

2201. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ существует. Является ли эта функция интегрируемой на $[a, b]$?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

2202. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $A \leq f(x) \leq B$ при $a \leq x \leq b$, а функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

2203. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $f(\varphi(x))$ также интегрируема? Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x=0; \\ 1, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

и $\varphi(x)$ — функция Римана (см. задачу 2195).

2204. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[A, B]$. Доказать, что $f(x)$ обладает свойством *интегральной непрерывности*, т. е. $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{b+h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0$, где $[a, b] \subset [A, B]$.

2205. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Доказать, что равенство $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных

1°. Ф о р м у л а Н ь ю т о н а — Л е й б н и ц а. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ при $f(x) \geq 0$ геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапе-