Доказать, что, каково бы ни было число α, удовлетворяющее условию $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можно выбрать последовательность $x_n \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

643. Определить

$$l = \varliminf_{x\to 0} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to 0} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 (1/x)}$.

644. Определить

$$l = \varliminf_{x\to \infty} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to \infty} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

в) $f(x) = 2^{\sin x^2}$; г) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$ $(x \geqslant 0)$.

§ 6. O-символика

1°. **Запись**

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \in X$$

обозначает, что существует постоянная A такая, что

$$|\varphi(x)| \leqslant A |\psi(x)| \text{ для } x \in X. \qquad (1)$$

Аналогично пишут

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \to a, \qquad (2)$$

если неравенство (1) выполнено в некоторой окрестности U_a точки a $(x \neq a)$. В частности, если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$ $(x \neq a)$, то соотношение (2) заведомо имеет место, если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. В этом случае будем писать $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Если

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой порядка* p относительно