2780. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2781. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2782. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2783. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции? Рассмотреть пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально.} \end{cases}$

2784. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на $[a, b]$.

2785. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$?

Рассмотреть пример $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2786. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \dfrac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$