ОТДЕЛ V

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1°. Общие понятия. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (\textit{сумма ряда}),$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. В противном случае ряд (1) называется *расходящимся*.

2°. Критерий Коши. Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ (n и p — натуральные числа) было выполнено неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon.$$

В частности, если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3°. Признак сравнения 1. Пусть, кроме ряда (1), имеем ряд

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (2)$$

Если при $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

то 1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); 2) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряды с знакоположительными членами (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.