45. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Предполагая, что n пробегает натуральный ряд чисел, определить значения следующих выражений:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10\,000n}{n^2+1}$. **47.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$. **49.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\,\ldots\,\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Доказать следующие равенства:

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}=0$. **59.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}=0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$. **61.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}=0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$, если $|q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$. **64.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n}=0$ $(a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$. **66.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.