Выяснить геометрические свойства поверхности (2).

3423. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \qquad (3)$$

где $\Phi(u)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменной u и a, b и c — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (3).

3424. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right).$$

Показать, что

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

3425. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением

$$F(x + zy^{-1}, \ y + zx^{-1}) = 0.$$

Показать, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

3426. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha), \end{aligned}\right\}$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ — переменный параметр и $f(\alpha)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

3427. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 &= x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$