

Найти промежутки вогнутости определенного знака и точки перегиба графиков следующих функций:

$$1299. y = 3x^2 - x^3. \quad 1300. y = \frac{a^2}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$1301. y = x + x^{5/3}. \quad 1302. y = \sqrt{1 + x^2}.$$

$$1303. y = x + \sin x. \quad 1304. y = e^{-x^2}.$$

$$1305. y = \ln(1 + x^2). \quad 1306. y = x \sin(\ln x) \quad (x > 0).$$

$$1307. y = x^x \quad (x > 0).$$

1308. Показать, что кривая

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

Построить график этой функции.

1309. При каком выборе параметра h «кривая вероятности»

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

имеет точки перегиба $x = \pm \sigma$?

1310. Исследовать направление вогнутости циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0).$$

1311. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в промежутке $a \leq x < +\infty$, причем: 1) $f(a) = A > 0$; 2) $f'(a) < 0$; 3) $f''(x) \leq 0$ при $x > a$.

Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $(a, +\infty)$.

1312. Функция $f(x)$ называется *выпуклой снизу* (сверху) на интервале (a, b) , если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказать, что: 1) функция $f(x)$ выпукла снизу на (a, b) , если $f''(x) > 0$, при $a < x < b$; 2) $f(x)$ выпукла сверху на (a, b) , если, $f''(x) < 0$, при $a < x < b$.