

תדריך לניסוי הראשון מטוטלת

כתבה: גיל בן ארי

ערכו: ד"ר יוליה פריזאנט, ליטל זרביב-שני

אישר: פרופ' עמית קניגל

העריכה האחרונה: 24.10.2017

לפני קריאת התדריך יש לוודא הבנה של המונחים הבאים

שיווי משקל, זמן מחזור, תנע זוויתי, מטוטלת מתמטית, מטוטלת פיזיקלית (קורס פיזיקה 1פ'1מ'1) (השיטה המדעית, רגרסיה לינארית, SI (International System of Units), אי-וודאות במדידה, שגיאה של מכשירי מדידה הסברים מפורטים של המונחים מופיעים ב"נושאים במחקר, מדידות ואנליזת נתונים".

מבוא

בניסוי זה נתנסה במחקר לפי שלבי השיטה המדעית, ונשתמש בה על מנת לחקור מערכת מכנית של מטוטלת פשוטה.

תצפית

ניקח משקולת וניתלה אותה על חוט. הזזה של המשקולת ממצב של מנוחה ושחרורה יגרמו להתחלת תנועה מחזורית של המשקולת. המטוטלת תשמור על קצב קבוע של תנודות ושחרור חוזר מאותם תנאים יגרום שוב לתנועה מחזורית של המשקולת באותו קצב במסלול דומה.

ניתן ליצור מגוון רחב של מסלולים במערכת זו: אופן ההסטה והשחרור יקבע אם התנועה תהיה חד ממדית (קשת במרחב) או דו ממדית (אליפסה במרחב). הסטה גבוהה יחסית תיצור חלקים בתנועה בהן החוט אינו מתוח והמחזוריות אינה ברורה. שימוש בחוט עבה, גמיש וכבד יגרום למטוטלת לבצע תנועה יותר מסובכת מאשר עם חוט דק וקל. כמו כן, אם נחכה זמן מה, המערכת תירגע ותחזור לשיווי המשקל ללא תנודות.

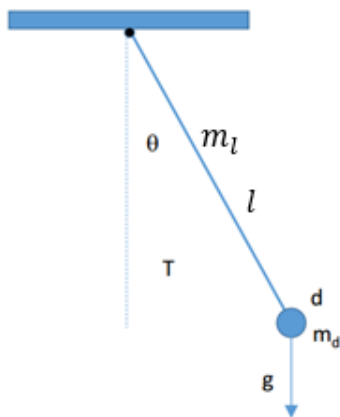
ניתן להבחין שאם נשנה את אורך המטוטלת, הזמן האופייני לתנועה המחזורית ישתנה. מטוטלות ארוכות יתנדנדו לאט יותר ממטוטלות קצרות. נחליף את המשקולת במשקולת כבדה יותר ונראה כי הקצב לא השתנה באופן מובחן.

שאלת חקר

ישנן שאלות רבות שניתן לחקור במערכת, אך אנו נתעניין בשאלה מהם הפרמטרים המשפיעים על אופי התנועה וקובעים את מסלול המשקולת. עלינו למקד את השאלה ולכן נבחר לבדוק כיצד אורך המטוטלת משפיע על זמן המחזור שלה, ואיזה קשר פונקציונאלי מתאר תלות זו.

כדי לענות על השאלה וכחלק מהמיקוד שלה, נדון במקרה פשוט ככל הניתן. נבחר משקולת כבדה וקטנת נפח וחוט ארוך, דק וקל. נשחרר את המטוטלת ממנוחה, נוודא שהחוט מתוח לאורך כל התנועה על ידי שחרור מגבהים נמוכים וננסה לענות על השאלה רק ביחס לתחילת התנודות ולא לשלב בו הן דועכות לשיווי משקל.

תנאים אלו מגדירים בעיה מוכרת בפיסיקה הנקראת "מטוטלת מתמטית" [1]. זו המטוטלת הפשוטה ביותר שניתן לתאר והיא מניחה "אידיאליות" של רכיבי המערכת במובן של מסה נקודתית, חוסר חסר משקל, ומערכת ללא איבודי אנרגיה כלל.



