803. На сколько равных между собой отрезков достаточно разбить сегмент $[1, 10]$, чтобы колебание функции $f(x) = x^2$ на каждом из этих отрезков было меньше 0,0001?

804. Доказать, что сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на этом интервале.

805. Доказать, что если ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b), то эта функция равномерно непрерывна на интервале (a, b).

806 (н). Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b), то существуют пределы

$$A = \lim_{x \to a+0} f(x) \text{ и } B = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Верна ли эта теорема для бесконечного интервала (a, b)?

806.1. Доказать что для того, чтобы функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на конечном интервале (a, b), можно было продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a, b).

807. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется функция

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|,$$

где x_1 и x_2 — любые точки из (a, b), связанные условием $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$.

Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. Получить оценку модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ (см. предыдущую задачу) вида

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^\alpha,$$

где C и α — константы, если:

а) $f(x) = x^3$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant a)$ и $(a < x < +\infty)$.

в) $f(x) = \sin x + \cos x$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.