где AmO — верхняя полуокружность $x^2+y^2=ax$, пробегаемая от точки $A\ (a,\ 0)$ до точки $O\ (0,\ 0)$.

Указание. Дополнить путь AmO до замкнутого прямолинейным отрезком OA оси Ox.

4304. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmB} [\varphi(y)e^x - my]\,dx + [\varphi'(y)e^x - m]\,dy,$$

где $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ — непрерывные функции и AmB — произвольный путь, соединяющий точки $A\ (x_1,\ y_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2)$, но ограничивающий вместе с отрезком AB площадь $AmBA$ данной величины S.

4305. Определить две дважды непрерывно дифференцируемые функции $P\ (x,\ y)$ и $Q\ (x,\ y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P(x+\alpha,\ y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha,\ y+\beta)\,dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянных α и β.

4306. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F\ (x,\ y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmB} F(x,\ y)(y\,dx + x\,dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

4307. Вычислить

$$I = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

где C — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

Указание. Рассмотреть два случая: 1) начало координат находится вне контура; 2) контур C окружает начало координат.

С помощью криволинейных интегралов вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

4308. Эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4309. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4310. Параболой $(x+y)^2 = ax$ $(a > 0)$ и осью Ox.