איור 1: מערכת של מטוטלת מתמטית

הפרמטרים הקיימים במערכת מופיעים באיור 1 והם: l [m] - אורך החוט, m_l [kg] - מסת החוט, d [m] - קוטר המטוטלת, m_d [kg] - מסת המטוטלת, θ_0 [Rad] - הזווית בה משחררים את המטוטלת (אמפליטודת התנועה ההתחלתית). T [sec] מציינ את זמן המחזור של המטוטלת ו- g [$\frac{m}{sec^2}$] מציינ את קבוע הכבידה.

התנאים שאנו דורשים מהמערכת, כלומר הנחות המודל, הם:

$$d \ll l; m_l \ll m_d$$

והשאלה שאנו חוקרים, בהינתן $T = f(l)$, היא מהי $f(l)$.

היפותזה (מודל)

ישנן שתי גישות לפתרון הבעיה של מטוטלת מתמטית: מודל תיאורטי ומודל אמפירי. המודל התיאורטי הוא פיתוח של משוואות הכוחות במערכת לפי חוקי ניוטון ופתרון – מסלול התנועה של המטוטלת. הפיתוח מופיע ב[1] ומומלץ לעיין בו. שימוש במודל זה מסתיר בחובו את ההנחה כי חוקי ניוטון תקפים עבור המערכת הזו ומספקים תיאור מדויק של התהליכים בה.

המודל האמפירי, בניגוד לזה התיאורטי, לא מניח ידע קודם על אופן פעולת המערכת, אלא מבוסס על התצפיות בלבד. החוזק של מודל שכזה הוא בכך שהמסקנות שיבועו ממנו לא נשענות על אף תיאוריה או תפיסה לגבי המערכת, שניתן

אולי להפריך בעתיד. חסרונות של מודל אמפירי הם שהוא לא מספק הסבר לתופעה ובדרך כלל מתאר תחום מצומצם של בעיות ומערכות. מודל זה משתמש בכלי של אנליזת ממדים וזהו המודל אותו נבחן בניסוי.

אנליזת ממדים (DIMENSIONAL ANALYSIS)

אנליזת ממדים נובעת מתוך ההנחה הבסיסית שבכל משוואה פיזיקלית, שני צדדי המשוואה הם מאותו ממד [2]. כמו כן, מניחים כי הממד של כל גודל ניתן לייצוג כמכפלה של חזקות של הממדים הבסיסיים. הממדים הבסיסיים במכניקה הם מסה, אורך וזמן. לכן הממד של כל גודל ניתן לייצוג באופן הבא:

$$[\text{גודל}] = [\text{מסה}]^\beta \cdot [\text{אורך}]^\gamma \cdot [\text{זמן}]^\delta$$

לדוגמה, עבור קבוע הכבידה:

$$[g] = [\text{מסה}]^0 \cdot [\text{אורך}]^1 \cdot [\text{זמן}]^{-2}$$

הממד של הגודל קובע באילו יחידות הוא נמדד. במערכת יחידות SI קבוע הכבידה, למשל, יימדד ב- $\frac{m}{sec^2}$ בהתאם לממד שלו.

במעבדת פיסיקה אנו נקפיד לעבוד רק במערכת יחידות של SI ולכן, תחת המוסכמה הזאת, ישנה שקילות בין הממד של גודל ליחידות שלו. שקילות זו מאפשרת לבצע אנליזת ממדים ברישום של היחידות במקום הממדים:

$$[\text{יחידות הגודל}] = [kg]^\beta \cdot [m]^\gamma \cdot [sec]^\delta$$

לפי התנאים שהגדרנו לשאלת החקר, הפרמטרים של הבעיה הם: $T[sec], l[m], g[\frac{m}{sec^2}], m_d[kg]$.

נכתוב את הקשר בין זמן המחזור לפרמטרים האחרים בצורה כללית

$$T = l^\alpha \cdot g^\beta \cdot m_d^\gamma$$

נחליף כל פרמטר בממד שלו

$$[\text{זמן}] = [\text{אורך}]^\alpha \cdot \left[\frac{[\text{אורך}]}{([\text{זמן}]^2)} \right]^\beta \cdot [\text{מסה}]^\gamma$$

ונדרוש שוויון של הממדים של כל צד במשוואה. מדרישה זו נקבל: $\beta = -\frac{1}{2}; \alpha = \frac{1}{2}; \gamma = 0$

ולכן, משיקולי ממדים בלבד, מתקבל הקשר:

$$T = \text{Const} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

כלומר, אנליזת הממדים חוזה תלות של זמן המחזור בשורש אורך המוטלת. כדי לבדוק את ההתאמה של מודל זה לניסוי ננסח אותו באופן כללי יותר:

$$T = A \cdot l^\alpha$$

ונבדוק בניסוי האם $\alpha = 0.5$.

נרצה להשתמש בגרסיה לינארית (ראו פרק בנושא) לחישוב α ולשם כך יש לבצע לינאריזציה למודל. באופן ישיר נוכל לכתוב:

$$\ln(T) = \ln(A) + \alpha \cdot \ln(l)$$

אך בכתיבה זו יש מספר בעיות. הראשונה היא שאין הגדרה ברורה להפעלה של פונקציה מתמטית טהורה על גודל בעל ממדים (כגון לוגריתם, אקספוננט, קוסינוס וכו') ובפיזיקה נשתדל להימנע מכך. בעיה נוספת היא **הגדרת הממד** של הקבוע

A. לפי המודל, הממד של A הוא $\left[\frac{[\text{זמן}]}{[\text{אורך}]} \right]$ אך בניסוח הכללי, הממד שלו תלוי ישירות בערך שיתקבל עבור α ולכן תלוי בתוצאות הספציפיות של הניסוי. בעוד שיש הגיון בכך שערך של גודל מושפע ומשתנה לפי תוצאות הניסוי, הממד של אותו גודל, עקרונית, צריך להיות מוגדר באופן בלתי תלוי בתוצאות הניסוי.

כדי לפתור את שתי הבעיות, נרשום את המשוואה כחסרת יחידות לפני ביצוע הלינאריזציה באופן הבא:

$$\frac{T}{T(l_{\max})} = \frac{A \cdot l^\alpha}{A \cdot l_{\max}^\alpha} \Rightarrow \left(\frac{T}{T(l_{\max})} \right) = \left(\frac{l}{l_{\max}} \right)^\alpha \Rightarrow \ln \left(\frac{T}{T(l_{\max})} \right) = \alpha \cdot \ln \left(\frac{l}{l_{\max}} \right)$$

לסיכום, שאלת המחקר שלנו היא האם הקשר בין $\ln \left(\frac{T}{T(l_{\max})} \right)$ לבין $\ln \left(\frac{l}{l_{\max}} \right)$ הוא אכן ליניארי והאם $\alpha = 0.5$ תחת התנאים שהגדרנו (הנחות המודל).

שימו לב כי בתהליך של הפיכת המשוואה לחסרת יחידות הפרמטר A "נעלם" ממשוואת המודל. ככל שנדרשים פחות פרמטרים לא ידועים לתיאור הבעיה, הסקת המסקנות מתוצאות הניסוי יותר חד משמעית. לכן נשאף לצמצם את מספרם במודל.

