

$x \rightarrow a$ тот же порядок роста, что и функция $f(x)$, где $f(x) > 0$.

Показать, что

а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;

в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$; г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$,

д) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

647. Пусть $x \rightarrow 0$ и $n > 0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ — постоянная);

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n < m$);

в) $O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. Пусть $x \rightarrow +\infty$ и $n > 0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$;

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n > m$);

в) $O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Показать, что символ \sim обладает свойствами:

1) рефлексивности: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) симметрии: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\psi(x) \sim \varphi(x)$; 3) транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ и $\psi(x) \sim \chi(x)$, то $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Пусть $x \rightarrow 0$. Доказать следующие равенства:

а) $2x - x^2 = O(x)$; б) $x \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2})$;

в) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$; г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ ($\varepsilon > 0$);

д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x}$;

е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1)$;

ж) $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.

651. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Доказать следующие равенства:

а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$;

б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$;