

$$2. 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3. 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

$$4. 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

$$5. \text{Пусть } a^{[n]} = a(a-h) \dots [a - (n-1)h] \quad \text{и} \\ a^{(0)} = 1.$$

Доказать, что  $(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}$ , где  $C_n^m$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ . Вывести отсюда формулу бинома Ньютона.

6. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) > \\ > 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — числа одного и того же знака, бóльшие  $-1$ .

7. Доказать, что если  $x > -1$ , то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (n > 1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при  $x = 0$ .

8. Доказать неравенство

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{при } n > 1.$$

У к а з а н и е. Использовать неравенство

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n=1, 2, \dots).$$

9. Доказать неравенство

$$2! \cdot 4! \dots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{при } n > 1.$$

10. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Доказать неравенства:

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geq 2);$$

$$\text{б) } n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3):$$