1231. *Многочлены Чебышева—Эрмита* определяются формулой

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найти явное выражение многочленов $H_m(x)$.

Доказать, что $H_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Указание. Использовать равенство $u' + 2xu = 0$, где $u = e^{-x^2}$.

1232. Доказать равенство

$$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1232.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \quad (x > 0).$$

1232.2. Доказать формулу

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\left[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x\right],$$

где

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

и

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Пусть $\frac{d}{dx} = D$ обозначает операцию дифференцирования и

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k$$

—символический дифференциальный многочлен, где $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — некоторые непрерывные функции от x.