130. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$? Рассмотреть пример: $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

131. Доказать, что

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

и

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n.$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

132. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Доказать, что

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

и

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n.$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

133. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, имеем:

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

и

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \qquad (x_n \geqslant 0).$

134. Доказать, что если для некоторой последовательности x_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, имеет место по меньшей мере одно из равенств:

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$