Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.В. ТРАКИМУС, Д.В. ВАГИН

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2016

УДК 517.974(075.8)
Т 652

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор *В.А. Селезнев*
доктор техн. наук, профессор *С.Н. Постовалов*

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

Тракимус Ю.В.
Т 652 Основы вариационного исчисления: учебное пособие / Ю.В. Тракимус, Д.В. Вагин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – 72 с.

ISBN 978-5-7782-2833-7

Предназначено для студентов III курса всех специальностей факультета прикладной математики и информатики.

Тракимус Юрий Викторович, Вагин Денис Владимирович

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 21.01.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 4,18. Печ. л. 4,5 Изд. № 12. Заказ № 197. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

УДК 517.974(075.8)

ISBN 978-5-7782-2833-7

ФУНКЦИОНАЛ. БЛИЗОСТЬ КРИВЫХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА

1. Понятие функционала. Пусть дан некоторый класс M функций $y(x)$. Если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число V, то говорят, что в классе M определен *функционал* V, и пишут $V = V[y]$.

Класс M функций $y(x)$, на котором определен функционал $V[y]$, называется *областью задания функционала*. Кривые (функции) $y(x)$, на которых сравниваются значения функционала $V[y]$, называются *допустимыми кривыми* или *кривыми сравнения*.

Вариацией или *приращением* δy аргумента $y(x)$ функционала $V[y]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими выбранному классу M функций: $\delta y = y(x) - y_0(x)$.

Приведем примеры функционалов.

1) Пусть $M = C[0, 1]$ – совокупность всех непрерывных функций $y(x)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, и пусть

$$V[y] = \int_0^1 y(x)\,dx. \qquad (1)$$

Тогда $V[y]$ есть функционал от $y(x)$: каждой функции $y(x) \in C[0,1]$ отвечает определенное значение $V[y]$. Подставляя в (1) вместо $y(x)$ конкретные функции, мы будем получать соответствующие значения $V[y]$. Так, если $y(x) = 5$, то $V[5] = \int_0^1 5\,dx = 5$; если $y(x) = = \cos \pi x$, то $V[\cos \pi x] = \int_0^1 \cos \pi x\,dx = 0$.

2) Пусть $M = C^1[a, b]$ – класс функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, и пусть $V[y] = y'(x_0)$, где $x_0 \in [a, b]$. Видно, что $V[y]$ есть функционал, определенный в указанном классе функций: каждой функции из этого класса ставится в соответствие определенное число – значение производной этой функции в фиксированной точке x_0.

Если, например, $a = 1$, $b = 3$ и $x_0 = 2$, то для $y(x) = x^2$ имеем: $V[x^2] = 2x\big|_{x=2} = 4$; для $y(x) = \ln x$ будем иметь $V[\ln x] = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}$.

3) Пусть $M = C^1[a, b]$ – класс функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную $y'(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$V[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{2}$$

будет функционалом, определенным на этом классе функций. Функционал (2) геометрически выражает длину дуги кривой $y = y(x)$ с концами в точках $A(a, y(a))$ и $B(b, y(b))$.

Основная задача вариационного исчисления – исследование функционалов на экстремум и отыскание тех функций, на которых этот экстремум достигается. Большую роль в развитии вариационного исчисления сыграли следующие классические задачи [1–9].

- *Задача о брахистохроне* – плоской линии, по которой материальная точка быстрее всего соскальзывает под действием только силы тяжести из точки A в точку B (B ниже A и точки не лежат на одной вертикальной прямой, см. рис. 1).

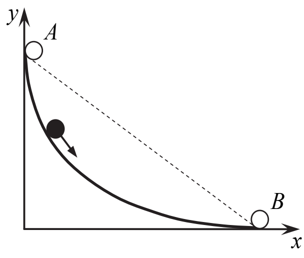

Рис. 1

- *Задача о геодезической линии* – линии наименьшей длины, расположенной на заданной поверхности и соединяющей две данные точки (рис. 2).
- *Задача Дидоны* – легендарной карфагенской царевны, которой понадобилось ремешком фиксированной длины ограничить прибрежный участок земли наибольшей площади (рис. 3).

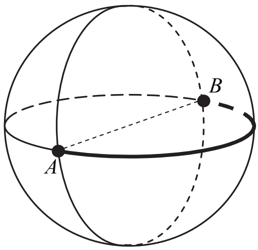

Рис. 2

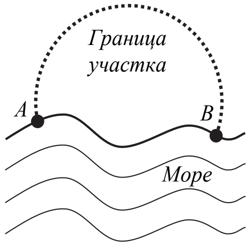

Рис. 3

2. Близость кривых. Говорят, что кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$, *близки в смысле близости нулевого порядка*, если для заданного $\varepsilon > 0$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо: $|y(x) - y_1(x)| < \varepsilon$. Геометрически это означает, что эти кривые на отрезке $[a, b]$ *близки по ординатам* (рис. 4).

Будем говорить, что кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$, *близки в смысле близости первого порядка*, если для заданного $\varepsilon > 0$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо: $|y(x) - y_1(x)| < \varepsilon$ и $|y'(x) - y_1'(x)| < \varepsilon$. Геометрически это означает, что кривые на отрезке $[a, b]$ близки как по ординатам, так и по направлениям касательных в соответствующих точках (рис. 5).

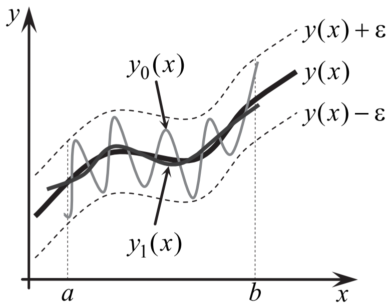

Рис. 4

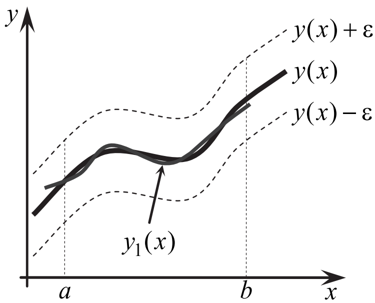

Рис. 5

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ *близки в смысле близости* k -го *порядка*, если для заданного $\varepsilon > 0$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняется:

$$\left|y(x) - y_1(x)\right| < \varepsilon,\ \left|y'(x) - y_1'(x)\right| < \varepsilon,\ \ldots,\ \left|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)\right| < \varepsilon.$$

Если кривые близки в смысле близости k -го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Расстоянием между кривыми $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, где $y(x)$ и $y_1(x)$ – непрерывные на $[a,\ b]$ функции, называется неотрицательное число ρ_0, равное максимуму $\left|y(x) - y_1(x)\right|$ на отрезке $[a, b]$:

$$\rho_0 = \rho_0[y(x),\ y_1(x)] = \max_{a \le x \le b}\left|y(x) - y_1(x)\right|.$$

Пусть кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные n-го порядка. *Расстоянием* n*-го порядка между кривыми* $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ называется наибольший из максимумов следующих величин: $\left|y(x) - y_1(x)\right|$, $\left|y'(x) - y_1'(x)\right|$, …, $\left|y^{(n)}(x) - y_1^{(n)}(x)\right|$ на отрезке $[a, b]$. Будем обозначать это расстояние так:

$$\rho_n = \rho_n[y(x), y_1(x)] = \max_{0 \le k \le n}\max_{a \le x \le b}\left|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)\right|.$$

ε *-окрестностью* n*-го порядка кривой* $y = y(x)$ называется совокупность кривых $y = y_1(x)$, расстояния n-го порядка которых от кривой $y = y(x)$ меньше ε: $\rho_n = \rho_n[y(x), y_1(x)] < \varepsilon.$

ε -окрестность нулевого порядка называют *сильной* ε *-окрестностью функции* $y = y(x)$. Сильная ε -окрестность кривой $y = y(x)$ состоит из кривых, расположенных в полоске шириной 2ε вокруг кривой $y = y(x)$.

ε -окрестность первого порядка называют *слабой* ε *-окрестностью функции* $y = y(x)$.

3. Непрерывность функционала. Функционал $V[y]$, определенный в классе M функций $y(x)$, называется *непрерывным* при $y = y_0(x)$ в смысле близости n-го порядка, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех допустимых функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условиям $|y(x) - y_0(x)| < \delta$, $|y'(x) - y'_0(x)| < \delta$, …, $\left|y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)\right| < \delta$, выполняется неравенство $\|V[y] - V[y_0]\| < \varepsilon$. Иными словами, $\|V[y] - V[y_0]\| < \varepsilon$, если $\rho_n[y(x), y_0(x)] < \delta$.

Функционал, не являющийся непрерывным в смысле близости n-го порядка, будем называть *разрывным* в смысле указанной близости.

Замечание. Сильная ε-окрестность функции $y = y_0(x)$ содержит большее число кривых, чем слабая окрестность, так как слабой ε-окрестности $y_0(x)$ не принадлежат кривые, близкие к кривой $y_0(x)$ по ординатам, но сильно отличающиеся по производным. Поэтому если функционал на кривой $y_0(x)$ обладает некоторым свойством по отношению к кривым из ее сильной окрестности, то этим же свойством он будет обладать и по отношению к кривым из ее слабой окрестности. Например, из непрерывности функционала на кривой $y_0(x)$ в ее сильной окрестности следует его непрерывность на этой кривой в ее слабой окрестности.

Пусть M – линейное нормированное пространство функций $y(x)$. Функционал $L[y]$, определенный в пространстве M, называется *линейным*, если он удовлетворяет условиям:

1) $L[c \cdot y] = c \cdot L[y]$, где c – произвольная постоянная.

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, где $y_1(x) \in M$, $y_2(x) \in M$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Показать, что кривые $y(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$, где n достаточно велико, и $y_1(x) \equiv 0$ на $[0, \pi]$ близки в смысле близости нулевого порядка.

▲ Так как модуль разности $|y(x) - y_1(x)| = \left|\dfrac{\sin n^2 x}{n}\right| \le \dfrac{1}{n}$, то на всем отрезке $[0, \pi]$ эта разность по модулю мала при достаточно большом n.

Близости первого порядка нет, так как $\left|y'(x)-y_1'(x)\right| = n\left|\cos n^2 x\right|$, и, например, в точках $x=\dfrac{2\pi}{n^2}$ имеем $\left|y'(x)-y_1'(x)\right| = n$ и, значит, $\left|y'(x)-y_1'(x)\right|$ может быть сделан как угодно большим при достаточно большом n. ▲

Пример 2. Показать, что кривые $y(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2}$, где n достаточно велико, и $y_1(x)\equiv 0$ на $[0,\pi]$ близки в смысле близости первого порядка.

▲ Так как $\left|y(x)-y_1(x)\right| = \left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ и $\left|y'(x)-y_1'(x)\right| = \left|\dfrac{\cos nx}{n}\right| \le \dfrac{1}{n}$ малы, то указанные кривые близки в смысле близости первого порядка. ▲

Пример 3. Найти расстояние ρ_0 между кривыми $y=x$ и $y=x^2$ на отрезке $[0,1]$.

▲ По определению $\rho_0 = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^2-x\right| = \max\limits_{0\le x\le 1}\left(x-x^2\right)$. На концах отрезка $[0,1]$ функция $y=x-x^2$ обращается в нуль. Найдем $\max\limits_{0\le x\le 1}\left(x-x^2\right)$. Имеем $y'=1-2x$; $y'=0$ при $x=\dfrac{1}{2}$, так что $\rho_0 =$ $= \max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^2-x\right| = \left(x-x^2\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$. ▲

Пример 4. Найти расстояние первого порядка между кривыми $y(x)=x^2$ и $y_1(x)=x^3$ на отрезке $[0,1]$.

▲ Найдем производные данных функций $y'=2x$, $y_1'=3x^2$ и рассмотрим функции $f(x)=x^2-x^3$ и $g(x)=2x-3x^2$. Найдем их наибольшие значения на отрезке $[0,1]$. Имеем $f'=2x-3x^2$. Приравнивая эту производную к нулю, находим стационарные точки функции $f(x)$:

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Далее, $f(x)\big|_{x=0} = 0$; $f(x)\big|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{4}{27}$; $f(x)\big|_{x=1} = 0$. Отсюда $\rho_0 = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| x^3 - x^2 \right| = \left| x^3 - x^2 \right|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{4}{27}$.

