Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $\left(a,\ a - \frac{f(a)}{k}\right)$.

**1286.** Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* $x_0$, если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x_0 = x - x_0$.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(a < x < b)$ возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала $(a, b)$, то она является возрастающей на этом интервале.

**1287.** Показать, что функция

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{2}{x},\ \text{если}\ x \neq 0\ \text{и}\ f(0) = 0,$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Построить эскиз графика функции.

**1288.** Доказать теорему: если 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $n$-кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то имеет место неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x)\ \text{при}\ x > x_0.$$

**1289.** Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$;

б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$;

г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

д) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

Дать геометрическую иллюстрацию неравенств а) — г).

**1290.** Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x\ \text{при}\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$