и

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (2')$$

В частности:

а) если функция $f(x)$ четная, то имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

б) если функция $f(x)$ нечетная, то получаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Функцию $f(x)$, определенную в интервале $(0, l)$ и обладающую в нем приведенными выше свойствами непрерывности, можно в этом интервале представить как формулой (3), так и формулой (4).

2°. Условие полноты. Для всякой интегрируемой на отрезке $[-l, l]$ вместе со своим квадратом функции $f(x)$ формально построенный ряд (1) с коэффициентами (2), (2′) удовлетворяет *равенству Ляпунова*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx.$$

3°. Интегрирование рядов Фурье. Ряд Фурье (1), даже расходящийся, интегрируемой по Риману в интервале $(-l, l)$ функции $f(x)$ можно интегрировать почленно в этом интервале.

2936. Функцию

$$f(x) = \sin^4 x$$

разложить в ряд Фурье.