610. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; 2) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; 3) для некоторого натурального n существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} = l,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

612. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

Указание. Использовать формулу (*) примера 72.

Построить график функций:

613. а) $y = 1 - x^{100}$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

614. а) $y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}}$ $(x \geqslant 0)$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

615. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ $(x \neq 0)$.

616. $x = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$.

617. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

618. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x \geqslant 0)$.

619. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$ $(x \geqslant 0)$.

620. а) $y = \sin^{1000} x$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$.