Указание. Искомый предел представить в виде бесконечного произведения

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} a_{n+1}/a_n.$$

Для определения константы A воспользоваться формулой Валлиса.

3105. Согласно Эйлеру *гамма-функция* $\Gamma(x)$ определяется следующей формулой:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Исходя из этой формулы: а) представить функцию $\Gamma(x)$ в виде бесконечного произведения; б) показать, что $\Gamma(x)$ имеет смысл для всех действительных x, не равных целому отрицательному числу; в) вывести свойство

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

г) получить значение $\Gamma(n)$ для n целого и положительного.

3106. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int\limits_a^b f(x)dx}.$$

3107. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)} = \frac{2}{e},$$

где $a > 0$ и $b > 0$.

3108. Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные функции на интервале (a, b) и $|f_n(x)| \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.