Механические колебания

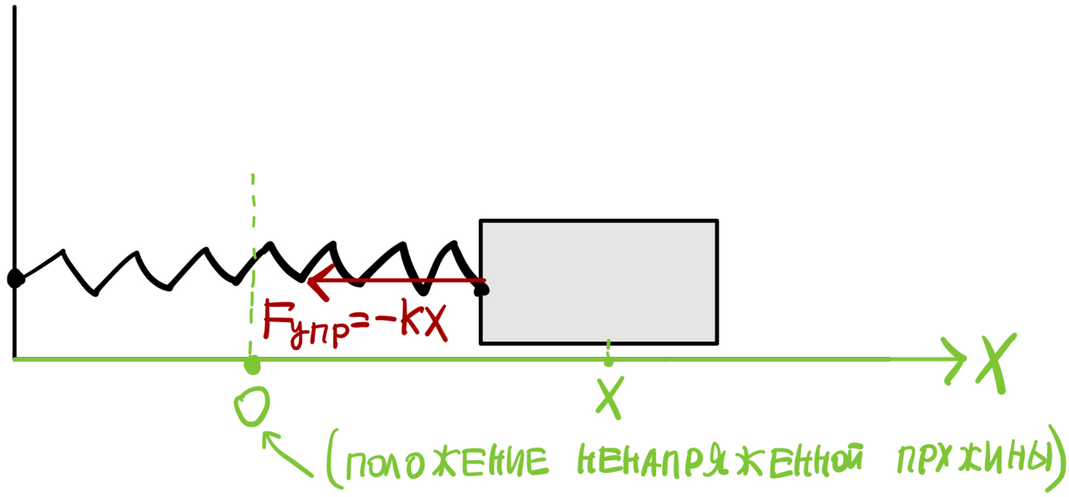
Канал автора—https://t.me/kinenergy228

Содержание

1 Уравнение гармонических колебаний

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина (например, координата) изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Простейшим примером тут является брусок с пружиной, двигающийся по столу без трения:



По горизонтали на тело действует только сила упругости со стороны пружины $F_{\text{упр}} = -kx$. Тогда второй закон Ньютона на ось X запишется так:

$$ma_x = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Разделим на массу и сделаем замену $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — *циклическая частота колебаний*[1]:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \text{ — уравнение гармонических колебаний}$$

Сопоставим этому дифференциальному уравнению второго порядка характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

Вспомнив про комплексные числа, получаем корни:

$$\lambda = \pm i\omega$$

[1]в дальнейшем буду говорить просто "частота колебаний"

Матан говорит, что в таком случае решение исходного диффура записывается в виде:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

, где C_1 и C_2 — некие константы
По формуле Эйлера:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t,\ e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

Подставляя это в уравнене для $x(t)$, получаем:

$\boxed{x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t}$ — решение уравнения гармонических колебаний

A и B — некие константы, определяемые начальными условиями (например $x(t = 0)$ и $v(t = 0)$).

Важные замечания:

- Все это верно, если мы берем ноль координаты в положении равновесия. Если это не так и координата положения равновесия x_1, то уравнения записываются следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_1\ ,\ x(t) = x_1 + A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

- В задачах часто надо искать период малых колебаний T. Тогда достаточно написать уравнение гармонических колебаний, найти оттуда частоту колебаний ω и вспомнить, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

- Для малых углов $(x \ll 1)$ верно, что:

$$\sin x \approx x$$

$$\operatorname{tg} x \approx x$$

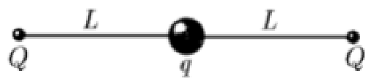
$$\cos x \approx 1 + \frac{x^2}{2} \approx 1$$

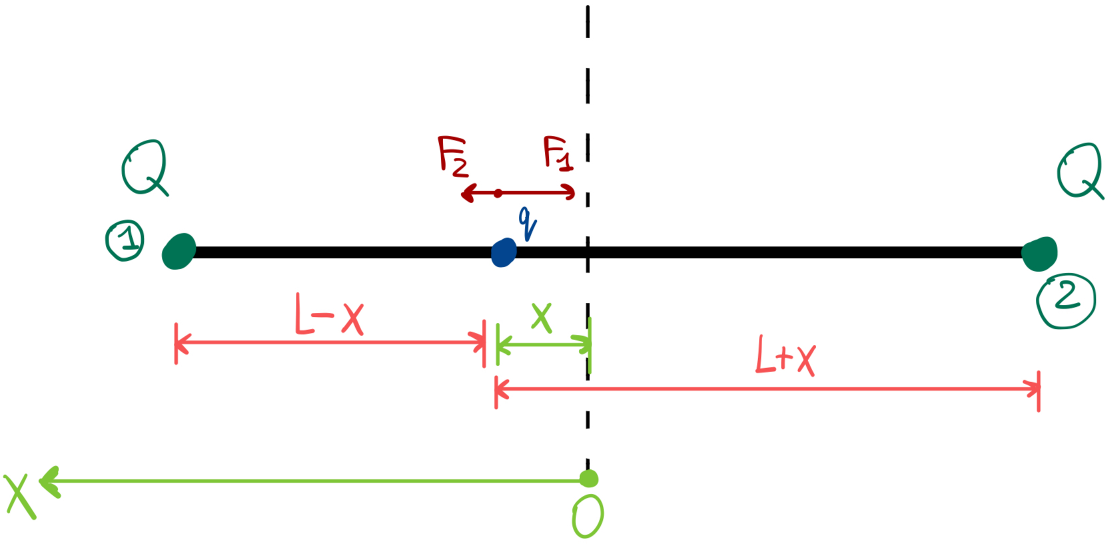
- В задачах на колебания есть два метода решения: силовой и энергетический. Силовой метод заключается в том, что уравнение гармонашек мы находим из второго закона Ньютона. Энергетический метод заключается в том, что уравнение гармонашек мы находим из дифференцирования закона сохранения энергии. Сначала разберем задачи на силовой метод.

