גלים

הרצאה 9

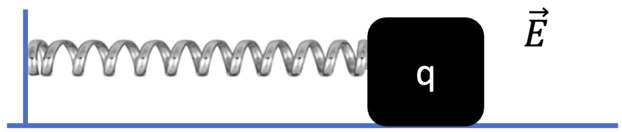
21/11/2022

<u>תזכורת :</u>

בשיעור הקודם ראינו את המשוואה של מערכת מרוסנת ומאולצת

$$m\ddot{x}+m\Gamma\dot{x}+m\omega_0^2x=F\left(t\right)=F_0cos\left(\omega t\right)$$

נעדיף להסתכל על זה כעל מסה בעלת מטען q הנמצאת בהשפעת שדה חשמלי תלוי בזמן $\overrightarrow{E}\left(t\right)=F_0cos\left(\omega t\right)$. מכאן ש $F_0=qE_0$.



מתנד מרוסן מאולץ

ראינו כי עם $F=0$ (משוואה הומוגנית) נקבל

$$x_0\left(t\right)=e^{-\frac{\Gamma t}{2}}\left(x_0\left(0\right)cos\left(\omega_1t\right)+\left[\dot{x}_0\left(0\right)+\frac{1}{2}\Gamma x_0\left(0\right)\right]\frac{sin\left(\omega_1t\right)}{\omega_1}\right)$$

שזה פתרון דועך. הפתרון הכולל הוא סכום של פתרון המשוואה ההומוגנית והאי־הומוגנית. נצפה שכאשר המנוע יפעל הרבה זמן לפתרון הדועך לא תיהיה חשיבות. נחפש פתרון למשוואה עם F סופי. המערכת תתנודד בוצרה מחזורית ולכן ננחש פתרון שהתדר שלו הוא התדר של המנוע.

$$x=A_{ab}sin\left(\omega t\right)+A_{el}cos\left(\omega t\right)$$

זהירות יש בבעיה שלושה תדרים: ω_0 שזה תדר הקפיץ, ω_1 שזה תדר הפתרון של המשווה ההומוגנית, ו ω שזה תדר המנוע. השמות הם: $ab=absorbtion$ ו $el=elastic$, נציב במשוואה המלאה ונקבל

$$-\omega^2\left(A_{ab}sin\left(\omega t\right)+A_{el}cos\left(\omega t\right)\right)+\Gamma\omega\left(A_{ab}cos\left(\omega t\right)-A_{el}sin\left(\omega t\right)\right)+\omega_0^2\left(A_{ab}sin\left(\omega t\right)+A_{el}cos\left(\omega t\right)\right)=\frac{F_0}{m}cos\left(\omega t\right)$$

$$\left(-\omega^2A_{ab}-\Gamma\omega A_{el}+\omega_0^2A_{ab}\right)sin\left(\omega t\right)+\left(-\omega^2A_{el}+\Gamma\omega A_{ab}+\omega_0^2A_{el}-\frac{F_0}{m}\right)cos\left(\omega t\right)=0$$

כדי שהמשוואה תתקיים בכל רגע ורגע צריך שהמקדם של הסינוס והקוסינוס יתאפסו בניפרד. לכן

$$A_{ab}=\frac{\Gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}A_{el}$$

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A_{el}+\Gamma\omega A_{ab}=\frac{F_0}{m}$$

מהמישוואה הראשונה ניתן לראות שאם התדר הולך לגבול 0 או ∞ אז A_{ab} יהיה קטן מאוד. ואם נציב בשניה את הביטוי ל A_{ab} נקבל כי

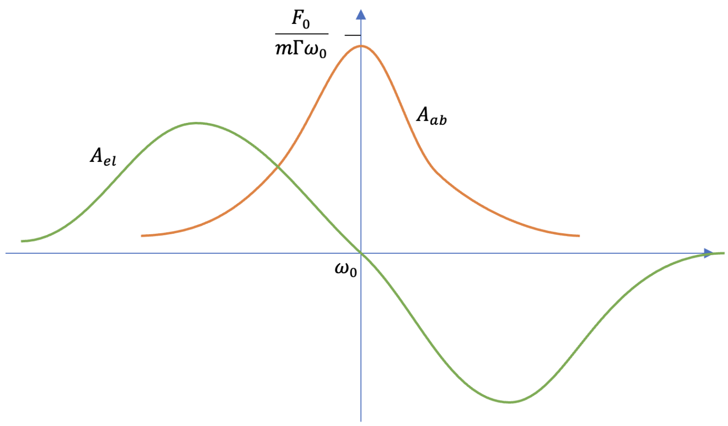
$$A_{\text{el}}\left(\omega,\omega_0\right)=\frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

$$A_{ab}\left(\omega,\omega_0\right)=\frac{F_0}{m}\frac{\Gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

כאשר $\omega=\omega_0$ (תדר המנוע זהה לתדר העצמי של הקפיץ) נקבל כי

$$x=\frac{F_0}{m}\frac{\Gamma\omega_0}{\Gamma^2\omega_0^2}sin\left(\omega_0 t\right)=\frac{F_0}{m\Gamma\omega_0}sin\left(\omega_0 t\right)$$

המשמהות היא שתנועת המסה היא בפאזה של 90 מעלות מתנועת הכוח. כשהכוח מקסימאלי התזוזה היא אפס. כשהכוח אפס התזוזה מקסימאלית.



