Второе правило. Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ и в некоторой точке x_0 выполнены условия

$$f'(x_0) = 0 \text{ и } f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум, когда $f''(x_0) < 0$, и минимум, когда $f''(x_0) > 0$.

Третье правило. Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором интервале $|x-x_0| < \delta$ производные $f'(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ и в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$, причем

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

В таком случае: 1) если n — число четное, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$; 2) если n — число нечетное, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

3°. Абсолютный экстремум. Наибольшее (наименьшее) значение на сегменте $[a, b]$ непрерывной функции $f(x)$ достигается или в критической точке этой функции (т. е. там, где производная $f'(x)$ или равна нулю, или не существует), или в граничных точках a и b данного сегмента.

Исследовать на экстремум следующие функции:

1414. $y = 2 + x - x^2$. 1415. $y = (x-1)^3$.

1416. $y = (x-1)^4$.

1417. $y = x^m(1-x)^n$ (m и n — целые положительные числа).

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$. 1419. $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n — натуральное число).

1421. $y = |x|$. 1422. $y = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$.

1423. Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию

$$f(x) = (x-x_0)^n \varphi(x)$$

(n — натуральное число), где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Пусть $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ и x_0—стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $P_1(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$.

Доказать, что $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0)$.