4214. Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \int_0^x f(u)\,\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du.$$

4215. Доказать равенство

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \ldots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\,dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2-u^2)^n f(u)\,du.$$

4216. Доказать *формулу Дирихле*

$$\underset{\substack{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n > 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1}}{\int\int\ldots\int} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)} \qquad (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n > 0).$$

4217. Доказать *формулу Лиувилля*

$$\underset{\substack{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n > 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1}}{\int\int\ldots\int} f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots$$

$$\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int_0^1 f(u)\,u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\,du$$

$$(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n > 0),$$

где $f(u)$ — непрерывная функция.

Указание. Применить метод математической индукции.

4218. Привести к однократному интегралу n-кратный интеграл $(n \geqslant 2)$

$$\underset{\Omega}{\int\int\ldots\int} f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right) dx_1\,dx_2 \ldots dx_n,$$

распространенный по области $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2$, где $f(u)$ — непрерывная функция.

4219. Вычислить *потенциал на себя* однородного шара радиуса R и плотности ρ_0, т. е. найти интеграл

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \underset{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leqslant R^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leqslant R^2}}{\int\int\int\int\int\int} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

где $r_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.