2201. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ существует. Является ли эта функция интегрируемой на $[a, b]$?

Рассмотреть пример:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$$

2202. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$ при $a \leqslant x \leqslant b$, а функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

2203. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $f(\varphi(x))$ также интегрируема?

Рассмотреть пример:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x=0; \\ 1, & \text{если } x\neq 0,\end{cases}$$

и $\varphi(x)$ — функция Римана (см. задачу 2195).

2204. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[A, B]$. Доказать, что $f(x)$ обладает свойством *интегральной непрерывности*, т. е. $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0$, где $[a, b]\subset[A, B]$.

2205. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Доказать, что равенство $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных

1°. Формула Ньютона — Лейбница. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ — ее *первообразная*, т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $f(x) \geqslant 0$ геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапе-