

1242. Доказать, что у многочлена Чебышева—Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

все корни положительные.

1243. Доказать, что у многочлена Чебышева—Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

все корни вещественные.

1244. Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

1245. Верна ли формула конечных приращений для функции $f(x) = 1/x$ на сегменте $[a, b]$, если $ab < 0$?

1246. Найти функцию $\theta = \theta(x, \Delta x)$ такую, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$; б) $f(x) = x^3$;

в) $f(x) = 1/x$; г) $f(x) = e^x$.

1246.1. Пусть $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество:

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

Доказать, что $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные.

1246.2. Пусть $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf' \left(x + \frac{h}{2} \right).$$

Доказать, что $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a , b и c — постоянные.

1247. Доказать, что если $x \geq 0$, то

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

где

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$$

причем $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = 1/4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 1/2$.