ניסוי השראות

במהלך ניסוי זה, נלמד על המושגים של השראה אלקטרומגנטית, חוק פאראדיי וחוק לנץ, שהם עקרונות יסוד השולטים בהתנהגות של שדות אלקטרומגנטיים. נקבל הבנה מעשית של העקרונות הללו וכיצד הם חלים על העולם האמיתי על ידי בניית מערכת של מגנט הנופל דרך צינור מוליך ומדידת הכא״מ המושרה בסליל כשהמגנט נופל דרכו. נמדוד כיצד הכא״מ המושרה מושפע מגורמים שונים, כגון מספר הליפופים בסליל. ניסוי זה גם יעזור להבין את חשיבות השדה האלקטרומגנטי במגוון יישומים, כמו במנועים חשמליים, גנרטורים, שנאים ועוד.

מבוא

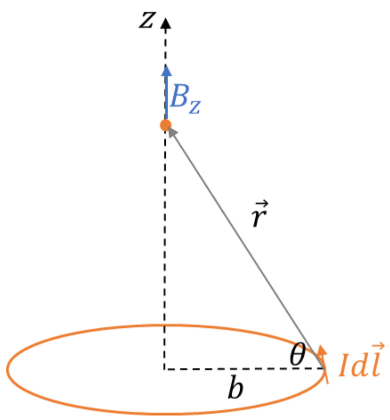
חוק ביו-סבר

חוק ביו-סבר מאפשר חישוב של שדה מגנטי כולל בנקודה כלשהי, כתוצאה מזרם קבוע שזורם בלולאת זרם חשמלי בעל צורה שרירותית.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

כאשר $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$ היא הפארמביליות (חלחלות) המגנטית בוואקום, I הוא עוצמת הזרם הזורם בטבעת, $d\vec{l}$ הינו החלק האינפיניטסימלי של הטבעת עבורה מחשבים את התרומה לשדה המגנטי הכולל ו-$\vec{r}$ ווקטור היוצא מ-$d\vec{l}$ ועד לנקודה בה מחשבים את השדה המגנטי (ראו לדוגמה, איור 1).

שדה מגנטי של טבעת נושאת זרם



איור 1: שדה מגנטי על ציר העובר במרכז טבעת נושאת זרם.

עבור טבעת זרם מעגלית בעלת רדיוס b וזרם קבוע I, השדה המגנטי בכל נקודה על ציר z, אשר ניצב למישור הטבעת ועובר דרך מרכזה, (ראו איור 1) יהיה:

$$B_z = \int dB_z = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{r^3} \int dl = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$$

כאשר $cos\theta = b/r$, $\int dl = \int bd\varphi = 2\pi b$ ורכיבי השדה המגנטי בציר ה-x וה-y מתבטלים עקב הסימטריה הגלילית של הבעיה.

שדה מגנטי של סליל נושא זרם

עבור סליל ניתן לסכום את תרומת השדה המגנטי של כל הטבעות. עבור סליל בגובה h:

$$B_z = \frac{\mu_0 n I b^2}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + b^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{h}{2}\right)^2 + b^2}} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{h}{2}\right)^2 + b^2}} \right) \quad (1)$$

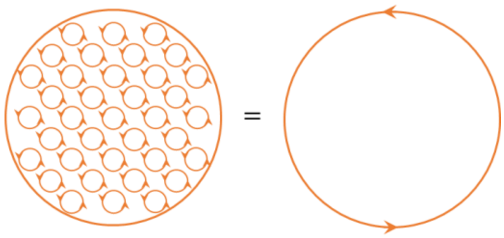
כאשר n הינו צפיפות הליפופים - מספר הליפופים ליחידת אורך.

שדה מגנטי של מגנט

בהינתן מגנט, במרחקים גדולים ממנו קיים דמיון בין השדה המגנטי שיוצר סליל נושא זרם לבין השדה המגנטי שיוצר המגנט. נדגים זאת כעת.

נבחן מגנט העשוי מחומר **פרומגנטי** (Ferromagnetic) - חומר בו המגנטיזציה היא בכיוון השדה החיצוני (הספין של האלקטרון, בשילוב עם התנע הזוויתי שלו, גורם למומנטים מגנטיים מיקרוסקופיים בחומר שנסכמים למגנטיזציה כוללת) והיא איננה נעלמת כאשר השדה החיצוני שווה לאפס.

ניתן לייצג את המומנטים המגנטיים המיקרוסקופיים של המגנט באמצעות לולאות זרם שיוצרות אותם. נביט באיור 2, בו רואים הגדלה של פרוסת מגנט בצורת גליל בו קיימות לולאות זרם מיקרוסקופיות. כל אטום פועל כמו לולאת זרם זעירה, כאשר הלולאות נושאות זרמים שמסתובבים באותו כיוון. בחלק הפנימי של המגנט, זרמים סמוכים מצביעים בכיוונים מנוגדים ומבטלים זה את זה. מסביב להיקף המגנט, לעומת זאת, אין ביטול, וההשפעה הכוללת של הזרמים - כפי שתימדד מחוץ למגנט - היא כמו של זרם שזורם על היקף הפרוסה.

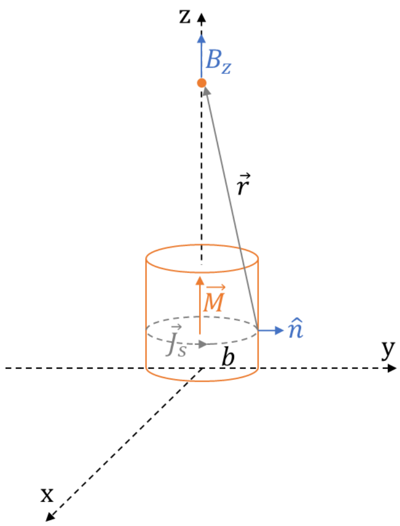


איור 2: מודל של חומר פרומגנטי.

על שפת החומר המגנטי נוצרת צפיפות זרם משטחית:

$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \hat{n}$$

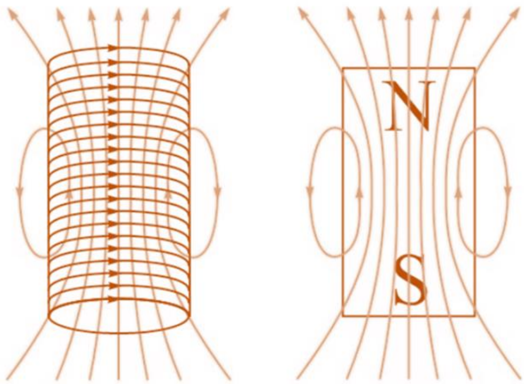
כאשר $\hat{n}$ הוא הנורמל למשטח, כמתואר באיור 3.



איור 3: מודל של מגנט בצורת גליל.

הזרם המשטחי הוא רק על מעטפת המגנט. עבור מגנט בצורת גליל, כמו זה שמופיע באיור 3, טבעות הזרם המיקרוסקופיות (מאיור 2) "שוכבות" במקביל למישור xy. הזרם המושרה שווה ל-0 במכסה העליון והתחתון של הגליל.

נגדיר: רדיוס המגנט הוא b, גובהו h והוא בעל מגנטיזציה פנימית אחידה $\vec{M}$ הקבועה בציר הסימטריה z. נספח א' מציג את חישוב השדה המגנטי B_z של המגנט הגלילי, בו מתקבל ביטוי הזהה למשוואה (1), כאשר המגנטיזציה M מחליפה את nI. המסקנה היא שממרחק גדול ניתן לראות במגנט הגלילי סליל נושא זרם. כלומר, עבור שתי המערכות (סליל לעומת מגנט) מתקבלים אותם קווי שדה מגנטי, כפי שמתואר באיור 4.



איור 4 : המחשה של קווי השדה המגנטי של סליל נושא זרם ומגנט.

