бесконечно малой x. Аналогично, если

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x^p}=k\neq 0\quad (p>0),$$

то $\psi(x)$ называется *бесконечно большой порядка* p относительно бесконечно большой x

2°. Запись

$$\varphi(x)=o(\psi(x)) \text{ при } x\to a$$

обозначает, что

$$\varphi(x)=\alpha(x)\psi(x)\quad (x\in U_a,\ x\neq a), \tag{3}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Если $\psi(x)\neq 0$ при $x\in U_a$, $x\neq a$, то равенство (3) эквивалентно утверждению

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3°. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными* ($\varphi(x)\sim\psi(x)$) при $x\to a$, если

$$\varphi(x)-\psi(x)=o(\psi(x)) \text{ при } x\to a. \tag{4}$$

Если $\psi(x)\neq 0$ при $x\in U_a$, $x\neq a$, то из (4) имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1.$$

При $x\to 0$ справедливы соотношения эквивалентности:

$$\sin x\sim x;\ \operatorname{tg} x\sim x;\ a^x-1\sim x\ln a\ (a>0);$$

$$\ln(1+x)\sim x;\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}.$$

Вообще

$$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x).$$

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых (или бесконечно больших) функций при $x\to a$ данные функции можно заменить эквивалентными.

645. Считая центральный угол $AOB=x$ (рис. 4) бесконечно малой 1-го порядка, определить порядки малости следующих величин: а) хорды AB; б) стрелки CD; в) площади сектора AOB; г) площади треугольника ABC; д) площади трапеции ABB_1A_1; е) площади сегмента ABC.

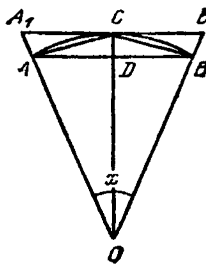

Рис. 4

646. Пусть $o(f(x))$ — произвольная функция, имеющая при $x\to a$ более низкий порядок роста, чем функция $f(x)$, и $O(f(x))$ — любая функция, имеющая при