141. Доказать, что если $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

предполагая, что предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

142. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

143. Доказать теорему Штольца: если

а) $y_{n+1} > y_n$ ($n = 1, 2, \ldots$);

б) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, в) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$,

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

144. Найти:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lg n}{n}$.

145. Доказать, что если p — натуральное число, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$

146. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится.

Таким образом, имеет место формула

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где $C = 0,577216\ldots$ — так называемая *постоянная Эйлера* и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

147. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.