3727. Пусть $I(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на сегменте $0\leqslant x\leqslant a$.

Доказать, что при $0<\alpha<a$ имеем:

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int\limits_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

Указание. Положить $x=\alpha t$.

3728. Показать, что функция

$$u(x)=\int\limits_0^1 K(x,\ y)\,v(y)\,dy,$$

где

$$K(x,\ y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{если } x\leqslant y;\\ y(1-x), & \text{если } x>y,\end{cases}$$

и $v(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению

$$u''(x)=-v(x)\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

3729. Найти $F''_{xy}(x,\ y)$, если

$$F(x,\ y)=\int\limits_{x/y}^{xy}(x-yz)\,f(z)\,dz,$$

где $f(z)$ — дифференцируемая функция.

3730. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $F(x)$ — дифференцируемая функция.

Доказать, что функция

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz$$

удовлетворяет *уравнению колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальным условиям: $u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x,0)=F(x)$.

3731. Показать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0,\ l]$ и $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$ при $0\leqslant\xi\leqslant l$, то функция

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_0^l\frac{(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$