3722.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy \qquad (1)$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку:

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\quad \text{при } x\in(-\infty,\ +\infty).$$

3723. Функцию $f(x)=x^2$ на промежутке $1\leqslant x\leqslant 3$ приближенно заменить линейной функцией $a+bx$ так, чтобы

$$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,dx=\min.$$

3724. Получить приближенную формулу вида

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

из условия, что среднее квадратичное отклонение функций $a+bx$ и $\sqrt{1+x^2}$ на данном промежутке $[0,\ 1]$ является минимальным.

3725. Найти производные от *полных эллиптических интегралов*

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

и

$$F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0<k<1)$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726. Доказать, что *функция Бесселя целого индекса* n

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

удовлетворяет *уравнению Бесселя*

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$