2983. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислить коэффициенты Фурье $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ «смещенной» функции $f(x+h)$ $(h = \text{const})$.

2984. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π, вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *функции Стеклова*

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

2985. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — ее коэффициенты Фурье. Определить коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *свернутой функции*

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,f(x+t)\,dt.$$

Пользуясь полученным результатом, вывести равенство Ляпунова.

§ 7. Суммирование рядов

1°. Непосредственное суммирование. Если

$$u_n = v_{n+1} - v_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v_\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

В частности, если

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}},$$

где числа a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию со знаменателем d, то

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m-1}}.$$

В некоторых случаях искомый ряд удается представить в виде линейной комбинации известных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$