Найдем теперь расстояние $\tilde{\rho}_0$ нулевого порядка между производными $y' = 2x$ и $y_1' = 3x^2$:

$$\tilde{\rho}_0 = \max_{0 \le x \le 1} \left| g(x) \right| = \max_{0 \le x \le 1} \left| 2x - 3x^2 \right| = \left| 2x - 3x^2 \right|_{x=1} = 1.$$

Таким образом, расстояние ρ_1 первого порядка между кривыми $y(x) = x^2$ и $y_1(x) = x^3$ будет равно $\rho_1 = \max(\rho_0, \tilde{\rho}_0) = 1$. ▲

Пример 5. Исследовать на непрерывность функционал

$$V[y] = \int_0^1 \left| y'(x) \right| dx, \;\; y(x) \in C^1[0, 1], \qquad (3)$$

на прямой $y = 0$: а) в ее сильной окрестности; б) в ее слабой окрестности.

▲ а) Зададим $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и выберем кривые сравнения $y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, тогда

$$\left| V[y_n] - V[0] \right| = \int_0^1 \left| \cos nx \right| dx \ge \int_0^1 \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2n}{4n} > \frac{1}{4}.$$

Итак, с одной стороны, кривые $y_n(x)$ в смысле близости нулевого порядка стремятся к $y = 0$: $\rho_0\left(\frac{\sin nx}{n}, 0 \right) = \max\limits_{[0,1]} \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| \to 0, \; n \to \infty$, но в то же время $\left| V[y_n] - V[0] \right| \not\to 0, \; n \to \infty$. Следовательно, функционал (3) разрывный на прямой $y = 0$ в ее сильной окрестности.

б) Рассмотрим любую последовательность функций $y_n(x) \in C^1[0, 1]$, стремящуюся к $y = 0$ при $n \to \infty$ в ее слабой окрестности. Это означает, что $\rho_1\left(y_n(x), 0\right) \le \max\limits_{[0,1]}|y_n(x)| + \max\limits_{[0,1]}|y_n'(x)| \to 0, n \to \infty.$ Отсюда следует, что $\max\limits_{[0,1]}|y_n'(x)| \to 0$, $n \to \infty$, значит, и $|V[y_n] - V[0]| = \int\limits_0^1 |y_n'|\,dx \to 0,$ $n \to \infty$

Следовательно, функционал (3) непрерывен на $y = 0$ в ее слабой окрестности. ▲

ЗАДАЧИ

Установить порядок близости кривых.

1. $y(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2+1}$, $y_1(x) \equiv 0$ на $[0, 2\pi]$.

2. $y(x) = \dfrac{\sin x}{n}$, $y_1(x) \equiv 0$ на $[0, \pi]$.

3. $y(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, $y_1(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$.

Найти расстояния ρ_0 между кривыми на указанных интервалах.

4. $y(x) = xe^{-x}$, $y_1(x) \equiv 0$ на $[0, 2]$.

5. $y(x) = \sin 2x$, $y_1(x) = \sin x$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. $y(x) = x$, $y_1(x) = \ln x$ на $\left[e^{-1}, e\right]$.

7. Найти расстояние ρ_1 между кривыми $y(x) = \ln x$, $y_1(x) = x$ на $\left[e^{-1}, e\right]$.

8. Найти расстояние ρ_2 между $y(x) = x$ и $y_1(x) = -\cos x$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

9. Найти расстояние ρ_{1001} между кривыми $y(x) = e^x$, $y_1(x) = x$ на $[0, 1]$.

Исследовать на непрерывность следующие функционалы в окрестности прямой $y = 0$: а) в ее сильной окрестности; б) в ее слабой окрестности.

10. $V[y] = \int\limits_0^{\pi} y'^2 dx$. **11.** $V[y] = \int\limits_1^{2} |y'| dx$. **12.** $V[y] = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

13. $V[y] = \int\limits_0^{\pi} \left(1 + 2y'^2\right) dx$.

ОТВЕТЫ

1. Первый.
2. Близость любого порядка.
3. Близость любого порядка.
4. $\rho_0 = e^{-1}$.
5. $\rho_0 = 1$.
6. $\rho_0 = e - 1$.
7. $\rho_1 = e - 1$.
8. $\rho_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$.
9. $\rho_{1001} = e$.
10. а) разрывный; б) непрерывный.
11. а) разрывный; б) непрерывный.
12. а) разрывный; б) непрерывный.
13. а) разрывный; б) непрерывный.

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

1. Вариация функционала. Пусть функционал $V[y]$ задан на множестве M функций $y(x)$. *Приращением функционала* $V[y]$, отвечающим приращению δy аргумента, называется величина

$$\Delta V = \Delta V[y(x)] = V[y(x) + \delta y(x)] - V[y(x)] \tag{4}$$

$$(\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x), \text{ где } y(x) \in M, \ \tilde{y}(x) \in M).$$

Если приращение функционала $\Delta V = V[y(x) + \delta y(x)] - V[y(x)]$ можно представить в виде $\Delta V = L[y(x), \ \delta y] + \beta(y(x), \ \delta y)\|\delta y\|$, где $L\big[y(x), \delta y\big]$ – линейный по отношению к δy функционал и $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т. е. $L[y(x), \delta y]$, называется *вариацией функционала* и обозначается δV. В этом случае функционал $V[y]$ называется *дифференцируемым* в точке $y(x)$.

2. Второе определение вариации функционала. Вариацией функционала $V[y]$ в точке $y = y(x)$ называется значение производной функционала $V[y(x) + \alpha\,\delta y(x)]$ по параметру α, когда $\alpha = 0$:

$$\delta V = \frac{d}{d\alpha} V\big[y(x) + \alpha\,\delta y(x)\big]\Big|_{\alpha=0}. \tag{5}$$

Если существует вариация функционала как главная линейная часть его приращения, т. е. в смысле первого определения, то существует и вариация как значение производной по параметру α при $\alpha = 0$ и эти вариации совпадают.

3. Экстремум функционала. Говорят, что функционал $V[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума, если значения функционала $V[y]$ на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше, чем $V[y_0]$, т. е.

$$\Delta V = V[y] - V[y_0] \le 0.$$

Если $\Delta V \le 0$, причем $\Delta V = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается строгий максимум.

Аналогично определяется кривая $y = y_0(x)$, на которой реализуется минимум. В этом случае $\Delta V \ge 0$ на всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

Сильный и слабый экстремумы. Говорят, что функционал $V[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ *сильного относительного максимума*, если для всех допустимых кривых $y = y(x)$, расположенных в некоторой ε-окрестности нулевого порядка кривой $y = y_0(x)$, имеем $V[y] \le V[y_0]$.

Аналогично определяется *сильный относительный минимум* функционала.

Говорят, что функционал $V[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ *слабого относительного максимума*, если для всех допустимых кривых $y = y(x)$, расположенных в некоторой ε-окрестности первого порядка кривой $y = y_0(x)$, имеем $V[y] \le V[y_0]$.

Аналогично определяется *слабый относительный минимум* функционала.

Максимумы и минимумы (сильные и слабые) функционала $V[y]$ называют *относительными экстремумами*.

Всякий сильный экстремум есть в то же время и слабый, но не наоборот.

Экстремум функционала $V[y]$ на всей совокупности функций, на которых он определен, называется *абсолютным экстремумом*. Всякий абсолютный экстремум является слабым и сильным относительным экстремумом, но не всякий относительный экстремум будет абсолютным.

4. Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемый функционал $V[y]$ достигает экстремума при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ –

внутренняя точка области определения функционала, то при $y = y_0(x)$ имеем $\delta V[y_0(x)] = 0$.

Функции, для которых $\delta V = 0$, называются *стационарными функциями*.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти приращение функционала $V[y]=\int\limits_0^1 y(x)y'(x)\,dx$, определенного в пространстве $C[0,1]$, если $y(x)=x$, $y_1(x)=x^2$.

▲ Имеем $\Delta V = V[x^2]-V[x]=\int\limits_0^1 x^2\cdot 2x\cdot dx-\int\limits_0^1 x\cdot 1\cdot dx=\int\limits_0^1\left(2x^3-x\right)dx=$ $=0$. ▲

Пример 2. Показать, что функционал $V[y]=\int\limits_a^b y(x)\,dx$, заданный в пространстве $C[a,b]$, дифференцируем в каждой точке $y(x)$ этого пространства.

▲ $\Delta V = V[y+\delta y]-V[y]=\int\limits_a^b [y(x)+\delta y(x)]dx-\int\limits_a^b y(x)dx=\int\limits_a^b \delta y(x)dx.$

Таким образом, $\Delta V=\int\limits_a^b \delta y(x)dx$. Это и есть линейный относительно $\delta y(x)$ функционал. В данном случае все приращение ΔV свелось к линейному функционалу относительно $\delta y(x)$. Рассматриваемый функционал $V[y]$ дифференцируем в каждой точке $y(x)$ и его вариация $\delta V=\int\limits_a^b \delta y(x)dx$. ▲

Пример 3. Показать, что функционал $V[y]=\int\limits_a^b y^2(x)dx$, определенный в пространстве $C[a,b]$, дифференцируем в каждой точке $y(x)$.

▲ $\Delta V = V[y+\delta y] - V[y] = \int\limits_a^b [y(x)+\delta y(x)]dx - \int\limits_a^b y(x)dx = \int\limits_a^b \delta y(x)dx.$ (6)

Первый интеграл в правой части (6) при каждой фиксированной функции $y(x)$ является линейным относительно $\delta y(x)$ функционалом. Оценим второй интеграл в правой части (6). Имеем

$$\int\limits_a^b \left(\delta y(x)\right)^2 dx = \int\limits_a^b \left|\delta y(x)\right|^2 dx \le \left(\max_{a\le x\le b}\left|\delta y(x)\right|\right)^2 \int\limits_a^b dx = (b-a)\left\|\delta y(x)\right\|^2 =$$

$$= (b-a)\left\|\delta y(x)\right\| \cdot \left\|\delta y(x)\right\|.$$

При $\|\delta y\| \to 0$ величина $(b-a)\|\delta y(x)\| \to 0$. Следовательно, приращение ΔV функционала представимо в виде суммы $L[y, \delta y]$ и добавки второго порядка малости относительно $\|\delta y\|$. По определению данный функционал является дифференцируемым в точке $y(x)$ и его вариация $\delta V = 2\int\limits_a^b y(x)\delta y(x)\,dx.$ ▲

Пример 4. Пользуясь вторым определением, найти вариацию функционала $V[y] = \int\limits_a^b y^2(x)dx.$

▲ Вариация этого функционала в смысле первого определения равна $\delta V = 2\int\limits_a^b y(x)\delta y(x)\,dx$ (см. пример 3). Найдем вариацию функционала $V[y]$, пользуясь вторым определением вариации. Имеем

$$V\left[y(x)+\alpha\,\delta y(x)\right] = \int\limits_a^b \left[y(x)+\alpha\,\delta y(x)\right]^2 dx.$$

Тогда $\dfrac{d}{d\alpha}V[y+\alpha\,\delta y] = 2\int\limits_a^b (y+\alpha\,\delta y)\,\delta y dx$ и, следовательно,

$$\delta V = \frac{d}{d\alpha} V[y + \alpha\,\delta y]\Big\|_{\alpha=0} = 2\int_a^b y\,\delta y\,dx.$$

Вариации функционала в смысле первого и второго определения совпадают. ▲

Пример 5. Найти вариацию функционала

$$V = \int_a^b F(x, y, y')\,dx. \tag{7}$$

▲ Согласно второму определению вариации

$\delta V = \left[\dfrac{d}{d\alpha} \displaystyle\int_a^b F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx \right]\Bigg\|_a^b$. Здесь $\delta y'$ – вариация производной $y'(x)$ аргумента $y(x)$. Вычисляя производную $V[y]$ по параметру α, получаем

$$\int_a^b \Big[F_y(x, y + \alpha\,\delta y, y' + \alpha\,\delta y')\delta y + F_{y'}(x, y + \alpha\,\delta y, y' + \alpha\,\delta y')\delta y' \Big] dx.$$

Полагая $\alpha = 0$, находим вариацию функционала (7):

$$\delta V = \int_a^b \Big(F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \Big) dx. \tag{8}$$

Замечание. Если допустимые кривые сравнения для функционала (7) подчинены еще дополнительным условиям $y(a) = A,\ y(b) = B$ (задача с закрепленными границами, см. стр. 19), то $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Интегрируя по частям второе слагаемое в (8), находим

$$\delta V = \int_a^b F_y \delta y\,dx + F_{y'} \delta y\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y\,dx.$$

Окончательно имеем $\delta V = \displaystyle\int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y\,dx.$ ▲

Пример 6. Показать, что функционал $V=\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dx$ на кривой $y\equiv 0$ достигает строгого минимума.

