## § 14. Поверхностные интегралы

1°. **Поверхностный интеграл 1-го рода.** Если $S$ — кусочно гладкая двусторонняя поверхность

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \qquad ((u, v) \in \Omega) \quad (1)$$

и $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках поверхности $S$, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \qquad (2)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

В частном случае, если уравнение поверхности $S$ имеет вид

$$z = z(x, y) \qquad ((x, y) \in \sigma),$$

где $z(x, y)$ — однозначная непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_\sigma f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Этот интеграл не зависит от выбора стороны поверхности $S$.

Если функцию $f(x, y, z)$ рассматривать как плотность поверхности $S$ в точке $(x, y, z)$, то интеграл (2) представляет собой массу этой поверхности.

2°. **Поверхностный интеграл 2-го рода.** Если $S$ — гладкая двусторонняя поверхность, $S+$ — ее сторона, характеризуемая направлением нормали $n\ \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — три функции, определенные и непрерывные на поверхности $S$, то

$$\iint\limits_{S+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \qquad (3)$$

Если поверхность $S$ задана в параметрическом виде (1), то направляющие косинусы нормали $n$ определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$