שטף מגנטי

שטף מגנטי Φ_B הוא כמות קווי השדה המגנטי הווקטורי $\vec{B}$ העוברים דרך משטח מסוים S.

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \tag{2}$$

יחידת המידה הסטנדרטית למדידת שטף מגנטי היא ובר (Weber) והיא מסומנת על ידי Wb.

כא״מ מושרה – חוק פארדיי

כא״מ ε - כוח אלקטרו מניע (נמדד בכמות אנרגיה ליחידת מטען) הוא העבודה החיצונית שיש להשקיע על יחידת מטען על מנת ליצור הפרש פוטנציאלים בין שני הדקים מנותקים. יחידת המידה של כא״מ היא וולט (ג׳אול חלקי קולון).

לפי חוק פארדיי, כאשר ישנו שטף מגנטי שמשתנה בזמן נוצר כא״מ מושרה ששווה לקצב השינוי של השטף המגנטי:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{3}$$

עבור סליל המורכב מ-N ליפופים זהים, כל אחד עם אותו Φ_B, הכא״מ המושרה הינו:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים ונקבל:

$$-\int \varepsilon dt = N \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

נניח לצורך פשטות שהשדה המגנטי אחיד בשטח הטבעת a ולכן ניתן לכתוב

$$-\int_0^t \varepsilon(t')dt' = NB_z(t)a$$

נבודד את $B_z(t)$

$$B_z(t) = \frac{-\int_0^t \varepsilon(t')dt'}{Na}$$

כלומר, אינטגרל הכא״מ המושרה בסליל עם N טבעות בעלות שטח a מאפשר למדוד את השדה המגנטי הממוצע בהן. בניסוי שלנו, השדה בתוך הסליל ישתנה מכיוון שמגנט גלילי ייפול דרכו. על ידי שימוש בקשר $z(t) = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ עבור מיקום המגנט, ניתן לחשב את השדה המגנטי הממוצע כתלות במיקום ביחס למגנט:

$$\langle B_{magnet}\rangle(z) = \frac{1}{Na}\left(-\int_0^{t(z)} \varepsilon(t')dt'\right)(z) \qquad (4)$$

מהירות סופית (טרמינלית) של מגנט הנופל דרך צינור מוליך

כאשר מגנט נופל דרך צינור העשוי חומר לא מוליך הוא ייפול בנפילה חופשית קלאסית, אך לא כך הדבר עבור צינור מוליך העשוי מחומר דיאמגנטי. כאשר מגנט נופל דרך צינור מוליך, בתנאים מסוימים, המגנט יאיץ בתוכו עד שינוע במהירות קבועה, סופית, הנקראת גם מהירות טרמינלית. נסביר את התופעה בצורה איכותית. חישוב אנליטי מלא מופיע בנספח ב׳.

כאשר המגנט נופל דרך הצינור המוליך, השטף המגנטי דרך שטח החתך של המוליך משתנה עם נפילתו. לפי חוק פראדיי, משוואה (3), שינוי בשטף גורם לכא״מ מושרה בצינור. הכא״מ יוצר זרם חשמלי מושרה על פני השטח של הצינור המוליך ע״פ חוק אוהם. זרם חשמלי זה מייצר שדה מגנטי מושרה בכיוון המנוגד לשינוי השטף המגנטי שהמגנט גורם (חוק לנץ).

לצורך פשטות נחלק את הצינור לטבעות ונתבונן במקרה בו מגנט נופל דרך טבעת מוליכה. נקבע שהקוטב הצפוני כלפי מטה ולכן גם קווי השדה המגנטי מצביעים מטה. בחלקו הראשון של תנועת המגנט דרך הטבעת, השטף המגנטי בכיוון מטה גדל ולכן בטבעת ייוצר שדה מגנטי מושרה בכיוון מנוגד, כלפי מעלה. כך למעשה מתקבל מצב הדומה לשני מגנטים המושמים בכיוונים הפוכים זה לזה ולכן הטבעת תפעיל על המגנט כוח כלפי מעלה - כלומר תדחוף את המגנט מעלה. בחלק השני של התנועה המגנט מתרחק מהטבעת, השטף המגנטי קטן ולכן השדה המגנטי המושרה בטבעת יהיה בכיוון מטה. במצב זה הטבעת תמשוך את המגנט – שוב, כלפי מעלה.

