1291. Доказать, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы и все члены прогрессий положительны. Доказать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

1293. Исходя из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

где x, a_k, b_k ($k = 1, \ldots, n$) вещественны, доказать *неравенство Коши*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

1294. Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел не больше среднего квадратичного этих же чисел, т. е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

1295. Доказать, что среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел, т. е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1296. *Средней порядка* s для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{1/s}, \quad \text{если } s \neq 0,$$

и

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \to 0} \Delta_s(a, b).$$

В частности, получаем: при $s = -1$ *среднее гармоническое*; при $s = 0$ *среднее геометрическое* (доказать!);