3982. Доказать, что если $f(x, y)$ непрерывна, то функция

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta)\,d\eta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y).$$

3983. Пусть линии уровня функции $f(x, y)$ — простые замкнутые кривые и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми $f(x, y)=v_1$ и $f(x, y)=v_2$.

Доказать, что

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

где $F(v)$ — площадь, ограниченная кривыми $f(x, y)=v_1$ и $f(x, y)=v$.

Указание. Область интегрирования разбить на части, ограниченные бесконечно близкими линиями уровня функции $f(x, y)$.

§ 2. Вычисление площадей

Площадь области S, расположенной в плоскости Oxy, дается формулой

$$S=\iint\limits_S dx\,dy.$$

Найти площади, ограниченные следующими кривыми:

3984. $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$ $(a>0)$.

3985. $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$ $(p>0, q>0)$.

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$.

Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$; $x^2+y^2\geqslant a^2$.

3988. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

3989. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$.

3990. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$; $(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2$ $(a>0)$.