ניתן לחשוב על הצינור כעל סדרה של טבעות שכל אחת מפעילה את הכוח שלה על המגנט כלפי מעלה כאשר הוא עובר דרכה. הכוח הכללי יהיה סכום הכוחות של תרומת כל טבעת. הכוח תלוי בגודל הכא״מ המושרה,

משוואה (8) בנספח ב', הפרופורציונאלי למהירות המגנט, משוואה (7) בנספח ב'. לכן ככל שהמגנט ינוע מהר יותר כך הכוח הפועל עליו יגדל עד שישתווה לכוח הכבידה הפועל על המגנט. המגנט יגיע לשיווי משקל וינוע במהירות קבועה - המהירות הטרמינלית.

בנספח ב' ניתן לראות את החישוב של הכוח שמפעילה טבעת נושאת זרם על מגנט הנופל דרכה. ניתן להסתפק בהבנה שהכוח תלוי בקבוע (יסומן באות k) כפול המהירות v.

$$F = kv$$

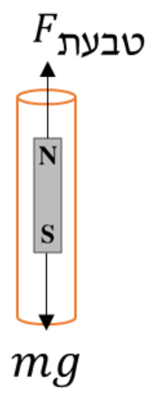
כאשר המגנט נופל דרך הצינור פועל עליו כוח הכבידה כלפי מטה והכוח המגנטי כלפי מעלה (איור 5). משוואת התנועה של המגנט הינה :

$$mg - F = ma$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

כאמור, המהירות הטרמינלית מתקבלת כאשר כוח הכבידה שווה לכוח המגנטי. כאשר הם שווים, שקול הכוחות הפועל המגנט שווה לאפס ולכן גם תאוצתו. נקבל אם כן שהמהירות הטרמינלית v_T היא :

$$v_T = \frac{mg}{k} \tag{5}$$



איור 5 : הכוחות הפועלים על מגנט הנופל דרך צינור מוליך.

נפילה חופשית של המגנט

בניסוי, אנו נשתמש בצינור נחושת כדי להבטיח שחרור מבוקר של נפילת המגנט, מאותו גובה ובאותה מהירות התחלתית – המהירות הטרמינלית. לאחר יציאתו מהצינור, המגנט ייפול בנפילה חופשית. בניסוי

יימדדו המרחק h שעבר המגנט והזמן שלקח למגנט לעבור מרחק זה t. לכן משוואת התנועה המתארת את נפילתו היא:

$$h = v_T t + \frac{g}{2} t^2$$

נרשום את הקשר כתלות לינארית בין שני גדלים מדודים:

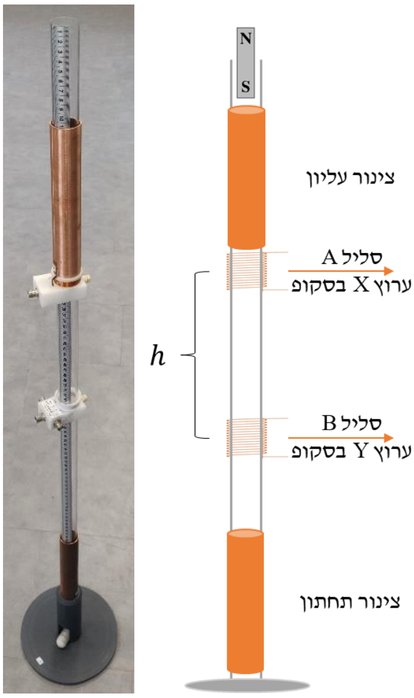
$$\left(\frac{h}{t}\right) = v_T + \frac{g}{2} t \qquad (6)$$

מקשר זה ניתן לחשב את המהירות הטרמינלית v_T ואת תאוצת הכובד g, וכך להמיר בין הזמן למקום המגנט.