2 Задачи — 1 (силовой метод)

2.1 Задача 1 (заряженная бусинка)

Задача 9. Бусинка с положительным зарядом q может двигаться без трения по натянутой нити длины $2L$, на концах которой закреплены положительные заряды Q. Найдите период малых колебаний бусинки, если её масса равна m.





Пусть бусинка отклонится от положения равновесия (середина стержня) влево на малое расстояние x. Выберем ось X направленную горизонтально влево, ноль на оси выберем в положении равновесия. На бусинку действуют силы со стороны левого и правого зарядов: F_1 и F_2 соответственно. Запишем 2ЗН на ось X:

$$F_2 - F_1 = m\ddot{x}$$

Силы найдем из закона Кулона:

$$F_1 = \frac{kqQ}{(L-x)^2},\ F_2 = \frac{kqQ}{(L+x)^2}$$

Подставляем и упрощаем,

$$\frac{kqQ}{(L-x)^2} - \frac{kqQ}{(L+x)^2} = m\ddot{x}$$

$$\frac{kqQ}{L^2 - 2xL + x^2} - \frac{kqQ}{L^2 + 2xL + x^2} = m\ddot{x}$$

Тут можно пренебречь x^2, так как это слагаемое второго порядка малости, а нас интересует масимум первый порядок малости (x^2 бесконечно мал даже по сравнению с x):

$$\frac{kqQ}{L}\left(\frac{1}{L+2x}-\frac{1}{L-2x}\right)=m\ddot{x}$$

$$\frac{kqQ}{L}\frac{-4x}{L^2-4x^2}=m\ddot{x}$$

Снова пренебрегаем x^2:

$$\frac{kqQ}{L}\frac{-4x}{L^2}=m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}+\frac{4kqQ}{mL^3}x=0$$

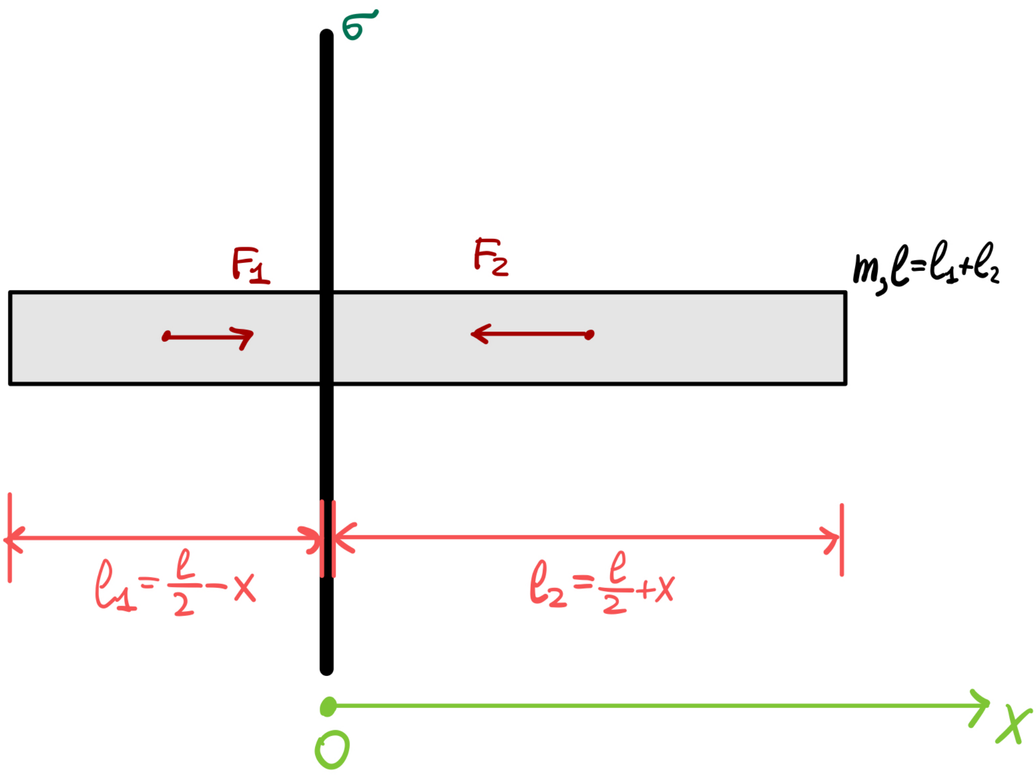
Получился диффур гармонических колебаний. Из него найдем частоту и период:

$$\omega=\sqrt{\frac{4kqQ}{mL^3}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mL^3}{4kqQ}}$$

2.2 Задача 2 (колебания возле заряженной пластины)

Задача 4. На большой плоской пластине равномерно распределён отрицательный заряд с поверхностной плотностью σ. Однородный стержень массой m и длиной l, по которому равномерно распределён положительный заряд q, вставлен в небольшое отверстие пластины и может двигаться перпендикулярно пластине. Найдите период колебаний стержня. Размеры стержня много меньше размеров пластины. Силы тяжести нет.