▲ Для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $y(x)$ имеем

$$\Delta V=V[y(x)]-V[0]=\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dx-\int_0^1 x^2dx=\int_0^1 y^2dx\ge 0,$$

причем знак равенства достигается только при $y(x)\equiv 0$. ▲

Пример 7. Исследовать в пространстве функций $y(x)\in C^1[0,\pi]$ на экстремум функционал $V=\int_0^\pi y^2\left(1-y'^2\right)dx,\ \ y(0)=y(\pi)=0.$

▲ Отрезок $[0,\pi]$ оси Ox дает слабый минимум V. Действительно, для $y\equiv 0$ имеем $V=0$, а для кривых, расположенных в ε-окрестности первого порядка этого отрезка, где ε – любое положительное число, меньшее единицы, имеем $|y'|<1$, так что подынтегральное выражение положительно при $y\ne 0$ и, следовательно, функционал обращается в нуль лишь при $y=0$. Значит, на функции $y=0$ достигается слабый минимум. Сильный же минимум не достигается. Достаточно рассмотреть $y(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$ Тогда

$$V[y]=\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin^2 nx\left(1-n\cos^2 nx\right)dx=\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx-\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2 2nx\,dx=\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}$$

и при достаточно большом n для наших кривых $V<0$. С другой стороны, все эти кривые при достаточно большом n лежат в сколь угодно малой окрестности нулевого порядка кривой $y=0$. Итак, сильный минимум не достигается при $y=0$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Найти ΔV, если $V[y] = \int\limits_0^1 yy'dx$, $y(x) = e^x$, $y_1(x) = 1$.

Найти вариацию функционалов.

2. $V[y] = \int\limits_a^b yy'dx.$

3. $V[y] = \int\limits_a^b (x + y)dx.$

4. $V[y] = \int\limits_a^b \left(y^2 - y'^2\right)dx.$

5. $V[y] = y^2(0) + \int\limits_0^1 \left(xy + y'^2\right)dx.$

6. $V[y] = \int\limits_0^\pi y' \sin y\, dx.$

ОТВЕТЫ

1. $\Delta V = \dfrac{1 - e^2}{2}.$

2. $\delta V = \int\limits_a^b (y'\delta y + y\delta y')\, dx.$

3. $\delta V = \int\limits_a^b \delta y\, dx.$

4. $\delta V = 2\int\limits_a^b (y\delta y - y'\delta y')\, dx.$

5. $\delta V = 2y(0)\delta y(0) + \int\limits_0^1 (x\delta y + 2y'\delta y')\, dx.$

6. $\delta V = \int\limits_0^\pi (y' \cos y\, \delta y + \sin y\, \delta y')\, dx.$

ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

1. Постановка задачи. Пусть функция $F = F(x,\ y,\ y')$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно. Среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \tag{9}$$

найти ту функцию, которая доставляет слабый экстремум функционалу

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')dx. \tag{10}$$

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида (10) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки $A(x_0,\ y_0)$ и $B(x_1,\ y_1)$. Эту задачу также называют *задачей с закрепленными границами* (рис. 6).

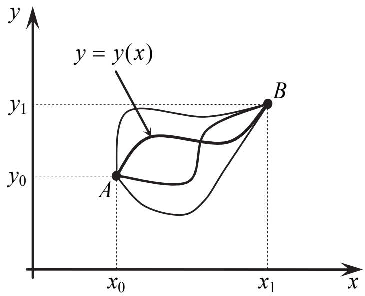

Рис. 6

2. Уравнение Эйлера. Для того чтобы функционал (10), определенный на множестве функций $y = y(x)$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям (9), достигал на данной функции $y(x)$

экстремума, необходимо*, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{11}$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде:

$$F_{y'y'} \cdot y'' + F_{yy'} \cdot y' + F_{xy'} - F_y = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, так что его общее решение должно зависеть от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных, вообще говоря, определяются из граничных условий (9).

Экстремум функционала (10) может реализоваться только на тех экстремалях, которые удовлетворяют условиям (9).

Краевая задача

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0, \\ y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1 \end{cases} \tag{13}$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Дальнейшее исследование того, действительно ли на решениях задачи (13) достигается экстремум, проводится с использованием достаточных условий экстремума.

3. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

1) F не зависит от y': $F = (x, y)$.

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y(x, y) = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) является алгебраическим, а не дифференциальным. Оно определяет одну или конечное число кривых, которые могут и не удовлетворять граничным условиям.

---

* Это условие необходимо для слабого экстремума. Так как всякий сильный экстремум является в то же время и слабым, то любое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо и для сильного.

Лишь в исключительных случаях, когда кривая (14) проходит через граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), существует кривая, на которой может достигаться экстремум.

2) *F* зависит от *y'* линейно, т. е. $F = (x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)\, y'$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Полученное уравнение, как и в случае 1), является алгебраическим, а не дифференциальным уравнением. Кривая, определяемая уравнением $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$ вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, и, значит, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций. Если в некоторой области D плоскости Oxy $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, то выражение $F(x, y, y') = M(x, y)dx + N(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом и функционал

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} M(x, y)\,dx(x, y)dx + N(x, y)\,dy \tag{16}$$

не зависит от пути интегрирования: значение функционала $V[y]$ одно и то же на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

3) *F* зависит лишь от *y'*, т. е. $F = F(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' \cdot F_{y'y'} = 0. \tag{17}$$

В этом случае экстремалями являются всевозможные прямые линии $y = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

4) *F* не зависит от *y*, т. е. $F = F(x, y')$.

В этом случае уравнение Эйлера $F = F(x, y')$, откуда

$$F_{y'} = F(x, y') = C, \tag{18}$$

где C – произвольная постоянная. Уравнение (18) есть дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его, находим экстремали задачи.

5) F не зависит явно от x, т. е. $F = F(y, y')$.

В этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y = F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0. \tag{19}$$

Умножив на y' обе части этого уравнения, в левой части получим точную производную, т. е. $\frac{d}{dx}\left(F - y' \cdot F_{y'}\right) = 0$, откуда

$$F - y' \cdot F_{y'} = C, \tag{20}$$

где C – произвольная постоянная. Это уравнение может быть проинтегрировано посредством разрешения относительно y' и разделения переменных или с помощью введения параметра.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$V[y] = \int_1^2 \left(y'^2 - 2xy\right) dx, \ \ y(1) = 0, \ \ y\left(2\right) = -1?$$

▲ Здесь $F(x, \ y, \ y') = y'^2 - 2xy$, так что уравнение Эйлера имеет вид $y'' + x = 0$. Общее решение уравнения Эйлера есть $y(x) = -\frac{x^3}{6} +$ $+C_1 x + C_2$.

Граничные условия дают систему линейных уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{6}, \\ 2C_1 + C_2 = \frac{2}{6}. \end{cases} \tag{21}$$

Отсюда $C_1 = \dfrac{1}{6}$, $C_2 = 0$. Следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой $y(x) = \dfrac{x}{6}\left(1 - x^2\right)$. ▲

Пример 2. Найти экстремали функционала $V[y] = \int\limits_1^3 (3x - y)y\,dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 1$, $y(3) = \dfrac{9}{2}$.

▲ Уравнение Эйлера имеет вид $3x - 2y = 0$, откуда $y = \dfrac{3}{2}x$. Так как экстремаль $y = \dfrac{3}{2}x$ не удовлетворяет условию $y(1) = 1$, то данная вариационная задача решения не имеет. ▲

Пример 3. Найти экстремали функционала $V[y] = \int\limits_0^{2\pi} \left(y'^2 - y^2\right)dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 1$, $y(2\pi) = 1$.

▲ Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$; его общим решением является $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Используя граничные условия, получим $y(x) = \cos x + C \sin x$, где C – произвольная постоянная.

Таким образом, поставленная вариационная задача имеет бесчисленное множество решений. ▲

Пример 4. Найти экстремали функционала $V[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

▲ Уравнение Эйлера имеет вид $2x - 2y = 0$, т. е. $y = x$. Так как граничные условия удовлетворяются, то на прямой $y = x$ интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)dx$ может достигать экстремума. При других граничных условиях, например, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, экстремаль $y=x$ не проходит через граничные точки $(0,0)$ и $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$, так что при этих граничных условиях вариационная задача не имеет решения. ▲

Пример 5. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y^2+2yy'\right)dx, \quad y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1.$$

▲ Здесь F линейно зависит от y'. Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y \quad \text{и} \quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0,$$

значит, подынтегральное выражение $(y^2+2xyy')dx$ есть полный дифференциал. Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} y^2dx+2xydy=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} d\left(xy^2\right)=xy^2\Big|_{x_0}^{x_1}=x_1y_1^2-x_0y_0^2.$$

по какой бы кривой $y(x)$, проходящей через точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x_1,\ y_1)$, мы не интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла. ▲

Пример 6. Найти экстремали функционала

$$V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\ dx, \quad y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1.$$

Этот функционала определяет длину кривой, соединяющей точки (x_0,y_0) и (x_1,y_1). Геометрически задача сводится к поиску кратчайшей линии, соединяющей данные точки.

▲ Уравнение Эйлера имеет вид $y''(x)=0$. Общее решение $y=C_1x+C_2$. Экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям

$y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$, есть, очевидно, прямая, проходящая через точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x_1,\ y_1)$:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 .$$

Пример 7. Среди кривых, соединяющих точки $A(1, 3)$ и $B(2, 5)$, найти ту, на которой может достигаться экстремум функционала

$$V[y] = \int_1^2 y'\left(1 + x^2 y'\right)dx.$$

▲ Так как F не зависит от y, то уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$, или $\frac{d}{dx}\left(1 + 2x^2 y'\right) = 0$, откуда $1 + 2x^2 y' = C$. Тогда $y' = \frac{C - 1}{2x^2}$, так что $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$. Выделим экстремаль, проходящую через заданные точки. Для определения постоянных C_1 и C_2 составляем систему

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 5 = \dfrac{C_1}{2} + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -4,\ C_2 = 7$. Искомая экстремаль $y(x) = 7 - \frac{4}{x}$. ▲

Пример 8. Найти экстремаль функционала $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}dx$, проходящую через заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), лежащие в верхней полуплоскости.

▲ Так как подынтегральная функция не содержит явно x, то уравнение Эйлера согласно (20) дает

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-\frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}}=C.$$

После упрощений получим $y\sqrt{1+y'^2}=C_1$. Введем параметр t, полагая $y'=\mathrm{tg}\,t$, тогда $y=\dfrac{C_1}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1\cos t$. Далее получим

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\,t \Rightarrow dx=\frac{dy}{\mathrm{tg}\,t}=-\frac{C_1\sin t dt}{\mathrm{tg}\,t}=-C_1\cos t dt \Rightarrow x=C_2-C_1\sin t.$$

Исключая t, найдем $(x-C_2)^2+y^2=C_1^2$ – семейство окружностей с центром на оси Ox. Искомой будет та экстремаль, которая проходит через заданные точки. Задача имеет единственное решение, так как через любые две точки, лежащие в верхней полуплоскости, проходит одна и только одна полуокружность с центром на оси Ox. ▲

Пример 9 (задача о наименьшей поверхности вращения). Отрезок кривой $y=y(x)$ с концами в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1) вращается вокруг оси Ox. Какой должна быть эта кривая, чтобы площадь получившейся поверхности была наименьшей?

▲ Эта кривая $y=y(x)$ (образующая поверхности вращения) будет решением вариационной задачи $S[y]=2\pi\int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad y(x_0)=y_0,$ $y(x_1)=y_1.$ Здесь $S[y]$ – площадь поверхности вращения кривой с концами в точках (x_0,y_0) и (x_1,y_1).

Функция $F=y\sqrt{1+y'^2}$ не зависит явно от x. В этом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F-y'\cdot F_{y'}=C_1$, т. е.

