

2°. Дифференцируемость неявной функции. Если, сверх того, 4) функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в окрестности точки $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$, то функция (1) дифференцируема в окрестности точки $A_0(x_0, y_0)$ и ее производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ могут быть найдены из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Если функция $F(x, y, z)$ дифференцируема достаточное число раз, то последовательным дифференцированием равенств (2) вычисляются также производные высших порядков от функции z .

3°. Неявные функции, определяемые системой уравнений. Пусть функции $F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют следующим условиям:

1) обращаются в нуль в точке $\hat{A}_0(x_{10}, \dots, x_{m0}; y_{10}, \dots, y_{n0})$.

2) дифференцируемы в окрестности точки \hat{A}_0 ;

3) функциональный определитель $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$ в точке \hat{A}_0 .

В таком случае система уравнений

$$F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

однозначно определяет в некоторой окрестности точки $A_0(x_{10}, \dots, x_{m0})$ систему дифференцируемых функций

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

удовлетворяющих уравнениям (3) и условиям

$$f_i(x_{10}, \dots, x_{m0}) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Дифференциалы этих неявных функций могут быть найдены из системы

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n$)*).

3361. Показать, что разрывная в каждой точке функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

*) При формулировке большинства задач этого раздела без оговорок предполагается, что выполнены условия существования неявных функций и их соответствующих производных.