1313. Показать, что функции

$$x^n \ (n > 1), \ e^x, \ x \ln x$$

выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, а функции

$$x^n \ (0 < n < 1), \ \ln x$$

выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

1314. Доказать неравенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0, \ y>0, \ x \neq y, \ n>1)$;

б) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y)$;

в) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$, если $x>0$ и $y>0$.

1314.1. Пусть $f''(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.
Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

1315. Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

1316. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b) и $f''(\xi) \neq 0$, где $a < \xi < b$.

Доказать, что в интервале (a, b) можно найти два значения x_1 и x_2 такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. Доказать, что если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

то в интервале $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f''(\xi) = 0$.