1237. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала (a, b) и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Доказать, что $f'(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

1238. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ на сегменте $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ имеет производную n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в интервале (x_0, x_n) и 3) выполнены равенства

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

Доказать, что в интервале (x_0, x_n) существует по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

1239. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(p+q)$-го порядка $f^{(p+q)}(x)$ на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$, имеет производную $(p+q+1)$-го порядка $f^{(p+q+1)}(x)$ в интервале (a, b); 3) выполнены равенства

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0$$

и

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Доказать, что в таком случае $f^{(p+q+1)}(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

1240. Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ вещественны, то его последовательные производные $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, ..., $P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

1241. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}$$

все корни вещественные и заключены в интервале $(-1, 1)$.