Доказать, что функция

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)] \quad (|f_n(x)|<1).$$

непрерывна на интервале (a, b).

3109. Найти выражение для производной функции

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)].$$

Каковы достаточные условия существования $F'(x)$?

3110. Доказать, что если $0<x<y$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n)}=0.$$

§ 10. Формула Стирлинга

Для вычисления $n!$ при больших значениях n полезна *формула Стирлинга*

$$n!=\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\theta_n/12n} \quad (0<\theta_n<1).$$

Пользуясь формулой Стирлинга, приближенно вычислить:

3111. $\lg 100!$ 3112. $1\cdot3\cdot5\ldots1999$.

3113. $\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots99}{2\cdot4\cdot6\ldots100}$. 3114. C_{100}^{40}.

3115. $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}$.

3116. $\int\limits_0^1(1-x^2)^{50}\,dx$. 3117. $\int\limits_0^{2\pi}\sin^{200}x\,dx$.

3118. Вывести асимптотическую формулу для произведения

$$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1).$$

3119. Приближенно вычислить C_{2n}^{n}, если n велико.

3120. Пользуясь формулой Стирлинга, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.