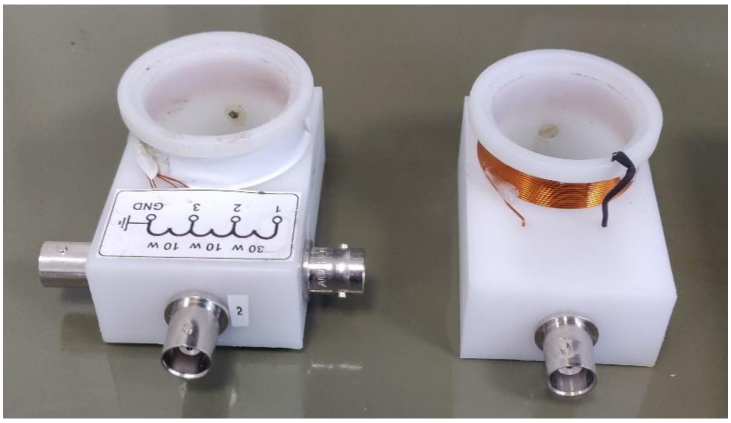
מערכת הניסוי

מערכת הניסוי, המתוארת באיור 6, מורכבת מצינור פרספקס שקוף שדרכו מפילים מגנט SmCo. על הצינור מושחלים הרכיבים הבאים (מלמעלה למטה): צינור נחושת עליון שמטרתו לשחרר את המגנט במהירות ספציפית – המהירות הטרמינלית, אחריו סליל A המשמש לזיהוי התחלת הנפילה של המגנט לפי מדידת הכא"מ המושרה בו. מעבר המגנט בסליל A מגדיר מתי $t = 0$. סליל A הינו קבוע והוא אינו יזוז במיקום או יוחלף במהלך הניסוי. לאחר מכן ממוקם סליל B למדידת הכא"מ המושרה. ניתן לשנות את מיקום סליל זה בהתאם לסרגל המצוי על הצינור וכן לשנות את מספר הליפופים שלו. המרחק בין הסלילים יסומן ב-h. לבסוף בקצה הצינור ממוקם צינור נחושת נוסף שתפקידו לבלום את המגנט ולרכך את פגיעתו בתחתית כדי לשמור עליו.

במהלך הניסוי נשחרר את המגנט בצינור, הוא יעבור דרך הסלילים ונמדוד את הכא"מ המושרה בהם כתוצאה משינוי השטף המגנטי שבתוכם. אנו נשתמש בסקופ לצורך מדידת הכא"מ המושרה בסלילים A ו-B באמצעות כבלי BNC. סליל A יחובר לערוץ X וסליל B ל- Y (ראו איור 6). לסליל B (ראו איור 7) יש שלוש כניסות ממוספרות. מס' הליפופים בין ההדקים של כל כניסה שונה, כאשר האפשרויות הן 50, 20 או 10 ליפופים. הקוטר של כל הסלילים הוא $D = 35 + 1mm$ והאורך שלהם הוא 10+1 מילימטרים.



איור 6 : מערכת הניסוי. מורכבת מצינור פרספקס שקוף. על הצינור מושחלים צינור נחושת עליון, אחריו סליל A, סליל B ולבסוף בקצה הצינור ממוקם צינור נחושת נוסף.



איור 7 : סליל A (מימין) וסליל B (משמאל). לסליל B יש שלוש כניסות ממוספרות. בין כל כניסה יש מספר שונה של ליפופים.

איור 8 : המגנט בניסוי. המגנט בנוי משני מגנטי SmCo מצופי ניקל, בעלי רדיוס של 1 ס"מ ואורך של 1 ס"מ כל אחד. המגנטים עטופים בקפסולת פלסטיק להגנה.

משימות לביצוע

בניסוי זה אתם תמדדו את הכא״מ המושרה בסליל כתוצאה ממעבר של מגנט דרכו. מתוך הכא״מ, תחשבו את השטף המגנטי ותשוו אותו לשדה המגנטי של המגנט.

