при $s = 1$ *среднее арифметическое*; при $s = 2$ *среднее квадратичное*.

Доказать, что:

1) $\min(a, b) \leqslant \Delta_s(a, b) \leqslant \max(a, b)$;

2) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s;

3) $\lim\limits_{s \to -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$\lim\limits_{s \to +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

Указание. Рассмотреть $\frac{d}{ds}[\ln \Delta_s(a, b)]$.

1297(н). Доказать неравенства:

а) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ при $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

б) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, если $n > 1$, $x > a > 0$;

в) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ при $x > 0$.

§ 8. Направление вогнутости. Точки перегиба

1°. Достаточные условия вогнутости. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* или *выпуклым вниз* (*вогнутым вниз* или *выпуклым вверх*) на сегменте $[a, b]$, если отрезок кривой

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

расположен выше (соответственно ниже) касательной, проведенной в любой точке этого отрезка. Достаточным условием вогнутости графика вверх (вниз), в предположении существования второй производной $f''(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, является выполнение неравенства

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \text{ при } a < x < b.$$

2°. Достаточное условие точки перегиба. Точки, в которых меняется направление вогнутости графика функции, называются *точками перегиба*. Точка x_0, для которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, причем $f'(x_0)$ имеет смысл, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через значение x_0.

1298. Исследовать направление вогнутости кривой

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ и $C(0, 0)$.