4320. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=ax$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4320.1. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox простого замкнутого контура C, расположенного в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$ равен

$$V=-\pi \oint_C y^2 dx.$$

4321. Вычислить

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2},$$

если $X=ax+by$, $Y=cx+dy$ и простой замкнутый контур C окружает начало координат ($ad-bc \neq 0$).

4322. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X=\varphi(x, y)$, $Y=\psi(x, y)$, и простой контур C окружает начало координат, причем кривые $\varphi(x, y)=0$ и $\psi(x, y)=0$ имеют несколько простых точек пересечения внутри контура C.

4323. Показать, что если C — замкнутый контур и l — произвольное направление, то

$$\oint_C \cos(l,\ n)\,ds=0,$$

где n — внешняя нормаль к контуру C.

4324. Найти значение интеграла

$$I=\oint_C [x\cos(n,\ x)+y\cos(n,\ y)]\,ds,$$

где C — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область S, и n — внешняя нормаль к ней.

4325. Найти

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C (F\cdot n)\,ds,$$

где S — площадь, ограниченная контуром C, окружающим точку $(x_0,\ y_0)$, $d(S)$ — диаметр области S, n — единичный вектор внешней нормали контура C и $F\{X,\ Y\}$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $S+C$.

§ 13. Физические приложения криволинейных интегралов

4326. С какой силой притягивает масса M, равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2+y^2=a^2$, $y \geqslant 0$, материальную точку массы m, занимающую положение $(0,\ 0)$?