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

откуда после преобразований получаем

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1. \qquad (22)$$

Введем в (22) параметр t, полагая $y' = \operatorname{sh} t$, тогда

$$y = C_1 \operatorname{ch} t,\, dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt \Rightarrow x = C_1 t + C_2.$$

Исключая параметр t, имеем семейство *цепных линий* (их форму принимает тяжелая нить) $y = C_1 \operatorname{ch} \dfrac{x - C_2}{C_1}$, от вращения которых получаются поверхности, называемые *катеноидами*. Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий. В зависимости от координат (x_0, y_0) и (x_1, y_1) может быть одно, два и ни одного решения. ▲

Пример 10 (задача о брахистохроне). Определить кривую, соединяющую заданные точки A и B (не лежащие на одной вертикальной прямой), при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

▲ Переместим начало координат в точку A, ось Ox направим горизонтально, ось Oy – вертикально вниз. Скорость движения материальной точки $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$, откуда находим время, затрачиваемое на перемещение точки из положения $A(0, 0)$ в положение $B(x_1, y_1)$:

$$t[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1.$$

Так как у этого функционала подынтегральная функция не содержит явно x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$ или в данном случае

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}} = C,$$

откуда после преобразований имеем $\dfrac{1}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}=C$ или $y\left(1+y'^2\right)=C_1$.

Введем параметр t, полагая $y'=\operatorname{ctg} t$, тогда получим:

$$y=\frac{C_1}{1+y'^2}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t),$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t dt}{\operatorname{ctg} t}=2C_1\sin^2 t dt=C_1(1-\cos 2t)dt,$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2.$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид

$$x-C_2=\frac{C_1}{2}\left(2t-\sin 2t\right),\quad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Если преобразовать параметр подстановкой $2t=t_1$ и принять во внимание, что $C_2=0$, так как $x=0$ при $y=0$, то получим уравнения семейства *циклоид*:

$$x=\frac{C_1}{2}\left(t_1-\sin t_1\right),\quad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t_1),$$

где $\dfrac{C_1}{2}$ – радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку $B(x_1, y_1)$.

Итак, брахистохроной является циклоида. ▲

ЗАДАЧИ

Найти экстремали функционалов.

1. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx.$

2. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} y'\left(1+x^2y'\right)dx.$

3. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} y'(x+y')\,dx.$

4. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^3}dx.$

Найти экстремали в вариационных задачах.

5. $V[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(12xy-y'^2\right)dx,\ \ y(-1)=1,\ \ y(0)=0.$

6. $V[y]=\int\limits_{1}^{2}\left(y'^2+2yy'+y^2\right)dx,\ \ y(1)=1,\ \ y(2)=0.$

7. $V[y]=\int\limits_{0}^{1} yy'^2dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=\sqrt[3]{4}.$

8. $V[y]=\int\limits_{0}^{\pi}\left(4y\cos x+y'^2-y^2\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(\pi)=0.$

9. $V[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2-y^2-y\right)e^{2x}dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=e^{-1}.$

10. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2-2xy\right)dx,\ \ y(-1)=-1,\ \ y(1)=1.$

11. $V[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(y'^2-2xy\right)dx,\ \ y(-1)=0,\ \ y(0)=2.$

12. $V[y]=\int\limits_1^e \left(xy'^2+yy'\right)dx,\ \ y(1)=0,\ \ y(e)=1.$

Найти экстремали в вариационных задачах, используя частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

13. $V[y]=\int\limits_a^b \left[2xy+\left(x^2+e^y\right)y'\right]dx,\ \ y(a)=A,\ \ y(b)=B.$

14. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(e^y+xy'\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\alpha.$

15. $V[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y'^2-y^2\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

16. $V[y]=\int\limits_0^{\pi} \left(y'^2-y^2\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(\pi)=-1.$

17. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(x+y'^2\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=2.$

18. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(y^2+y'^2\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1.$

19. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+4y^2\right)dx,\ \ y(0)=e^2,\ \ y(1)=1.$

20. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(2e^y-y^2\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=e.$

21. $V[y]=\int\limits_a^b \left(y+\frac{y^3}{3}\right)dx.$

ОТВЕТЫ

1. $y = C_1 \sin(4x - C_2)$.

2. Экстремалями являются гиперболы $y = \frac{C_1}{x} + C_2$.

3. $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2$.

4. $y = C_1 x^4 + C_2$.

5. $y = -x^3$.

6. $y = \frac{\operatorname{sh}(2 - x)}{\operatorname{sh} 1}$.

7. $y_1 = \sqrt[3]{(x+1)^2}$, $\quad y_2 = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$.

8. $y = (C + x)\sin x$, C – произвольная постоянная.

9. $y = \frac{1}{2}\left[e^{-x}(xe + x + 1) - 1\right]$.

10. $y = \frac{7x - x^3}{6}$.

11. $y = \frac{13x - x^3}{6} + 2$.

12. $y = \ln x$.

13. Интеграл не зависит от пути интегрирования; вариационная задача не имеет смысла.

14. $y = 0$, если $\alpha = 0$; при $\alpha \neq 0$ гладкой экстремали не существует.

15. $y = \cos x$.

16. $y = \cos x + C \sin x$, C – произвольная постоянная.

17. $y = x + 1$.

18. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$.

19. $y = e^{2(1-x)}$.

20. Нет экстремалей; уравнение Эйлера не имеет решений.

21. Экстремалей нет.

ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Функционалы, зависящие от производных высших порядков. Пусть имеем функционал

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))\, dx, \tag{23}$$

где F – функция, дифференцируемая $n+2$ раза по всем аргументам, $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$, а граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \\ y(x_1) = y_1,\, y'(x_1) = y_1', \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Экстремалями функционала (23) являются интегральные кривые уравнения Эйлера–Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \tag{25}$$

Общее решение (25) зависит от $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из условий (24).

2. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Для функционала, зависящего от m функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$,

$$V[y_1, y_2, \dots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x_1, y_1, y_2, \dots, y_m, y_1', y_2', \dots, y_m'\right) dx, \tag{26}$$

где F – трижды дифференцируемая функция своих аргументов, при граничных условиях вида

$$y_k(x_0) = y_k^0,\ \ y_k(x_1) = y_k^1 \ \ (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{27}$$

экстремали находятся из следующей системы уравнений Эйлера:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{28}$$

Общее решение системы m уравнений второго порядка (28) зависит от $2m$ произвольных постоянных, определяемых из условий (27).

3. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Рассмотрим функционал вида

$$V[z(x, y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy, \tag{29}$$

где F – трижды дифференцируемая функция своих аргументов, и предположим, что ищется функция $z = z(x,\ y)$, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно в области D, принимающая на границе Γ области D заданные значения и дающая экстремум функционалу (29).

Если на поверхности $z = z(x, y)$ реализуется экстремум функционала (29), то функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Остроградского

$$f_z \frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_q\right\} = 0, \tag{30}$$

где $\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\}$ и $\frac{\partial}{\partial y}\left\{F_q\right\}$ – полные частные производные по x и y соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\} = F_{px} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{F_q\right\} = F_{qy} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}. \tag{32}$$

Здесь для краткости обозначено $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Уравнение (30) представляет собой необходимое условие экстремума функционала (29). Оно является уравнением второго порядка в частных производных, причем ищется решение $z = z(x, y)$, принимающее на границе Γ заданные значения.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти экстремали вариационной задачи

$$V[y] = \int_0^1 \left(360x^2 y - y''^2\right) dx, \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1, \ \ y(1) = 0, \ \ y'(1) = \frac{5}{2}.$$

▲ Уравнение Эйлера–Пуассона имеет вид $360x^2 + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(-2y''\right) = 0$ или $y^{(4)}(x) = 180x^2$; его общее решение $y = \dfrac{x^6}{2} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + {}$ $+C_4$. Используя граничные условия, получим $C_1 = \dfrac{3}{2}$, $C_2 = -3$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$ Искомая экстремаль $y = \dfrac{x^6}{2} + \dfrac{3x^3}{2} - 3x^2 + x$. ▲

Пример 2. Найти экстремали вариационной задачи

$$V[y, z] = \int_1^2 \left(y'^2 + z^2 + z'^2\right) dx, \ \ y(1) = 1, \ \ y(2) = 2, \ \ z(1) = 0, \ \ z(2) = 1.$$

▲ Система уравнений (28) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ z - z'' = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $y = C_1 x + C_2, \quad z = C_3 e^x + C_4 e^{-x}$.

В силу граничных условий имеем $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = \dfrac{1}{e^2 - 1}$, $C_4 = -\dfrac{e^2}{e^2 - 1}$, так что искомая экстремаль: $y = x, \quad z = \dfrac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}$. ▲

Пример 3. Найти экстремали вариационной задачи

$$V[y,z]=\int_0^{\pi}\left(2yz-2y^2+y'^2-z'^2\right)dx,$$

$$y(0)=0,\ \ y(\pi)=1,\ \ z(0)=0,\ \ z(\pi)=-1.$$

▲ Система уравнений (28) имеет вид

$$\begin{cases} y''+2y-z=0,\\ z''+y=0. \end{cases}$$

откуда, исключая функцию z, получим $y^{(4)}+2y''+y=0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x\left(C_3\cos x+C_4\sin x\right).$$

В силу граничных условий $y(0)=0,\ y(\pi)=1$ получаем $C_1=0$, $C_3=-\dfrac{1}{\pi}$ и, значит, $y(x)=C_2\sin x+C_4x\sin x-\dfrac{x}{\pi}\cos x.$

Функцию z найдем из условия, что $z=y''+2y$. Имеем

$$z=C_2\sin x+C_4\left(2\cos x+x\sin x\right)+\frac{1}{\pi}\left(2\sin x-x\cos x\right).$$

Постоянные C_2 и C_4 находим из граничных условий $z(0)=0,$ $z(\pi)=-1,$ что дает $C_4=0$, C_2 – произвольно. Тогда $z=C_2\sin x+$ $+\dfrac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x).$

Семейство экстремалей:

$$\begin{cases} y(x)=C_2\sin x-\dfrac{x}{\pi}\cos x,\\[2ex] z=C_2\sin x+\dfrac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x), \end{cases}$$

где C_2 – произвольная постоянная. ▲

Пример 4. Написать уравнение Эйлера–Остроградского для функционала

$$V[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy, \tag{33}$$

$$z(x,\ y)\big|_\Gamma = \varphi(x,\ y),\ \ \Gamma - \text{граница области } D.$$

▲ Уравнение Эйлера–Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta z = 0. \tag{34}$$

Уравнение (34) является известным *уравнением Лапласа*.

Краевая задача для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta z = 0, \\ z\big|_\Gamma = \varphi(x, y) \end{cases} \tag{35}$$

называется *задачей Дирихле* для функции $z(x, y)$ в области D с границей Γ. На поверхности $z(x, y)$ (решении задачи (35)) может достигаться экстремум функционала (33). Например, если $z(x,\ y)\big|_\Gamma = C = \text{const}$, то решением задачи (35) будет функция $z = C$, на которой функционал (33) примет минимальное значение, равное нулю. ▲

ЗАДАЧИ

Найти экстремали функционалов, зависящих от производных высших порядков.

1. $V[y] = \int\limits_0^1 \left(y^2 + 2y'^2 + y''^2 \right) dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(0) = 1,\ y'(1) = -\operatorname{sh} 1.$

2. $V[y] = \int\limits_{-1}^0 \left(240y + y'''^2 \right) dx,$

$y(-1) = 1,\ y(0) = 0,\ y'(-1) = -4.5,\ \ y'(0) = 0,\ y''(-1) = 16,\ y''(0) = 0.$

3. $V[y]=\int\limits_a^b (y+y'')dx,\ \ y(a)=y_0,\ \ y(b)=y_1,\ \ y'(a)=y_0',\ \ y'(b)=y_1'.$

4. $V[y]=\int\limits_a^b \left(y'^2+yy''\right)dx,\ \ y(a)=A_1,\ y(b)=B_1,\ y'(a)=A_2,\ y'(b)=B_2.$

5. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+y''^2\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\operatorname{sh}1,\ \ y'(0)=1,\ \ y'(1)=\operatorname{ch}1.$

6. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y''^2-2y'^2+y^2-2y\sin x\right)dx.$

7. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y'''^2+y^2-2yx^3\right)dx.$

8. $V[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2z-4y^2+y'^2-z'^2\right)dx,$

$y(0)=0,\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ \ z(0)=0,\ \ z\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

9. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1} \left(2xy-y'^2+\frac{z'^3}{3}\right)dx,$

$y(1)=0,\ \ y(-1)=2,\ \ z(1)=1,\ \ z\left(-1\right)=-1.$

10. $V[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2+z'^2-2yz\right)dx,$

$y(0)=0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \ z\left(0\right)=0,\ \ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

11. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+z'^2+2y\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=\frac{3}{2},\ \ z(0)=0,\ \ z(1)=1.$

12. $V[y]=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(y'^2-2xyz'\right)dx,\ \ y\left(\frac{1}{2}\right)=6,\ \ y(1)=3,\ \ z\left(\frac{1}{2}\right)=15,\ \ z(1)=1.$

Написать уравнения Эйлера–Остроградского для следующих функционалов.