Пусть стержень отклнился от положения равновесия (когда стержень делится пластиной пополам) на малое расстояние x вправо. Выберем ось X направленную горизонтально вправо, ноль на оси выберем в положении равновесия. Тогда длина левой части стержня $l_1 = \frac{l}{2} - x$, длина правой части $l_2 = \frac{l}{2} + x$. Пусть на левую часть стержня действует со стороны пластины сила F_1, а на правую — F_2. Эти силы можно записать как

$$F_1 = q_{\text{левой}} E,\ F_2 = q_{\text{правой}} E$$

Напряженность от пластины равна $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ Так как стержень заряжен равномерно, то:

$$q_{\text{левой}} = q\frac{l_1}{l},\ q_{\text{правой}} = q\frac{l_2}{l}$$

Записываем 2ЗН на ось X:

$$F_1 - F_2 = m\ddot{x}$$

$$q\frac{l_1}{l}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - q\frac{l_2}{l}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = m\ddot{x}$$

$$\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 l}(l_1 - l_2) = m\ddot{x}$$

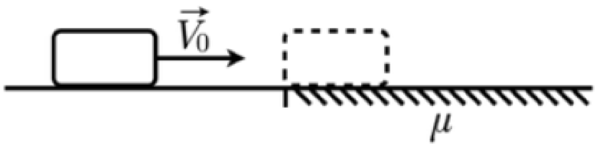
$$\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 l}\left(\frac{l}{2} - x - \frac{l}{2} - x\right) = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{q\sigma}{m\varepsilon_0 l}x = 0$$

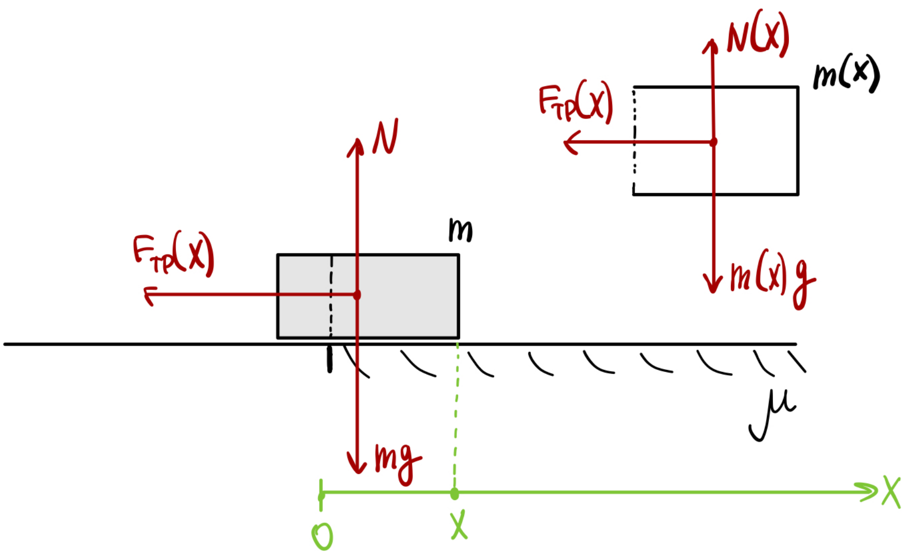
$$\omega = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\varepsilon_0 l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m\varepsilon_0 l}{q\sigma}}$$

2.3 Задача 3 (псевдоколебания)

№4. Брусок, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью V_0 = 5,6 м/с, наезжает на шероховатую поверхность с коэффициентом трения скольжения, равным μ = 0,43. Брусок останавливается, когда его задняя грань находится в точности на границе гладкой и шероховатой поверхностей.



Сколько времени продолжалось торможение? Границей плоской и шероховатой поверхностей является прямая, перпендикулярная вектору начальной скорости бруска.



Пусть тело переместилось на расстояние x. Тогда сила трения будет действовать только на часть бруска, заехавшую на шероховатую поверхность. Так как сила трения будет меняться в процессе движения, то движение бруска неравноускоренное. Отдельно рассмотрим часть бруска, заехавшую на шероховатую поверхность и запишем для нее 2ЗН:

$$\begin{cases} N(x) = m(x)g \\ -F_{\text{тр}}(x) = m\ddot{x} \end{cases}$$

Брусок однородный (это подразумевается), поэтому

$$m(x) = m\frac{x}{L}, \text{ где } L \text{ — длина всего бруска}$$

Тогда получаем:

$$N(x) = mg\frac{x}{L}$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N(x) = \mu mg\frac{x}{L}$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{L}x = 0$$

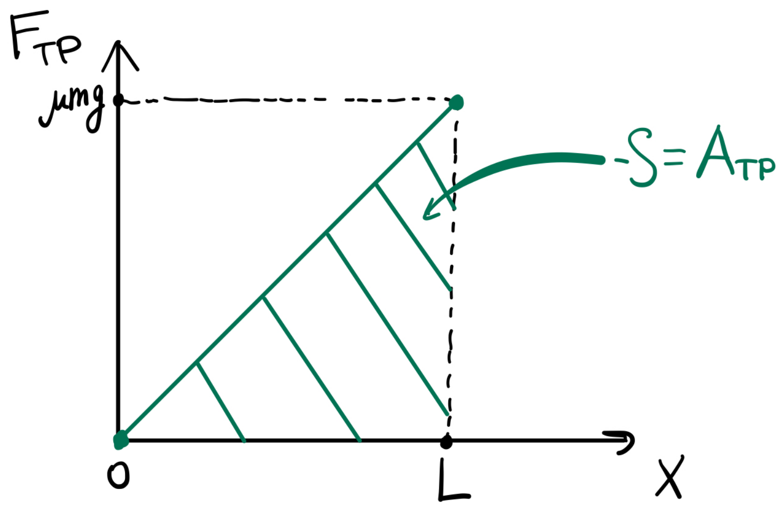
Получилось уравнение гармонических колебаний. Но понятно, что никаких колебаний тут не будет и тело в конце остановится, просто уравнение получилось схожее.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$$

