ляет собой *работу переменной силы* $\{P, Q, R\}$, точка приложения которой описывает кривую C.

4°. Случай полного дифференциала. Если

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = du,$$

где $u = u(x, y, z)$ — однозначная функция в области V, то независимо от вида кривой C, целиком расположенной в области V, имеем:

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) — начальная и (x_2, y_2, z_2) — конечная точка пути. В простейшем случае, если область V односвязна и функции P, Q и R обладают непрерывными частными производными первого порядка, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области V были тождественно выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тогда в простейшем случае стандартной параллелопипедальной области V, функцию u можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + c,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка области V и c — произвольная постоянная.

Механически этот случай соответствует работе силы, имеющей потенциал.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

4221. $\int\limits_C (x + y)\,ds$, где C — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

4222. $\int\limits_C y^2\,ds$, где C — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4223. $\int\limits_C (x^2 + y^2)\,ds$, где C — кривая

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4224. $\int\limits_C xy\,ds$, где C — дуга гиперболы

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

4225. $\int\limits_C (x^{4/3} + y^{4/3})\,ds$, где C — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.