§ 3. Геометрический смысл производной

1°. Уравнения касательной и нормали. Уравнения *касательной* MT и *нормали* MN к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке его $M(x, y)$ (рис. 7) соответственно имеют вид:

$$Y - y = y'(X - x)$$

и

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной или нормали, а $y' = f'(x)$ — значение производной в точке касания.

2°. Отрезки касательной и нормали. Для отрезков касательной и нормали: PT — подкасательная, PN — поднормаль, MT — касательная, MN—нормаль (рис. 7);

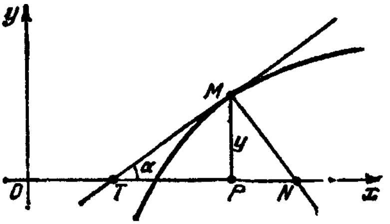

Рис. 7

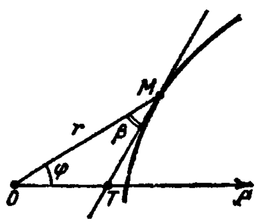

Рис. 8

учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = y'$, получаем следующие значения:

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1 + y'^2}, \quad MN = |y|\sqrt{1 + y'^2}.$$

3°. Угол между касательной и радиус-вектором точки касания. Если $r = f(\varphi)$ — уравнение кривой в полярной системе координат и β — угол, образованный касательной MT и радиусом-вектором OM точки касания M (рис. 8), то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

в точках: а) $A(-1, 0)$; б) $B(2, 3)$; в) $C(3, 0)$.