

2570. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

2571. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно убывающими членами сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

2572. Является ли сходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

при $p = 1, 2, 3, \dots$?

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$ ($|a_n| < 10$).

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$

2575. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots$
 $\dots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \dots$

2575.1. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$

У к а з а н и е. Использовать неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

2576. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

2577. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

2577.1. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$