А. В. Арутюнов, Н. Г. Павлова, А. А. Шананин, Равновесные цены в одной модели экономического равновесия, *Матем. моделирование*, 2016, том 28, номер 3, 3–22

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 год, том 28, номер 3, стр. 3-22

РАВНОВЕСНЫЕ ЦЕНЫ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

© *2016 г.* ***А.В. Арутюнов, Н.Г. Павлова, А.А. Шананин****

Российский университет дружбы народов
* Московский физико-технический институт (государственный университет)
arutun@orc.ru, natasharussia@mail.ru, alexshan@yandex.ru

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности, проект № 1.333.2014/K, при поддержке РФФИ, проект № 14-07-00075 и РНФ, проект № 15-11-10021.

Исследуется вопрос существования вектора равновесных цен в модели конкурентного равновесия, в которой учитываются транзакционные издержки, связанные с продажей продукции. В рассматриваемой модели функция спроса получена как решение задачи максимизации функции полезности при бюджетных ограничениях, а функция предложения – как решение задачи максимизации прибыли с учетом транзакционных потерь на технологическом множестве. Приводятся достаточные условия существования вектора равновесных цен, которые получены как следствие теорем теории α-накрывающих отображений о существовании точек совпадения.

Ключевые слова: экономическое равновесие, транзакционные издержки, точки совпадения.

EQUILIBRIUM PRICES IN AN ECONOMIC EQUILIBRIUM MODEL

A.V. Arutyunov, N.G. Pavlova, A.A. Shananin*

PFUR
*MIPT

In this paper, we study the existence of equilibrium price vector in a concurrent equilibrium model taking into account the transaction costs associated with the sale of products. In this model, the demand function is obtained as the solution to the problem of maximizing the utility function under budget constraints, and the supply function is obtained as the solution to the problem of profit maximization given transaction losses on the technology set.
We establish sufficient conditions for the existence of quilibrium price vector. These conditions are consequences of general theorems on the existence of coincidence points in the theory of α-covering mappings.

Key words: economic equilibrium, transaction costs, coincidence points.

1. Введение

Понятие экономического равновесия является базовой конструкцией современной экономической теории. Еще в 1776 году английский философ Адам Смит [1] сформулировал концепцию, согласно которой субъект экономики, действуя в своих личных интересах, "руководится при этом невидимой рукой с тем, чтобы содействовать реализации цели, достижение которой не входило в его намерения". Почти через сто лет французский экономист Леон Вальрас [2] сформулировал понятие экономического равновесия и придал поэтическому образу невидимой руки математическое содержание в форме вектора равновесных цен. Из-за неразвитости математического аппарата Л. Вальрас не сумел исследовать вопрос об условиях существования экономического равновесия, ограничившись обоснованием закона Вальраса, устанавливающего в качестве следствия равенство числа равновесных цен и числа уравнений, которым они должны удовлетворять. Появление теоремы о неподвижной точке Брауэра и последующее развитие математической техники (теорема Какутани, лемма Гейла-Никайдо-Дебре, неравенство Фань Цзы) позволили разработать аппарат для исследования условий существования экономического равновесия. Один из первых законченных результатов об условиях существования конкурентного равновесия был получен в 1954 г. в знаменитой работе [3] К. Эрроу и Г. Дебре). Последующее развитие теории, учитывающее роль кредита и финансовых инструментов, позволило исследовать вопросы об условиях существования равновесия в моделях экономической динамики [4, 5]. Адаптация концепции экономического равновесия для анализа эволюции российских экономических структур потребовала модификации базовых конструкций математической экономики и разработки теории неклассических равновесий [6–8], в которых эффективные цены покупок отличаются от эффективных цен продаж. Причины этих различий изменялись в процессе изменения экономических механизмов [8]. В административно регулируемой, плановой экономике эффективные цены продаж превосходили цены покупок из-за государственного субсидирования производства. В последующем в процессе формирования рыночных отношений эффективные цены продаж были меньше цен покупок из-за транзакционных издержек. Природа транзакционных издержек изменялась в процессе эволюции российской экономики. На первом этапе (1992–1993 гг.) природа транзакционных издержек объяснялась высокой инфляцией производственных затрат [7, 8], на последующем этапе стабилизации (1994–1997 гг.) – монопольными эффектами, связанными с деятельностью торговых посредников и сегментацией товарных и денежных рынков в рамках финансово-промышленных групп [8], в последующем дефицитом оборотных средств и нестабильностью спроса на выпускаемую продукцию [9]. Нестабильность спроса на выпускаемую продукцию проводит к задержкам в реазации и к необходимости авансировать производственные затраты, используя кредит и выплачивая по нему проценты. В результате для производителя товаров эффективные цены продажи оказываются меньше эффективных цен покупки производственных факторов. Таким образом, на разных этапах эволюции отечественной экономики наблюдались неклассические равновесия, в которых цена для потребителя товара превышала цену для производителя товара из-за транзакционных издержек, происхождение которых могло быть различным: инфляция производственных затрат, дефицит оборотных средств в сочетании с высокой стоимостью кредитов, налог с оборота, рэкет и торговые издержки [6–9]. При этом в России доходы от транзакционных издержек вывозились за границу, т.е. не возвращались на отечественный рынок. На языке математических моделей это означает нарушение баланса доходов и расходов, т.е. закона Вальраса в узком смысле слова. Вопрос об условиях существования неклассических равновесий можно свести к вопросу о существовании специальным образом построенного вариационного неравенства [10, 11]. Однако для этих вариационных неравенств не выполняется закон Вальраса, а значит, не применим стандартный подход к обоснованию существования экономического равновесия, основанный на применении леммы Гейла-Никайдо-Дебре.

В данной статье вектор равновесных цен рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения. Для получения достаточных условий существования равновесных цен предлагается применить результаты работ [12–14], содержащих методы нахождения точек совпадения двух отображений в метрических пространствах. В изучаемой модели отображения спроса и предложения действуют из одного подмножества конечномерного евклидова пространства в другое подмножество, которые рассматриваются как метрические пространства с естественной метрикой. Используемые в этой работе методы основаны на развитой в последние годы теории точек совпадения липшицева и накрывающего отображений [12, 15, 16 и т.д.]. В качестве модели, на примере которой проводится анализ, выбрана модель неклассических равновесий с транзакционными издержками в форме доли произведенной продукции, которая вывозится за границу.

2. Модель поведения производителя и потребителя. Функции предложения и спроса

Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем i-й товар для потребителя имеет цену $p_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Будем также предполагать, что цены $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$, по которым производитель реализует товары, меньше цен $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, которые платит за них потребитель, причем $\tilde{p} = Ap$, где $A = \alpha E$, $\alpha \in (0;1)$, E – единичная матрица размерности $n \times n$, т.е. $\tilde{p} = \alpha p$.

Будем считать, что у производителя имеются различные технологии производства. Опишем каждую технологию парой векторов

$$y_- = (y_{-1}, y_{-2}, \ldots, y_{-n}), \qquad y_+ = (y_{+1}, y_{+2}, \ldots, y_{+n}) \in \mathbb{R}_+^n,$$

где y_- – затраты, а y_+ – выпуски товаров при использовании данной технологии. Обозначим через $T \subset \mathbb{R}_+^{2n}$ технологическое множество, т.е. совокупность имеющихся у производителя технологий. Будем предполагать, что

$$T = \left\{ y = (y_+, y_-) \mid \varphi(y_+, y_-) \le 0, y_+, y_- \in \mathbb{R}_+^n \right\},$$

где $\varphi : \mathbb{R}_+^{2n} \to \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая функция.

Будем считать, что в производственном процессе используются все n видов ресурсов. Из всех возможных производственных процессов производитель выбирает тот, при котором прибыль максимальна. Таким образом, выбор производителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции прибыли:

$$\langle \alpha p, y_+ \rangle - \langle p, y_- \rangle \to \max, \qquad (y_+, y_-) \in T. \tag{1}$$

Заметим, что в силу сделанных предположений задача (1) эквивалентна следующей задаче

$$\begin{cases} \langle(\alpha p, -p), (y_+, y_-)\rangle \to \max, \\ \varphi(y_+, y_-) \le 0, \\ (y_+, y_-) > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть $y^* = (y_+^*, y_-^*)$ – решение задачи (2). Тогда предложение производителя i-го товара $S_i(p) = y_+^* - y_-^*$, $i = \overline{1,n}$.

Будем предполагать, что потребительские предпочтения потребителя, обладающего бюджетом $I(p)$, задаются функцией полезности $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, являющейся дважды непрерывно дифференцируемой, строго вогнутой (т.е. функция $(-u)$ строго выпукла) и не имеющей максимумов (т.е. является ненасыщаемой). Функция $I : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ является дифференцируемой положительно однородной первой степени, кроме того, существует число C>0 такое, что $I(p) \ge C\,\|p\|$ для любых $p \in \mathbb{R}_+^n$. Будем считать также, что потребитель приобретает все n видов товаров, причем, приобретая набор товаров $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}_+^n$, потребитель приобретает y_1 единиц 1-го товара, y_2 единиц 2-го товара, ... , y_n единиц n-го товара.

Выбор потребителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции полезности:

$$u(y) \to \max,\ \langle p, y\rangle \le I(p),\ \ y > 0. \qquad (3)$$

Спрос потребителя описывается отображением

$$D : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n, \quad D(p) = \mathrm{Argmax}\left\{u(y) \mid y \in \mathbb{R}_+^n, \langle p, y\rangle \le I(p)\right\}.$$

3. Вспомогательные результаты

Будем рассматривать метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r будем обозначать через $B_X(x,r)$, а замкнутый шар в пространстве Y с центром в точке y радиуса r – через $B_Y(y,r)$.

Определение 1 [14]. *Пусть задано* $\alpha > 0$. *Отображение* $D : X \to Y$ *называется* α*-накрывающим, если*

$$D(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(D(x), \alpha r) \ \ \forall r \ge 0, \forall x \in X.$$

Теорема о точках совпадения [14]. *Пусть пространство X полно, а D,* $S : X \to Y$ *– произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является* α*-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица* $\beta < \alpha$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in X$ *существует такое* $\xi = \xi(x_0) \in X$, *что*

$$D(\xi) = S(\xi), \qquad (4)$$

$$\rho_X(x_0, \xi) \le \rho_Y(D(x_0), S(x_0)) / (\alpha - \beta).$$

Решение ξ уравнения (4) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений D и S.

Из приведенной теоремы вытекает [14] теорема Милютина о возмущении накрывающего отображения.

Теорема о возмущении. *Пусть X – полное метрическое пространство, Y – нормированное пространство, отображение $D:X\to Y$ является непрерывным и α-накрывающим. Тогда для любого отображения $S:X\to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица $\beta<\alpha$, отображение $D+S$ является $(\alpha-\beta)$-накрывающим.*

Пусть $M\subset X$ – заданное непустое множество.

Определение 2 [13]. *Пусть $\alpha>0$. Отображение $D:X\to Y$ называется α-накрывающим на множестве M, если для любых $x\in M$, $r>0$ таких, что $B_X(x,r)\subseteq M$, выполнено включение*

$$D(B_X(x,r))\supseteq B_Y(D(x),\alpha r).$$

Точную верхнюю грань всех $\alpha>0$ таких, что отображение D является α-накрывающим на множестве M, обозначим через $\mathrm{cov}(D\,|M)$. В случае, когда $M=X$, это число будем обозначать через $\mathrm{cov}(D)$.

Определение 3 ([13]). *Пусть $\alpha>0$. Отображение $D:X\to Y$ называется локально α-накрывающим в точке $x\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ существует положительное $r<\varepsilon$ такое, что*

$$D(B_X(x,r))\supseteq B_Y(D(x),\alpha r).$$

Точную верхнюю грань всех $\alpha>0$ таких, что отображение D является локально α-накрывающим в точке $x\in X$, обозначим через $\mathrm{cov}(D\,|x)$.

Теорема 1 (*см. теорему* 1 *из* [13]). *Предположим, что пространство X полно и заданы $x_0\in X$, $\alpha>0$, $R>0$. Пусть отображение $D:X\to Y$ является α-накрывающим на $B_X(x_0,R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta<\alpha$ и любого отображения S: $B_X(x_0,R)\to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β, такого, что*

$$\rho_Y(D(x_0),S(x_0))\le(\alpha-\beta)R,$$

для отображений D и S существует точка совпадения $\xi\in X$, т.е. $D(\xi)=S(\xi)$, такая, что

$$\rho_X(x_0,\xi)\le\rho_Y(D(x_0),S(x_0))/(\alpha-\beta).$$

Заметим, что вектор равновесных цен в исследуемой модели является точкой совпадения отображений спроса и предложения.

Для дальнейшего нам потребуется изучить следующие две экстремальные задачи. Первая из них имеет вид

$$\langle x,y\rangle\to\max,\ \varphi(y)\le 0. \tag{5}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^k$ играет роль параметра, а $y \in \mathbb{R}^k$ – переменная, по которой проводится максимизация. Функция $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, задающая ограничения, предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и сильно выпуклой, т.е. существует такое $\varepsilon > 0$, что матрица $\varphi''(y) - \varepsilon E$ положительно определена для любого y. Кроме того, предполагается, что существует $\bar{y} \in \mathbb{R}^k$: $\varphi(\bar{y}) < 0$.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^k$ произвольную норму $\|\cdot\|$.

