2287. $I_n=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx.$

Если $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ есть комплексная функция от действительной переменной x, где $f_1(x)=\operatorname{Re}f(x)$, $f_2(x)=\operatorname{Im}f(x)$ и $i^2=-1$, то по определению полагают:

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+i\int f_2(x)\,dx.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Re}\int f(x)\,dx=\int \operatorname{Re}f(x)\,dx$$

и

$$\operatorname{Im}\int f(x)\,dx=\int \operatorname{Im}f(x)\,dx.$$

2288. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq n,\\ 2\pi, & \text{если } m=n\end{cases}$$

(n и m — целые).

2289. Показать, что

$$\int\limits_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx=\frac{e^{b(\alpha+i\beta)}-e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

(α и β — постоянные).

Пользуясь формулами Эйлера:

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),$$

вычислить интегралы (m и n — целые положительные числа):

2290. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx.$

2291. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$ **2292.** $\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

2293. $\int\limits_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,dx.$ **2294.** $\int\limits_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx.$