

1313. Показать, что функции

$$x^n \quad (n > 1), \quad e^x, \quad x \ln x$$

выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, а функции

$$x^n \quad (0 < n < 1), \quad \ln x$$

выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

1314. Доказать неравенства и выяснить их геометрический смысл:

$$а) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$б) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{x+y/2} \quad (x \neq y);$$

$$в) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \text{ если } x > 0 \text{ и } y > 0.$$

1314.1. Пусть $f''(x) \geq 0$ при $a \leq x \leq b$. Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

1315. Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

1316. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b) и $f''(\xi) \neq 0$, где $a < \xi < b$.

Доказать, что в интервале (a, b) можно найти два значения x_1 и x_2 такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. Доказать, что если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

то в интервале $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f''(\xi) = 0$.