3100. Пусть

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(*дзета-функция Римана*) и p_n ($n = 1, 2, \ldots$) — последовательные простые числа.

Доказать, что $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$.

3101. Доказать, что произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, где p_n ($n=1, 2, \ldots$)—последовательные простые числа, расходятся (Эйлер).

3102. Пусть $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0).$$

Доказать, что

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Указание. Рассмотреть

$$\lim_{n \to \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

3103. С помощью формулы Валлиса доказать, что

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. Доказать, что выражение

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$$

имеет отличный от нуля предел A при $n \to \infty$.

Вывести отсюда формулу Стирлинга

$$n! = A n^{n+1/2} e^{-n} (1 + \varepsilon_n),$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ $A = \sqrt{2\pi}$.