Лемма 1. *Для любого* $x \neq 0$ *задача* (5) *имеет единственное решение* $y = g(x)$, *причем функция* g *непрерывно дифференцируема в области* $x \neq 0$ *и*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = A^{-1} - \frac{(A^{-1}a^*)\left(A^{-1}a^*\right)^*}{\langle A^{-1}a^*, a^*\rangle} = A^{-1} - \frac{(A^{-1}x^*)\left(A^{-1}x^*\right)^*}{\langle A^{-1}x^*, x^*\rangle}, \tag{6}$$

где

$$A = \| x \| \cdot \| \varphi'(y) \|^{-1} \varphi''(y), \qquad a = \varphi'(y), \tag{7}$$

знак "*" *означает транспонирование.*

Доказательство этой и следующих лемм приведены в приложении.

Рассмотрим вторую экстремальную задачу

$$u(y) \to \max,\ \langle x, y\rangle \le I(x),\ y \ge 0. \tag{8}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ играет роль параметра, который принимает лишь допустимые значения: $x \in \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_i \ge c_i, i = \overline{1,k}\}$, где $c_i > 0$ $(i = \overline{1,k})$ – заданные числа. Максимизация проводится по переменной $y \in \mathbb{R}_+^k$. Функция $I : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ предполагается дифференцируемой положительно однородной первой степени, кроме того, существует число $C > 0$ такое, что $I(x) \ge C\| x \|$ для любых $x \in \mathbb{R}_+^k$. Функция $u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой (т.е. матрица $u''(y)$ отрицательно определена для всех y) и не имеющей максимумов.

В силу сделанных предположений множество допустимых точек $\{y \in \mathbb{R}_+^k : \langle x, y\rangle \le I(x)\}$ ограничено равномерно по всем допустимым x, замкнуто и выпукло. Поэтому задача (8), заключающаяся в максимизации строго вогнутой функции на выпуклом компакте, при любом x имеет единственное решение $y = f(x)$. Учитывая дальнейшие приложения задачи (8), будем предполагать, что функция u такова, что при любом допустимом x для решения задачи (8) $f(x) > 0$ и $\langle x, f(x)\rangle = I(x)$.

Лемма 2. *На множестве допустимых* x *задача* (8) *имеет единственное решение* $y = f(x)$, *причем функция* f *непрерывно дифференцируема и*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \bar{a}\left(\bar{A}^{-1} - \frac{(\bar{A}^{-1}x^*)\left(\bar{A}^{-1}x^*\right)^*}{\langle \bar{A}^{-1}x^*, x^*\rangle}\right) - \frac{\bar{A}^{-1}x^*(y - I'(x))}{\langle \bar{A}^{-1}x^*, x^*\rangle}, \tag{9}$$

где $\overline{A} = u''(y)$, $\overline{a} = \| u'(y) \| \cdot \| x \|^{-1}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ определим норму по формуле

$$\|x\| = \max_{i=\overline{1,k}} |x_i| \quad \forall x = (x_1, ..., x_k) \in R^k.$$

Для доказательства основной теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. *Константа Липшица линейного оператора* $\mathcal{H} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, *действующего по формуле*

$$\mathcal{H}\xi = \left(H - \frac{(Hh^*)\left(Hh^*\right)^*}{\langle Hh^*, h^* \rangle} \right) \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \tag{10}$$

где H *– симметрическая знакоопределенная матрица порядка k с собственными значениями* λ_i, $i = \overline{1,k}$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$, *удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{lip} \mathcal{H} \leq (k+1) \max_{i=\overline{1,k}} |\lambda_i|. \tag{11}$$

4. Основные результаты. Существование положения равновесия

Пусть заданы число $\alpha \in (0,1)$, дважды непрерывно дифференцируемая, сильно выпуклая функция $\varphi : \mathbb{R}_+^{2n} \to \mathbb{R}$, дважды непрерывно дифференцируемая, строго вогнутая функция $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, дифференцируемая положительно однородная первой степени функция $I : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, векторы $c_1 = (c_{11}, ..., c_{n1})$, $c_2 = (c_{12}, ..., c_{n2}) \in \mathbb{R}_+^n$, причем $c_{i1} < c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим модель экономического равновесия, описываемую набором данных

$$\sigma = (\alpha, \varphi, u, I, c_1, c_2).$$

Набор (α, φ, u, I) однозначно определяет функции спроса $D : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$, $D(\cdot) = (D_1(\cdot), \ldots, D_n(\cdot))$ и предложения $S : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$, $S(\cdot) = (S_1(\cdot), ..., S_n(\cdot))$. Компоненты векторов c_1, c_2 определяют естественные ограничения на цены товаров, т.е. предполагается, что $c_{i1} \leq p_i \leq c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$. Множество наборов $\sigma = (\alpha, \varphi, u, I, c_1, c_2)$, для которых выполнены неравенства $c_{i2} > c_{i1}$, $i = \overline{1,n}$, обозначим через Σ.

Определение 4. *Вектор* $p \in \mathbb{R}_+^n$ *называется вектором равновесных цен в модели* σ, *если* $S(p) = D(p)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим нормы по формулам

$$\|x\|_1 = 2 \max_{i=\overline{1,n}} \frac{|x_i|}{c_{i2} - c_{i1}} \quad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in R^n, \qquad \|x\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \quad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in R^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), где $X = \mathbb{R}_+^n$, $Y = \mathbb{R}_+^n$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y – нормой $\|\cdot\|_2$. Положим

$$\tilde{c} = (c_1 + c_2)/2, \qquad M = B_X(\tilde{c}, 1).$$

Введем обозначения

$$\tilde{\alpha}(\sigma) = 2\left(\|\bar{\lambda}\|_C \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i2}}{c_{i2} - c_{i1}}\right)^{-1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \min_{p\in M} \sum_{i=1}^{n} |I'_{p_i}(p) - y_i(p)| u_2 -$$

$$-(n+1)\|u_1\|_C \|\bar{\lambda}\|_C \left(\max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}}\right)^{-1},$$

$$\tilde{\beta}(\sigma) = \frac{n+1}{2} \min_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i2} - c_{i1}}{c_{i1}} \|\varphi_1\|_C \|\lambda\|_C, \qquad \tilde{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} |\bar{y}_i - \bar{y}_{+i} + \bar{y}_{-i}|,$$

где

$$\varphi_1(y_+, y_-) = \|\varphi'(y_+, y_-)\|, \qquad u_1(y) = \|u'(y)\|, \qquad u_2(y) = \|u''(y)\|,$$

$$\lambda(y_+, y_-) = \max_{i=\overline{1,2n}} \left(\lambda_i(y_+, y_-)\right)^{-1},$$

