748. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

также непрерывны на $[a, b]$.

749. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то функции

$$\varphi(x) = \min [f(x), g(x)] \text{ и } \psi(x) = \max [f(x), g(x)]$$

также непрерывны.

750. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Доказать, что функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi < x} \{(f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\}$$

непрерывны слева на сегменте $[a, b]$.

751. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция ограничена в данном промежутке.

752. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $(x_0, +\infty)$. Доказать, что, каково бы ни было число T, найдется последовательность $x_n \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные периодические функции, определенные при $-\infty < x < +\infty$ и

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Доказать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

754. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

755. Доказать, что если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и монотонна на сегменте $[a, b]$; 2) в качестве своих значений принимает все числа между $f(a)$ и $f(b)$, то эта функция непрерывна на $[a, b]$.

756. Показать, что функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x - a}$, если $x \neq a$ и $f(a) = 0$, принимает на любом сегменте $[a, b]$