Найти интегралы (n — натуральное число):

2295. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos (n+1) x \, dx.$

2296. $\int\limits_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin (n+1) x \, dx.$

2297. $\int\limits_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x \, dx.$

2298. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x \cdot \cos 2nx \, dx.$

2299. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить *интеграл Эйлера:* $\mathrm{B}(m, n) = \int\limits_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx$, где m и n — целые положительные числа.

2300. *Многочлен Лежандра* $P_n(x)$ определяется формулой: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$ $(n = 0, 1, 2 \ . \ . \ .)$.

Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

2301. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на $[a, b]$ и $F(x)$ — функция такая, что $F'(x) = f(x)$ всюду в $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек c_i $(i = 1, \ . \ . \ . \ , p)$ и точек a и b, где функция $F(x)$ терпит разрыв 1-го рода («обобщенная первообразная»). Доказать, что

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$F(x) = C + \int\limits_a^x f(\xi) \, d\xi$$

— ее неопределенный интеграл.

Доказать, что функция $F(x)$ непрерывна и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ имеет место