13. $V[z(x,y)]=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4+12z\,f(x,y)\right]dxdy.$

14. $V[z(x,y)]=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$

15. $V[z(x,y)]=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\,f(x,y)\right]dxdy.$

ОТВЕТЫ

1. $y=(1-x)\operatorname{sh}x$.

2. $y=\frac{x^3}{6}\left(x^3+6x+1\right)$.

3. Экстремалей нет.

4. Функционал на всех кривых принимает постоянное значение: под знаком интеграла стоит полный дифференциал.

5. $y=\operatorname{sh}x$.

6. $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x-\frac{x^2\sin x}{8}$.

7. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$

$+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^3$.

8. $\begin{cases} y(x) = \sin 2x, \\ z(x) = \dfrac{32+\pi^2}{8\pi}x - \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y(x) = -\dfrac{1}{6}\left(x^3 + 5x - 6\right), \\ z(x) = x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y(x) = \sin x, \\ z(x) = \sin x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1, \\ z(x) = x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y(x) = \dfrac{3}{x}, \\ z(x) = \dfrac{2}{x^3} - 1. \end{cases}$

13. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$.

14. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

15. $\Delta z = f(x, y)$ (*уравнение Пуассона*).

ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

1. Понятие поля экстремалей. Предположим, что краевая задача для уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1$$

определила экстремаль $y = \tilde{y}(x)$ (далее – изучаемая или исследуемая экстремаль), на которой может достигаться экстремум вариационной задачи с закрепленными границами.

Одним из требований, входящих в наиболее распространенные достаточные условия экстремума задачи (9), (10), является возможность включения исследуемой экстремали в поле экстремалей.

Семейство кривых $y = y(x, C)$ образует *собственное поле* в заданной области D плоскости Oxy, если через каждую точку (x, y) этой области проходит одна и только одна кривая семейства $y = y(x, C)$ (рис. 7).

Угловой коэффициент $p(x, y)$ касательной к кривой семейства $y = y(x, C)$, проходящей через точку (x, y), называется *наклоном поля* в точке (x, y).

Если все кривые семейства $y = y(x, C)$ проходят через некоторую точку $(x_0, \; y_0)$, то они образуют *пучок кривых*, а точка $(x_0, \; y_0)$ является *центром пучка кривых*.

Семейство кривых $y = y(x, C)$ образует *центральное поле* в области D плоскости Oxy, если его кривые, формируя пучок, покрывают всю область и нигде не пересекаются, кроме центра пучка, лежащего внутри или на границе этой области (рис. 8).

В обоих полях выбором любой точки области (за исключением центра пучка в центральном поле) задается единственная экстремаль, проходящая через эту точку.

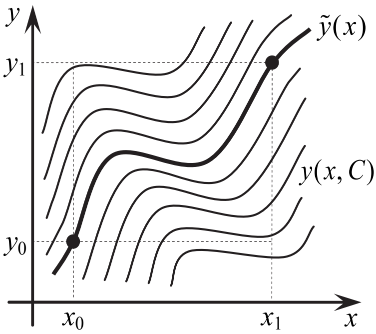

Рис. 7

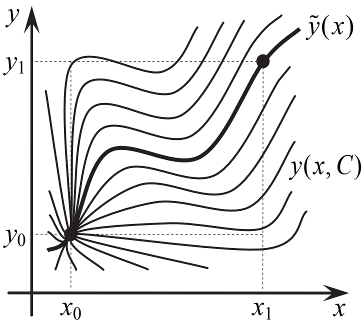

Рис. 8

Если поле (собственное или центральное) образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем экстремалей*.

Пусть кривая $y = \tilde{y}(x)$ является экстремалью функционала

$$V[y]\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

проходящей через точки $A(x_0,\ y_0)$ и $B(x_1,\ y_1)$.

Говорят, что экстремаль $y = \tilde{y}(x)$ *включена в собственное поле экстремалей*, если найдено семейство экстремалей $y = y(x, C)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $C = C_0$ экстремаль $y = \tilde{y}(x)$, причем эта экстремаль $y = \tilde{y}(x)$ не лежит на границе области D, в которой семейство $y = y(x, C)$ образует поле.

Если пучок экстремалей с центром в точке $(x_0,\ y_0)$ в окрестности экстремали $y = \tilde{y}(x)$, проходящей через ту же точку, образует поле, то говорят, что *найдено центральное поле*, включающее данную экстремаль $y = \tilde{y}(x)$. За параметр семейства $y = y(x, C)$ принимается угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке (x_0, y_0).

2. Условия возможности включения экстремали в поле экстремалей.

Условие Якоби. Пусть имеем простейшую вариационную задачу (9), (10). Для того чтобы дугу экстремали AB $\left(A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)\right)$ можно было включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(x_0, y_0)$, достаточно, чтобы существовало решение $u = u(x)$ уравнения Якоби

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}\left(F_{yy'}u'\right) = 0, \qquad (36)$$

удовлетворяющее условию $u(x_0) = 0$, которое не обращается в нуль ни в одной точке полуинтервала $x_0 < x \le x_1$.

Замечание. Условие Якоби является необходимым для достижения экстремума функционала $V[y]$, т. е. для экстремали AB, реализующей экстремум, соответствующее решение $u = u(x)$ уравнения Якоби (36) не может обращаться в нуль ни в одной точке полуинтервала $x_0 < x \le x_1$.

В уравнении (36) в функции $F_{yy}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$ и $F_{y'y'}(x, y, y')$ вместо $y(x)$ надо подставить правую часть уравнения экстремали $y = y(x, C_0)$.

Усиленное условие Лежандра. Достаточным условием для включения экстремали вариационной задачи (9), (10) в поле экстремалей является выполнение неравенства $F_{y'y'} > 0$ во всех точках рассматриваемой экстремали (т. е. при всех $x \in [x_0, x_1]$).

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Образуют ли поле следующие семейства кривых в указанных областях:

1) $y = Ce^x$, $x^2 + y^2 \le 1$; 2) $y = (x + C)^2$, $x^2 + y^2 \le 1$;

3) $y = Cx$, $x > 0$?

▲ 1) Внутри круга $x^2 + y^2 \le 1$ семейство кривых $y = Ce^x$, где C – произвольная постоянная, в частности, $C = 0$ образует собственное поле, так как эти кривые нигде не пересекаются и через каждую точку (x, y) круга проходит одна и только одна кривая этого семейства. Наклон поля в произвольной точке (x, y) равен $p(x, y) = Ce^x = y$.

2) Семейство парабол $y = \left(x + C\right)^2$ внутри круга $x^2 + y^2 \le 1$ собственного поля не образует, так как различные кривые семейства пересекаются внутри круга и не покрывают всю область.

3) Семейство кривых $y = Cx$ образует центральное поле в области $x > 0$. ▲

Пример 2. Образуют ли поле экстремали функционала $V[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx$?

▲ Экстремалями функционала являются прямые $y = C_1 x + C_2$. Семейство экстремалей $y = C_2$ образует собственное поле, а семейство экстремалей $y = C_1 x$ образует центральное поле с центром в начале координат. ▲

Пример 3. Образуют ли поле экстремали функционала

$$V[y] = \int\limits_0^2 \left(y'^3 + \sin^2 x\right) dx,$$

а) $y(0) = 1,\ \ y(2) = 1;$ б) $y(0) = 0,\ \ y(2) = 4$?

▲ а) Семейство экстремалей данного функционала определяется уравнением $y = C_1 x + C_2$. Заданным граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y = 1$. Эта экстремаль включается в собственное поле экстремалей $y = C_2$, где C_2 – произвольная постоянная.

б) Экстремалью, отвечающей этим граничным условиям, является прямая $y = 2x$, которая включается в центральное поле экстремалей $y = C_1 x$ (C_1 – произвольная постоянная) с центром в точке $O(0, 0)$. ▲

Пример 4. Образуют ли поле экстремали функционала

$$V[y] = \int\limits_{-1}^{1} y' \left(2x - \frac{1}{2} y' \right) dx,\ \ y(-1) = 0,\ \ y(1) = \frac{1}{2}?$$

▲ Решение уравнения Эйлера имеет вид $y = x^2 + C_1 x + C_2$. Экстремаль этой задачи $y = x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$ можно включить в собственное поле экстремалей $y = x^2 + \frac{x}{4} + C_2$. ▲

Пример 5. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала $V[y] = \int\limits_0^a \left(y'^2 + x^2 \right) dx,$ проходящей через точки $O(0, 0)$ и $B(a, 3)$?

▲ Уравнение Якоби в данном случае имеет вид $u'' = 0$. Его общее решение $u(x) = C_1 x + C_2$. Из условия $u(0) = 0$ находим, что $C_2 = 0$, так что $u(x) = C_1 x$. Ни при каком значении $a > 0$ эти решения $u(x) = C_1 x$ $\left(C_1 \neq 0 \right)$ в нуль не обращаются. Значит, условие Якоби выполнено и, следовательно, экстремаль можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $O(0, 0)$. Нетрудно проверить, что искомой экстремалью является прямая $y(x) = \frac{3}{a} x$, которая, очевидно, включается в центральное поле экстремалей $y = C_1 x$. ▲

Пример 6. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала $V[y] = \int\limits_0^a \left(y'^2 - 4y^2 + e^{-x^2} \right) dx,$ $\left(a \neq \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, a > 0 \right)$, проходящей через точки $A(0, 0)$ и $B(a, 0)$?

▲ Уравнение Якоби имеет вид $u'' + 4u = 0$. Его общее решение $u(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$. Из условия $u(0) = 0$ находим, что $C_2 = 0$, так что $u(x) = C_1 \sin 2x$. Если $a < \frac{\pi}{2}$, то функция $u(x)$ не обращается в нуль при $0 < x \leq a$, условие Якоби выполнено. Если же $a > \frac{\pi}{2}$, то решение уравнения Якоби $u(x) = C_1 \sin 2x$ обращается в нуль в точке $x = \frac{\pi}{2}$, принадлежащей отрезку $[0, a]$, условие Якоби не выполнено и не существует центрального поля экстремалей, включающего дугу экстремали $y=0\left(0\le x\le a\right)$. ▲

Пример 7. Показать, что на экстремали вариационной задачи $V[y]=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\left(y^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=y\left(\frac{5\pi}{4}\right)=0,$ экстремум не достигается.

▲ Решением уравнения Якоби $u''+u=0$, обращающимся в нуль при $x=0$, является $u(x)=C_1\sin x$. Функция $u(x)$ обращается в нуль также и в точке $x=\pi\in\left(0,\frac{5\pi}{4}\right)$, т. е. условие Якоби не выполнено.

Возьмем в качестве «близкой» к кривой $y(x)\equiv 0$ кривую $y_n(x)=\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{4}{5}nx\right)$, для которой условия $y(0)=y\left(\frac{5\pi}{4}\right)=0$ очевидно выполняются, а $y_n'(x)=\frac{4}{5n}\cos\left(\frac{4}{5}nx\right)$. Тогда получим $V(0)=0$, а

$$V[y_n]=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{n^4}\sin^2\left(\frac{4}{5}nx\right)dx-\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{16}{25n^2}\cos^2\left(\frac{4}{5}nx\right)dx=\frac{5\pi}{8n^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{16}{25}\right)<0$$

при любом целом $n\ge 2$. Следовательно, экстремаль $y(x)\equiv 0$ не доставляет минимум данному функционалу, так как существуют близкие к $y(x)\equiv 0$ кривые, на которых значения функционала отрицательны. Возьмем теперь семейство кривых $y_n(x)=\frac{1}{n}\sin\left(\frac{4}{5}x\right)$, обладающих близостью любого порядка по отношению к кривой $y(x)\equiv 0$. Тогда получим

$$V[y_n]=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{n^2}\sin^2\left(\frac{4}{5}nx\right)dx-\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{16}{25n^2}\cos^2\left(\frac{4}{5}nx\right)dx=\frac{9\pi}{40n^2}>0.$$

Следовательно, экстремаль $y(x)\equiv 0$ не доставляет и максимум данному функционалу. ▲

Пример 8. Проверить с помощью условия Лежандра возможность включения экстремали в поле для следующих функционалов:

1) $V[y]=\int_0^2 \left(y'^4+y'^2\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(2)=5;$

2) $V[y]=\int_{-1}^1 \left(x^2y'^2+12y^2\right)dx,\ \ y(-1)=-1,\ \ y(1)=1.$

▲ 1) Экстремали – прямые $y=C_1x+C_2$. Искомой экстремалью, удовлетворяющей заданным граничным условиям, является прямая $y=2x+1$. В данном случае $F_{y'y'}=12y'^2+2$ и во всех точках экстремали $y=2x+1$ имеем $F_{y'y'}=50>0$. Усиленное условие Лежандра выполнено. Следовательно, экстремаль $y=2x+1$ может быть включена в поле экстремалей.