תגובה בתלות בתדר

ניתן לכתוב את הפתרון גם בצורה אחרת. נגדיר

$$A=\sqrt{A_{ab}^2+A_{el}^2}\qquad cos\left(\phi\right)=\frac{A_{el}}{A}\qquad sin\left(\phi\right)=\frac{A_{ab}}{A}$$

$$x=A\left(\frac{A_{ab}}{A}sin\left(\omega t\right)+\frac{A_{el}}{A}cos\left(\omega t\right)\right)=Acos\left(\omega t-\phi\right)$$

$$A^2=\frac{F_0^2}{m^2}\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}{\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2\right)^2}=\frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}=\frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{\left(\omega_0-\omega\right)^2\left(\omega_0+\omega\right)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

$$\simeq\frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{\left(\omega_0-\omega\right)^2\left(2\omega_0\right)^2+\Gamma^2\omega_0^2}\simeq\frac{F_0^2}{4m^2\omega_0^2}\underbrace{\frac{1}{\left(\omega_0-\omega\right)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}}_{Lorentzian}$$

בקרוב טוב, אמפליטודת המסה הכי גדולה כאשר $\omega=\omega_0$ (תדר המנוע זהה לתדר העצמי של הקפיץ). זה ניקרא רזוננס.

הספק

ההספק מוגדר להיות

$$P\left(t\right)=F_{0}\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)$$

זה גודל תלויי בזמן. נחפש גודל ממוצע. הספק ממוצע על פני מחזור:

$$\left\langle P\right\rangle =\frac{1}{T}\int\limits_{t_{0}}^{t_{0}+T}P\left(t\right)dt$$

$$\left\langle P\right\rangle =\frac{1}{T}\int\limits_{t_{0}}^{t_{0}+T}\left\{ \omega A_{ab}\cos\left(\omega t\right)-\omega A_{el}sin\left(\omega t\right)\right\} F_{0}cos\left(\omega t\right)dt$$

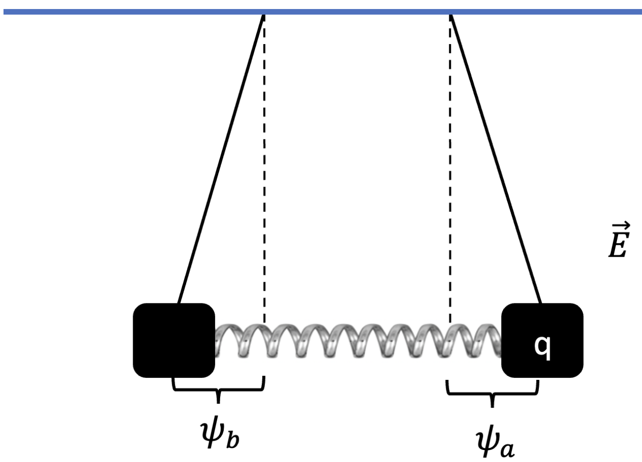
$$\int\limits_{t_{0}}^{t_{0}+T}cos^{2}\left(\omega t\right)dt=\frac{1}{2}$$

$$\int\limits_{t_{0}}^{t_{0}+T}cos\left(\omega t\right)sin\left(\omega t\right)dt=0$$

הספק ממוצע

$$\left\langle P\right\rangle =\frac{1}{2}F_{0}\omega A_{ab}$$

מתנדים מאולצים ומרוסנים עם מספר אופני תנודה



זוג מתנדים מאולצים מרוסנים עם שני כוחות מחזירים

משוואות התנועה הן

$$m\ddot{\psi}_a = -\frac{mg}{l}\psi_a - k\left(\psi_a - \psi_b\right) - m\Gamma\dot{\psi}_a + F_0 cos\left(\omega t\right)$$

$$m\ddot{\psi}_b = -\frac{mg}{l}\psi_b + k\left(\psi_a - \psi_b\right) - m\Gamma\dot{\psi}_b$$

נגדיר :

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\left(\psi_a + \psi_b\right)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\psi_a - \psi_b\right)$$

נחבר ונחסיר את המשוואות ונקבל :

$$m\ddot{\psi}_1 = -\frac{mg}{l}\psi_1 - m\Gamma\dot{\psi}_1 + \frac{1}{2}F_0 cos\left(\omega t\right)$$

$$m\ddot{\psi}_2 = -\frac{mg}{l}\psi_2 - 2k\psi_2 - m\Gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{2}F_0 cos\left(\omega t\right)$$

$$m\ddot{\psi}_2 = -m\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\psi_2 - m\Gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{2}F_0 cos\left(\omega t\right)$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

ונקבל :

$$\ddot{\psi}_1 + \Gamma\dot{\psi}_1 + \omega_1^2\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}cos\left(\omega t\right)$$

$$\ddot{\psi}_2 + \Gamma\dot{\psi}_2 + \omega_2^2\psi_2 = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}cos\left(\omega t\right)$$

אנו יודעים לפתור כל אחת מהמשוואות לבד. הפתרון הוא

$$\psi_1 = A_{ab}^1 sin\left(\omega t\right) + A_{el}^1 cos\left(\omega t\right)$$

$$\psi_2 = A_{ab}^2 sin\left(\omega t\right) + A_{el}^2 cos\left(\omega t\right)$$

כאשר $A_{ab}^i = \frac{1}{2}A_{ab}\left(\omega,\omega_i\right)$ ו $A_{el}^i = \frac{1}{2}A_{el}\left(\omega,\omega_i\right)$ עבור $i = 1,2$. נחזור לדרגות החופש המקוריות

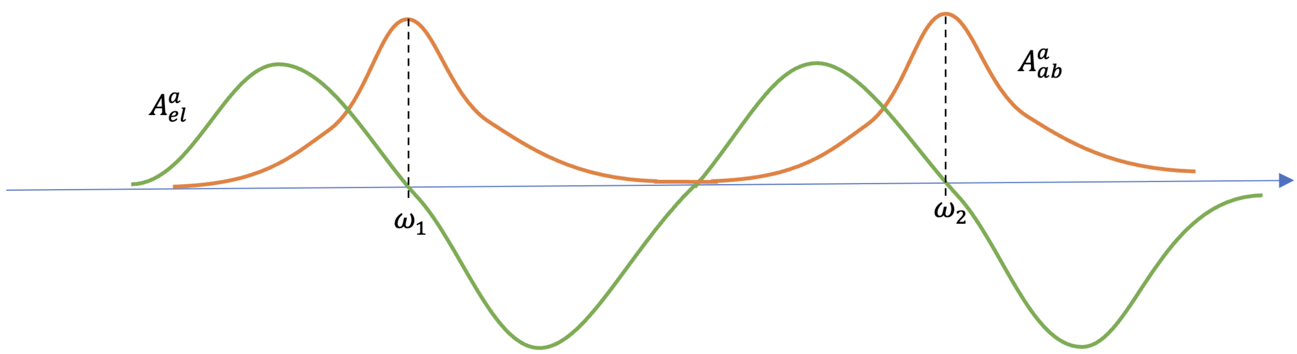
$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 = A_{ab}^a sin\left(\omega t\right) + A_{el}^a cos\left(\omega t\right)$$

כאשר

$$A_{ab}^a = A_{ab}^1 + A_{ab}^2 = \frac{1}{2}\left(A_{ab}\left(\omega,\omega_1\right) + A_{ab}\left(\omega,\omega_2\right)\right)$$

$$A_{el}^a = A_{el}^1 + A_{el}^2 = \frac{1}{2}\left(A_{el}\left(\omega,\omega_1\right) + A_{el}\left(\omega,\omega_2\right)\right)$$

מקדם החצי נובע מזה שבמשוואות ל ψ_1 ו ψ_2 מופיע חצי הכוח.



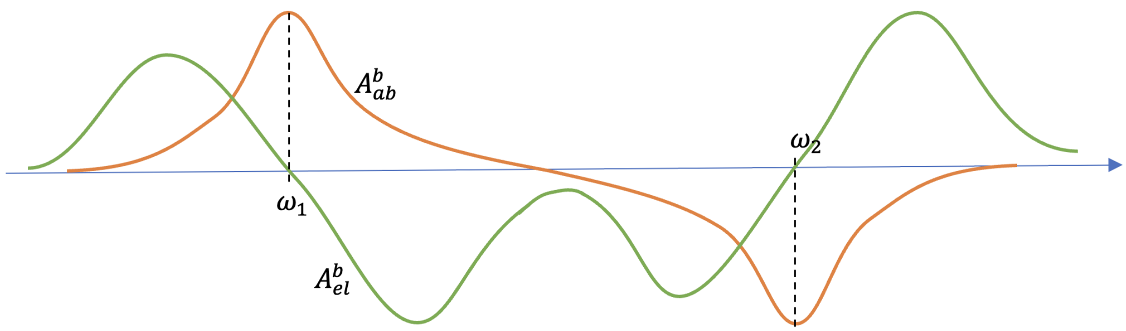
דר האילוץ

באופן דומה

$$\psi_b = \psi_1 - \psi_2 = A_{ab}^b sin\left(\omega t\right) + A_{el}^b cos\left(\omega t\right)$$

