2°. Замена независимых переменных в выражении, содержащем частные производные. Если в дифференциальном выражении

$$B = F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \ldots\right)$$

положить

$$x = f(u,\ v),\ y = g(u,\ v), \tag{2}$$

где u и v — новые независимые переменные, то последовательные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... определяются из следующих уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

и т. п.

3°. Замена независимых переменных и функции в выражении, содержащем частные производные. В более общем случае, если имеем уравнения

$$x = f(u,\ v,\ w),\ y = g(u,\ v,\ w),\ z = h(u,\ v,\ w), \tag{3}$$

где u, v — новые независимые переменные и $w = w(u,\ v)$ — новая функция, то для частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... получаем такие уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

и т. п.

В некоторых случаях замены переменных удобно пользоваться полными дифференциалами.

3431. Преобразовать уравнение $y'y''' - 3y''^2 = x$, приняв y за новую независимую переменную.

3432. Таким же образом преобразовать уравнение

$$y'^2 y^{\mathrm{IV}} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0.$$

3433. Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$