Но у нас будет не полное "колебание", а лишь четверть "колебания"(из положения равновесия перешли в амплитудное), поэтому:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$$

Теперь найдем L из закона сохранения энергии:



$$A_{\text{тр}} = \frac{mv^2_{\text{конечная}}}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}$$

Работу силы трения найдем как площадь под графиком $F_{\text{тр}}(x)$, взятую со знаком минус (площадь прямоугольного треугольника):

$$-\frac{1}{2}\mu mgL = -\frac{mv_0^2}{2}$$

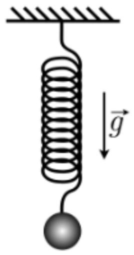
$$L = \frac{v_0^2}{\mu g}$$

$$\tau = \frac{\pi}{2}\frac{v_0}{\mu g} = 2 \text{ с}$$

• Попробуйте решить похожую задачу — 2 задачу полусеместровой контрольной работы МФТИ (нужно будет интегрировать).

2.4 Задача 4 (эллиптические связи)

Висящий на упругой пружине шар совершает колебания с периодом $T = 1{,}8$ с и амплитудой $A = 1$ см вдоль вертикали. Масса шара намного больше массы пружины. Считать, что $\pi = 3{,}14$.



1. Найдите величину максимальной скорости V_{max} шарика. Ответ выразить в см/с, округлив до десятых.
2. Определите величину его смещения x из положения равновесия в те моменты, когда его скорость $V = 0{,}6V_{max}$. Ответ выразить в мм, округлив до целых.

Сначала докажем интересный факт — если выбрать ноль координатной оси в положении равновесия тела, то колебания будут происходить по закону синуса. Будем пользоваться тем, что в положении равновесия скорость тела максимальна, поэтому производная скорости будет равной нулю.

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

$$a(0) = 0 \Rightarrow -A\omega^2 \cdot 0 = -B\omega^2 \cdot 1 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow x(t) = A\sin\omega t$$

1) Выберем ноль в положении равновесия. Тогда

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$v(t) = A\omega \cos \omega t$$

Скорость будет максимальна если косинус равен 1, поэтому

$$v_{max} = A\omega = \frac{2\pi A}{T} = 3{,}5 \text{ м/с}$$

2) Выведем *эллиптические связи* для гармонических колебаний:

$$x(t) = A \sin \omega t \Rightarrow \sin \omega t = \frac{x}{A} = \frac{x}{x_{max}}$$

$$v(t) = A\omega \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{v}{A\omega} = \frac{v}{v_{max}}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t \Rightarrow \sin \omega t = -\frac{a}{A\omega^2} = -\frac{a}{a_{max}}$$

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, поэтому получаем две связи:

$$\left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2 = 1, \ \left(\frac{a}{a_{max}}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2 = 1$$

Первое соотношение применим для нашей задачи:

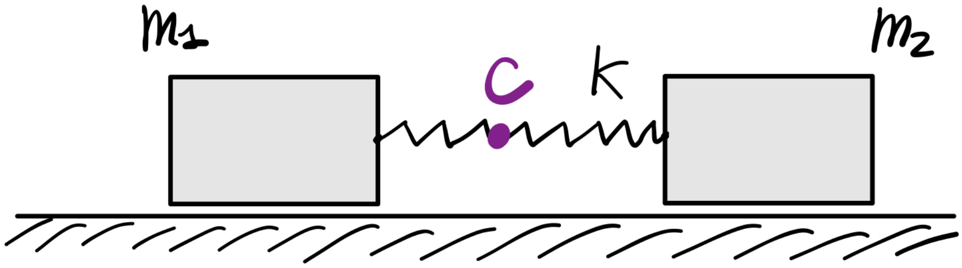
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{0{,}6 v_{max}}{v_{max}}\right)^2 = 1$$

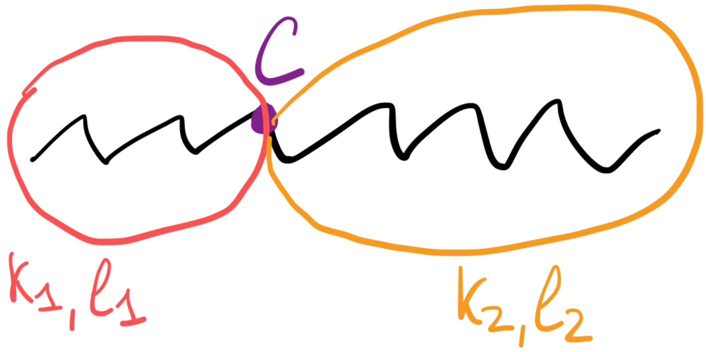
$$\frac{x^2}{A^2} = 0{,}64$$

$$x = A\sqrt{0{,}64} = 0{,}8A = 8 \text{ мм}$$

2.5 Задача 5 (совместные колебания)

Условие: на горизонтальной гладкой поверхности находятся два бруска массами m_1 и m_2, которые скреплены друг с другом невесомой пружиной жесткостью k. Оба бруска немного растягивают в противоположные стороны и отпускают. Найти период появившихся колебаний T.





Идея проста: колебания каждого груза будут происходить на пружине длиной до центра масс, так как центр масс это неподвижная точка. Тогда может записать выражения для периодов колебаний брусков:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}},\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}$$

Найдем жесткости кусков пружины. Запишем выражения для жесткостей через модуль Юнга:

$$k = \frac{ES}{l},\ k_1 = \frac{ES}{l_1},\ k_2 = \frac{ES}{l_2}$$

Так как $ES = const$, то

$$kl = k_1 l_1 = k_2 l_2$$

$$k_1 = k\frac{l}{l_1},\ k_2 = k\frac{l}{l_2}$$

Найдем координату центра масс, если направить ось горизонтально вправо и выбрать ноль в координате первого тела:

$$x_c = l_1 = \frac{0 + m_2 l}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{l}{l_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2},\ \frac{l}{l_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

Подставляем в выражения для жесткостей:

$$k_1 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_2},\ k_2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1}$$

Подставляем в выражения для периодов:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}},\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}$$

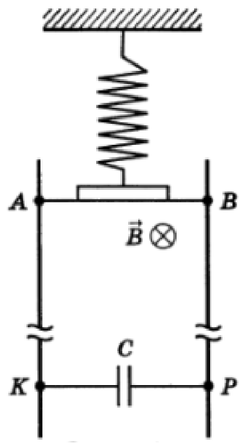
Периоды получились одинаковые (поэтому колебания и называют совместными). Заметим что под корнем спряталась приведенная масса $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — величина, часто появляющаяся в задаче двух тел. Итак,

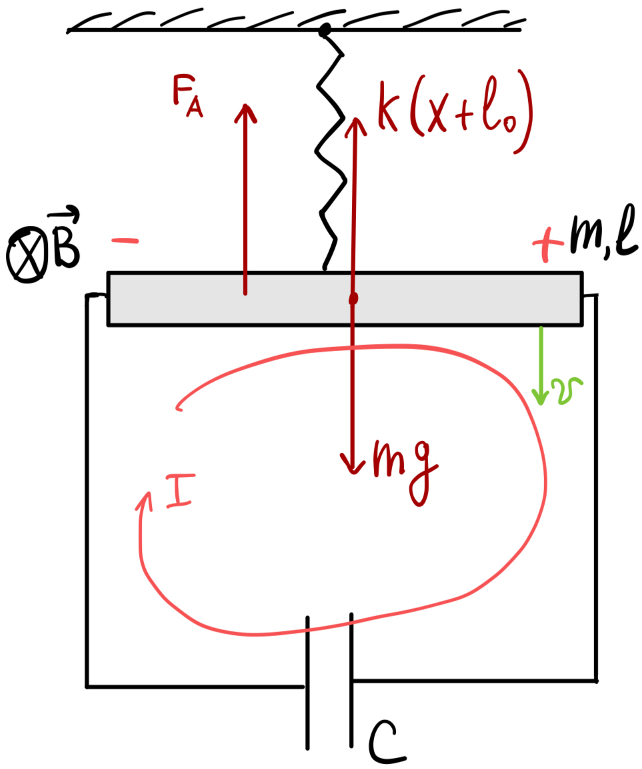
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

2.6 Задача 6 (индукция)

Задача 20. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 11*) На пружинке жёсткости k висит груз (рис.). К грузу прикреплена горизонтально расположенная медная рейка AB длины l. Рейка может скользить без трения по неподвижным вертикальным проводящим рельсам AK и BP, имея с ними хороший электрический контакт. К рельсам с помощью проводов подсоединён конденсатор ёмкости C. Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен рейке и рельсам. Найдите период вертикальных колебаний груза. Масса груза с рейкой равна m. Сопротивление рейки, рельсов и проводов можно не учитывать.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+B^2l^2C}{k}}$





На рейку действует три силы: сила тяжести, сила упругости, сила Ампера.

Разберемся с силой упругости. Если рейка движется вниз, то сила упругости направлена вверх и равна $k(x + l_0)$, где x — координата тела на вертикально вниз направленной оси, ноль которой выбран в положении равновесия тела, l_0 — растяжение пружины в положении равновесия. l_0 найдем из 2ЗН для положения равновесия тела:

$$kl_0 = mg$$

Разберемся с силой Ампера. Так как индукция магнитного поля направлена от нас, а проводник движется вниз, то плюс ЭДС индукции будет справа, а минус слева. Тогда ток течет по проводнику слева направо. Тогда по правилу левой руки определяем, что сила Ампера направлена вверх и равна BIl. Найдем силу тока. Напряжение на конденсаторе равно ЭДС индукции проводника, поэтому:

$$U_C = \mathscr{E}_i = Bvl$$

$$\frac{q}{C} = Bvl$$

$$q = BCvl$$

Продифференцируем это выражение по времени и вспомниим, что $\dot{q} = I$:

$$I = BC\dot{v}l = BC\ddot{x}l$$

Запишем 2ЗН и подставим в него все:

$$mg - F_A - F_{\text{упр}} = m\ddot{x}$$

$$mg - B^2l^2C\ddot{x} - k(x + l_0) = m\ddot{x}$$

$$mg = kl_0 \Rightarrow -B^2l^2C\ddot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}\left(m + B^2l^2C\right) + kx = 0$$

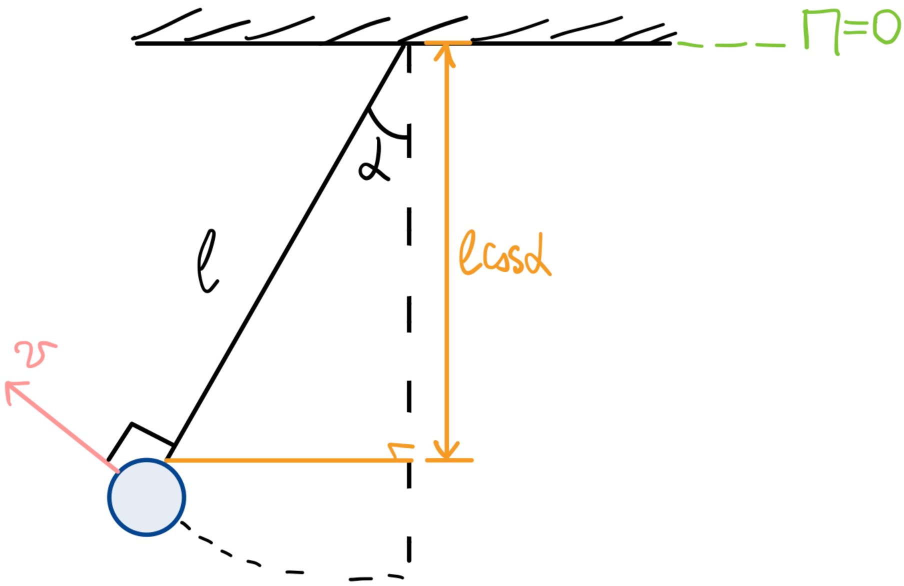
$$\ddot{x} + \frac{k}{m + B^2l^2C}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + B^2l^2C}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m + B^2l^2C}{k}}$$

3 Задачи — 2 (энергетический метод)

3.1 Задача 7 (математический маятник)

Теперь пойдут задачи на энергетический метод.
Условие: найти период малых колебаний математического маятника (грузик на нитке длиной l).



Пусть грузик отклонился на малый угол α. Понятно, что энергия системы сохраняется, так как сила натяжения нити перпендикулярна скорости, а значит она совершает нулевую работу, а других непотенциальных сил нет. Тогда:

$K + \Pi = const$, где K — кинетическая энергия, Π — потенциальная энергия

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = 0$$

Разберемся с потенциальной энергией. Выберем ноль потенциальной энергии на уровне потолка, тогда:

$$\Pi = -mgl\cos\alpha$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{\Pi} = mgl\sin\alpha\dot{\alpha}$$

Так как угол мал, то:

$$\dot{\Pi} = mgl\alpha\dot{\alpha}$$

Разберемся с кинетической энергией. Если грузик движется со скоростью $v = \omega l = \dot{\alpha} l$, то:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{\alpha}^2 l^2}{2}$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{K} = \frac{1}{2} m l^2 \cdot 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = m l^2 \dot{\alpha}\ddot{\alpha}$$

Итак,

$$m l^2 \dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mgl\alpha\dot{\alpha} = 0$$
$$l\ddot{\alpha} + g\alpha = 0$$
$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Получился диффур гармонашек относительно угла отклонения, тогда:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

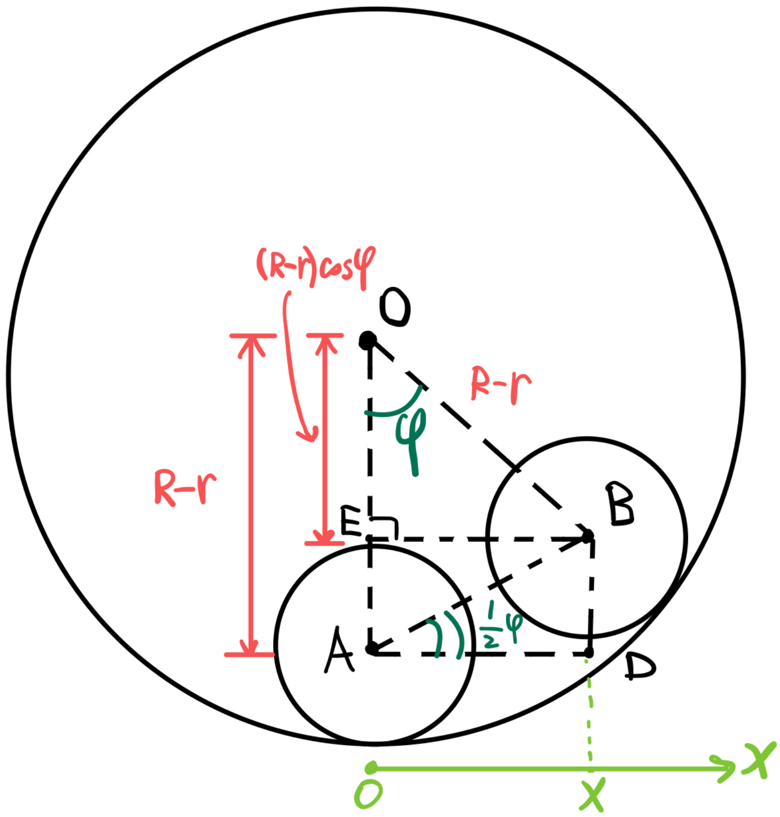
Отдельно отметим, что период не зависит от массы грузика.

