странства $Ox_1x_2\ldots x_n$ на ограниченную область Ω' пространства $O'\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ и 3) якобиан

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}$$

сохраняет почти всюду постоянный знак (кроме множества меры нуль) в области Ω', то справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\Omega'}\ldots\int f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,|I|\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n.$$

В частности, при переходе к полярным координатам $(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ по формулам

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1,\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

имеем:

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201. Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция в области R $(a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant y \leqslant b)$ и

$$K_n(x, y) =$$

$$= \int\limits_a^b\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)\ldots K(t_n, y)\,dt_1dt_2\ldots dt_n.$$

Доказать, что

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int\limits_a^b K_n(x, t)\,K_m(t, y)\,dt.$$

4202. Пусть $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в области $0 \leqslant x_i \leqslant x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказать равенство

$$\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}} f\,dx_n = \int\limits_0^x dx_n\int\limits_{x_n}^x dx_{n-1}\ldots\int\limits_{x_2}^x f\,dx_1$$

$$(n \geqslant 2).$$

4203. Доказать, что

$$\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_n)\,dt_n = \frac{1}{n!}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}^n,$$

где f — непрерывная функция.