3428. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} [z-f(\alpha)]^2 &= x^2(y^2-\alpha^2), \\ [z-f(\alpha)]\, f'(\alpha) &= \alpha x^2, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

3429. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ 0 &= x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha), \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0.$$

3430. Показать, что неявная функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$y = x\varphi(z) + \psi(z),$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 4. Замена переменных

1°. Замена переменных в выражении, содержащем обыкновенные производные. Пусть в дифференциальном выражении

$$A = \Phi\left(x,\ y,\ y'_x,\ y''_{xx},\ \ldots\right)$$

требуется перейти к новым переменным: t — независимой переменной и u — функции, связанным с прежними переменными x и y уравнениями

$$x = f(t, u),\quad y = g(t, u). \tag{1}$$

Дифференцируя уравнения (1), будем иметь:

$$y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}\,u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\,u'_t}.$$

Аналогично выражаются высшие производные $y''_{xx}, \ldots$ В результате мы получаем:

$$A = \Phi_1\left(t,\ u,\ u'_t,\ u''_{tt},\ \ldots\right).$$