$\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на [a, A] и удовлетворяет условию $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$. Доказать, что последовательность функций

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \quad (n = 1, 2, ...)$$

также сходится равномерно на [a, A].

3209. Пусть: і) функция f(x, y) непрерывна в области $R(a < x < A; b < y < B); 2) функция <math>\phi(x)$ непрерывна в интервале (a, A) и имеет значения, принадлежащие интервалу (b, B). Доказать, что функция

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

непрерывиа в интервале (a, A).

3210. Пусть: 1) функция f(x, y) непрерывна в области R (a < x < A; b < y < B); 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области R' (a' < u < A'; b' < v < B') и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам (a, A) и (b, B). Доказать, что функция

 $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$

непрерывиа в области R'.

§ 2. Частные производные. Дифференциал функции

1°. Частные производные. Результат частного дифференцирования функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования, если все производные, входящие в вычисление, непрерывны.

 2° . Дифференциал функции. Если полное приращение функции $f_i(x, y, z)$ от независимых переменных x, y, z

может быть представлено в виде

$$\Delta f_{z}(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

где коэффициенты A, B, C не завнсят от Δx , Δy , Δz и $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, то функция f(x, y, z) называется дифференцируемой в точке (x, y, z), а линейная часть приращения A $\Delta x + B$ $\Delta y + + C$ Δz , равная

$$df(x, y, z) = f'_{x}(x, y, z) dx + f'_{y}(x, y, z) dy + f'_{z}(x, y, z) dz, (1)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, называется дифференциалом этой функции.

Формула (1) сохраняет свое значение и в том случае, когда переменные x, y, z являются некоторыми дифференцируемыми функциями от независимых переменных.

Если x, y, z — независимые переменные, и функция f(x, y, z) имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно, то для дифференциалов высших порядков имеет