

3722.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left( y + \frac{n\pi}{2} \right) dy \quad (1)$$

( $n = 1, 2, \dots$ ).

Пользуясь формулой (1), получить оценку:

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1} \text{ при } x \in (-\infty, +\infty).$$

3723. Функцию  $f(x) = x^2$  на промежутке  $1 \leq x \leq 3$  приближенно заменить линейной функцией  $a + bx$  так, чтобы

$$\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx = \min.$$

3724. Получить приближенную формулу вида

$$\sqrt{1+x^2} \approx a + bx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

из условия, что среднее квадратичное отклонение функций  $a + bx$  и  $\sqrt{1+x^2}$  на данном промежутке  $[0, 1]$  является минимальным.

3725. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

и

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

и выразить их через функции  $E(k)$  и  $F(k)$ .

Показать, что  $E(k)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

3726. Доказать, что функция Бесселя целого индекса  $n$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$