ОТДЕЛ IV

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел суммы

1°. Интеграл в смысле Римана. Если функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, то *интегралом* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

где $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Для существования предела (1) необходимо и достаточно, чтобы *нижняя интегральная сумма*

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

и *верхняя интегральная сумма*

$$\overline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

где

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x) \text{ и } M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x),$$

имели общий предел при $\max|\Delta x_i| \to 0$.

Функции $f(x)$, для которых предел в правой части равенства (1) существует, называются *интегрируемыми* (собственно) на соответствующем промежутке. В частности, а) непрерывная функция; б) ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва; в) ограниченная монотонная функция,— интегрируемы на любом конечном сегменте. Если функция $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a, b]$, то она собственно неинтегрируема на $[a, b]$.

2°. Условие интегрируемости. Необходимым и достаточным условием интегрируемости на данном сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ является выполнение равенства

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$