

2252. Можно ли в интеграле $\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^3} dx$ положить $x = \sin t$?

2253. Можно ли в интеграле $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ при замене переменной $x = \sin t$ в качестве новых пределов взять числа π и $\frac{\pi}{2}$?

2254. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx.$$

2255. Доказать равенство

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx \quad (a > 0).$$

2256. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[A, B] \supset [a, b]$. Найти $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy$ при $[a-x, b-x] \subset [A, B]$.

2257. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

2258. Доказать, что для непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ имеем: 1) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$, если функция $f(x)$ четная, и 2) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, если функция $f(x)$ нечетная. Дать геометрическую интерпретацию этих фактов.

2259. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

2260. Вычислить интеграл

$$\int_{1/2}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+(1/x)} dx,$$