Контрольное задание №2

Евгений Деин

November 26, 2017

1 ПОВЕРХНОСТЬ В ОБЪЕМЛЮЩЕМ ЕЕ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1 Задание поверхности

Поверхность может быть задана уравнением одного из типов:

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

которые определяют координату z как явную (1) или неявную (2) функцию координат x, y.

Не всякая поверхность полностью может быть задана при помощи уравнения типа (1), так как в ряде случаев одной комбинации значений x и y соответствует не единственная точка на поверхности (например, рис.3,б). В подобных случаях приходится либо прибегать к заданию поверхности неявным уравнением типа (2), либо использовать уравнение типа (1), но не для всей поверхности сразу, а по частям.

Уравнение типа (2) для сферы, изображенной на рис. 3, б, имеет вид

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Та же сфера может быть задана и уравнением типа (1), но по частям:часть поверхности, лежащая ниже плоскости z=c, задается уравнением

$$z = c - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \tag{3}$$

а находящаяся выше плоскости $z = c$ — уравнением

$$z = c + \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}; \tag{4}$$

точки поверхности, лежащие в плоскости $z = c$, могут быть получены как из (3), так и из (4).

Заметим, что невозможность представления всей поверхности полностью в форме (1) в некоторой системе координат не исключает представимости уравнения этой же поверхности в такой форме в другой системе координат.

1.2 Касательная плоскость. Нормальные сечения

Кривизна ka выражается следующей формулой[1] (см. рис. 6):

$$k_a = \lim_{l \to 0} \frac{2h}{l^2} = \lim_{l \to 0} \frac{2f(x,y)}{l^2},$$

Имея в виду, что при $x \to 0$ и $y \to 0$ величина ϵ также устремляется к нулю, получаем:

$$\begin{aligned} k_a &= \lim_{l \to 0} \frac{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2 + 2\epsilon l^2}{l^2} = \\ &= f_{xx}(0,0)\cos^2\alpha + f_{xx}(0,0)\sin^2\alpha + 2f_{xy}(0,0)\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь учтено, что

$$\frac{x}{l} = \cos\alpha; \frac{y}{l} = \sin\alpha.$$

В частности,

$$k_x = f_{xx}(0,0); k_y = f_{yy}(0,0). \tag{6}$$

Таким образом, зная кривизны любых двух ортогональных нормальных сечений в точке A, например k_x и k_y, а также зная $f_{xy}(0,0)$, можно найти кривизну любого другого нормального сечения в той же точке.

1.3 Кривизна нормальных сечений поверхности — тензор второго ранга

Формулы преобразования компонентов симметричного тензора второго ранга имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} a_{x_1'x_1'} &= a_{x_1x_1}l_1^2 + a_{x_2x_2}m_1^2 + 2a_{x_1x_2}l_1m_1 = a_{x_1x_1}\cos^2\alpha + a_{x_2x_2}\sin^2\alpha + \\ &\qquad +2a_{x_1x_2}\cos\alpha\sin\alpha \\ a_{x_2'x_2'} &= a_{x_1x_1}l_2^2 + a_{x_2x_3}m_2^2 + 2a_{x_1x_2}l_2m_2 = a_{x_1x_1}\sin^2\alpha + a_{x_2x_2}\cos^2\alpha - \\ &\qquad -2a_{x_1x_2}\cos\alpha\sin\alpha \\ a_{x_1'x_3'} &= a_{x_3x_1}l^2 = a_{x_2x_2}l_1l_2 + a_{x_2x_2}m_1m_2 + a_{x_1x_1}(l_1m_2 + l_2m_1) = \\ &= -a_{x_1x_1}\cos\alpha\sin\alpha + a_{x_2x_2}\sin\alpha\cos\alpha + a_{x_1x_1}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2}(a_{x_2x_2} - a_{x_1x_1})\sin 2\alpha + a_{x_1x_1}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Нетрудно видеть, что формула (10) действительно справедлива. С целью получения выражения для $f_{x_1 y_1}(0,0)$ применим правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{gathered}
f_{x_1 y_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = \frac{]\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1}\right) = \\
= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)\frac{\partial y}{\partial x_1} + \\
+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \\
+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial x}{\partial x_1}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь как функция $f_{x_1 y_1}$ так и производные функции f в правой части равенства рассматриваются при $x = 0$, $y = 0$.

2 НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

2.1 Векторное уравнение поверхности

Положение точки на поверхности определяется координатами α_1 и α_2, эта же точка по-другому может быть задана при помощи *радиуса-вектора* $\mathbf{r}$, имеющего неподвижное начало в некоторой точке пространства и конец в точке поверхности (α_1, α_2). Очевидно, что $\mathbf{r}$ является функцией от α_1 и α_2:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{8}$$

Векторному равенству (8) соответствуют три скалярных равенства:

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2); y = y(\alpha_1, \alpha_2); z = z(\alpha_1, \alpha_2).$$