2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

5. Пусть $a^{[n]}=a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ и $a^{[0]}=1$.

Доказать, что $(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$, где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m. Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона*.

6. Доказать *неравенство Бернулли*:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant$$
$$\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного и того же знака, бо́льшие -1.

7. Доказать, что если $x>-1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x=0$.

8. Доказать неравенство

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ при } n>1.$$

Указание. Использовать неравенство

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

9. Доказать неравенство

$$2!\cdot 4!\ldots(2n)!>[(n+1)!]^n \text{ при } n>1.$$

10. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Доказать неравенства:

а) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $(n\geqslant 2)$;

б) $n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geqslant 3)$;