

4220. Вычислить n -кратный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

если $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) — положительно определенная квадратичная форма.

§ 11. Криволинейные интегралы

1°. Криволинейный интеграл 1-го рода. Если $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

и ds — дифференциал дуги, то по определению полагают

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Особенность этого интеграла состоит в том, что он не зависит от направления кривой C .

2°. Механические приложения криволинейного интеграла 1-го рода. Если $\rho = \rho(x, y, z)$ — линейная плотность в текущей точке (x, y, z) кривой C , то масса кривой C равна:

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

Координаты центра тяжести (x_0, y_0, z_0) этой кривой выражаются формулами

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3°. Криволинейный интеграл 2-го рода. Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны в точках кривой (1), пробегаемой в направлении возрастания параметра t , то полагают

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{t_0}^T (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt. \quad (2) \end{aligned}$$

При изменении направления обхода кривой C этот интеграл изменяет свой знак на обратный. Механически интеграл (2) представ-