

Жидкость в трубке. Горизонтальная сила Архимеда

Канал автора—<https://t.me/kinenergy228>

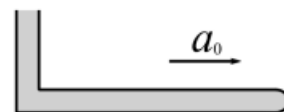
Содержание

1	Жидкость в трубке	3
1.1	Задача 1 (Физтех — 2020)	3
1.2	Задача 2 (Физтех — 2016)	5
1.3	Задача 3 (Физтех — 1998)	7
1.4	Задача 4 (Физтех — 1996)	9
1.5	Задача 5 (Физтех — 1996)	10
2	Горизонтальная сила Архимеда	11
2.1	Задача 1 (Физтех — 2002)	11
2.2	Задача 2 (Физтех — 2015)	12

1 Жидкость в трубке

1.1 Задача 1 (Физтех — 2020)

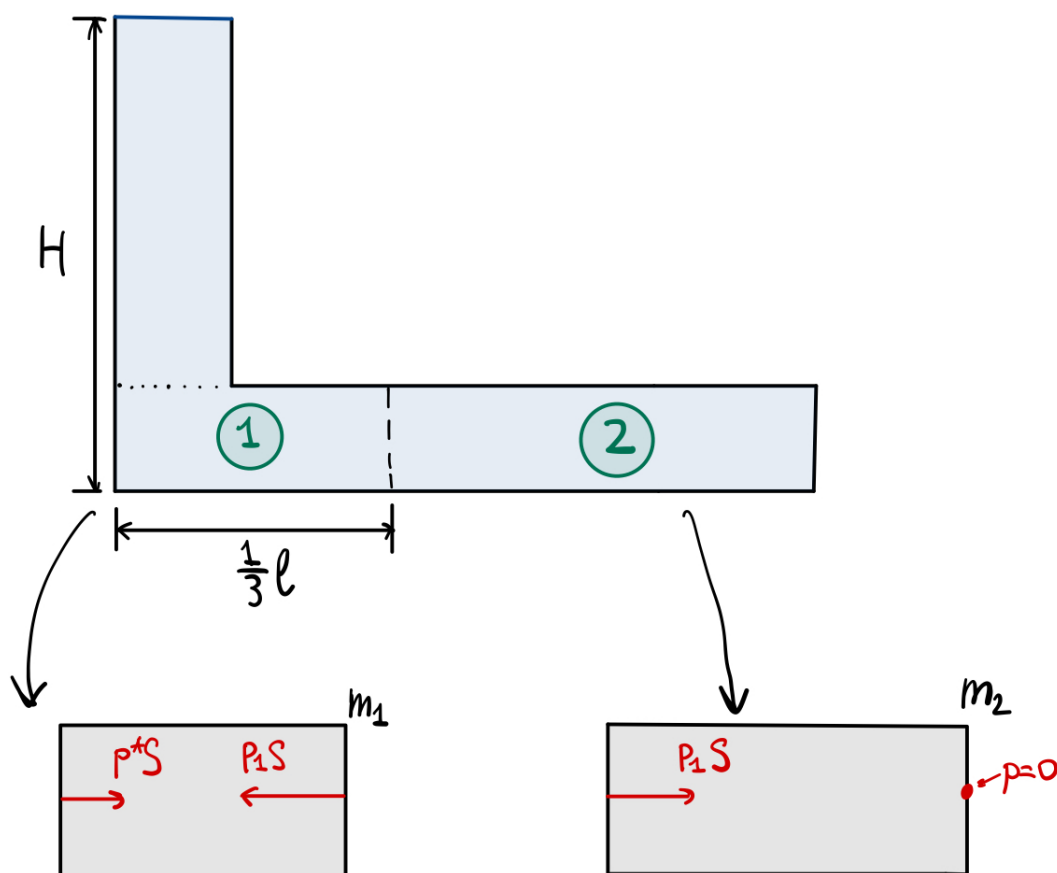
ЗАДАЧА 5. («Физтех», 2020, 10) Тонкая Г-образная трубка с горизонтальным коленом, закрытым с одного конца, и вертикальным коленом высотой $H = 40$ мм, открытым в атмосферу, заполнена полностью ртутью (см. рис.). Если трубку двигать (в плоскости рисунка) с ускорением, не большим некоторого a_0 , то ртуть из трубки не выливается.



1. Найти давление P_1 внутри трубки в точке A , находящейся от вертикального колена на расстоянии $1/3$ длины горизонтального колена, если трубка движется с ускорением a_0 .
2. Найти давление P_2 в точке A , если трубка движется с ускорением $0,6a_0$.
3. Найти давление P_3 вблизи закрытого конца трубки, если она движется с ускорением $0,8a_0$.