Это видно и непосредственно. Экстремаль $y=2x+1$ содержится в однопараметрическом семействе экстремалей $y=2x+C$ (C – параметр), образующих собственное поле.

2) Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид $x^2y''+$ $+2xy'-\ 12y=0$. Его общее решение – $y=C_1x^3+C_2x^{-4}$. Поставленным граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y=x^3$. Ее нельзя включить в поле. Единственным однопараметрическим семейством экстремалей, содержащим ее, является семейство $y=C_1x^3$. Последнее не покрывает области, содержащей точки с абсциссой $x=0$ (через точки оси Oy с ординатами, отличными от нуля, экстремали этого семейства не проходят).

В данном случае $F_{y'y'}=2x^2$ и условие Лежандра не выполняется. ▲

ЗАДАЧИ

Образуют ли поле (собственное или центральное) следующие семейства кривых в указанных областях.

1. $y(x)=C\,\mathrm{tg}\,x;\ \ 0<x\le\dfrac{\pi}{4}.$

2. $y(x) = C\cos x$; а) $|x| < \dfrac{\pi}{4}$; б) $\dfrac{\pi}{2} < x \le \pi$; в) $|x| \le \pi$.

3. $y(x) = (x - C)^3$; $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$.

4. $y(x) = C\left(x^2 - 2x\right)$; а) $0 < x \le 1$; б) $-1 \le x \le 3$; в) $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$.

5. $y(x) = C \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; а) $\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \pi$; в) $\dfrac{\pi}{8} \le x \le 2\pi$.

6. $y(x) = e^{x+C}$; $x^2 + y^2 \le 1$.

Для следующих функционалов указать собственное и центральное поле экстремалей.

7. $V[y] = \int\limits_0^a \left(y'^2 + y^2\right)dx$, $a > 0$. **8.** $V[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y'^2 - y^2 + x^2 + 4\right)dx$.

Показать, что экстремали следующих простейших вариационных задач можно включить в поле экстремалей (собственное или центральное).

9. $V[y] = \int\limits_0^1 \left(y'^2 - 2xy\right)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

10. $V[y] = \int\limits_0^1 \left(2e^x y + y'^2\right)dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = e$.

11. $V[y] = \int\limits_0^a \left(y^2 - y'^2\right)dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = 0$ $\left(a > 0, a \ne k\pi\right)$.

12. $V[y] = \int\limits_0^2 \left(y'^2 + x^2\right)dx$, $y(0) = 1$, $y(2) = 3$.

В следующих задачах проверить выполнимость условия Якоби.

13. $V[y] = \int\limits_{-1}^1 \left(12xy + y'^2 + x^2\right)dx$, $y(-1) = -2$, $y(1) = 0$.

14. $V[y]=\int\limits_0^a\left(y'^2+9y^2-3x\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=0.$

15. $V[y]=\int\limits_0^1\left(1+y'^2\right)dx,\ \ y(0)=y(1)=0.$

16. $V[y]=\int\limits_0^a y'e^{y'}dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(a)=b\ \ (a>0).$

17. $V[y]=\int\limits_0^{2\pi}\left(y'^2-y^2\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(2\pi)=0.$

18. Показать, что если подынтегральная функция функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y')\,dx$ не содержит явно y, то каждая экстремаль всегда может быть включена в поле экстремалей.

С помощью усиленного условия Лежандра проверить возможность включения экстремали в поле для следующих функционалов.

19. $V[y]=\int\limits_0^1\left(y'^2-y'^3\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=0.$

20. $V[y]=\int\limits_0^a y'^3dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b>0.$

21. $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} n(y)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx,\ \ y(x_0)=y_0,\ \ y(x_1)=y_1,\ \ n(y)>0.$

22. $V[y]=\int\limits_0^a\left(6y'^2-y'^4\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b,\ \ a>0,\ \ b>0.$

ОТВЕТЫ

1. Центральное поле.
2. а) собственное поле; б) центральное поле; в) поля не образуют.
3. Собственное поле.

4. а) центральное поле; б) поля не образуют; в) собственное поле.

5. а) центральное поле; б) собственное поле; в) поля не образуют.

6. Поля не образуют, так как это семейство кривых покрывает не всю область D.

7. $y = C_1 \operatorname{ch} x$ образуют собственное поле экстремалей; $y = C_2 \operatorname{sh} x$ образуют центральное поле экстремалей.

8. $y = C \cos x$ образуют собственное поле экстремалей; $y = C \sin x$ образуют центральное поле экстремалей.

9. Экстремаль $y = \dfrac{x}{6}\left(1 - x^2\right)$ включается в центральное поле экстремалей $y = C_1 x - \dfrac{x^3}{6}$ с центром в точке $O(0, 0)$.

10. Экстремаль $y = e^x$ можно включить в собственное поле экстремалей $y = e^x + C$.

11. Если $a < \pi$, то экстремаль $y = 0$ можно включить в центральное поле экстремалей $y = C \sin x$ с центром в точке $O(0, 0)$. При $a > \pi$ семейство кривых $y = C \sin x$ поля не образует.

12. Экстремаль $y = x + 1$ включается в собственное поле $y = x + C$.

13. Выполняется.

14. Выполняется при любом a.

15. Условие Якоби выполнено. Экстремаль $y = 0$ можно включить и в центральное поле и в собственное поле экстремалей.

16. Условие Якоби выполнено. Экстремаль $y = \dfrac{b-1}{a} x + 1$ можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(0, 1)$.

17. Условие Якоби не выполнено.

19. Да.

20. Да.

21. Да.

22. Да, но условие Лежандра выполнено лишь при $\dfrac{b}{a} < 1$.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА

Рассматривается простейшая вариационная задача для функционала

$$V[y]\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx, \tag{37}$$

$$y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1. \tag{38}$$

1. Достаточные условия Вейерштрасса. *Функцией Вейерштрасса* $E(x, y, p, y')$ называется функция, определяемая равенством

$$F(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p), \tag{39}$$

где $p = p(x, y)$ – наклон поля экстремалей рассматриваемой вариационной задачи (37), (38) в точке (x, y).

Достаточные условия слабого экстремума.

Кривая C *доставляет слабый экстремум функционалу* (37), *если*:

1) кривая C является экстремалью функционала (37), удовлетворяющей граничным условиям (38);

2) экстремаль C может быть включена в поле экстремалей (в частности, это будет, если выполнено условие Якоби или усиленное условие Лежандра);

3) функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ должна сохранять знак во всех точках (x, y), близких к экстремали C, и для близких к $p(x, y)$ значений y'. Функционал $V[y]$ будет иметь максимум на C, если $E \le 0$, и минимум, если $E \ge 0$.

Достаточные условия сильного экстремума.

Кривая C *доставляет сильный экстремум функционалу* (37), *если*:

1) кривая C является экстремалью функционала (37), удовлетворяющей граничным условиям (38);

2) экстремаль C может быть включена в поле экстремалей;

3) функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ сохраняет знак во всех точках (x, y), близких к экстремали C, и для произвольных значений y'. При $E \le 0$ будет максимум, а при $E \ge 0$ – минимум.

Замечание. Условие Вейерштрасса необходимо для наличия экстремума в следующем смысле: если в точках экстремали для некоторых значений y' функция E имеет противоположные знаки, то сильный экстремум не достигается. Если это свойство имеет место при сколь угодно близких к p значениях y', то не достигается и слабый экстремум.

2. Достаточные условия Лежандра. Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывную частную производную $F_{y'y'}(x, y, y')$ и пусть экстремаль C включена в поле экстремалей.

Если на экстремали C имеем $F_{y'y'} > 0$, то на кривой C достигается слабый минимум; если $F_{y'y'} < 0$ на экстремали C, то на ней достигается слабый максимум функционала (37). Эти условия называются *усиленными условиями Лежандра*.

В том случае, когда $F_{y'y'}(x, y, y') \ge 0$ в точках (x, y), близких к экстремали C, при произвольных значениях y', то имеем сильный минимум, а в случае, когда для указанных значений аргументов $F_{y'y'}(x, y, y') \le 0$, имеем сильный максимум.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Исследовать на экстремум следующие функционалы:

а) $V[y] = \int\limits_0^1 \left(y'^3 + y' \right) dx, \;\; y(0) = 0, \;\; y(1) = 2;$

б) $V[y] = \int\limits_0^1 \left(x + 2y + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx, \;\; y(0) = 0, \;\; y(1) = 0.$

▲ а) Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $y'y'' = 0$, так что экстремалями являются прямые $y = C_1 x + C_2$. Экстремалью, удовлетворяющей заданным граничным условиям, является прямая $y = 2x$. Наклон поля в точках этой экстремали $p = 2$. Очевидно, данная экстремаль $y = 2x$ включается в центральное поле экстремалей $y = C_1 x$ с центром в точке $O(0,0)$. В данном случае выполнено и условие Якоби. Уравнение Якоби имеет вид $-\frac{d}{dx}\left(6y'u'\right) = 0$, где в силу уравнения экстремали имеем $y' = 2$. Следовательно, уравнение Якоби примет вид $u''(x) = 0$, откуда $u(x) = C_1 x + C_2$. Из условия $u(0) = 0$ получаем $C_2 = 0$. Так как это решение $u(x) = C_1 x$ при $C_1 \neq 0$, кроме точки $x = 0$, нигде в нуль не обращается, то условие Якоби выполнено.

Составляем функцию Вейерштрасса:

$$F(x, y, p, y') = y'^3 + y' - p^3 - p - \left(y' - p\right)\left(3p^2 + 1\right) = \left(y' - p\right)^2 \left(y' + 2p\right).$$

Первый множитель всегда неотрицателен при любых y', а второй положителен при значениях y', близких к $p = 2$. Следовательно, выполнены все условия существования слабого минимума. Однако если $y' < -4$, то функция $E < 0$, и достаточное условие сильного экстремума не выполняется, так как функция Вейерштрасса E не сохраняет знак при любых значениях y'. Учитывая замечание на стр. 51, заключаем, что сильного экстремума в данном случае нет.

б) Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид $y'' = 2$. Экстремалями являются параболы $y = x^2 + C_1 x + C_2$. $y = x^2 - x$ – экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям. Составляем уравнение Якоби $-\frac{d}{dx}\left(u'\right) = 0$ или $u'' = 0$. Его общее решение $u(x) = C_1 x + C_2$. Условие $u(0) = 0$ дает $C_2 = 0$, а так как $u(x) = C_1 x$ при $C_1 \neq 0$ нигде на отрезке $[0,1]$ в нуль не обращается, кроме точки $x = 0$, то условие Якоби выполняется и, значит, экстремаль $y = x^2 - x$ можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $O(0, 0)$, а именно: $y = x^2 + Cx$.

Функция Вейерштрасса имеет вид $E(x, y, p, y') = \frac{1}{2}(y' - p)^2$. Отсюда видно, что для произвольных значений y' будет $E = \frac{1}{2}(y' - p)^2 \geq 0$.

Следовательно, на экстремали $y = x^2 - x$ данный функционал достигает сильного минимума, который равен $V[x^2 - x] = \frac{1}{3}$. ▲

Пример 2. Исследовать на экстремум следующие функционалы:

а) $V[y] = \int\limits_0^1 \left(y'^3 - ay' \right) dx, y(0) = 0, y(1) = -2$, a – действительное число;

б) $V[y] = \int\limits_0^2 \left(e^{y'} + 3 \right) dx,\ \ y(0) = 0,\ \ y(2) = 1.$

в) $V[y] = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx,\ \ y(0) = 0,\ \ y(a) = b.$

▲ а) Так как подынтегральная функция зависит только от y', то экстремалями являются прямые $y(x) = C_1 x + C_2$. Экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям, будет прямая $y(x) = -2x$, которая может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x) = Cx$. На этой экстремали наклон поля $p = -2$. Далее находим $F_{y'y'} = 6y'$. На данной экстремали имеем $F_{y'y'} = -12 < 0$, т. е. на линии $y(x) = -2x$ достигается слабый максимум функционала. При произвольных значениях y' знак $F_{y'y'}$ не сохраняется, следовательно, достаточные условия сильного максимума не выполняются.

Функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ в данном случае имеет вид $E(x, y, p, y') = (y' - p)^2 (y' + 2p)$, и при некоторых значениях y' она принимает противоположные по знаку значения. Учитывая замечание на стр. 51, получим, что сильного максимума нет.

б) Экстремалями являются прямые $y(x) = C_1 x + C_2$. $y = \frac{x}{2}$ – экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, которая может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x) = Cx$. В данном случае $F_{y'y'}(y') = e^{y'} > 0$ при любых значениях y'. Следовательно, на экстремали $y = \frac{x}{2}$ функционал имеет сильный минимум.

в) Подынтегральная функция не зависит явно от x, следовательно, получаем $F - y' \cdot F_{y'} = \tilde{C}_1$ или в нашем случае

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \tilde{C}_1,$$

откуда $\dfrac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \tilde{C}_1$ или $y\left(1+y'^2\right) = C_1$, где $C_1 = \dfrac{1}{\tilde{C}_1}$. Положим $y' = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$. Будем иметь $y = C_1 \sin^2\dfrac{t}{2} = \dfrac{C_1}{2}(1-\cos t)$. Далее,

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}} = \frac{C_1 \sin t\, dt}{2\operatorname{ctg}\frac{t}{2}} = C_1 \sin^2\frac{t}{2}dt.$$

Интегрируя, получим $x = \dfrac{C_1}{2}(t - \sin t) + C_2$.

Итак, $\begin{cases} x = \tilde{C}_1(t-\sin t) + C_2, \\ y = \tilde{C}_1(1-\cos t) \end{cases}$ – параметрические уравнения семейства циклоид. Из условия $y(0)=0$ находим, что $C_2 = 0$. Пучок циклоид $x = C(t-\sin t),\ y = C(1-\cos t)$ образует центральное поле с центром в точке $O(0,0)$, включающее экстремаль $x = R(t-\sin t),\ y = R(1-\cos t)$, где R определено из условия прохождения циклоиды через вторую граничную точку $B(a,b)$, если $a < 2\pi R$ [1, 2].

Используем условие Лежандра. Имеем $F_{y'y'} = \dfrac{1}{\sqrt{y}\left(1+y'^2\right)^{3/2}} > 0$ при любых значениях y'. Значит, для $a < 2\pi R$ на циклоиде $\begin{cases} x = R(t-\sin t), \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}$ данный функционал имеет сильный минимум.

ЗАДАЧИ

Исследовать на экстремум следующие функционалы.

1. $V[y]=\int\limits_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=e.$

2. $V[y]=\int\limits_0^1 e^y y'^2 dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\ln 4.$

3. $V[y]=\int\limits_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx,\ \ y(1)=1,\ \ y(2)=4.$

4. $V[y]=\int\limits_0^a \frac{dx}{y'},\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b,\ \ a>0,\ \ b>0.$

5. $V[y]=\int\limits_0^1 (1+x)y'^2 dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1.$

6. $V[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y^2-y'^2\right)dx,\ \ y(0)=1,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

7. $V[y]=\int\limits_{-1}^{2} y'\left(1+x^2y'\right)dx,\ \ y(-1)=1,\ \ y(2)=4.$

8. $V[y]=\int\limits_{-1}^{1} \left(y'^3+y'^2\right)dx,\ \ y(-1)=-1,\ \ y(1)=3.$

Используя условие Лежандра, исследовать на экстремум функционалы.

9. $V[y]=\int\limits_0^1 \left(y'^2+x^2\right)dx,\ \ y(0)=-1,\ \ y(1)=1.$

10. $V[y]=\int\limits_2^3 \frac{x^3}{y'^2}dx,\ \ y(2)=4,\ \ y(3)=9.$

11. $V[y]=\int\limits_1^2 \left(xy'^4-2yy'^3\right)dx,\ \ y(1)=0,\ \ y(2)=1.$

12. $V[y]=\int\limits_0^a\left(1-e^{-y'^2}\right)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(a)=b\ \ (a>0).$

13. $V[y]=\int\limits_0^1 yy'^2dx,\ \ y(0)=p>0,\ \ y(1)=q>0.$

ОТВЕТЫ

1. На функции $y=e^x$ достигается сильный минимум.

2. При $y=2\ln(x+1)$ – сильный минимум.

3. На функции $y=x^2$ достигается слабый минимум.

4. При $y=\dfrac{b}{a}x$ – слабый минимум.

5. На кривой $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln 2}$ достигается сильный минимум.

6. На кривой $y=\cos x+\sin x$ достигается сильный максимум.

7. Экстремум на непрерывных кривых не достигается.

8. На прямой $y=2x+1$ достигается слабый минимум. Сильного экстремума нет.

9. На экстремали $y=2x-1$ достигается сильный минимум.

10. На экстремали $y=x^2$ достигается слабый минимум.

11. На экстремали $y=x-1$ достигается слабый минимум.

12. При $|b|<\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ на экстремали $y=\dfrac{b}{a}x$ достигается слабый минимум, а при $|b|>\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ – слабый максимум. При $|b|=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ экстремум не достигается.

13. На экстремали $y=\sqrt[3]{\left[\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)x+p^{3/2}\right]^2}$ при $p\neq q$ достигается слабый минимум; при $p=q$ экстремалью является прямая $y=p$, доставляющая слабый минимум.

ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

1. Постановка задачи. Пусть $F = F(x, y, y')$ – трижды дифференцируемая функция своих аргументов и пусть в плоскости Oxy заданы две кривые

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad y = \psi(x), \tag{40}$$

где $\varphi(x) \in C^1\left[a, b\right]$ и $\psi(x) \in C^1\left[a, b\right]$.

Рассмотрим функционал

$$V[y]\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx, \tag{41}$$

определенный на гладких кривых $y = y(x)$, концы которых $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1,\ y_1)$ лежат на заданных линиях (40), так что $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$ (рис. 9). Требуется найти экстремум функционала (41).

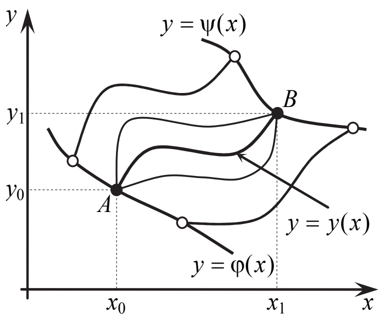

Рис. 9

2. Необходимые условия экстремума. Пусть кривая $y = y(x)$ доставляет экстремум функционалу $V[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ среди всех кривых класса $C^1\left[a, b\right]$, соединяющих две произвольные точки двух данных кривых $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Тогда кривая y является экстремалью и в концах $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ кривой y выполняются *условия трансверсальности*

$$\left[F+(\varphi'-y')F_{y'}\right]_{x=x_0}=0, \quad \left[F+(\psi'-y')F_{y'}\right]_{x=x_1}=0. \tag{42}$$

Итак, для решения задачи с подвижными границами нужно:

1) написать и решить соответствующее уравнение Эйлера. В результате получим семейство экстремалей $y=f(x,C_1,C_2)$, зависящее от двух параметров C_1 и C_2;

2) из условий трансверсальности (42) и из уравнений:

$$f(x_0,C_1,C_2)=\varphi(x_0), \quad f(x_1,C_1,C_2)=\psi(x_1) \tag{43}$$

определить постоянные C_1, C_2 и абсциссы x_0, x_1 точек A, B;

3) вычислить экстремум функционала (41).

Замечание 1. Если граничная точка (например, точка B) может перемещаться только по вертикальной прямой $x=x_1$ $(\psi'=\infty)$, то соответствующее условие трансверсальности принимает вид $F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0.$

Замечание 2. Если граничная точка (пусть точка A) может перемещаться только по горизонтальной прямой $y=y_0$ $(\varphi'=0)$, то условие трансверсальности принимает вид $\left[F-y'F_{y'}\right]_{x=x_0}=0.$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $y=x-5$.

▲ Задача сводится к нахождению экстремального значения функционала

$$V[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{44}$$

при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой $y=x^2$, а правый – по прямой $y=x-5$. Таким образом, в нашем случае имеем $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=x-5$. Общее решение уравнения Эйлера будет: $y = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые предстоит определить.

Условия трансверсальности (42) имеют вид

$$\left[\sqrt{1+y'^2} + \frac{(2x-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_0} = 0, \quad \left[\sqrt{1+y'^2} + \frac{(1x-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0, \quad (45)$$

где $y' = C_1$. Условия (43) пересечения экстремали с кривыми $y = x^2$ и $y = x - 5$ принимают вид

$$C_1 x_0 + C_2 = x_0^2, \quad C_1 x_1 + C_2 = x_1 - 5. \quad (46)$$

Четыре уравнения (45), (46) определяют неизвестные параметры C_1, C_2, x_0, x_1:

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{23}{8}.$$

Значит, экстремалью является прямая $y = \frac{3}{4} - x$, а расстояние между данными параболой и прямой равно

$$l = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1+(-1)^2}\, dx = \sqrt{2}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} = \frac{19\sqrt{2}}{8}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти вид условия трансверсальности для функционалов вида

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\, dx, \quad A(x,\ y) \neq 0 \quad (47)$$

(к этому виду относится и длина кривой из предыдущего примера).

▲ Условие трансверсальности $\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_0} = 0$ (на примере левого конца экстремали, лежащего на кривой $y = \varphi(x)$) в данном случае имеет вид $A(x,y)\sqrt{1+y'^2}+(\varphi'-y')\dfrac{A(x,y)y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$ или $\dfrac{A(x,y)(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}}=0$, откуда при условии $A(x,\ y)\neq 0$ находим

$$y'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(x_0)}. \tag{48}$$

Это означает, что для функционала (47) условие трансверсальности переходит в условие ортогональности (48).

Используем более простой вид условия (48) и аналогичного условия $y'(x_1)=\dfrac{-1}{\psi'(x_1)}$ на правом конце для отыскания экстремали предыдущего примера 1, в котором функционал (44) имел вид (47).

Для определения коэффициентов C_1, C_2 в общем решении $y=C_1x+C_2$ уравнения Эйлера, а также точек x_0 и x_1 имеем систему

$$\begin{aligned} &1+y'\varphi'\big|_{x=x_0}=1+C_1\cdot 2x_0=0, \quad C_1x_0+C_2=x_0^2,\\ &1+y'\psi'\big|_{x=x_1}=1+C_1\cdot 1=0, \qquad C_1x_1+C_2=x_1-5, \end{aligned} \tag{49}$$

откуда снова, но гораздо быстрее находим:

$$C_1=-1,\quad x_0=\frac{1}{2},\quad C_2=\frac{3}{4},\quad x_1=\frac{23}{8}.$$

Таким образом, учет конкретного вида функционала (47) позволил получить для определения неизвестных C_1, C_2, x_0, x_1 систему (49), более простую, чем система общего вида (42), (43). ▲

ЗАДАЧИ

1. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

2. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,5)$ до параболы $x=y^2$.

3. Найти кратчайшее расстояние между окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $x + y = 4$.

4. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,3)$ до прямой $y = 1 - 3x$.

5. Найти функцию, реализующую экстремум функционала $V[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y^2 - y'^2\right) dx,\ \ y(0) = 0,$ если другая граничная точка может скользить по прямой $x = \frac{\pi}{4}$.

6. Найти условие трансверсальности для функционала

$$V[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} A(x, y) e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1 + y'^2}\, dx,\ \ A(x, y) \neq 0.$$

ОТВЕТЫ

1. $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

2. $\sqrt{20}$.

3. $2\sqrt{2} - 1$.

4. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. $y = 0$.

6. $\frac{y' - \psi'}{1 + y'\psi'} = 1$, т. е. экстремали $y = y(x)$ должны пересекать кривую $y = \psi(x)$, по которой скользит граничная точка, под углом $\frac{\pi}{4}$ (подробнее см. [1, 2]).

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Постановка задачи. В вариационной задаче на условный экстремум требуется найти экстремум функционала

$$V[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx, \qquad (50)$$

$$y_k(x_0) = y_{k0}, \quad y_k(x_1) = y_{k1} \quad (k = 1,\ 2, \ldots, n),$$

при наличии условий связи

$$\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m < n), \qquad (51)$$

которые считаются независимыми.

