§ 10. Функциональные уравнения

809. Доказать, что единственная непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad (1)$$

есть линейная однородная $f(x) = ax$, где $a = f(1)$ — произвольная константа.

810. Доказать, что монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), есть линейная однородная.

811. Доказать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и ограниченная в сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, есть линейная однородная.

812. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x)\,f(y), \qquad (2)$$

есть показательная $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$ — положительная постоянная.

813. Доказать, что не равная нулю тождественно функция $f(x)$, ограниченная в интервале $(0, \varepsilon)$ и удовлетворяющая уравнению (2), есть показательная.

814. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

есть логарифмическая $f(x) = \log_a x$, где a — положительная константа $(a \neq 1)$.

815. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x)\,f(y), \qquad (3)$$

есть степенная $f(x) = x^a$, где a — постоянная.

816. Найти все непрерывные функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению (3).

817. Показать, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ удовлетворяет уравнению (3).