§ 9. Бесконечные произведения

1°. Сходимость произведения. Бесконечное произведение

$$p_1 p_2 \ldots p_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \tag{1}$$

называется *сходящимся*, если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n=\infty} P_n = P.$$

Если $P = 0$ и ни один из сомножителей p_n не равен нулю, то произведение (1) называется *расходящимся к нулю*; в противном случае произведение называется *сходящимся к нулю*.

Необходимым условием сходимости является

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Сходимость произведения (1) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n. \tag{2}$$

Если $p_n = 1 + \alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и α_n не меняет знака, то для сходимости произведения (1) необходимо и достаточно, чтобы был сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1). \tag{3}$$

В общем случае, когда α_n не сохраняет постоянного знака и ряд (3) сходится, произведение (1) будет сходиться или расходиться к нулю вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2.$$

2°. Абсолютная сходимость. Произведение (1) называется *абсолютно* или *условно* (*не абсолютно*) сходящимся в зависимости от того, абсолютно или условно сходится ряд (2). Необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости произведения (1) является абсолютная сходимость ряда (3).

3°. Разложение функций в бесконечные произведения. При $-\infty < x < +\infty$ имеют место разложения

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$