2. Необходимые условия условного экстремума. Функции y_1, $y_2, \ldots, y_n$, реализующие экстремум функционала (50) при наличии условий (51), удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $\lambda_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \right) dx. \qquad (52)$$

Обозначим для краткости $F + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i = \Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$. Тогда функции $\lambda_i(x)$ и $y_i(x)$ определяются из уравнений Эйлера $\Phi'_{y_k} - \dfrac{d}{dx}\Phi'_{y_k'} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $\varphi_i(x,\ y_1, \ldots, y_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Уравнения $\varphi_i = 0$ можно считать уравнениями Эйлера для функционала (52), если аргументами функционала считать не только функции y_1, $y_2, \ldots, y_n$, но и функции $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$.

3. Изопериметрическая задача. Пусть даны две функции $F(x, y, y')$ и $G(x, y, y')$, которые имеют непрерывные частные производные первого и второго порядка при $x_0 \le x \le x_1$ и при произвольных значениях переменных $y, \ y'$.

Среди всех кривых $y = y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, вдоль которых функционал

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx \tag{53}$$

принимает заданное значение l (*изопериметрическое условие*), определить ту, для которой функционал

$$V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \tag{54}$$

принимает экстремальное значение.

Теорема Эйлера. Если кривая $y = y(x)$ доставляет экстремум функционалу (54) при условиях

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = l, \ \ y_0 = y(x_0), \ \ y_1 = y(x_1), \tag{55}$$

и если $y = y(x)$ не является экстремалью функционала (53), то существует константа λ такая, что кривая $y = y(x)$ есть экстремаль функционала

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y') \right] dx. \tag{56}$$

Замечание. Если $y = y(x)$ есть экстремаль функционала (55), то $G_y - \dfrac{d}{dx} G_{y'} = 0$ и уравнение Эйлера для функционала (56) обращается в обычное уравнение Эйлера $F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0$ для функционала (54).

Изопериметрическими задачами называют также такие вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала

$$V[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'\right) dx \tag{57}$$

при наличии так называемых изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'\right) dx = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{58}$$

где l_i – постоянные.

Для получения основного необходимого условия в изопериметрической задаче о нахождении экстремума функционала (57) при наличии связей (58) надо составить вспомогательный функционал

$$\Phi[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dx, \tag{59}$$

где λ_i – постоянные, и написать для него уравнения Эйлера. Произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$ в общем решении системы уравнений Эйлера и постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ определяются из граничных условий

$$y_k(x_0) = y_{k0}, \quad y_k(x_1) = y_{k1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и из изопериметрических условий (58).

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, -1, 0)$ и $B(2, 1, -1)$, лежащими на поверхности $15x - 7y + z - 22 = 0$.

▲ Это вариационная задача на условный экстремум с уравнением связи вида $\varphi(x, y, z) = 0$, в которой нужно определить геодезическую линию [1, 2, 3, 7, 8] на поверхности. *Геодезической линией* называется линия наименьшей длины, лежащая на данной поверхности и соединяющая две данные точки.

Известно, что расстояние между двумя точками $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$ на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ определяется по формуле

$$l[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

где $y = y(x),\ z = z(x)$.

Нужно найти минимум l при условии $\varphi(x, y, z) = 0$. В нашем случае $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ \varphi(x, y, z) = 15x - 7y + z - 22$.

Составим вспомогательный функционал

$$L = \int_1^2 \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22) \right] dx$$

и выпишем уравнения Эйлера для него:

$$\lambda(x)(-7) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0, \tag{60}$$

$$\lambda(x) \cdot 1 - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0. \tag{61}$$

Решим систему уравнений (60), (61), используя условие связи

$$15x - 7y + z - 22 = 0. \tag{62}$$

Искомые функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y(1) = -1,\ z(1) = 0,\ y(2) = 1,\ z(2) = -1. \tag{63}$$

Умножая уравнение (61) на 7 и складывая с (60), получим $\frac{d}{dx}\left(\frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0$, откуда

$$\frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_1. \qquad (64)$$

Из (62) имеем

$$z' = 7y' - 15. \qquad (65)$$

Подставляя это значение z' в (64) и решая полученное дифференциальное уравнение, найдем $y(x) = C_1 x + C_2$. Граничные условия (63) дают $C_1 = 2,\ C_2 = -3$, так что

$$y(x) = 2x - 3. \qquad (66)$$

Из (65) с учетом (66) находим

$$z(x) = 1 - x \qquad (67)$$

(граничные условия для функции (67), очевидно, выполняются). Из (60) или (61) получаем $\lambda(x) \equiv 0$. Искомое расстояние

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + (2)^2 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{6}\ .$$

Этот же результат сразу получается из очевидных геометрических соображений. ▲

Пример 2 (задача Дидоны). Среди замкнутых кривых длины $2l$ найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь [1, 2, 3, 7, 8].

▲ Заметим, что рассматриваемая кривая должна быть выпуклой. В самом деле, в противном случае существовала бы прямая L (рис. 10) такая, что если зеркально отразить в ней кусок границы BCD, то получим область большей площади, чем первоначальная, при той же длине границы.

Далее установим, что всякая прямая, которая делит пополам замкнутую кривую, ограничивающую наибольшую площадь, будет делить пополам и саму эту площадь. Пусть прямая L_1 не обладает этим свойством. Отразив тогда зеркально около L_1 ту часть фигуры, которая имеет большую площадь, мы получили бы кривую той же длины, но ограничивающую большую площадь.

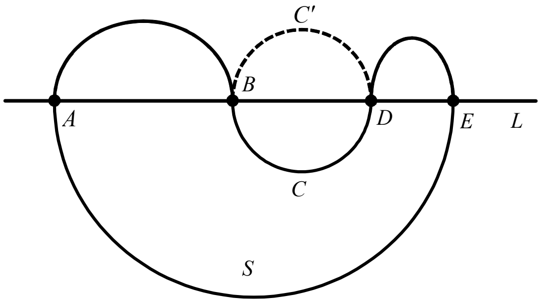

Рис. 10

Принимая за ось Ox любую из прямых, делящих кривую пополам, приходим к следующей постановке задачи.

Найти линию $y = y(x), y(-a) = y(a) = 0$, которая при заданной длине $l > 2a$ ограничивает вместе с отрезком $-a \le x \le a$ оси Ox наибольшую площадь. Следовательно, задача сводится к поиску экстремума функционала

$$V[y] = \int_{-a}^{a} y\,dx,\ y(-a) = y(a) = 0 \tag{68}$$

при условии, что

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\ dx = l\ (l > 2a). \tag{69}$$

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$L = \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \right) dx. \tag{70}$$

Подынтегральная функция в функционале (70) не зависит явно от x, поэтому уравнение Эйлера для него имеет вид $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$ или

$y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} - \dfrac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$, откуда $y - C_1 = \dfrac{-\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}$.

Полагая $y' = \mathrm{tg}\, t$, получаем

$$y - C_1 = -\lambda \cos t, \tag{71}$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\, t, \quad dx = \frac{dy}{\mathrm{tg}\, t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\mathrm{tg}\, t} = \lambda \cos t dt,$$

$$x - C_2 = \lambda \sin t. \tag{72}$$

Исключая t из параметрических уравнений экстремалей (71) и (72), находим $\left(y - C_1\right)^2 + \left(x - C_2\right)^2 = \lambda^2$ – семейство окружностей. Постоянные C_1, C_2, λ определяются из условий $y(-a) = y(a) = 0$, $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l$. ▲

Пример 3. Найти минимум интеграла $V[y] = \int\limits_0^{\pi} y'^2 dx$ при условии $\int\limits_0^{\pi} y^2 dx = 1$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

▲ Составим вспомогательный функционал $L = \int\limits_0^{\pi} \left(y'^2 + \lambda y^2\right) dx$ и выпишем для него уравнение Эйлера

$$2\lambda y - \frac{d}{dx}\left(2y'\right) = 0 \quad \text{или} \quad y'' - \lambda y = 0. \tag{73}$$

Характеристическое уравнение $r^2 - \lambda = 0$ или $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Ясно, что λ должно быть меньше нуля, так как если допустить, что $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (73) будет иметь вид $y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$ и граничные условия $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ будут удовлетворяться только при $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$, т. е. при $y(x) \equiv 0$. Но в таком случае не будет выполняться условие $\int\limits_0^{\pi} y^2 dx = 1$.

Аналогично в случае $\lambda = 0$ решением уравнения Эйлера (73), удовлетворяющим заданным граничным условиям, будет функция $y(0) \equiv 0$. Поэтому считаем $\lambda < 0$, так что $r_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$, и общим решением уравнения (73) будет $y = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}\, x + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}\, x$. Условие $y(0) = 0$ дает $C_2 = 0$, а условие $y(\pi) = 0$ дает $-\lambda = k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Итак, $y(x) = C_1 \sin kx$, где C_1 пока не определено. Воспользовавшись условием связи $\int\limits_0^\pi y^2 dx = 1$, получим $\int\limits_0^\pi C_1^2 \sin^2 kx dx = 1$, откуда $C_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Значит, $y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$. Но среди экстремалей $y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$, проходящих через точки $(0,0)$ и $(\pi,0)$, условию Якоби удовлетворяют только две, а именно $y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$. На этих экстремалях $V[y] = \int\limits_0^\pi y'^2 dx = \int\limits_0^\pi \frac{2}{\pi} \cos^2 x\, dx = 1$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,0,-1)$ и $B(0,-1,1)$, лежащими на поверхности $x + y + z = 0$.

Найти экстремали в изопериметрических задачах.

2. $V[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = 6$ при условии $\int\limits_0^1 y dx = 3.$

3. $V[y] = \int\limits_0^1 \left(x^2 + y'^2\right) dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$ при условии $\int\limits_0^1 y^2 dx = 2.$

4. $V[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = \frac{1}{4}$ при условии $\int\limits_0^1 \left(y - y'^2\right) dx = 0.$

5. $V[y,z]=\int\limits_0^1\left(y'^2+z'^2-4xz'-4z\right)dx,\ y(0)=0,\ \ z(0)=0,\ \ y(1)=1,\ \ z(1)=1$

при условии $\int\limits_0^1\left(y'^2-xy'-z'^2\right)dx=2$.

ОТВЕТЫ

1. $\sqrt{6}$.

2. $y=3x^2+2x+1$.

3. $y=\pm 2\sin\pi nx,\quad n\in Z$.

4. $y_1=\dfrac{x^2}{4},\ \ y_2=x-\dfrac{3}{4}x^2$.

5. $y_1=\dfrac{7x-5x^2}{2},\ \ z_1=x,\ \ y_2=3x^2-2x,\ \ z_2=x$ (подробнее см. [1, 2]).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Краснов М.Л.* Вариационное исчисление: задачи и упражнения: учебное пособие для втузов / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 190 с.

2. *Краснов М.Л.* Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие для втузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Либроком, 2014. – 170 с.

3. *Васильева А.Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. – 3-е изд., исправленное. – СПб.: Лань, 2010. – 432 с.

4. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения : справочное руководство / Л.Я. Цлаф. – 3-е изд., стереотипное. – СПб.: Лань, 2005. – 192 с.

5. *Пантелеев А.В.* Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – 3-е изд., стереотипное. – М.: Высшая школа, 2008. – 544 с.

6. *Пантелеев А.В*. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. – М.: Вузовская книга, 2012. – 228 с.

7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник для физ. спец. ун-тов / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

8. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление: учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / Л.С. Эльсгольц. – М.: ЛКИ, 2014. – 208 с.

9. *Андреева Е.А.* Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебное пособие для университетов / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – М.: Высшая школа, 2006. – 583 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Функционал. Близость кривых. Непрерывность функционала 3
Примеры с решениями 7
Задачи 10
Ответы 11

Вариация функционала.
Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума 12
Примеры с решениями 14
Задачи 18
Ответы 18

Простейшая задача вариационного исчисления.
Уравнение Эйлера 19
Примеры с решениями 22
Задачи 29
Ответы 31

Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления 32
Примеры с решениями 34
Задачи 36
Ответы 38

Поле экстремалей 40
Примеры с решениями 42
Задачи 46
Ответы 48

Достаточные условия экстремума функционала 50
Примеры с решениями 51
Задачи 55
Ответы 56

Задача с подвижными границами 57
Примеры с решениями 58
Задачи 60
Ответы 61

Условный экстремум 62
Примеры с решениями 64
Задачи 69
Ответы 70

Библиографический список 71