Число $m_0 = \inf\limits_{x\in(a,\,b)} \{f(x)\} = \max m$ называется *нижней гранью* функции $f(x)$, а число $M_0 = \sup\limits_{x\in(a,\,b)} \{f(x)\} = \min M$ называется *верхней гранью* функции $f(x)$ на данном промежутке (a, b). Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* на промежутке (a, b).

2°. Предел функции в точке. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X = \{x\}$, имеющем точку сгущения a. Запись

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \tag{1}$$

обозначает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, для которых $f(x)$ имеет смысл и которые удовлетворяют условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для существования предела функции (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(x_n \in X;\ n = 1, 2, \ldots)$, было выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Имеют место два замечательных предела:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Критерий Коши. Предел функции $f(x)$ в точке a существует тогда и только тогда, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

как только $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, где x' и x'' — любые точки из области определения функции $f(x)$.

3°. Односторонние пределы. Число A' называется *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a:

$$A' = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0),$$

если

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < a-x < \delta(\varepsilon).$$

Аналогично, число A'' называется *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a:

$$A'' = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0),$$

если

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < x-a < \delta(\varepsilon).$$