все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, однако не является непрерывной на $[a, b]$.

757. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые значения из этого интервала, то между ними найдется число ξ такое, что

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

758. Пусть $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и

$$l = \varliminf_{x \to a} f(x) \text{ и } L = \varlimsup_{x \to a} f(x).$$

Доказать, что, каково бы ни было число λ, где $l \leqslant \lambda \leqslant L$, существует последовательность $x_n \to a$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически

1°. Существование и непрерывность обратной функции. Если функция $y = f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и непрерывна на интервале (a, b); 2) монотонна в строгом смысле на этом интервале, то существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная, непрерывная и соответственно монотонная в строгом смысле на интервале (A, B), где $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

Под *однозначной непрерывной ветвью* многозначной обратной функции данной непрерывной функции $y = f(x)$ понимается любая однозначная непрерывная функция $x = g(y)$, определенная в максимальной области ее существования и удовлетворяющая в этой области уравнению $f[g(y)] = y$.

2°. Непрерывность функции, заданной параметрически. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны в интервале (α, β) и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

определяет y как однозначную непрерывную функцию от x:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

на интервале (a, b), где $a = \lim\limits_{t \to \alpha+0} \varphi(t)$ и $b = \lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t)$.