5°. Бесконечный предел. Символическая запись

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

обозначает, что, каково бы ни было $E > 0$, существует число $N = N(E)$ такое, что

$$|x_n| > E \quad \text{при} \quad n > N.$$

6°. Предельная точка. Число ξ (или символ ∞) называется *частичным пределом* (*предельной точкой*) данной последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$), если существует ее подпоследовательность

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}, \ldots \qquad (1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots)$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi.$$

Всякая ограниченная последовательность имеет по меньшей мере один конечный частичный предел (*принцип Больцано — Вейерштрасса*). Если этот частичный предел единственный, то он же является конечным пределом данной последовательности.

Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности x_n

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

называется *нижним пределом*, а наибольший частичный предел ее

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

называется *верхним пределом* этой последовательности.

Равенство

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности x_n.

41. Пусть

$$x_n = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ если } n > N.$$