

2°. Непрерывность элементарных функций. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при значении $x = x_0$, то функции

$$а) f(x) \pm g(x); б) f(x)g(x); в) \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

также непрерывны при $x = x_0$.

В частности: а) целая рациональная функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x ; б) дробная рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x , не обращающих знаменателя в нуль.

Вообще основные элементарные функции: x^n , $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... непрерывны во всех точках, где они определены.

Более общий результат следующий: если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и функция $g(y)$ непрерывна при $y = f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

3°. Основные теоремы о непрерывных функциях. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то: 1) $f(x)$ ограничена на этом сегменте; 2) достигает на нем своей нижней грани m и верхней грани M (теорема Вейерштрасса); 3) принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ (теорема Коши). В частности, если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то найдется значение $\gamma (\alpha < \gamma < \beta)$ такое, что $f(\gamma) = 0$.

662. Дан график непрерывной функции $y = f(x)$. Для данной точки a и числа $\varepsilon > 0$ указать геометрически число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

663. Требуется изготовить металлическую квадратную пластинку, сторона которой $x_0 = 10$ см. В каких пределах допустимо изменять сторону x этой пластинки, если площадь ее $y = x^2$ может отличаться от проектной $y_0 = 100$ см² не больше чем а) на ± 1 см²; б) на $\pm 0,1$ см²; в) на $\pm 0,01$ см²; г) на $\pm \varepsilon$ см²?

664. Ребро куба заключается между 2 м и 3 м. С какой абсолютной погрешностью Δ допустимо измерить ребро x этого куба, чтобы объем его y можно было вычислить с абсолютной погрешностью, не превышающей ε м³, если: а) $\varepsilon = 0,1$ м³; б) $\varepsilon = 0,01$ м³; в) $\varepsilon = 0,001$ м³?

665. В какой максимальной окрестности точки $x_0 = 100$ ордината графика функции $y = \sqrt{x}$ отличается от ординаты $y_0 = 10$ меньше чем на $\varepsilon = 10^{-2}$