Атмосферное давление $P_0 = 740$ мм рт. ст. Давлением насыщенных паров ртути в условиях опыта пренебречь. Ответы дать в «мм рт. ст.».

1)



Пусть дна горизонтального колена l . Разделим горизонтальный участок на два участка с длинами $\frac{1}{3}l$ и $\frac{2}{3}l$ соответственно.

Обозначим давление в начале горизонтального участка как p^* , на расстоянии $\frac{1}{3}l$ как p_1 . Давление в правом конце горизонтального участка равно нулю (так как жидкость движется с ускорением a_0 при котором жидкость только начинает выливаться, т.е. она уже не оказывает давления на правую стенку).

Найдем p^* . Так как ускорение направлено горизонтально, то его проекция на вертикаль равна нулю, а значит оно не влияет на распределение давления в вертикальном участке жидкости. Значит,

$$p^* = p_0 + \rho g H$$

Найдем p_1 . Рассмотрим левую часть горизонтального участка жидкости. По второму закону Ньютона на ось, направленную горизонтально влево (S — площадь поперечного сечения трубки):

$$(p^* - p_1)S = m_1 a_0 = \rho S \cdot \frac{1}{3}l \cdot a_0$$

$$p_1 = p_0 + \rho g H - \frac{1}{3}\rho l a_0$$

Рассмотрим правую часть горизонтального участка. По 2ЗН:

$$(p_1 - 0)S = m_2 a_0 = \frac{2}{3}\rho S l a_0$$

$$\rho l a_0 = \frac{3}{2}p_1 \rightarrow p_1 = \frac{2}{3}(p_0 + \rho g H) = 520 \text{ мм рт. ст.}$$

Запомним, что $\rho l a_0 = p_0 + \rho g H$

2) Распишем 2ЗН для левой части горизонтального участка жидкости:

$$(p^* - p_2)S = m_1 \cdot 0,6a_0 = \frac{1}{5}\rho l a_0 S = \frac{1}{5}(p_0 + \rho g H)S$$

$$p_2 = (p_0 + \rho g H) - \frac{1}{5}(p_0 + \rho g H) = \frac{4}{5}(p_0 + \rho g H) = 624 \text{ мм рт. ст.}$$

3) Распишем 2ЗН для всей горизонтальной части жидкости:

$$(p^* - p_3)S = (m_1 + m_2) \cdot 0,8a_0 = 0,8\rho l S a_0$$

$$p_3 = (p_0 + \rho g H) - 0,8(p_0 + \rho g H) = \frac{1}{5}(p_0 + \rho g H) = 156 \text{ мм рт.ст.}$$

Идея во всех таких задачах похожая — писать вторые законы Ньютона для разных кусков жидкости. Если ускорение направлено под углом, то нужно писать 2ЗН еще и для вертикальных кусков жидкости (посмотреть можно [тут](#)). Теперь рассмотрим случай, когда жидкость выливается.

1.2 Задача 2 (Физтех — 2016)

ЗАДАЧА 6. («Физтех», 2016, 10) Тонкая U-образная трубка постоянного внутреннего сечения с горизонтальным коленом длиной L и двумя одинаковыми вертикальными коленами, открытыми в атмосферу, заполнена водой не полностью (см. рисунок). В каждом вертикальном колене остаётся слой воздуха. Вода начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением, не меньшим, чем $a_0 = g/8$.

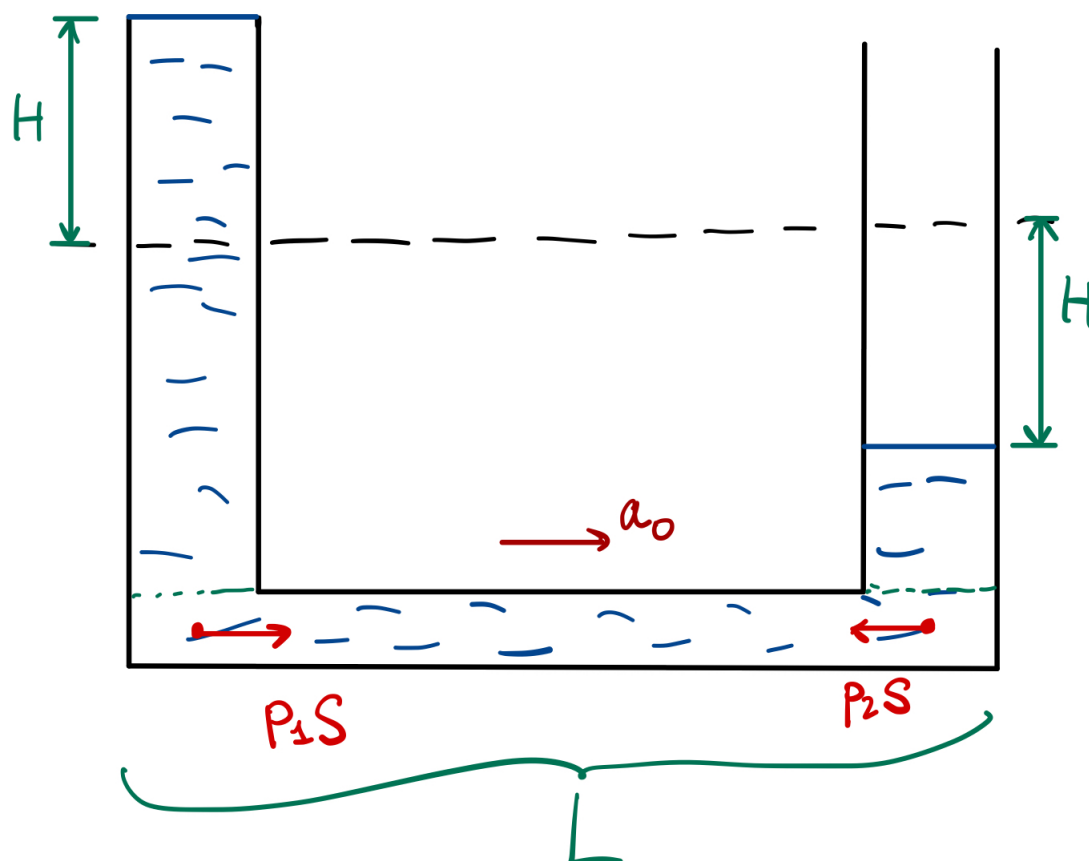


1) Найти длину H слоя воздуха в одном вертикальном колене, когда трубка покоится.

2) Найти длину вылившегося слоя воды при движении с ускорением $a_1 = g/6$.

Горизонтальное колено остаётся всегда заполненным водой.

1)



При движении с ускорением a_0 вправо жидкость подойдет к границе левой трубки, поднимется на высоту H . Тогда уровень жидкости в левой части опустится на величину H (сохранение массы). Распишем 2ЗН для горизонтальной части трубки:

$$(p_1 - p_2)S = \rho S L a_0$$

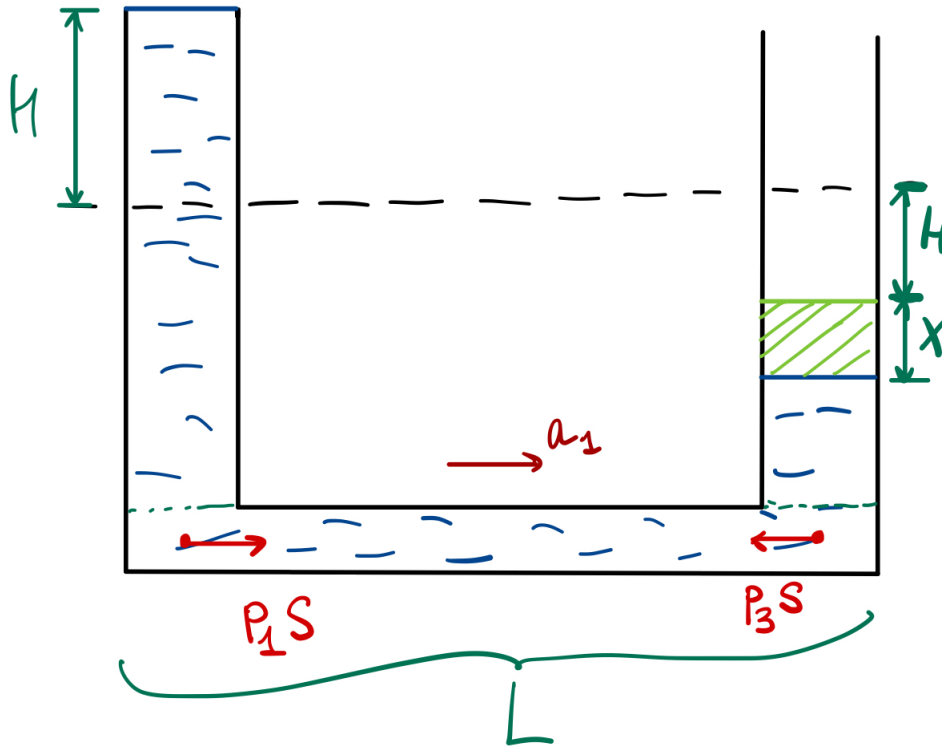
Если высота вертикального колена l , то:

$$p_1 = p_0 + \rho g l, \quad p_2 = p_0 + \rho g(l - 2H)$$

$$(p_0 + \rho g l - (p_0 + \rho g(l - 2H))) = \rho L a_0$$

$$2gH = L a_0 \rightarrow H = \frac{L a_0}{2g} = \frac{L}{16}$$

2)



Пусть длина вылившегося слоя жидкости x . Запишем 2ЗН для горизонтального участка жидкости (давление у левого края не изменится, так как ускорение горизонтально, а уровень жидкости не изменился):

$$(p_1 - p_3)S = \rho S L a_1$$

$$p_3 = p_0 + \rho g(l - (2H + x))$$

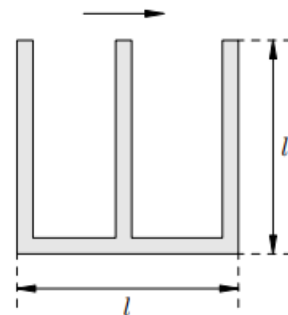
$$(p_0 + \rho g l - (p_0 + \rho g(l - (2H + x)))) = \rho S L a_1$$

$$2gH + gx = L a_1$$

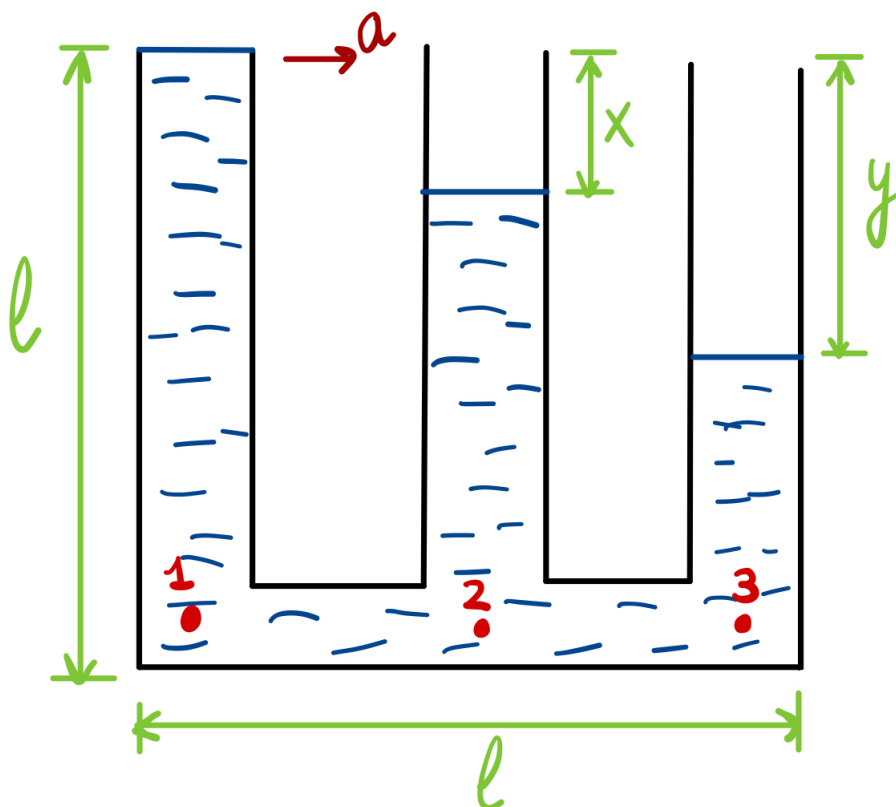
$$x = \frac{L a_1 - 2gH}{g} = \frac{1}{6}L - \frac{1}{8}L = \frac{1}{24}L$$

1.3 Задача 3 (Физтех — 1998)

Задача 11. (МФТИ, 1998) «Тройник» из трёх вертикальных открытых в атмосферу трубок полностью заполнен водой (см. рисунок). После того, как «тройник» стали двигать в горизонтальном направлении (в плоскости рисунка) с некоторым постоянным ускорением a , из него вылилось $9/32$ всей массы содержащейся в нём воды. Чему равна величина ускорения a ? Внутреннее сечение трубок одинаково, длины трубок равны l .



$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \mathbf{v}$$



Начальная масса воды в тройнике $m_0 = 4\rho Sl$, где S — площадь поперечного сечения тройника. Из условия следует, что конечная масса воды в тройнике $m = \frac{23}{32}m_0 = \frac{23}{8}\rho Sl$. Пусть из второго колена вылился слой жидкости длиной x , а из третьего колена — длиной y . Тогда:

$$\rho Sx + \rho Sy = \frac{9}{32}m_0 = \frac{9}{8}\rho Sl$$

$$x + y = \frac{9}{8}l$$

Найдем давления в точках 1, 2 и 3 из вертикальных столбов жидкости:

$$p_1 = p_0 + \rho gl, \quad p_2 = p_0 + \rho g(l - x), \quad p_3 = p_0 + \rho g(l - y)$$

Напишем 2ЗН для части жидкости, находящейся между точками 1 и 2 и между точками 2 и 3 (их массы равны $m_1 = \frac{1}{2}\rho Sl$):

$$\begin{cases} (p_1 - p_2)S = m_1 a \\ (p_2 - p_3)S = m_1 a \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе получаем:

$$p_1 - p_2 - p_2 + p_3 = 0$$

$$p_1 + p_3 = 2p_2$$

Подставляя давления, получаем:

$$p_0 + \rho gl + p_0 + \rho g(l - y) = 2(p_0 + \rho g(l - x))$$

$$y = 2x$$

Так как $x + y = \frac{9}{8}l$, то находим x и y :

$$x = \frac{3}{8}l, \quad y = \frac{3}{4}l$$

Подставляем значения в уравнение $(p_1 - p_2)S = m_1 a$:

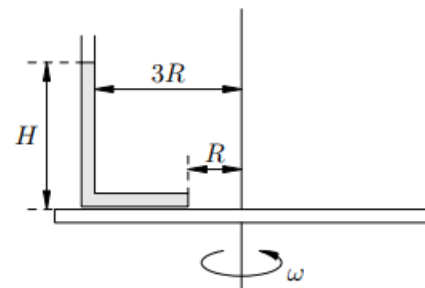
$$\rho gx = m_1 a$$

$$\rho gxS = \frac{1}{2}\rho Sla$$

$$a = \frac{3}{4}g$$

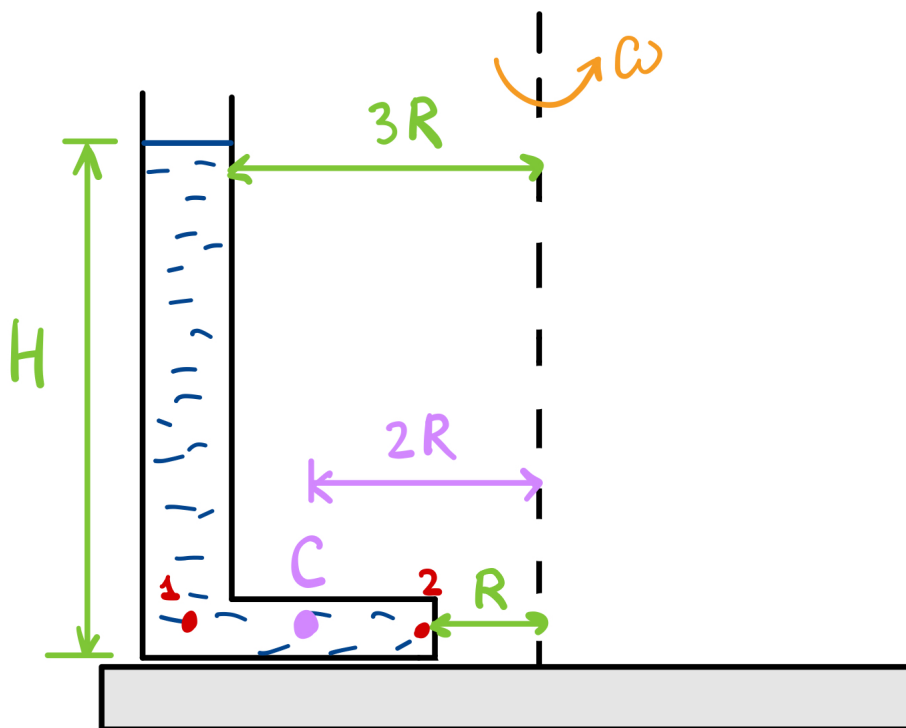
1.4 Задача 4 (Физтех — 1996)

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1996) Тонкая запаянная с одного конца трубка заполнена ртутью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что ртуть не выливается и заполняет полностью горизонтальное колено трубки (см. рисунок). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке. Атмосферное давление p_0 , плотность ртути ρ .



- 1) Найти давление ртути в месте изгиба трубки.
- 2) Найти давление ртути у запаянного конца трубки.

$$p_1 = p_0 + \rho g H; \quad p_2 = p_0 + \rho g H - 4\rho\omega^2 R^2 \quad (1)$$



Давление у запаянного конца трубки (точка 1) найдем из вертикального колена:

$$p_1 = p_0 + \rho g H$$

Найдем давление p_2 у запаянного конца. Нужно рассмотреть горизонтальный участок жидкости (его масса $m = \rho S \cdot 2R$). Но каждая его часть движется с разным ускорением. Поэтому нужно писать теорему о движении центра масс (центр масс — точка C — расположен на расстоянии $2R$ от оси вращения):

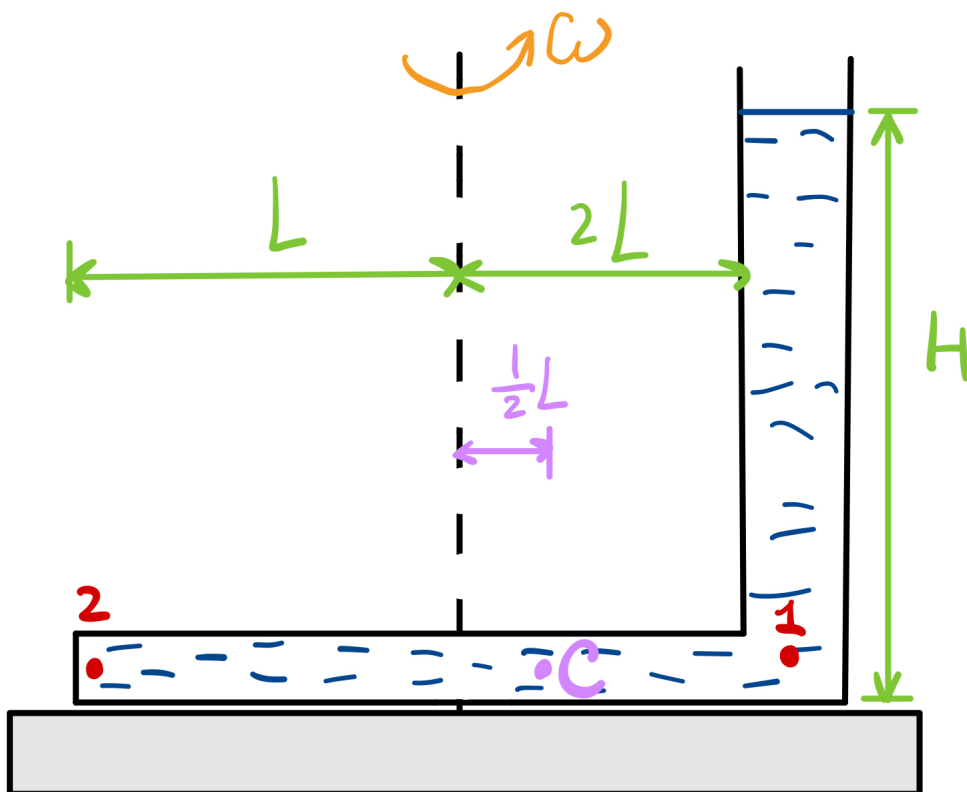
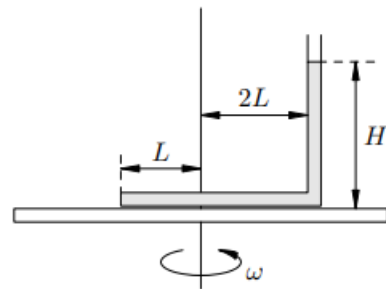
$$(p_1 - p_2)S = m a_{\text{цм}}$$

$$(p_0 + \rho g H - p_2)S = 2\rho S R \cdot \omega^2 2R$$

$$p_2 = p_0 + \rho g H - 4\rho\omega^2 R^2$$

1.5 Задача 5 (Физтех — 1996)

Задача 15. (МФТИ, 1996) Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена маслом и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что масло не выливается и заполняет полностью горизонтальное колено трубки (см. рисунок). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки даны на рисунке. Атмосферное давление p_0 , плотность масла ρ .



