

מהירות רגעית של עגלה במישור משופע

העריכה האחרונה: 11.9.16

על ידי: גיל בן-ארי, יוליה פריזאנט.

לפני קריאת התדריך יש לוודא הבנה של המונחים הבאים

אינטרפולציה, אקסטרפולציה, הגדרת הנגזרת, הגדרת הגבול, Artifact (error)

מבוא

קיימים פערים בין פיסיקה תיאורטית לפיסיקה ניסויית וכאשר מתכננים ניסוי יש להתייחס לפערים אלו ולנסות לגשר עליהם על מנת שהניסוי יוכל לאמת את התיאוריה. פער אחד הוא חוסר היכולת לבצע פעולות מתמטיות בסיסיות מסוימות על נתונים ניסויניים. בניסוי זה נבחן זאת על פעולת הנגזרת ונמצא כלים להתמודדות עם הבעיה.

הגדרת הנגזרת לעומת גזירה דיסקרטית

בהינתן מסלול תיאורטי של גוף המתואר על ידי הפונקציה $x(t)$, כדי לחשב את המהירות הרגעית של הגוף בזמן t_0 כלשהו יש לגזור את פונקציית המסלול:

$$v(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt}$$

כאשר ההגדרה המתמטית של הנגזרת היא

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

ישנן שתי בעיות עקרוניות עם ההגדרה הזאת לצורך ביצוע ניסוי. הראשונה היא הקביעה מה צריך להיות הערך של Δt על מנת לספק את דרישות הגבול, כיוון שברור שלא ניתן למדוד קבועי זמן אינפיטיסימליים קטנים כרצוננו. הבעיה השנייה היא הצורך לדעת את הערכים של הפונקציה $x(t)$ כפונקציה רציפה. בניסוי תמיד נמדד אוסף סופי של ערכים בדידים ואיננו יודעים את הערכים בנקודות הזמן שלא נמדדו באופן רציף. כדי להתמודד עם הבעיות הנ"ל יש להגדיר **נגזרת דיסקרטית (בדידה)**.

נניח שמדדנו את המקום של הגוף במרווחי זמן קבועים של Δt וכעת יש בידנו סדרה של ערכים שמתארים את מקום הגוף $x[0], x[1], \dots, x[i], \dots, x[N]$, כאשר מתקיים $x(i \cdot \Delta t) = x[i]$. נוכל לרשום קירוב של הנגזרת בזמן $t_0 = i \cdot \Delta t$ בתור

$$\frac{dx(t_0)}{dt} \approx \frac{x[i+1] - x[i]}{\Delta t}$$

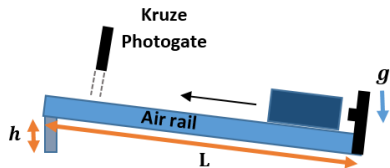
הנוסחה הזו היא רק אחת מן האפשרויות לחישוב הנגזרת הדיסקרטית וישנם סוגים רבים של נגזרות כאלו [1]. נוסחאות שונות מתאימות למקרים שונים, כגון המודל התיאורטי או מידע ספציפי אותו מנסים להפיק מהנתונים. לצורך הניסוי אנו נבחר את ההגדרה של נגזרת דיסקרטית מרכזית (ראה Central Difference):

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = \frac{dx[i]}{dt} \approx \frac{x[i+n] - x[i-n]}{\Delta t \cdot 2n}$$

כאשר n מספר שלם וחיובי. יש לשים לב שעל מנת להתקרב להגדרת הגבול ככל הניתן נרצה ש- n יהיה קטן. אם ניקח n גדול הנוסחה תחשב את המהירות הממוצעת, ולא את המהירות הרגעית.

מערכת הניסוי

כדי לבחון את היכולת למדוד מהירות רגעית של גוף בניסוי, נבצע מדידות של תנועת עגלה במישור משופע. היתרון בבחירת המערכת הזו היא שהתנועה מתבצעת תחת תאוצה קבועה ולכן המהירות הרגעית משתנה בצורה פשוטה יחסית. יתרון נוסף הוא שניתן לשלוט בתאוצה על ידי שינוי השיפוע ולבחור תנאים מבוקרים לביצוע המדידות.



איור 1: מערכת של עגלה הנעה על מסילת אוויר משופעת וגלאי תנועה Kruze. בקצה המסילה ממוקמת גומייה כדי ליצור התנגשות אלסטית.

המערכת מופיעה באיור 1. שיפוע מסילת האוויר נקבע על ידי אורך המסילה $L[m]$ וההגבהה $h[m]$. ההאצה של העגלה נובעת מהכבידה $g \left[\frac{m}{sec^2} \right]$ וגלאי



איור 2: גומייה המתחברת לקצה המסילה ומאפשרת התנגשות אלסטית

תנועה הממוקם על המסילה מודד את מיקום העגלה כאשר היא עוברת דרכו. בקצה המסילה יש גומייה (איור 2) אשר מבטיחה שהעגלה תבצע התנגשות אלסטית (ועדינה) עם קצה המסילה. אם משחררים את העגלה ממקום מסוים על המסילה נצפה שלאחר "ההתנגשות" היא תגיע שוב, בשיא גובה המסלול שלה, לאותו מקום. באופן זה ניתן ליצור תנועה מבוקרת ולוודא ששיא התנועה יתקבל בתחום הגלאי.

גלאי תנועה על שם פרופסור קרוזה

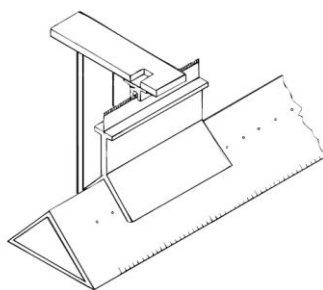
בניסוי זה נשתמש בגלאי שפותח באוניברסיטת אילינוי, בארה"ב, ונכנה אותו על שם מפתחו, גלאי קרוזה (Ulrich Kruse).



(א)

התקן זה (איור 3א) מורכב מזוג שערים אופטיים ורצועת פלסטיק שקופה עליה מודפסים פסים שחורים ואטומים שמוקנת על כל עגלה (ראו איור 3ב). הפסים מודפסים בעובי אחיד ובצפיפות אחידה לאורך הרצועה. כל אחד משני השערים האופטיים מורכב מדיודה שפולטת אור אינפרה אדום ומולה תא פוטואלקטרי שמפיק אות חשמלי כאשר האור פוגע בו.

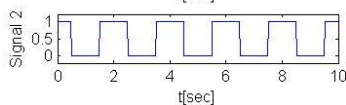
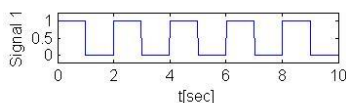
בזמן תנועת העגלה הרצועה המותקנת עליה עוברת דרך השערים. הפסים שעל הרצועה חוסמים את האור מלהגיע מצד אחד של השער לצד השני, ובכך מפסיקים לסירוגין את האות החשמלי שמייצר התא הפוטואלקטרי. האות החשמלי הזה מועבר לתוכנה שמנתחת את הזמנים בהם מתקבל אות ומתן הוא מופסק.



(ב)

כדי שהגלאי יוכל להבחין גם בכיוון התנועה, שני השערים האופטיים ממוקמים כך שהמרחק ביניהם הוא פי 1.25 מהמרחק בין שני פסים. כאשר פס שחור עובר דרך הגלאי, אפשר לקבוע את כיוון תנועת העגלה אם יודעים איזה משני התאים הפוטואלקטריים נכבה ראשון (איור 3ג). התוכנה מנצלת מידע זה כדי לקבוע במדויק כמה פסים עברו בגלאי בכל פרק זמן ומציגה את מספרם כ-"Counts". את ה-Counts יש להמיר ליחידות של מטר כדי לחשב את המרחק שעברה העגלה.

במהלך הניסוי נמדוד בעזרת הגלאי את מקום העגלה x כפונקציה של הזמן t ומתוך המדידות נחשב את המהירות הרגעית של העגלה בשיטות שונות. זאת על מנת להעריך את הדיוק של כל שיטה והיכולת שלה לקרב את פעולת הנגזרת.



(ג)

איור 3: א) גלאי תנועה (ב) רצועת הפלסטיק עם הפסים המודפסים המותקנת על העגלה עוברת דרך הגלאי (ג) האותות החשמליים המתקבלים משני השערים כאשר הרצועה עוברת בגלאי.

שאלות הכנה

1. הוכיחו שאם לוקחים גבול של $\Delta t \rightarrow 0$ בביטויים של הנגזרת הדיסקרטית מתקבלת הנגזרת.
2. מהי הנוסחה לתאוצה שתרגיש העגלה בתנועה? השתמשו בפרמטרים המופיעים באיור 1.
3. חשבו את השגיאה הנגררת בתאוצה.
4. אם קיים חיכוך μ בין העגלה למסילה, מה הנוסחה לתאוצה כאשר העגלה עולה במעלה המסילה? מה הנוסחה לתאוצה כאשר היא יורדת?

מהלך הניסוי

הכנת המערכת

1. הניחו את העגלה על מסילת האוויר. וודאו שגלאי ה-KRUZE מחובר לממשק ושהמתג מצביע על "KRUZE". פתחו את תוכנת ה-KRUZE שעל ה-Desktop. הדליקו את הגלאי בו אתם משתמשים, וודאו שהוא מזהה את העגלה.
2. **איפוס ה-counts נעשה על ידי לחיצה על המספר המוצג.** אזנו את מסילת האוויר כאשר העגלה נמצאת בקרבת הגלאי באמצעות בורג ההגבהה (כמו בניסוי "מהירות ממוצעת"). לאחר האיזון הגביהו קצה אחד של המסילה באמצעות דסקות או פלטות (לא יותר מ-2 כדי לשמור על יציבות המערכת). וודאו שמוקנת הגומייה מאיור 2 על קצה המסילה. אם לא פנו למדריך.

3. שחררו את העגלה כך שתבצע תנועה במעלה המסילה, תגיע לשיא התנועה בתחום הגליל ותחזור במורד המסילה. בחרו את התנאים לניסוי על מנת לקבל מדידות מדויקות (מידת השיפוע, אופן שחרור העגלה, מיקום הגליל, קצב המדידות (Rate) של הגליל, כמות המדידות שהתוכנה שומרת וכו')
4. מדדו את אורך המסילה (L) וגובה ההגבה (h) וחשבו מתוכם את השיפוע של המסילה. העריכו את השגיאה בכל פרמטר.
5. לקביעת ההמרה בין Counts למטרים, העבירו את כל העגלה דרך הגליל. רשמו כמה ספירות מתקבלות עבור כל הפסים שעל רצועת הפלסטיק. חזרו על המדידה כמה פעמים ובדקו שהשגיאה ב-count היא פס בודד לכל היותר. מדדו את אורך הרצועה וחשבו את קבוע ההמרה בין Counts למטרים ואת השגיאה בו.
6. הניחו את העגלה בתחום הגלילי ואפסו את ה-counts.

ביצוע מדידות

7. שחררו את העגלה בצורה מבוקרת ומדדו את מסלול העגלה בשיא התנועה שלה.
8. חזרו על המדידה עבור מגוון תנאים ומצבים (למשל הגבהה, Rate וכו') ושמרו את כל המדידות.
9. צרו גרף של מקום העגלה כפונקציה של הזמן עבור אחת מהמדידות. עליכם למחוק את הנתונים שנשמרו כאשר העגלה הייתה מחוץ לתחום הגלילי.
10. חשבו מהירות רגעית לפי נגזרת דיסקרטית מרכזית עבור $n = 1$ והציגו אותה כפונקציה של הזמן.
11. בצעו באמצעות cftoot רגרסיה לא לינארית למסלול העגלה והתאימו אותו לפולינום מסדר שני. חשבו את המהירות הרגעית לפי תוצאת הרגרסיה. הציגו אותה על אותו גרף של סעיף 10.

משימות לציון נוסף

*שימו לב! לקבלת הציון הנוסף יש לבצע אנליזה מלאה על המדידות הנוספות, להוסיף אותה לדו"ח ולנסח מסקנה משמעותית הרלוונטית לדיון המופיע בדו"ח.