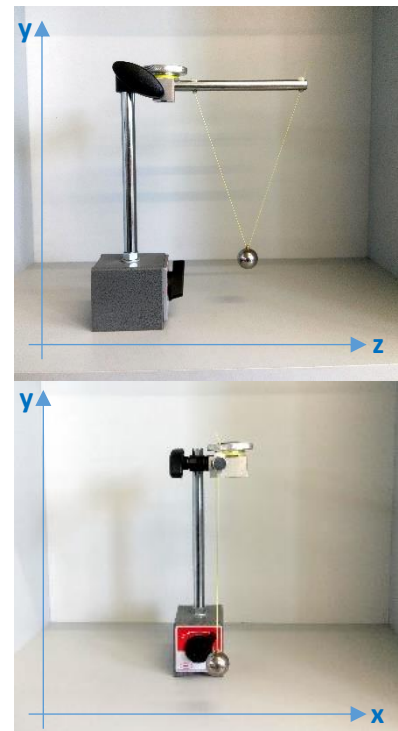
שאלות הכנה

1. מהו ההבדל בין SI למערכות MKS ו-cgs?
2. כיצד ניתן להבטיח חיכוך זניח במערכת? איך בודקים זאת?
3. איך מבטיחים כי $l = \text{const}$?
4. כיצד ניתן למדוד את זווית השחרור של המטוטלת בכלים פשוטים?
5. כיצד ניתן למדוד זמן מחזור? באיזה מכשיר?
6. שרטטו בתוכנה את הגרף הצפוי להצגת התוצאות. ציינו את הצירים של הגרף.
7. חישוב, איזה דיוק ניתן להפיק מצידוד המדידה ואיזה דיוק נדרש לצורך הסקת מסקנות מהניסוי.

מהלך הניסוי

מערכת הניסוי

מערכת הניסוי הינה כדור פלדה התלוי על חוט דייג שקשור בשני צדדיו למוט מתכת אנכי (ראה איור 2) ומעמד למוט מתכת אופקי שמוצמד על ידי מגנט לשולחן העבודה על ידי ידית ON/OFF. על המוט האנכי נמצא בורג עליו מלופף חוט דייג. סיבוב הבורג מאפשר לשנות את אורך המטוטלת. יש לוודא שהכדור נמצא במרכז החוט כך שאורך החוט משני צדיו שווה.



איור 2: מערכת המדידה לניסוי. המערכת נמצאת על המדף של עמדת העבודה. לפני המדידה יש לוודא שמגנט המטוטלת מחזיק את המטוטלת נעול על המדף (מצב ON).

מערכת הניסוי במישור XY (ראה איור 2) מתוארת על ידי המודל שפיתחנו במבוא. למדידת אורך המוטטלת l יש להשתמש בסרגל ובמשפט פיתגורס.

מכשירי המדידה הנמצאים במעבדה כוללים: סרגלים באורך מטר, קליבר, משקל, כדור פלדה, חוט דייג ומעמד למוטטלת. יש להקפיד על שחרור מבוקר של המוטטלת על מנת להשיג מדידות איכותיות בניסוי.

תכנון והכנה לניסוי

1. מדדו את מסת המשקולת וקוטר המשקולת. העריכו את השגיאה עבור כל גודל. האם מתקיימות הנחות המודל?
2. בחרו אורך חוט ומדדו אותו. מהם השיקולים לבחירת האורך? איזה טווח אורכים מתאים לניסוי?
3. מדדו את מידת החיכוך במערכת.
4. שרטטו את הכוחות המופעלים על מערכת הניסוי (כפי שמופיעה באיור 2) והוכיחו שאפשר להשתמש במודל שפיתחנו במבוא עבור מוטטלת מתמטית פשוטה.

כדי לבדוק את מידת החיכוך יש לבחון את דעיכת האמפליטודה של התנודות. אם מניחים שהמערכת מאבדת אנרגיה בקצב קבוע ואז האמפליטודה תדעך בצורה אקספוננציאלית עם קבוע דעיכה אופייני τ [sec].

$$\text{Amplitude}(t) = \text{Const} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

תוך כמה מחזורי תנודות אמפליטודת המוטטלת דועכת למחציתה? כיצד דעיכה זו תשפיע על המדידה? האם יש שיטה פשוטה אחרת להערכת איבוד אנרגיה?

5. מדדו את זמן המחזור של המוטטלת עבור זוויות שחרור שונות. יש למדוד לפחות 10 זוויות, עד לזווית המקסימאלית שאתם מצליחים למדוד. על מנת להגדיל את הדיוק של כל מדידה יש למדוד את הזמן של מספר מחזורים ולחשב זמן ממוצע למחזור. מה משפיע על דיוק מדידה זו?
6. בנו גרף של זמן המחזור כפונקציה של זווית השחרור. נסחו קריטריון לקירוב של "זוויות קטנות" עבור המערכת ובחרו זווית העומדת בקריטריון הנ"ל.

