стремится к нулю. Пользуясь полученным результатом, вывести приближенную формулу для площади сегмента:

$$S \approx \frac{2}{3} bh.$$

§ 10. Формула Тейлора

1°. Локальная формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $|x-x_0| < \varepsilon$ точки x_0; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно; 3) в точке x_0 существует производная n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

В частности, при $x_0 = 0$ имеем:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{2}$$

При указанных условиях представление (1) единственно.

Если в точке x_0 существует производная $f^{(n+1)}(x_0)$, то остаточный член в формуле (1) может быть взят в виде $O^*((x-x_0)^{n+1})$.

Из локальной формулы Тейлора (2) получаем следующие пять важных разложений:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2°. Формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет на этом сегменте