$\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на $[a, A]$ и удовлетворяет условию $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$. Доказать, что последовательность функций

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

также сходится равномерно на $[a, A]$.

3209. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R $(a < x < A;\ b < y < B)$; 2) функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, A) и имеет значения, принадлежащие интервалу (b, B). Доказать, что функция

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

непрерывна в интервале (a, A).

3210. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R $(a < x < A;\ b < y < B)$; 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области R' $(a' < u < A';\ b' < v < B')$ и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам (a, A) и (b, B). Доказать, что функция

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

непрерывна в области R'.

§ 2. Частные производные. Дифференциал функции

1°. Частные производные. Результат частного дифференцирования функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования, если все производные, входящие в вычисление, непрерывны.

2°. Дифференциал функции. Если полное приращение функции $f(x, y, z)$ от независимых переменных x, y, z может быть представлено в виде

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

где коэффициенты A, B, C не зависят от Δx, Δy, Δz и $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, то функция $f(x, y, z)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y, z), а линейная часть приращения $A\,\Delta x + B\,\Delta y + + C\,\Delta z$, равная

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz, \quad (1)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, называется *дифференциалом* этой функции.

Формула (1) сохраняет свое значение и в том случае, когда переменные x, y, z являются некоторыми дифференцируемыми функциями от независимых переменных.

Если x, y, z — независимые переменные, и функция $f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно, то для *дифференциалов высших порядков* имеет