$\lambda_i(y_+, y_-)$, $i = \overline{1,2n}$, – собственные значения матрицы $\varphi''(y_+, y_-)$,

$$\bar{\lambda}(y) = \max_{i=\overline{1,n}} \left|\bar{\lambda}_i(y)\right|^{-1},$$

$\bar{\lambda}_i(y)$, $i = \overline{1,n}$, – собственные значения матрицы $u''(y)$,
$\forall p \in M \quad y = y(p)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u(y) \to \max, \\ \langle p, y\rangle \le I(p), \\ y \ge 0, \end{cases}$$

$\bar{y}$ – решение задачи $\begin{cases} u(y) \to \max, \\ \langle c_1 + c_2, y\rangle \le I(c_1 + c_2), \\ y \ge 0, \end{cases}$

$(\bar{y}_+, \bar{y}_-)$ – решение задачи $\begin{cases} \langle(\alpha(c_1 + c_2), -c_1 - c_2), (y_+, y_-)\rangle \to \max, \\ \varphi(y_+, y_-) \le 0, \\ (y_+, y_-) \ge 0. \end{cases}$

Теорема 2. *Пусть модель* $\sigma \in \Sigma$ *удовлетворяет условиям:*

1) $\tilde{\alpha}(\sigma) > \tilde{\beta}(\sigma)$;

2) $\tilde{\gamma}(\sigma) < \tilde{\alpha}(\sigma) - \tilde{\beta}(\sigma)$.

Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p = (p_1, ..., p_n)$ *такой, что* $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Проиллюстрируем полученный результат.

Пример. Предположим, что производственные возможности производителя описываются следующим технологическим множеством:

$$T = \left\{ y = (y_+, y_-) \left| \beta^2 \sum_{i=1}^{n} y_{+i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(y_{-i} - 1/\sqrt{n} \right)^2 \le 1, \quad y_+, y_- \in \mathbb{R}_+^n \right. \right\}, \quad \beta \in (0;1).$$

Предположим также, что бюджет потребителя описывается функцией

$$I(p) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i, \quad \gamma_i > 0 \;\; \forall i = \overline{1, n},$$

а его потребительские предпочтения задаются функцией полезности

$$u(y) = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i.$$

Рассмотрим модель экономического равновесия, описываемую набором данных $\overline{\sigma} = (\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2)$. Набор (α, β, γ), где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, однозначно определяет функции спроса $D : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$,

$$D_i(p) = \left(np_i \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j, \;\; \forall i = \overline{1, n},$$

и предложения $S : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$,

$$S_i(p) = \frac{(\alpha + \beta^2) p_i}{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2 \right)^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \;\; \forall i = \overline{1, n}.$$

Утверждение 1. *Пусть модель* $\overline{\sigma}$ *удовлетворяет условиям:*

$$\frac{n+1}{2\beta^2} \min_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i2} - c_{i1}}{c_{i1}} < 2n \left(\max_{i=\overline{1,n}} \left(c_{i1} (c_{i2} - c_{i1})^{-1} c_{i2} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j c_{j2} \right) \right)^{-1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \times \tag{12}$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \min_{\substack{k,m=1,2, \\ k \ne m}} \left| \gamma_i - (nc_{im})^{-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j c_{jk} \right| \max_{i=\overline{1,n}} c_{i1}^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j c_{j2} \right)^{-2} -$$

$$- \frac{n+1}{n} \max_{i=\overline{1,n}} c_{i2} \max_{i=\overline{1,n}} c_{i1}^{-2} \left(\max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j c_{j1},$$

$$\max_{i=\overline{1,n}}\left|\left(n(c_{i1}+c_{i2})\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j(c_{j1}+c_{j2})-\frac{(\alpha+\beta^2)(c_{i1}+c_{i2})}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{j1}+c_{j2})^2\right)^{-1/2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right|<$$

$$<2n\left(\max_{i=\overline{1,n}}\left(c_{i1}(c_{i2}-c_{i1})^{-1}c_{i2}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j2}\right)\right)^{-1}\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\times \tag{13}$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\min_{\substack{k,m=1,2,\\ k\neq m}}\left|\gamma_i-(nc_{im})^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{jk}\right|\max_{i=\overline{1,n}}c_{i1}^2\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j2}\right)^{-2}-$$

$$-\frac{n+1}{n}\max_{i=\overline{1,n}}c_{i2}\max_{i=\overline{1,n}}c_{i1}^{-2}\left(\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j1}-\frac{n+1}{2\beta^2}\min_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i2}-c_{i1}}{c_{i1}}.$$

Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p=(p_1,...,p_n)$ *такой, что* $c_{i1}<p_i<c_{i2}$, $i=\overline{1,n}$.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Замечание 1. Условия (12) и (13) выполняются, например, при следующих значениях параметров: $n=2$, $\alpha=\beta=\gamma_1=\gamma_2=0{,}1$, $c_{11}=c_{21}=1$ усл.ден.ед., $c_{12}=c_{22}=2$ усл.ден. ед.

Замечание 2. Стоит отметить, что при возрастании параметра транзакционных издержек $\alpha\in(0,1)$ (уменьшении налога с оборота) значение функции полезности в равновесии возрастает. Действительно, для любого $p\in\operatorname{int}M$ имеем

$$(y_+-y_-)'_\alpha(p)=\frac{\partial(y_+-y_-)}{\partial(y_+,y_-)}(p)\frac{\partial(y_+,y_-)}{\partial\alpha}(p).$$

Тогда в силу (9) для любого $p\in\operatorname{int}M$

$$(y_+-y_-)'_\alpha(p)=\lambda^{-1}B\left(\varphi''(y_+,y_-)\right)^{-1}\overline{p}^*,$$

где $\overline{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n,0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}_+^n$. Следовательно, для любого $p\in\operatorname{int}M$

$$(y_+-y_-)'_\alpha(p)=\lambda^{-1}(p_1(\lambda_1(y_+,y_-))^{-1},p_2(\lambda_2(y_+,y_-))^{-1},\ldots,p_n(\lambda_n(y_+,y_-))^{-1})\in\mathbb{R}_+^n.$$

Отсюда следует, что при увеличении параметра α предложение каждого товара увеличивается, а следовательно, увеличивается и значение функции полезности в равновесном положении.