$$A_{ab}^b = A_{ab}^1 - A_{ab}^2 = \frac{1}{2}\left(A_{ab}\left(\omega,\omega_1\right) - A_{ab}\left(\omega,\omega_2\right)\right)$$

$$A_{el}^b = A_{el}^1 - A_{el}^2 = \frac{1}{2}\left(A_{el}\left(\omega,\omega_1\right) - A_{el}\left(\omega,\omega_2\right)\right)$$



מתנד b כתלות בתדר האילוץ

למערכת שני רזוננסים בתדרים שהם התדרים של אופני התנודה של המערכת.

ניזכר שכל מסה $\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Gamma\omega}$ ונדון במקרה שבו $\omega \to \infty$, מתקיים $|A_{el}| > |A_{ab}|$ נזניח לחלותין A_{ab}^a ואת A_{ab}^b מהציור ניתן לראות כי

$$A_{el}^a \cdot A_{el}^b < 0$$

דהיינו המסות נעות בכיוונים הפוכים כמו באופן תנודה עם ω_2. כמו כן בגלל ש A_{el}^a הוא סכום ו A_{el}^b הוא הפרש של שני מספרים בעלי אותו סימן $\left|A_{el}^b\right| > |A_{el}^a|$. משמע למסה b משרעת קטנה יותר.

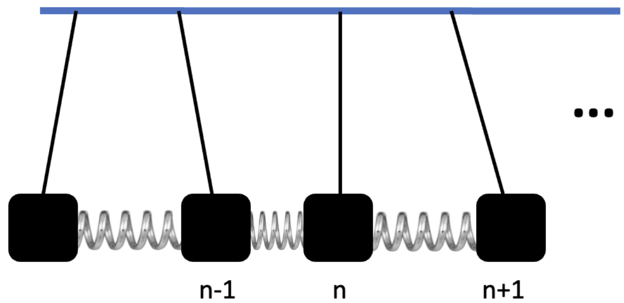
במקרה שבו $\omega \to 0$ מתקיים שוב ש $|A_{el}| > |A_{ab}|$שוב נזניח לחלותין A_{ab}^a ואת A_{ab}^b. ניתן לראות מהציור כי בגבול זה אופן התנודה הוא כזה שהמסות נעות ביחד לאותו כיוון כמו באופן התנודה עם ω_1

$$A_{el}^a \cdot A_{el}^b > 0$$

ושוב בגלל ש A_{el}^a הוא סכום ו A_{el}^b הוא הפרש של מספרים בעלי אותו סימן $\left|A_{el}^b\right| > |A_{el}^a|$. משמע שוב למסה b משרעת יותר קטנה.

לסיכום: כשהתדר גבוה מאוד מתדר הרזוננס ω_2 המסות נעות בכיוונים הפוכים ולמסה הרחוקה מהכוח החיצוני אמפליטודה יותר נמוכה מאשר למסה הקרובה. כשהתדר נמוך מתדר הרזוננס ω_1 המסות נעות בכיוונים זהים ועדיין ולמסה הרחוקה מהכוח החיצוני אמפליטודה יותר נמוכה מאשר למסה הקרובה.

הכנה למה נלמד בשיעור הבא :



שרשרת אין סופית

סימנטיקה : מכאן והלאה קבוע הקפיץ יסומן ב $\mathcal{K}$ו k יסמן לנו משהו אחר.

נסתכל על מספר רב של מסות שנסמן כל מסה ב n ואת הזזות ב ψ_n. שוב נתחיל את הדיון כפי למצוא את אופני התנודה $F=0$:

$$m\ddot{\psi}_n=-m\omega_0^2\psi_n+\mathcal{K}\left(\psi_{n+1}-\psi_n\right)-\mathcal{K}\left(\psi_n-\psi_{n-1}\right)$$

$$\omega_0^2=\frac{g}{l}$$

ננסה למצוא פתרון שהוא כמובן מחזורי בזמן אבל גם מחזורי במרחב. זהירות ω כאן אינה תדירות הכוח שכן בנתיים אין כוח.

$$\psi_n=Ae^{i(kan-\omega t)}$$