и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ).

4392. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}\, dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в точке ее (ξ, η, ζ), $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ) и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Рассмотреть два случая:

а) когда поверхность S не окружает точку (x, y, z),

б) когда поверхность S окружает точку (x, y, z).

4393. Доказать, что если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и S — гладкая поверхность, ограничивающая конечное тело V, то справедливы следующие формулы:

а) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \Delta u\, dx\, dy\, dz;$

б) $$\iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz + \iiint\limits_V u\, \Delta u\, dx\, dy\, dz,$$

где u — функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $V + S$, и $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности S.

4394. Доказать *вторую формулу Грина* в пространстве

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy\, dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

где объем V ограничен поверхностью S, $\boldsymbol{n}$ — направление внешней нормали к поверхности S и функции