2191. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ $(0<a<b)$.

2192. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int\limits_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

при: а) $|\alpha|<1$; б) $|\alpha|>1$.

Указание. Воспользоваться разложением многочлена $\alpha^{2n}-1$ на квадратичные множители.

2193. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$, $x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ и $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(x_0=a,\ x_n=b)$.

2193.1. Пусть $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.2. Пусть функция $f(x)$ ограничена и выпукла сверху (см. 1312) на сегменте $[a, b]$.

Доказать, что

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3. Пусть $f(x)\in C^{(2)}[1, +\infty)$ и $f(x)\geqslant 0$, $f'(x)\geqslant 0$, $f''(x)\leqslant 0$ при $x\in[1, +\infty)$.

Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int\limits_1^n f(x)\,dx+O(1)$$

при $n\to\infty$.

2193.4. Пусть $f(x)\in C^{(1)}[a, b]$ и

$$\Delta_n=\int\limits_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$