• Найдите период колебаний грузика на пружинке путем дифференцирования закона сохранения энергии.

• Найдите период малых колебаний массивного однородного стержня, прикрепленного к потолку (указание: $\int_0^l x^n dx = \frac{l^{n+1}}{n+1}$) — ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$.

3.2 Задача 8 (цилиндр в цилиндре)

Условие: По дну цилиндрической лунки радиусом R катается без проскальзывания полый цилиндр радиусом r ($r < R$). Найдите период малых колебаний цилиндра.



Пусть центр цилиндра отклонился на малый угол φ и переместился из точки A в точку B. Так как угол мал, то отрезок AB не отличим от дуги окружности радиуса $R-r$, поэтому:

$$AB = (R-r)\varphi$$

Разберемся с кинетической энергией[2]:

$$K = mv^2 = m\omega^2(R-r)^2 = m\dot{\varphi}^2(R-r)^2$$

$$\dot{K} = 2m\dot{\varphi}\ddot{\varphi}(R-r)^2$$

Разберемся с потенциальной энергией (ноль выберем в точке A):

$$\Pi = mg((R-r) - (R-r)\cos\varphi) = mg(R-r)(1-\cos\varphi)$$

$$\dot{\Pi} = mg(R-r)\sin\varphi\dot{\varphi} \approx mg(R-r)\varphi\dot{\varphi}$$

Итак,

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = 0$$

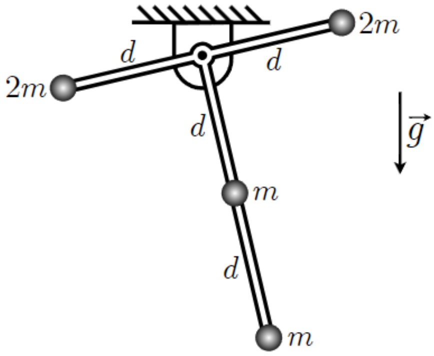
$$2m\dot{\varphi}\ddot{\varphi}(R-r)^2 + mg(R-r)\varphi\dot{\varphi} = 0$$

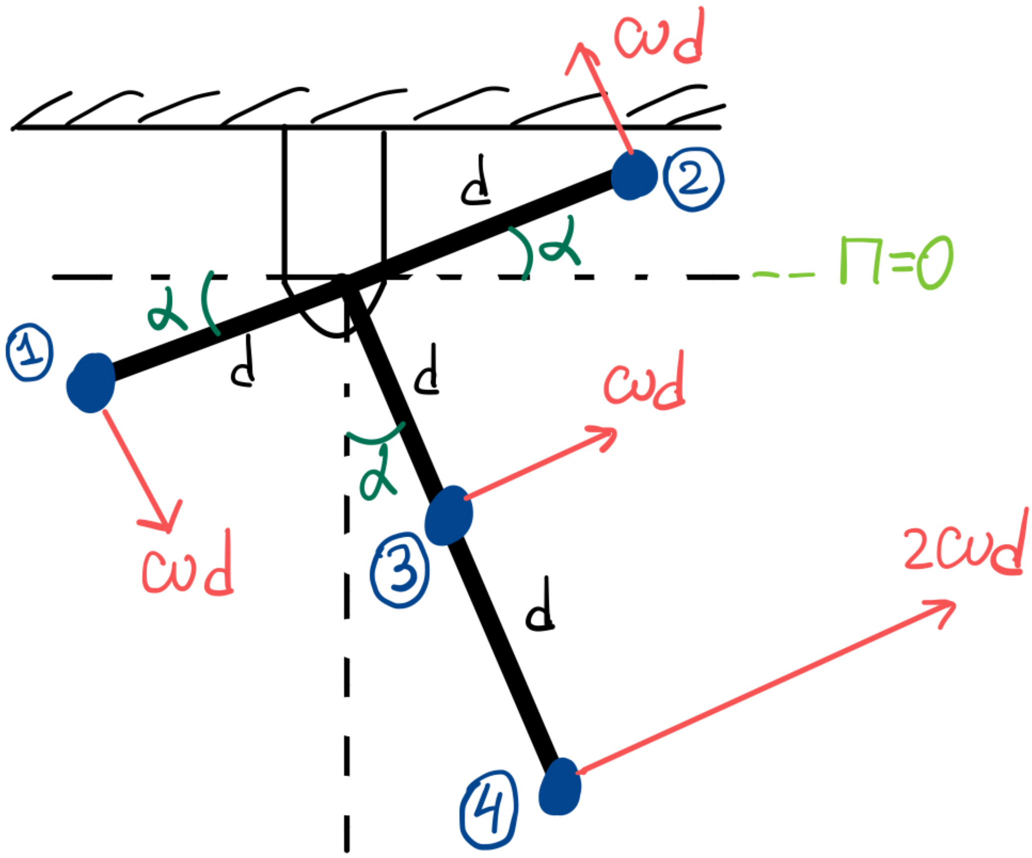
[2]кинетическая энергия колеса, двигающегося со скорость v равна mv^2 (см. мой файл по кинсвязям)

$$2\ddot{\varphi}(R-r)+g\varphi=0$$
$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{2(R-r)}\varphi=0$$
$$T=2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$$

3.3 Задача 9 (Т)

№7. Найдите период малых колебаний жёсткого каркаса вокруг точки подвеса. Длина каждого из звеньев равна d. Размеры шаров пренебрежимо малы по сравнению с d. Массой звеньев пренебречь.