5. Приложение

Доказательство леммы 1. Функция Лагранжа для задачи (5) имеет вид

$$L(x,y,\lambda)=-\langle x,y\rangle+\lambda\varphi(y).$$

В силу предположений относительно функции φ множество $\{y : \varphi(y) \le 0\}$ является непустым строго выпуклым компактом. Кроме того, задача (5), заключающаяся в максимизации линейной функции на строго выпуклом компакте, при любом $x \ne 0$ имеет единственное решение $y = g(x)$. В силу сильной выпуклости функции φ выполняется условие регулярности

$$\varphi'(y) \ne 0 \quad \forall y : \varphi(y) = 0. \tag{14}$$

Поэтому в силу принципа Лагранжа существует $\lambda \ge 0$ такое, что

$$-x + \lambda\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = 0. \tag{15}$$

Введем в рассмотрение отображение $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$,

$$F(x, y, \lambda) = \big(x - \lambda\varphi'(y), \varphi(y)\big).$$

Тогда соотношения (15) эквивалентны уравнению

$$F(x, y, \lambda) = 0. \tag{16}$$

относительно параметра x и неизвестных (y, λ).

Покажем, что для этого уравнения выполнены предположения теоремы о неявной функции, т.е. что матрица $\dfrac{\partial F}{\partial(y,\lambda)}(x, y, \lambda)$ невырождена. Сделаем это. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial(y,\lambda)}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda\varphi''(y) & -\big(\varphi'(y)\big)^* \\ \varphi'(y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя обозначения (7), в силу (15) для любых $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^k$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ получим

$$\frac{\partial F}{\partial(y,\lambda)}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -A & -a^* \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Нам надо доказать, что для любых w, w_{k+1} линейная система

$$\begin{pmatrix} -A & -a^* \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w_{k+1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

имеет решение v, v_{k+1}. При этом в силу сделанных предположений $\lambda > 0$, матрица A положительно определена (и значит, невырождена) и $a \ne 0$.

Перепишем рассматриваемую систему в эквивалентном виде

$$-Av - a^* v_{k+1} = w, \qquad \langle a^*, v\rangle = w_{k+1}. \tag{18}$$

Имеем $Av = -w - a^* v_{k+1}$, откуда

$$v = -A^{-1}w - A^{-1}a^* v_{k+1}. \tag{19}$$

Подставив это выражение для v во второе равенство в (18), получаем

$$-\left\langle a^*, A^{-1}w\right\rangle - \left\langle a^*, A^{-1}a^*\right\rangle v_{k+1} = w_{k+1}.$$

Поскольку в силу сказанного $\langle a^*, A^{-1}a^*\rangle > 0$, отсюда имеем

$$v_{k+1} = -\frac{\left\langle a^*, A^{-1}w\right\rangle}{\left\langle a^*, A^{-1}a^*\right\rangle} - \frac{w_{k+1}}{\left\langle a^*, A^{-1}a^*\right\rangle}.$$

Подставляя это выражение для v_{k+1} в (19), получаем

$$v = -A^{-1}w + \frac{\left\langle a^*, A^{-1}w\right\rangle A^{-1}a^*}{\left\langle a^*, A^{-1}a^*\right\rangle} + \frac{w_{k+1}A^{-1}a^*}{\left\langle a^*, A^{-1}a^*\right\rangle}.$$

Таким образом, построенные v, v_{k+1} являются решением (17).

В силу сказанного решение (17) v, v_{k+1} представимо в виде

$$\begin{pmatrix} v \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-A^{-1} + bc^*c) & bc^* \\ -bc & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w_{k+1} \end{pmatrix},$$

где $b = \left\langle a^*, A^{-1}a^*\right\rangle^{-1}$, а вектор c определяется соотношением $c = (A^{-1}a^*)^*$. Поэтому для обратной матрицы справедлива формула

$$\left(\frac{\partial F}{\partial(y,\lambda)}(x,y,\lambda)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} (-A^{-1} + bc^*c) & bc^* \\ -bc & -b \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Следовательно, для каждого $x \neq 0$ уравнение (16) имеет решение $(y,\lambda)(x)$, причем это решение единственно, поскольку в вогнутой задаче максимизации (5) принцип Лагранжа является достаточным условием максимума, точка максимума единственна и в силу условия регулярности (14) соответствующий ей множитель Лагранжа λ определяется единственным образом. Из теоремы о неявной функции следует, что отображение $(y,\lambda)(\cdot)$ непрерывно дифференцируемо в области $x \neq 0$.

Дифференцируя тождество $F(x,(y,\lambda)(x)) \equiv 0$ по переменной x, получим

$$\frac{\partial F}{\partial(y,\lambda)}(x,y,\lambda)\frac{\partial(y,\lambda)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial(y,\lambda)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial(y,\lambda)}(x,y,\lambda)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda).$$

Отсюда в силу формулы (20) и очевидного тождества

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

учитывая, что в силу (15) $b = x / \lambda$, окончательно получаем (6). ■

Доказательство леммы 2. Функция Лагранжа для задачи (8) имеет вид

$$L(x,y,\lambda) = -u(y) + \lambda(\langle x,y\rangle - I(x)).$$

В силу принципа Лагранжа существует множитель Лагранжа $\lambda \geq 0$ такой, что

$$-u'(y) + \lambda x = 0, \quad \langle x,y\rangle = I(x). \tag{21}$$

Введем в рассмотрение отображение $\Phi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, действующее по формуле

$$\Phi(x,y,\lambda) = \big(u'(y) - \lambda x, \langle x,y\rangle - I(x)\big).$$

Тогда соотношения (21) эквивалентны уравнению

$$\Phi(x,y,\lambda) = 0 \tag{22}$$

относительно параметра x и неизвестных (y,λ).

Покажем, что для этого уравнения выполнены предположения теоремы о неявной функции, т.е. что матрица $\dfrac{\partial\Phi}{\partial(y,\lambda)}(x,y,\lambda)$ невырождена. Заметим, что для любых $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^k$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ в силу (21) имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(y,\lambda)}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{A} & -x^* \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что для любых w, w_{k+1} линейная система

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & -x^* \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w_{k+1} \end{pmatrix} \tag{23}$$

имеет решение v, v_{k+1}. При этом в силу сделанных предположений матрица $\overline{A}$ отрицательно определена (и, значит, невырождена) и $x \neq 0$.

