Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ $[0 \leqslant t \leqslant T]$ — параметрические уравнения кусочно гладкой простой замкнутой кривой C, пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью S (рис. 11), то

$$S = -\int_0^T y(t)\,x'(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,y'(t)\,dt,$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)]\,dt.$$

3°. Площадь в полярных координатах. Площадь S сектора OAB (рис. 12), ограниченного непрерывной

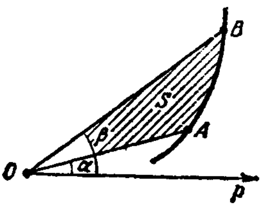

Рис. 12

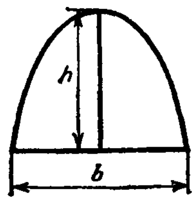

Рис. 13

кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

2396. Доказать, что площадь прямого параболического сегмента равна

$$S = \frac{2}{3}\,bh,$$

где b — основание и h — высота сегмента (рис. 13).

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах *):

2397. $ax = y^2$, $ay = x^2$.

2398. $y = x^2$, $x + y = 2$.

2399. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

2400. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0{,}1$, $x = 10$.

2400.1. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.

2400.2. $y = (x + 1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

---

*) Все параметры в этом и следующих параграфах отдела IV считаются положительными.