Вычислить интегралы:

3906. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy.$ **3907.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy.$

3908. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \sin^2\varphi\,dr.$

3909. Доказать равенство

$$\iint\limits_R X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy,$$

если R — прямоугольник: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, и функции $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны на соответствующих сегментах.

3910. Вычислить $I = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x, y)\,dy$, если

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

3911. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Доказать неравенство

$$\left[\int\limits_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx,$$

где знак равенства имеет место лишь, если $f(x) = \text{const}$.

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b [f(x) - f(y)]^2\,dy.$$

3912. Какой знак имеют интегралы:

а) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy;$

б) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy;$

в) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy?$

3913. Найти среднее значение функции

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

в квадрате: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

3914. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{dx\,dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$