и начальному условию

$$\lim_{t\to+0} u(x,\ t) = f(x).$$

§ 4. Эйлеровы интегралы

1°. Гамма-функция. При $x > 0$ имеем:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Основное свойство гамма-функции выражается *формулой понижения*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Если n — целое положительное число, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2°. Формула дополнения. При $0 < x < 1$ имеем:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

3°. Бета-функция. При $x > 0$ и $y > 0$ имеем:

$$B(x,\ y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Справедлива формула

$$B(x,\ y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3841. Доказать, что гамма-функция $\Gamma(x)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0$.

3842. Доказать, что бета-функция $B(x,\ y)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0,\ y > 0$.

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

3843. $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$. 3844. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$.

3845. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$.