- כאשר המסילה מאוזנת, מדדו את תנועת העגלה במהירויות שונות בכיוונים שונים ביחס למסילה. חשבו את המהירות הרגעית. מה משפיע על דיוק המדידה והשגיאה בתוצאות?
- בדקו את האיזון של המסילה לפי התנועה של העגלה בגליל. דונו בהשפעה של האיזון על תוצאות המדידה.
- תכננו ניסוי למדידת איבוד האנרגיה הקינטית של העגלה כאשר היא מתנגשת בגומייה ובצעו אותו. דונו בהשפעה של איבוד האנרגיה על פירוש התוצאות של מדידת המהירות הרגעית.
- בצעו רגרסיה לינארית של x כפונקציה של שני המשתנים (t, t^2) וחשבו מתוכה את המהירות הרגעית והשוו עם התוצאות למהירות רגעית שהתקבלו מהשיטות האחרות.
- קיימים אלגוריתמים שונים לביצוע אינטרפולציה על נתונים בדידים. מצאו שיטה שלא הוזכרה בתדריך והשתמשו בה לביצוע התאמה של הנתונים למודל או החלקה שלהם. הסבירו את השיטה והשוו את תוצאותיה לשיטות האחרות.
- בעיבוד הנתונים, חשבו את קבוע הכבידה מהתאוצות שהתקבלו בשיטות השונות והשוו ביניהן ובין הערך המקובל בספרות לאזור.

עיבוד הנתונים

בניסוי אספתם מגוון של נתונים עבור תנאים שונים של המדידה. יש לבחור מתוך נתונים שאספתם אילו מדידות להציג בדו"ח. את עיבוד הנתונים יש לבצע רק על המדידות עליהן בחרתם לדווח בדו"ח.

1. חשבו את המהירות הרגעית של התנועה במישור המשופע לפי הגדרת הנגזרת הדיסקרטית עבור ערכי n שונים. בחרו תוצאות שמציגות את ההשפעה של הבחירה ב- n והציגו אותן בגרף אחד. דונו בשיקולים לבחירת n כאשר מבצעים גזירה דיסקרטית לאור תוצאות הניסוי.
2. בצעו רגרסיה לינארית על המהירות הרגעית ל- n שבחרתם. מהי התאוצה של התנועה?
3. חשבו את התאוצה הרגעית לפי גזירה דיסקרטית של המהירות הרגעית. חשבו את התאוצה לפי הנוסחה לנגזרת שנייה דיסקרטית

$$\frac{d^2x[i]}{dt^2} = \frac{x[i+n] - 2 \cdot x[i] + x[i-n]}{(\Delta t \cdot n)^2}$$

והשוו בין התאוצות שהתקבלו מכל שיטה. סמנו על הגרף את נקודת השיא של המסלול. האם יש הבדלים בתאוצה בעלייה לעומת התאוצה בירידה? מדוע?

4. קיבעו מהי נקודת שיא המסלול x_0 בה מהירות העגלה מתאפסת וחלקו את מסלול העגלה לעלייה ולירידה. בצעו שתי התאמות נפרדות עבור העלייה והירידה באמצעות ה-Custom Equation של cftool אשר הפרמטר החופשי היחיד הוא התאוצה באופן הבא:

$$x = x_0 + \frac{a}{2} t^2$$

*בהתאמה של העלייה יש להפוך את סדר הנתונים כדי לדמות "ירידה" שתתאים לנוסחה.
5. חשבו את החיכוך לפי ההבדל בין התאוצה בעליה לתאוצה בירידה. השוו את מקדם החיכוך שמצאתם לטבלאות של מקדמי חיכוך (Coefficients of Friction). האם זו הייתה מידת החיכוך שנצפתה בניסוי? מה ההסבר לכך?

מושגים, שיטות ומכשירים שסטודנט יכיר וידע להשתמש אחרי הגשת הדו"ח בנושא:

גלאי קרוזה, שער אופטי, תא פוטואלקטרי, נגזרת דיסקרטית, Artifacts, Central Finite Difference.

רשימת מקורות:

[1] ספר בנושא Finite Difference:

Milne-Thomson, L. M. (2000). *The calculus of finite differences*. American Mathematical Soc.

[2] תמונת גלאי הקרוזה נלקחה מתוך:

<http://www.digikey.com/product-detail/en/tt-electronics-optek-technology/OPB822SD/365-1719-ND/414258>

[3] תיאור של ניסוי גלילי למדידת התאוצה של גוף במישור משופע:

Johnson, G. (2009). *The ten most beautiful experiments*. Vintage Books USA. Pg. 3-16