1) $p_1 = p_0 + \rho g H$

2) Тут горизонтальный участок жидкости пересекает ось вращения, но это не важно. Запишем теорему о движении центра масс для всего горизонтального участка жидкости (центр масс находится на расстоянии $\frac{L+2L}{2} = \frac{3}{2}L$ от левого конца трубки и на расстоянии $\frac{1}{2}L$ от оси вращения):

$$(p_1 - p_2)S = m a_{\text{цм}}$$

$$(p_1 - p_2)S = \rho S 3L \cdot \omega^2 \frac{1}{2}L$$

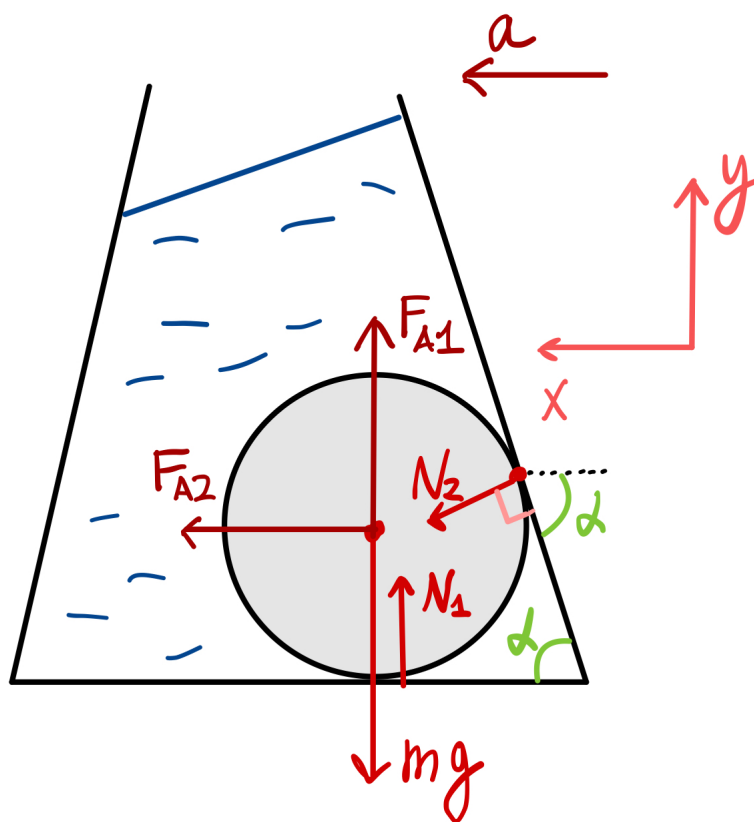
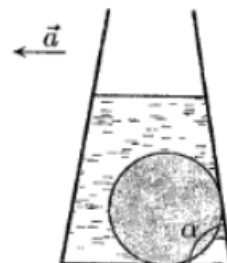
$$p_2 = p_0 + \rho g H - \frac{3}{2}\rho \omega^2 L^2$$

2 Горизонтальная сила Архимеда

2.1 Задача 1 (Физтех — 2002)

Задача 1. (МФТИ, 2002) Стекланный шар объёмом V и плотностью ρ находится в сосуде с водой (см. рисунок). Угол между стенкой сосуда и горизонтальным дном равен α . Внутренняя поверхность сосуда гладкая. Плотность воды ρ_0 . Найти силу давления шара на дно в двух случаях:

- 1) сосуд неподвижен;
- 2) сосуд движется с постоянным горизонтальным ускорением a .



На шар действует сила тяжести mg , сила давления со стороны дна N_1 , сила давления со стороны стенки N_2 и сила Архимеда. У силы Архимеда будет две компоненты: вертикальная и горизонтальная. Вертикальная сила Архимеда считается как обычно — $F_{A1} = \rho_0 g V$. Горизонтальная сила Архимеда обусловлена ускорением сосуда — $F_{A2} = \rho_0 a V$. Запишем 2ЗН в проекциях на оси X и Y :

$$\begin{cases} F_{A2} + N_2 \sin \alpha = ma \\ F_{A1} - mg + N_1 - N_2 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем N_2 :

$$N_2 = \frac{ma - F_{A2}}{\sin \alpha} = \frac{ma - \rho_0 a V}{\sin \alpha}$$

Подставляем N_2 во второе уравнение системы:

$$F_{A1} - mg + N_1 - (ma - \rho_0 a V) \operatorname{ctg} \alpha = 0$$

$$N_1 = (ma - \rho_0 a V) \operatorname{ctg} \alpha - F_{A1} + mg$$

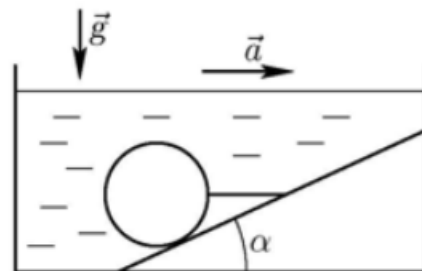
$$N_1 = (\rho V a - \rho_0 a V) \operatorname{ctg} \alpha - \rho_0 g V + \rho V g$$

$$N_1 = (\rho - \rho_0) V (a \operatorname{ctg} \alpha + g)$$

Если сосуд покоится, то сила давления на дно равна $(\rho - \rho_0) V g$.

2.2 Задача 2 (Физтех — 2015)

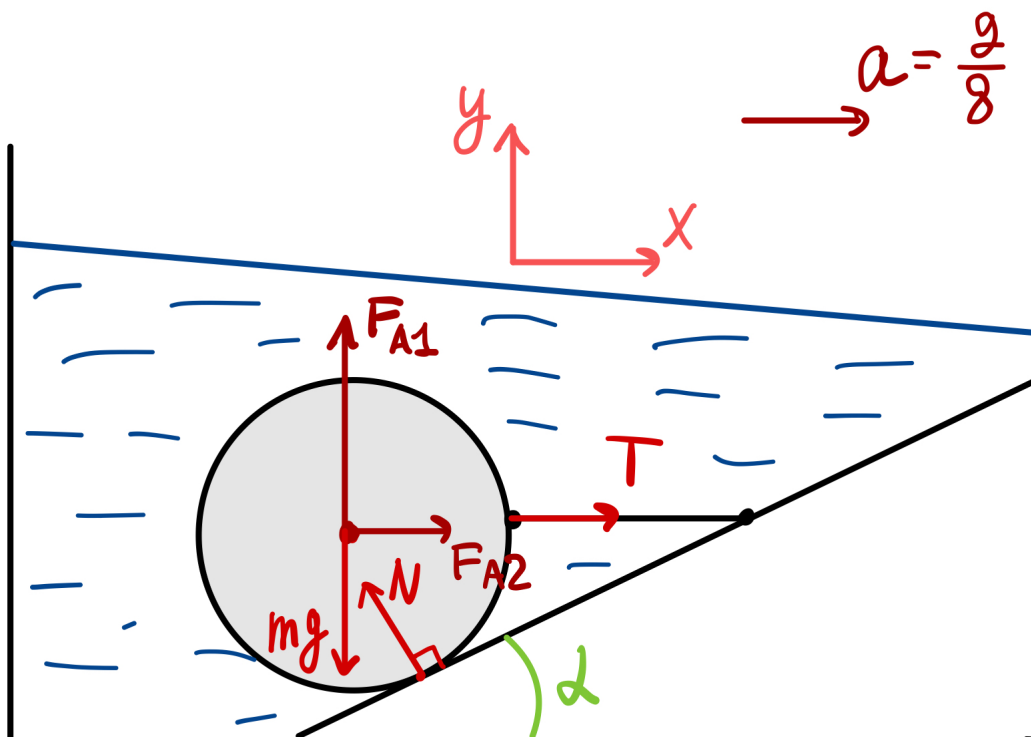
ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2015, 11) В сосуде с водой закреплён клин. На гладкой поверхности клина, наклонённой к горизонту под углом α ($\operatorname{tg} \alpha = 1/4$), удерживается стеклянный шар с помощью горизонтально натянутой нити (см. рисунок). Объём шара V , плотность воды ρ , плотность стекла 3ρ .



1) Найдите силу натяжения нити при неподвижном сосуде.

2) Найдите силу натяжения нити при движении сосуда с горизонтальным ускорением $a = g/8$.

В обоих случаях шар находится полностью в воде.



Все аналогично прошлой задаче:

$$\begin{cases} F_{A2} + T - N \sin \alpha = ma \\ F_{A1} - mg + N \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$N = \frac{F_{A2} + T - ma}{\sin \alpha}$$

$$F_{A1} - mg + (F_{A2} + T - ma) \operatorname{ctg} \alpha = 0$$

$$\rho g V - 3\rho g V + (\rho a V + T - 3\rho a V) \operatorname{ctg} \alpha = 0$$

$$-2\rho g V - 8\rho \cdot \frac{1}{8} g V + 4T = 0$$

$$T = \frac{3}{4} \rho g V$$

При $a = 0$ сила натяжения нити равна $\frac{1}{2} \rho g V$.

Канал автора—<https://t.me/kinenergy228>