Пусть система отклонилась от положения равновесия на малый угол α. Выразим скорости всех тел через угловую скорость (которая одинакова для всех тел) и расстояния до точки вращения (см. рис.).

Разберемя с кинетической энергией:

$$K = \frac{2m(\omega d)^2}{2} + \frac{2m(\omega d)^2}{2} + \frac{m(\omega d)^2}{2} + \frac{m(2\omega d)^2}{2} = \frac{9}{2}m\dot{\alpha}^2 d^2$$

$$\dot{K} = 9md^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$$

Разберемся с потенциальной энергией. Выберем ноль потенциальной энергии на уровне точки вращения и учтем, что тогда суммарная потенциальная энергия тел 1 и 2 равна нулю и ее можно не учитывать:

$$\Pi = -mgd\cos\alpha - mg2d\cos\alpha = -3mgd\cos\alpha$$

$$\dot{\Pi} = 3mgd\sin\alpha\dot{\alpha} \approx 3mgd\alpha\dot{\alpha}$$

Итак,

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = 0$$

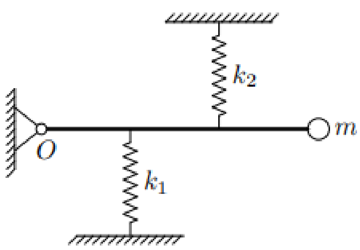
$$9md^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + 3mgd\alpha\dot{\alpha} = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{3d}\alpha = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3d}{g}}$$

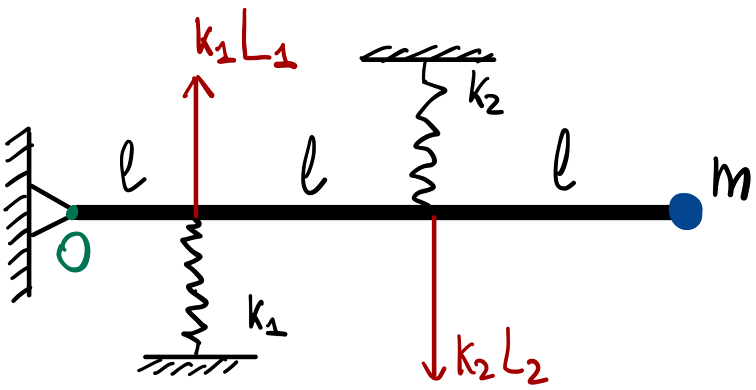
3.4 Задача 10 (две пружинки)

Задача 10. (*МФТИ, 1996*) Конструкция из жёстко соединённых лёгкого стержня и небольшого шарика массой m может совершать колебания под действием двух пружин с жёсткостями k_1 и k_2, двигаясь при вращении без трения вокруг вертикальной оси O по гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Пружины лёгкие, их оси горизонтальны, а точки прикрепления к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия оси пружин перпендикулярны стержню, и пружина с жёсткостью k_1 растянута на величину L_1.



1) Найти деформацию второй пружины в положении равновесия.
2) Найти период малых колебаний конструкции.

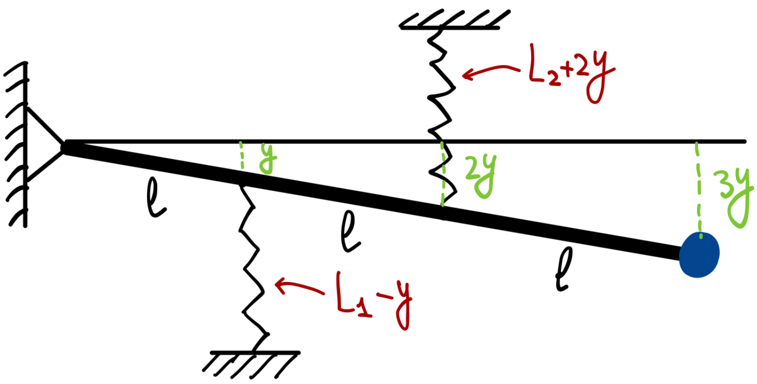
1)



Запишем правило моментов относительно точки O:

$$k_1 L_1 l = k_2 L_2 2l \Rightarrow L_2 = \frac{k_1 L_1}{2k_2}$$

Запомним, что $k_1 L_1 - 2k_2 L_2 = 0$.
2)



Если первая пружина сжалась на y, то вторая пружина растянулась на $2y$, а шарик переместился на $3y$ (из подобия треугольников). Тогда кинетическая энергия:

$$K = \frac{mv^2}{2};\ \dot{K} = mv\dot{v} = 9m\dot{y}\ddot{y}$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi = \frac{k_1(L_1 - y)^2}{2} + \frac{k_2(L_2 + 2y)^2}{2}$$

$$\dot{\Pi} = \dot{y}(k_1 y - k_1 L_1 + 2k_2 L_2 + 4k_2 y)$$

Итак,

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = 0$$

$$9m\dot{y}\ddot{y} + \dot{y}(k_1 y - k_1 L_1 + 2k_2 L_2 + 4k_2 y) = 0$$

$$9m\ddot{y} + (k_1 + 4k_2)y = k_1 L_1 - 2k_2 L_2$$

$$k_1 L_1 - 2k_2 L_2 = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k_1 + 4k_2}{9m} y = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9m}{k_1 + 4k_2}} = 6\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + 4k_2}}$$

Канал автора—https://t.me/kinenergy228