ОТДЕЛ VIII

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойные интегралы

1°. Непосредственное вычисление двойного интеграла. *Двойным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенным на ограниченную замкнутую квадрируемую область Ω, называется число

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и сумма распространяется на те значения i и j, для которых $(x_i, y_j) \in \Omega$.

Если область Ω задана неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b,\quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[a, b]$, то соответствующий двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

2°. Замена переменных в двойном интеграле. Если непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v)$$

осуществляют одно-однозначное отображение ограниченной и замкнутой области Ω в плоскости Oxy на область Ω' в плоскости Ouv, и якобиан

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

сохраняет постоянный знак в Ω за исключением, быть может, множества меры нуль, то справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v))\,|I|\,du\,dv.$$

В частности, для случая перехода к полярным координатам r и φ по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$