3739. Пусть $F(k)$ и $F(k)$ — полные эллиптические интегралы (см. задачу 3725). Доказать формулы

а) $\int\limits_0^k F(k)\,k\,dk = E(k) - k_1^2 F(k)$;

б) $\int\limits_0^k E(k)\,k\,dk = \frac{1}{3}\left[\left(1+k^2\right)E(k) - k_1^2 F(k)\right]$,

где $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. Доказать формулу

$$\int\limits_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x),$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя индексов 0 и 1 (см. задачу 3726).

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

1°. Определение равномерной сходимости. Сходящийся несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \qquad (1)$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$, называется *равномерно сходящимся* в интервале (y_1, y_2), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B = B(\varepsilon)$ такое, что при всяком $b \geqslant B$ имеем:

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

Равномерная сходимость интеграла (1) эквивалентна равномерной сходимости всех рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y)\,dx, \qquad (2)$$

где $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Если интеграл (1) сходится равномерно в интервале (y_1, y_2), то он представляет собой непрерывную функцию параметра y в этом интервале.

2°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости интеграла (1) в интервале (y_1, y_2) необходимо и достаточно,