אין לבצע את הניסוי ללא קבלת הנחיות בטיחות מהמדריך!

***כאשר אתם לא משתמשים במגנט, הפילו אותו בצינור והשאירו אותו בתחתית הצינור. באופן זה לא תאבדו אותו.**

1. מדידת השדה המגנטי של המגנט (10 נקודות):

א. נתונות לכם מדידות של עוצמת השדה המגנטי בכיוון z, לאורך הציר המרכזי של המגנט שנמדדו ישירות בעזרת טסלמטר. **בנו** גרף של B_z כתלות במיקום z (כאשר הראשית מוגדרת כמרכז המגנט).

ב. פרמטרי המגנט מופיעים באיור (8). **חשבו** בעזרתם ובעזרת משוואה (1) את המגנטיזציה M של המגנט. שימו לב לתחום בו המודל תקף. האם יש להשתמש בכל הנקודות המדודות?

2. מדידות כיול והרכבת המערכת (10 נקודות):

א. **הרכיבו** את המערכת (היעזרו באיור 6): בתחתית, השחילו על צינור הפרספקס צינור נחושת לבלימה, אחריו את סט הסלילים B, אחריהם את סליל A ומעליו צינור נחושת נוסף לשחרור המגנט באופן מבוקר.

ב. **חברו** את ערוץ X של הסקופ לסליל A ואת ערוץ Y לסליל B בכניסה של ה-50 ליפופים.

ג. בעזרת השנתות, **בחרו** ראשית צירים **ומקמו** בה את סליל A. **רשמו** את הערך שבחרתם במדויק. **מקמו** את הסליל של ה-50 ליפופים במרחק h של 25 ס״מ. שימו לב: כיצד ניתן לקבוע את מיקום הסליל בדיוק המירבי? איפה יש להגדיר את נקודת הייחוס?

ד. בסקופ, **הגדירו** acquire = High Res, ואת ה-Trigger למדידת **רוחב פולס של לפחות 2ms** במתח שבערוץ X (הסליל A).

ה. **העבירו** את הסקופ למצב של single. **הפילו** את המגנט ועדכנו את ה-Trigger ואת הסקאלה של הצירים בהתאם כך שהכא״מ המושרה בסלילים יוצג על המסך.

3. מדידת כא״מ כתלות בסליל (30 נקודות):

א. **מקמו** את סליל B במרחק 25 ס״מ מסליל A.

ב. **הפילו** את המגנט דרך הצינור. שימו לב לכיוון המגנט.

ג. **הציגו** את המתחים המושרים בערוצי הסקופ באופן ברור על המסך.

ד. **שמרו** מדידה של הפלת המגנט **בשני הכיוונים** שלו.

ה. **חזרו** על סעיפים א׳-ד׳ עם מספר ליפופים שונה: 20 ו-10.

4. <u>מדידת כא"מ כתלות במרחק הנפילה h (50 נקודות):</u>

א. עבור מספר ליפופים אחד בסליל B, **מדדו** את הכא"מ המושרה בו כתלות במרחק הנפילה h. יש לבצע את המדידה עבור לפחות 10 מרחקים. מומלץ שטווח המרחקים יהיה גדול ככל הניתן (מבלי להזיז את סליל A).

תכולת ההגשה ל-wInd

א. כל קבצי הנתונים של המדידות השונות.
ב. קוד עם ניתוח הנתונים והגרפים שהופיעו בהנחיות.