ביצוע הניסוי, אנליזת התוצאות והשוואה עם המודל

7. פיתחו תוכנת MATLAB וצרו קובץ script חדש. תעדו ב-script את ערכי הפרמטרים שמדדתם ויחידותיהם. בקובץ זה אתם תתעדו גם את כל התוצאות של המדידות (והוא יהווה Experiment Log של הניסוי).
8. מדדו את זמן המחזור של המוטטלת עבור אורכי חוט שונים (לפחות 10 אורכים) ששחררתם מהזווית הקטנה שבחרתם.
9. הציגו את התוצאות בגרף מתאים. האם התקבל הגרף לו ציפיתם?
10. בצעו רגרסיה לינארית מתאימה והשוו את תוצאותיה עם המודל. הוסיפו לגרף את עקום הרגרסיה.

משימות לציון נוסף:

*שימו לב! לקבלת הציון הנוסף יש לבצע אנליזה מלאה על המדידות הנוספות, להוסיף אותה לדו"ח ולנסח מסקנה משמעותית הרלוונטית לדיון המופיע בדו"ח.

- בחרו שאלה שעלתה במהלך הניסוי, תכננו עבודה מדידה ובצעו אותה. צרפו את התוצאות והמסקנות לדוח והסבירו כיצד הן משפיעות על תקפות ממצאי הניסוי.
- חישוב על שיטת מדידה מדויקת יותר לניסוי הנ"ל, בצעו את המדידה והשוו בין השיטות.
- חשבו את התלות של זמן המחזור באורך המוטטלת לפי המודל התיאורטי של מוטטלת מתמטית. הוסיפו את העקום התיאורטי לגרף המתאים ודונו בהבדלים בין המודלים ומסקנותיהם.

עיבוד הנתונים (לאחר המעבדה)

העריכו את השגיאה של כל ערך שמדדתם והוסיפו Error Bars לגרפים (ל-MATLAB יש להוריד את הפונקציה errorbarxy.m מחומרי העזר באתר). כתבו דוח מסכם בסגנון של מאמר אקדמי.

הדו"ח המסכם מהווה את השלב האחרון של השיטה המדעית – הסקת מסקנות מהניסוי. הדו"ח הוא המוצר הסופי של המחקר ומסכם את כל הידע שנצבר לאורך התהליך.

- יש לתכנן ולבחור את אופן הצגת התוצאות (גרפים וערכים מדודים) באופן שיבסס ויוביל למסקנות, מבחינת סדר ההצגה ואילו נתונים להציג.
- על הדוח להיות כתוב בסגנון הפונה לקהילה המדעית, אך אין להניח שקורא הדוח מכיר את הניסוי הספציפי מראש.
- יש לפרט את השיקולים שלכם כחוקרים בביצוע הניסוי ובעיבוד התוצאות, כדי לבסס את המסקנות שלכם.
- הנחיות לדרישות מדוח מסכם מופיעות ב"כללים להכנת דוח".

מושגים, שיטות ומכשירים שסטודנט יכיר וידע להשתמש בהם אחרי הגשת הדו"ח בנושא:

שיווי משקל, זמן מחזור, תנע זוויתי, מטוטלת מתמטית, מטוטלת פיזיקלית, השיטה המדעית, רגרסיה לינארית, אי-וודאות במדידה, שגיאה של מכשירי מדידה, אנליזת ממדים, מערכת SI, R^2 , קליבר, שגיאת מדידה ישירה, דעיכה אקספוננציאלית, דו"ח מדעי.

רשימת מקורות:

[1] פיתוח המודל התיאורטי עבור מטוטלת מתמטית מופיע בספר:

Kittel, C. (1962). *Mechanics* (2nd edition). McGraw-Hill, New York, Ch. 7, Pg. 204-207

[2] פירוט העקרונות של אנליזת ממדים מופיע בספר:

Langhaar, H. L. (1951). *Dimensional Analysis and Theory of Models*. John Wiley & Sons, Inc. New York, Ch. 2, Pg. 13-16