$(n \geqslant 0)$? Определить размеры этой окрестности при $n = 0, 1, 2, 3$.

666. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

Заполнить следующую таблицу:

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

667. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varepsilon = 0{,}001$. Для значений $x_0 = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$ найти максимально большие положительные числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такие, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекало бы неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Можно ли для данного $\varepsilon = 0{,}001$ выбрать такое $\delta > 0$, которое годилось бы для всех значений x_0 из интервала $(0,1)$, т. е. такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, каково бы ни было значение $x_0 \in (0,1)$?

668. Сформулировать на языке «ε—δ» в положительном смысле следующее утверждение: функция $f(x)$, определенная в точке x_0, не является непрерывной в этой точке.

669. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если: а) числа ε образуют конечное множество; б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

670. Пусть дана функция $f(x) = x + 0{,}001\,[x]$.

Показать, что для каждого $\varepsilon > 0{,}001$ можно подобрать $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, если только $|x' - x| < \delta$, а для $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}001$ для всех значений x этого сделать нельзя.

В каких точках нарушается непрерывность этой функции?

671. Пусть для каждого достаточно малого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если