משימות לעיבוד הנתונים

1. <u>ניתוח תנועת המגנט:</u>

ג. **טענו** את המדידות שביצעתם לקוד. מומלץ להציג אותן בגרף.
ד. **בדקו** האם יש offset במדידות המתח שביצעתם (בשל ההמרה של הסקופ מאות אנלוגי לדיגיטלי). אם כן, **תקנו** אותו כך שיתקבל מתח = 0 מתי שאמור להתקבל מתח זה.
ה. נסמן את הזמן בו <u>השטף</u> מקסימאלי בסליל A ב-t=0. **עדכנו** את וקטור הזמנים של כל המדידות שביצעתם בהתאם. מומלץ לוודא באמצעות גרף שהקוד עובד נכון.
ו. מתוך מדידות הכא"מ כתלות במרחק הנפילה, **חשבו** את המהירות ההתחלתית ואת תאוצת המגנט לפי רגרסיה לינארית למשוואה (6).
ז. **הציגו** את הגרף לחישוב המהירות והתאוצה ואת תוצאות הרגרסיה שביצעתם. **נסחו** פסקה שמסבירה אותם.
ח. האם תאוצת המגנט שקיבלתם סבירה? **נמקו** באופן כמותי.
ט. כיצד משתנה הכא"מ כתלות במהירות המגנט? כיצד תלוי השטף במהירות? (יש לענות בעזרת גרפים, בנוסף לתשובה מלאה).

2. <u>ניתוח הכא"מ כתלות בסליל:</u>

א. **ענו** בעזרת גרפים: כיצד כיוון המגנט בנפילה משפיע על הכא"מ המושרה בסליל? כיצד הוא משפיע על השטף המגנטי?
ב. **ענו** בעזרת גרפים: כיצד משתנה הכא"מ כתלות בסוג הסליל? כיצד תלוי השטף הנמדד בסוג הסליל?
ג. **נרמלו** את המדידות כדי לחלץ את השדה המגנטי הממוצע של המגנט כתלות במרחק ממרכז המגנט (ראו משוואה 4), כאשר הראשית מוגדרת להיות מרכז המגנט. **ענו** בעזרת גרף: האם חישוב זה למדידת השטף תלוי בסוג הסליל? כיצד?
ד. **השוו** את מדידת השדה המגנטי ישירות באמצעות טסלמטר למדידת השדה המגנטי לפי הכא"מ המושרה. יש לצרף גרף מתאים.

נספח א' - חישוב השדה המגנטי של מגנט גלילי

$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{z} \times \hat{r} = M\hat{\varphi}$$

כל רצועה בעלת עובי dz' נושאת זרם $dI = J_s dz'$ כך ש-$dId\vec{l} = (J_s dz)(bd\varphi)$.

לפי ביו-סבר :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{dId\vec{l} \times \vec{r'}}{r'^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{(J_s dz)(bd\varphi) \times \vec{r'}}{r'^3}$$

כאשר $\vec{r'} = a\hat{r} + (z - z')\hat{z}$, $r' = \sqrt{b^2 + (z - z')^2}$ וכיוון הזרם הוא φ.

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 M b}{4\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz'}{[b^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} bd\varphi[(z - z')(\hat{\varphi} \times \hat{z}) - b(\hat{\varphi} \times \hat{r})]$$

משיקולי סימטריה $\int_0^{2\pi} \hat{\varphi} \times \hat{z} d\varphi = \int_0^{2\pi} \hat{r} d\varphi = 0$. בנוסף, $\hat{\varphi} \times \hat{r} = -\hat{z}$ לכן תוצאת האינטגרל השני הינה $2\pi b$.

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M b^2}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + b^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 M}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{h}{2}\right)^2 + b^2}} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{h}{2}\right)^2 + b^2}} \right)$$

הזרם הכולל בו הוא הזרם המשטחי (שגודלו M) חלקי מספר הליפופים ליחידת אורך n כלומר $I = M/n$.

נספח ב' – חישוב הכוח שמפעילה טבעת מוליכה על מגנט הנופל דרכה

על מנת לחשב את הכוח שמפעילה הטבעת המוליכה על המגנט נפשט את הבעיה ונניח שהמגנט קטן ביחס לגליל ולכן ניתן לקרבו לדיפול מגנטי. המגנט מונח בראשית הצירים כאשר המומנט המגנטי שלו בכיוון מעלה, הטבעת מאונכת לציר ה- z וממוקמת במרחק z מהראשית.

