сходимости R определяется по *формуле Коши — Адамара*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует.

2°. Теорема Абеля. Если степенной ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ сходится в концевой точке $x = R$ интервала сходимости, то

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3°. Ряд Тейлора. Аналитическая в точке a функция $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Остаточный член этого ряда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

может быть представлен в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(*форма Лагранжа*), или в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(*форма Коши*).

Необходимо помнить следующие пять основных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

$$(-\infty < x < +\infty).$$