Проведем рассуждения, аналогичные используемым при доказательстве леммы 1. Перепишем рассматриваемую систему в эквивалентном виде

$$\overline{A}v - x^* v_{k+1} = w, \quad \langle x^*, v\rangle = w_{k+1}. \tag{24}$$

Имеем $\overline{A}v = w + x^* v_{k+1}$, откуда

$$v = \bar{A}^{-1}w + \bar{A}^{-1}x^* v_{k+1}. \tag{25}$$

Подставив это выражение для v во второе равенство в (24), получаем

$$\left\langle x^*, \bar{A}^{-1}w \right\rangle + \left\langle x^*, \bar{A}^{-1}x^* \right\rangle v_{k+1} = w_{k+1}.$$

Поскольку в силу сказанного $\langle x^*, \bar{A}^{-1}x^* \rangle < 0$, отсюда имеем

$$v_{k+1} = -\frac{\left\langle x^*, \bar{A}^{-1}w \right\rangle}{\left\langle x^*, \bar{A}^{-1}x^* \right\rangle} + \frac{w_{k+1}}{\left\langle x^*, \bar{A}^{-1}x^* \right\rangle}.$$

Подставляя это выражение для v_{k+1} в (25), получаем

$$v = \bar{A}^{-1}w - \frac{\bar{A}^{-1}x^* \left\langle x^*, \bar{A}^{-1}w \right\rangle}{\left\langle x^*, \bar{A}^{-1}x^* \right\rangle} + \frac{\bar{A}^{-1}x^* w_{k+1}}{\left\langle x^*, \bar{A}^{-1}x^* \right\rangle}.$$

Таким образом, построенные v, v_{k+1} являются решением (23). Следовательно, решение (23) v, v_{k+1} представимо в виде

$$\begin{pmatrix} v \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{A}^{-1} - \bar{b}\bar{c}^*\bar{c}) & \bar{b}\bar{c}^* \\ -\bar{b}\bar{c} & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w_{k+1} \end{pmatrix},$$

где $\bar{b} = \left\langle x^*, \bar{A}^{-1}x^* \right\rangle^{-1}$, а вектор $\bar{c}$ определяется соотношением $\bar{c} = (\bar{A}^{-1}x^*)^*$. Поэтому для обратной матрицы справедлива формула

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial (y, \lambda)}(x, y, \lambda) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} (\bar{A}^{-1} - \bar{b}\bar{c}^*\bar{c}) & \bar{b}\bar{c}^* \\ -\bar{b}\bar{c} & \bar{b} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Следовательно, для каждого x уравнение (22) имеет решение $(y, \lambda)(x)$. Причем это решение единственно, поскольку в задаче максимизации (8) принцип Лагранжа является достаточным условием максимума. Точка максимума единственна и соответствующий ей множитель Лагранжа λ определяется единственным образом. В силу теоремы о неявной функции отображение $(y, \lambda)(\cdot)$ непрерывно дифференцируемо. Дифференцируя тождество $\Phi(x, (y, \lambda)(x)) \equiv 0$ по переменной x, имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (y, \lambda)}(x, y, \lambda) \frac{\partial (y, \lambda)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial(y,\lambda)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(y,\lambda)}(x,y,\lambda)\right)^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,\lambda).$$

Отсюда в силу формулы (26), равенства

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \\ y_1 - \frac{\partial I}{\partial x_1}(x) & y_2 - \frac{\partial I}{\partial x_2}(x) & \dots & y_k - \frac{\partial I}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix},$$

и того, что в силу (21) $\lambda = \| u'(y) \| \cdot \| x \|^{-1}$, окончательно получаем (9). ■

Доказательство леммы 3. Поскольку симметрическую матрицу можно ортогональным преобразованием привести к диагональному виду, существует такая ортогональная матрица T, что $H = T^{-1}ZT$, где Z – диагональная матрица с элементами λ_i, $i = \overline{1,k}$.

Используя равенства $H = H^* = T^{-1}ZT$ и $T^{-1} = T^*$ (ортогональность), сделаем следующее преобразование матрицы из формулы (10):

$$H - \frac{(Hh^*)\left(Hh^*\right)^*}{\langle Hh^*, h^*\rangle} = H - \frac{Hh^*hH}{hHh^*} = T^*ZT - \frac{T^*Z(Th^*)(hT^*)ZT}{(hT^*)Z(Th^*)} =$$

$$= T^*ZT - \frac{T^*Zz^*(Zz^*)^*T}{zZz^*} = T^{-1}\left(Z - \frac{(Zz^*)\left(Zz^*\right)^*}{\langle Zz^*, z^*\rangle}\right)T,$$

где $z^* = Th^*$. Так как норма линейного оператора не зависит от выбора базиса пространства, то полученное равенство показывает, что достаточно доказать оценку (11) для оператора $\mathcal{H}$, заданного формулой (10), в которой матрица $H = Z$, что мы и будем далее предполагать.

Таким образом, имеем

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}, \qquad (Hh^*)\left(Hh^*\right)^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 h_1^2 & \lambda_1\lambda_2 h_1 h_2 & \dots & \lambda_1\lambda_k h_1 h_k \\ \lambda_2\lambda_1 h_2 h_1 & \lambda_2^2 h_2^2 & \dots & \lambda_2\lambda_k h_2 h_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k\lambda_1 h_k h_1 & \lambda_k\lambda_2 h_k h_2 & \dots & \lambda_k^2 h_k^2 \end{pmatrix},$$

$$\langle Hh^*, h^*\rangle = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i h_i^2.$$

Рассмотрим два линейных оператора $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$,

$$\mathcal{H}_1 \xi = H\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \qquad \mathcal{H}_2 \xi = \frac{(Hh^*)\left(Hh^*\right)^*}{\langle Hh^*, h^* \rangle} \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k.$$

Имеем

$$\| \mathcal{H}_1 \| = \max_{\|\xi\|=1} \| H\xi \| = \max_{\|\xi\|=1} \max_{i=\overline{1,k}} |\lambda_i \xi_i| = \max_{i=\overline{1,k}} |\lambda_i|;$$

$$\| \mathcal{H}_2 \| = \left| \langle Hh^*, h^* \rangle \right|^{-1} \max_{\|\xi\|=1} \| (Hh^*)\left(Hh^*\right)^* \xi \|.$$

Так как H – знакоопределенная матрица, то ее собственные значения λ_i, $i = \overline{1,k}$, одного знака. Следовательно,

$$\| \mathcal{H}_2 \| = \left(\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| h_i^2 \right)^{-1} \max_{\|\xi\|=1} \| (Hh^*)\left(Hh^*\right)^* \xi \| = \left(\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| h_i^2 \right)^{-1} \max_{\|\xi\|=1} \max_{i=\overline{1,k}} \left| \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j h_i h_j \xi_j \right| =$$

$$= k \left(\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| h_i^2 \right)^{-1} \max_{i=\overline{1,k}} \lambda_i^2 h_i^2 = k \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| h_i^2 \right)^{-1} \lambda_{\bar{i}}^2 h_{\bar{i}}^2,$$

где

$$\bar{i} = \operatorname{Argmax} \left\{ \lambda_i^2 h_i^2 \mid i = \overline{1,k} \right\}.$$

Тогда $\| \mathcal{H}_2 \| \le k \left(|\lambda_{\bar{i}}| h_{\bar{i}}^2 \right)^{-1} \lambda_{\bar{i}}^2 h_{\bar{i}}^2 = k |\lambda_{\bar{i}}| \le k \max_{i=\overline{1,k}} |\lambda_i|$.

