

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta_n$.

2194. Показать, что разрывная функция

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

интегрируема на промежутке $[0, 1]$.

2195. Показать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1/n, & \text{если } x = m/n, \end{cases}$$

где m и n ($n \geq 1$) — взаимно простые целые числа, интегрируема на любом конечном промежутке.

2196. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], \text{ если } x \neq 0$$

и $f(0) = 0$, интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

2197. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке.

2198. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

$$f_n(x) = \sup f(x) \text{ при } x_i \leq x < x_{i+1},$$

где

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i=0, 1, \dots, n; \quad n=1, 2, \dots).$$

$$\text{Доказать, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2199. Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) такая, что

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx \text{ при } a \leq c \leq b.$$

2200. Доказать, что если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то абсолютная величина ее $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$