

1248. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции $f(x)$ на сегменте $[0, 2]$.

1249. Пусть $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, где $0 < \xi(x) < x$. Доказать, что если

$$f(x) = x \sin(\ln x) \text{ при } x > 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

то функция $\xi = \xi(x)$ разрывна в любом сколь угодно малом интервале $(0, \xi)$, где $\varepsilon > 0$.

1250. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) . Можно ли для всякой точки ξ из (a, b) указать две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = x^3$ ($-1 \leq x \leq 1$), где $\xi = 0$.

1251. Доказать неравенства:

$$a) |\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$$

$$б) py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y),$$

если $0 < y < x$ и $p > 1$;

$$в) |\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|;$$

$$г) \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \text{ если } 0 < b < a.$$

1252. Объяснить, почему не верна формула Коши для функций

$$f(x) = x^2 \text{ и } g(x) = x^3$$

на сегменте $[-1, 1]$.

1253. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, причем $x_1 x_2 > 0$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{matrix} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

где $x_1 < \xi < x_2$.

1254. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале