

444 ОТДЕЛ VIII. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ляет собой *работу переменной силы* $\{P, Q, R\}$, точка приложения которой описывает кривую C .

4°. Случай полного дифференциала. Если

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du,$$

где $u = u(x, y, z)$ — однозначная функция в области V , то независимо от вида кривой C , целиком расположенной в области V , имеем:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) — начальная и (x_2, y_2, z_2) — конечная точка пути. В простейшем случае, если область V односвязна и функции P, Q и R обладают непрерывными частными производными первого порядка, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области V были тождественно выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тогда в простейшем случае стандартной параллелопидальной области V , функцию u можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + c,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка области V и c — произвольная постоянная.

Механически этот случай соответствует работе силы, имеющей потенциал.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

4221. $\int_C (x + y) ds$, где C — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

4222. $\int_C y^2 ds$, где C — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

4223. $\int_C (x^2 + y^2) ds$, где C — кривая

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) \\ (0 \leq t \leq 2\pi).$$

4224. $\int_C xy ds$, где C — дуга гиперболы

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

4225. $\int_C (x^{1/3} + y^{1/3}) ds$, где C — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.