הביטוי לשדה המגנטי של דיפול הוא:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

כאשר $\vec{m}$ הוא המומנט המגנטי של הדיפול.

בגלל הסימטריה הגלילית של הבעיה נוח להשתמש בקואורדינטות גליליות:

$$B_z = \vec{B}\cdot\hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3z^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$B_\rho = \vec{B}\cdot\hat{\rho} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3z\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

$$B_\varphi = \vec{B}\cdot\hat{\varphi} = 0$$

באמצעות שימוש במשוואה (2) ניתן לחשב את השטף המגנטי דרך טבעת בעלת רדיוס b:

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int B_z da = \int_0^b B_z 2\pi\rho d\rho$$

לאחר ביצוע האינטגרל מתקבל:

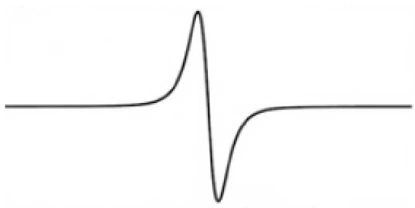
$$\Phi_B = \frac{\mu_0 m}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

ולאחר מכן באמצעות משוואה (3) ניתן לחשב את הכא"מ המושרה:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dz}\frac{dz}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dz}v = \frac{3\mu_0 m}{2}\frac{b^2 z}{(b^2+z^2)^{5/2}}v \qquad (7)$$

ממשוואה זו ניתן לראות שהכא"מ המושרה פורפורציונלי למהירות.

בנוסף, משוואה זו מייצגת את הגרף באיור 7 כפי שיתקבל בסקופ ממדידת הכא"מ המושרה בניסוי.



איור 9 : צורת הכא"מ המושרה המתקבל בסליל כתוצאה ממעבר מגנט דרכו.

מהחוק השלישי של ניוטון אנו יודעים שהכוח המופעל על המגנט ע"י הטבעת שווה בגודלו ומנוגד בכיוונו לכוח שפועל על הטבעת ע"י המגנט. משום שהבעיה הינה בעלת סימטריה גלילית יתקבלו כוחות בציר ה-z בלבד. כלומר :

$$F_z^{\text{מגנט}} = -\int F_z^{\text{טבעת}}$$

ע"פ כוח לורנץ :

$$-\int F_z^{\text{טבעת}} = -\int I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)_z \int IB_\rho dl = \int_0^{2\pi} IB_\rho bd\varphi = 2\pi bIB_\rho$$

הביטוי ל-B_ρ ידוע ונשאר לחשב את הזרם המושרה I בטבעת. ע"פ חוק אוהם $I = \varepsilon G$ כאשר ε הוא כא"מ המושרה ו-G המוליכות החשמלית (אחד חלקי ההתנגדות). המוליכות של תיל העשוי מחומר אוהמי ניתנת על ידי הנוסחה :

$$G = \frac{S\sigma}{l}$$

כאשר S הוא שטח החתך של התיל בניצב לכיוון הזרם, σ היא ההתנגדות הסגולית של החומר ו-l הוא אורך התיל. ההתנגדות הסגולית היא תכונה אינדיבידואלית לכל חומר.

ולכן הכוח שהטבעת מפעילה על המגנט הוא :

$$dF = 2\pi bB_\rho dI = 2\pi bB_\rho\left(\frac{\varepsilon\sigma dS}{2\pi b}\right) = B_\rho\varepsilon\sigma dS = 2\pi bvB_\rho{}^2\sigma dS \qquad (8)$$

במשוואה הנ"ל ניתן לראות שהכוח תלוי במוליכות החשמלית של החומר ממנו עשוי הגליל ולכן תופעת המהירות הטרמינלית מתקיימת בגלילים העשויים מחומר מוליך. בנוסף ניתן לראות שכל הפרמטרים, מלבד מהירות הנפילה של המגנט v, הינם קבועים. על מנת לחשב את הכוח שמפעיל כל הגליל על המגנט נדרש לבצע אינטגרציה לביטוי הנ"ל.