Следовательно, $\| \mathcal{H} \| \le (k+1) \max_{i=\overline{1,k}} |\lambda_i|$.

Отсюда следует (11). ■

Доказательство теоремы 2. Оценим константу Липшица отображения S. Обозначим через $\operatorname{lip}(S|M)$ точную нижнюю грань всех чисел $\beta \ge 0$ таких, что отображение S удовлетворяет на M условию Липшица с константой β. Тогда

$$\operatorname{lip}(S|M) = \sup_{p \in \operatorname{int} M} \| \frac{\partial S}{\partial p}(p) \|.$$

Для любого $p \in \operatorname{int} M$ имеем

$$\frac{\partial S}{\partial p}(p) = \frac{\partial (y_+ - y_-)}{\partial (y_+, y_-)}(p) \frac{\partial (y_+, y_-)}{\partial (\alpha p, -p)}(p) \frac{\partial (\alpha p, -p)}{\partial p}(p).$$

Тогда в силу леммы 1 для $p \in \operatorname{int} M$

$$\frac{\partial S}{\partial p}(p) = B\left(A^{-1} - \frac{\left(A^{-1}a^*\right)\left(A^{-1}a^*\right)^*}{\langle A^{-1}a^*, a^*\rangle} \right) C,$$

где $A = \| p \| \cdot \| \varphi'(y_+, y_-) \|^{-1} \varphi''(y_+, y_-), \quad a = \varphi'(y_+, y_-),$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу леммы 3 имеем

$$\operatorname{lip}(S\,|M) \le \left(2 \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \right)^{-1} (n+1) \| \varphi_1 \|_C \| \lambda \|_C = \tilde{\beta}(\sigma).$$

Оценим $\operatorname{cov}(D\,|M)$. Из теоремы 4 из [13] следует, что

$$\operatorname{cov}(D\,|M) = \inf_{p \in \operatorname{int} M} \operatorname{cov}(D\,|p) = \inf_{p \in \operatorname{int} M} \operatorname{cov}(\frac{\partial D}{\partial p}(p)). \tag{27}$$

В силу леммы 2 для $p \in \operatorname{int} M$

$$\frac{\partial D}{\partial p}(p) = \bar{\mathcal{A}}(p) + \bar{\bar{\mathcal{A}}}(p),$$

где $\bar{\mathcal{A}}(p), \bar{\bar{\mathcal{A}}}(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейные операторы, действующие по формулам

$$\bar{\mathcal{A}}(p)\xi = \frac{\bar{A}^{-1} p^* (I'(p) - y)}{\langle \bar{A}^{-1} p^*, p^* \rangle} \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\bar{\bar{\mathcal{A}}}(p)\xi = \bar{a}\left(\bar{A}^{-1} - \frac{(\bar{A}^{-1}p^*)\left(\bar{A}^{-1}p^*\right)^*}{\langle \bar{A}^{-1}p^*, p^* \rangle} \right) \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \bar{A} = u''(y), \quad \bar{a} = \| u'(y) \| \cdot \| p \|^{-1}.$$

Следовательно, согласно приведенной выше теореме о возмущении

$$\operatorname{cov}(\frac{\partial D}{\partial p}(p)) = \operatorname{cov}\left(\bar{\mathcal{A}}(p)\right) - \operatorname{lip}\left(\bar{\bar{\mathcal{A}}}(p)\right).$$

Заметим, что

$$\operatorname{cov}\left(p^*(I'(p)-y)\right)=\| p\| \sum_{i=1}^{n} |I'_{p_i}(p)-y_i(p)|,$$

так как линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и определяемый матрицей $p^*(I'(p)-y)$, отображает единичный шар с центром в нуле в отрезок с концами в точках $\sum_{i=1}^{n} |I'_{p_i}(p)-y_i(p)|\, p$ и $-\sum_{i=1}^{n} |I'_{p_i}(p)-y_i(p)|\, p$.

Следовательно,

$$\operatorname{cov}\left(\bar{\mathcal{A}}(p)\right)\ge 2\left(\|\bar\lambda\|_C \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i2}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}} \min_{p\in M} \sum_{i=1}^{n} |I'_{p_i}(p)-y_i(p)|\, u_2,$$

В силу леммы 3 имеем

$$\operatorname{lip}\left(\bar{\bar{\mathcal{A}}}(p)\right)\le \frac{\|u'(y)\|}{\|p\|}(n+1)\max_{i=\overline{1,n}}\left|\bar\lambda_i(y)\right| \le (n+1)\|u_1\|_C \|\bar\lambda\|_C \left(\max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}.$$

Следовательно, в силу (27),

$$\operatorname{cov}(D|M)\ge 2\left(\|\bar\lambda\|_C \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i2}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}} \min_{p\in M} \sum_{i=1}^{n} |I'_{p_i}(p)-y_i|\, u_2 -$$

$$-(n+1)\|u_1\|_C \|\bar\lambda\|_C \left(\max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1} = \tilde\alpha(\sigma).$$

Из предположений теоремы и неравенств $\operatorname{cov}(D|M)\ge\tilde\alpha(\sigma)$, $\operatorname{lip}(S|M)\le\tilde\beta(\sigma)$ следует, что существуют положительные числа $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ такие, что $\tilde\beta(\sigma)<\bar\beta<\bar\alpha<\tilde\alpha(\sigma)$, $\tilde\gamma(\sigma)<\bar\alpha-\bar\beta$, отображение D является $\bar\alpha$-накрывающим на множестве M, а отображение S является $\bar\beta$-липшицевым на множестве M. Поскольку $\rho_Y(D(\tilde c),S(\tilde c))=\tilde\gamma(\sigma)$, из предположения 2) теоремы следует, что $\rho_Y(D(\tilde c),S(\tilde c))\le\bar\alpha-\bar\beta$. Таким образом, согласно теореме 1 из [13], существует вектор $p\in X$ такой, что $D(p)=S(p)$ и

$$\rho_X(p,\tilde c)\le\frac{1}{\tilde\alpha-\tilde\beta}\rho_Y(D(\tilde c),S(\tilde c)).$$

Из последнего неравенства следует, что $p\in\operatorname{int}M$, поскольку $M=B_X(\tilde c,1)$, а $\rho_Y(D(\tilde c),S(\tilde c))=\tilde\gamma(\sigma)<\bar\alpha-\bar\beta$. Поэтому $c_{i1}<p_i<c_{i2}$ для любого $i=\overline{1,n}$. ■

Доказательство утверждения 1. Положим

$$K=\mathop{\times}_{i=1}^{n}\left[\left(nc_{i2}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j1};\left(nc_{i1}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j2}\right],$$

где знак "×" означает декартово произведение множеств, т.е. K – n-мерный параллелепипед, являющийся декартовым произведением соответствующих отрезков. Тогда для рассматриваемой модели

$$\tilde{\alpha}(\sigma) = 2\left(\underline{\max_{i=1,n}}\frac{c_{i2}}{c_{i2}-c_{i1}}\max_{y\in K} y_i^2\right)^{-1}\underline{\max_{i=1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}} \times \min_{y\in K}\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i - y_i|\,\underline{\max_{i=1,n}} y_i^{-2} -$$

$$-(n+1)\max_{y\in K}\underline{\max_{i=1,n}} y_i^{-1}\,\underline{\max_{i=1,n}} y_i^2\left(\underline{\max_{i=1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1} \geq$$

$$\geq 2n\left(\underline{\max_{i=1,n}}\left(c_{i1}(c_{i2}-c_{i1})^{-1}c_{i2}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j2}\right)\right)^{-1}\underline{\max_{i=1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}} \times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\min_{\substack{k,m=1,2,\\ k\neq m}}\left|\gamma_i - \left(nc_{im}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{jk}\right|\underline{\max_{i=1,n}} c_{i1}^2\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j2}\right)^{-2} -$$

$$-\frac{n+1}{n}\underline{\max_{i=1,n}} c_{i2}\,\underline{\max_{i=1,n}} c_{i1}^{-2}\left(\underline{\max_{i=1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j c_{j1}.$$

Кроме того,

$$\tilde{\beta}(\sigma) = \frac{n+1}{2\beta^2}\underline{\min_{i=1,n}}\frac{c_{i2}-c_{i1}}{c_{i1}}, \qquad \overline{y}_i = \left(n(c_{i1}+c_{i2})\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j(c_{j1}+c_{j2}),\ \forall i=\overline{1,n},$$

$$\overline{y}_{+i} = \frac{\alpha(c_{i1}+c_{i2})}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{j1}+c_{j2})^2\right)^{-1/2},\ \forall i=\overline{1,n},$$

$$\overline{y}_{-i} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\beta(c_{i1}+c_{i2})}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{j1}+c_{j2})^2\right)^{-1/2},\ \forall i=\overline{1,n}.$$

Тогда в силу доказанной теоремы, если параметры рассматриваемой модели удовлетворяют условиям (12) и (13), то для нее существует вектор равновесных цен $p=(p_1,...,p_n)$ такой, что $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i=\overline{1,n}$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A. Smith.* An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. 2 Vols. – London, 1776.
2. *L. Walras.* Elements d`Economie Politique Pure. – Lausanne, 1874.
3. *K.J. Arrow, G. Debreu.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica, 1954, v.22, №3.
4. *К. Алипрантис, Д. Браун, О. Беркеншо.* Существование и оптимальность конкурентного равновесия. Пер. с англ. – М.: Мир, 1995.
   C.D. Aliprantis, D.J. Brown, O. Burkinshaw. Existence and optimality of competitive equilibria //

Springer-Verlag. – Berlin: 1990.

5. Handbook of mathematical economics, ed. by *W.Hildenbrand* and *H.Sonnenschein*. – North-Holland: 1991.
6. *И.Г. Поспелов.* Модель поведения производителей в условиях рынка и льготного кредитования // Математическое моделирование, 1995, т.7, №10, с.59–83.
   I.G. Pospelov. Model povedeniia proizvoditelei v usloviiakh rynka i lgotnogo kreditovaniia // Matematicheskoe modelirovanie, 1995, t.7, №10, s.59–83.
7. *С.М. Гуриев, И.Г. Поспелов.* Модель общего равновесия экономики переходного периода // Математическое моделирование, 1994, т.6, №2, с.3–21.
   S.M. Guriev, I.G. Pospelov. Model obshchego ravnovesiia ekonomiki perekhodnogo perioda // Matematicheskoe modelirovanie, 1994, t.6, №2, s.3–21.
8. *А.А. Петров, И.Г. Поспелов, А.А. Шананин.* От Госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур // The Edwin Mellen Press, 1999.
   A.A. Petrov, A.A. Shananin, I.G. Pospelov. Ot Gosplana k neeffektivnomu rynku: matematicheskii analiz evolyutsii rossiiskikh ekonomicheskikh struktur // The Edwin Mellen Press, 1999.
9. *А.В. Рудева, А.А. Шананин.* Вариационные неравенства для экономического равновесия в модели с дефицитом оборотных средств производителя // Вестник Московского университета. Сер.15, Вычислительная математика и кибернетика, 2007, №4, с.38–45.
   англ. пер.: *A.V. Rudeva, A.A. Shananin.* Variational inequalities for economic equilibrium in the model with the deficit of the working capital // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2007, v.31, №4, p.170–178.
10. *А.А. Шананин.* Использование вариационных неравенств для доказательства существования конкурентного равновесия // Математическое моделирование, 2001, т.13, №5, с.29-36.
    A.A. Shananin. Ispolzovanie variatsionnykh neravenstv dlia dokazatelstva sushchestvovaniia konkurentnogo ravnovesiia // Matematicheskoe modelirovanie. 2001, t.13, №5, s.29–36.
11. *А.А. Шананин.* Двойственность для задач обобщенного программирования и вариационные принципы в моделях экономического равновесия // Доклады РАН, 1999, т.366, №4, с.462–464.
    A.A. Shananin. Dvoistvennost dlia zadach obobshchennogo programmirovaniia i variatsionnye printsipy v modeliakh ekonomicheskogo ravnovesiia // Doklady RAN, 1999, t.366, №4, s.462–464.
12. *А.В. Арутюнов.* Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений // Ж. выч. математики и мат. физики, 2012, т.52, №11, с.1947–1950.
    англ. пер.: *A.V. Arutynov.* An iterative method for finding coincidence points of two mappings // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2012, v.52, №11, p.1483–1486.
13. *A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications, 2009, v.5, №1, p.5-16.
14. *А.В. Арутюнов.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения, 2014, т.48, №1, с.89–93.
    англ. пер.: *A.V. Arutynov.* Coincidence points of two maps // Functional Analysis and its Applications, 2014, v.48, №1, p.72–75.
15. *А.В. Арутюнов.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады академии наук, 2007, т.416, №2, с.151–155.
    англ. пер.: *A.V. Arutynov.* Covering mappings in metric spaces and fixed points // Doklady Mathematics, 2007, v.76, № 2, p.665–668.
16. *А.В. Арутюнов.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Мат. заметки, 2009, т.86, вып.2, с.163–169.
    англ. пер.: *A.V. Arutynov.* Stability of coincidence points and properties of covering mappings // Mathematical Notes, 2009, v.86, №2, p.153–158.

Поступила в редакцию 13.11.14