi(t) = \frac{B_0}{2} S \cos \omega t = B_0 a^2 \cos \omega t$$

ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$ равна:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \omega a^2 \sin \omega t$$

Тогда ток I через рамку равен:

$$I = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{B_0 \omega a^2 \sin \omega t}{\rho \cdot 6a}$$

Тон будет максимален, если $\sin \omega t$=1, поэтому:

$$I_{\max} = \frac{1}{6} \frac{B_0 \omega a}{\rho}$$

2) На длинные стороны будет действовать сила Ампера $F_{\text{а}1} = 2BIa$, а на короткие — $F_{\text{а}2} = BIa$.
Если рассмотреть длинную сторону, то силы натяжения T будет действовать в противоположные стороны. А если рассмотреть короткую сторону рамки (см. рис.), то по 2ЗН:

$$F_{\text{а}2} = 2T$$

$$T = \frac{1}{2} BIa = \frac{1}{2} \frac{B_0}{2} \cos \omega t \frac{B_0 \omega a^2 \sin \omega t}{6 \rho a} a = \frac{1}{48} \frac{B_0^2 \omega a^2}{\rho} \sin 2\omega t$$

Тогда максимальная сила натяжения равна:

$$T_{\max} = \frac{1}{48} \frac{B_0^2 \omega a^2}{\rho}$$

3.4 Задача — 18 (Теорема о циркуляции)

Задача 31. (*МФТИ, 1995*) На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой m, вдоль которого равномерно распределён заряд Q. Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией B_0, направленной перпендикулярно плоскости кольца. Внешнее магнитное поле выключают.

1) По какой причине (указать механизм) кольцо начнёт вращаться?
2) Найти угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.

1) Так как переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, напряженность которого в каждой точке кольца направлена по касательной к кольцу. Поэтому кольцо начнет вращаться.
2) Еще одно знание древних русов (закон электромагнитной индукции в интегральной форме):

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Для нашей задачи:

$$E \oint_l dl = -\frac{d}{dt} \left(B \int_S dS \right)$$

$$E \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

r — радиус кольца.

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

Сила dF, действующая на малый элемент кольца с зарядом dQ, равна:

$$dF = EdQ$$

Тогда сила F, действующая на все кольцо, равна:

$$F = QE = -\frac{Qr}{2}\frac{dB}{dt}$$

Умножим обе части на dt:

$$Fdt = -\frac{Qr}{2}dB$$

Левая часть это импульс силы, который равен $mdv = mrd\omega$:

$$mrd\omega = -\frac{Qr}{2}dB$$

Интегрируем:

$$mr\int_0^{\omega} d\omega = -\frac{Qr}{2}\int_{B_0}^{0} dB$$

$$m\omega = \frac{QB_0}{2}$$

$$\omega = \frac{QB_0}{2m}$$

Канал автора—https://t.me/kinenergy228