сой, равной единице, помещенной в его вершине, если радиус шаровой поверхности равен R, а угол осевого сечения сектора равен 2α.

§ 9. Несобственные двойные и тройные интегралы

1°. Случай бесконечной области. Если двумерная область Ω не ограничена и функция $f(x, y)$ непрерывна на Ω, то по определению полагают:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_n} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где Ω_n — любая последовательность ограниченных замкнутых квадрируемых областей, исчерпывающая область Ω. Если предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательности Ω_n, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный тройной интеграл от непрерывной функции, распространенный на неограниченную трехмерную область.

2°. Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной и замкнутой области Ω всюду, за исключением точки $P(a, b)$, то полагают:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint\limits_{\Omega - U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где U_ε есть область диаметра ε, содержащая точку P, и в случае существования предела рассматриваемый интеграл называют *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Предполагая, что вблизи точки $P(a, b)$ имеет место равенство

$$f(x, y) = \varphi(x, y)/r^{\alpha},$$

где абсолютная величина функции $\varphi(x, y)$ заключена между числами $m > 0$ и $M > 0$ и $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, получим, что 1) при $\alpha < 2$ интеграл (2) сходится; 2) при $\alpha \geqslant 2$ — расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл (2), если функция $f(x, y)$ имеет линию разрыва.

Понятие несобственного интеграла от разрывной функции легко переносится на случай тройных интегралов.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы с бесконечной областью интегрирования ($0 < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M < +\infty$):

4161. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4162. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$