(a, b), то ее производная $f'(x)$ также не ограничена на интервале (a, b). Обратная теорема не верна (построить пример).

1255. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

1256. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, т. е. $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

1257. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$f(x) = o(x) \text{ при } x \to +\infty,$$

то

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

В частности, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$, то $k = 0$.

1258. а) Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале (x_0, X); 3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$, то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

б) Показать, что для функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{и} \quad f(1) = 0$$

существует конечный предел $\lim\limits_{x\to1} f'(x)$, однако функция $f(x)$ не имеет односторонних производных $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

Однако в этой точке существуют обобщенные односторонние производные (см. **1009.1**).

1259. Доказать, что если $f'(x) = 0$ при $a < x < b$, то

$$f(x) = \text{const при } a < x < b.$$

1260. Доказать, что единственная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, имеющая постоянную произ-