Доказать неравенство $M^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f'^2(x)\,dx$, где $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$.

2333. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0 \quad (p>0).$$

§ 4. Несобственные интегралы

1°. Несобственная интегрируемость функций. Если функция $f(x)$ собственно интегрируема на каждом конечном сегменте $[a, b]$, то, по определению, полагают:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b и собственно интегрируема на каждом сегменте $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, то принимают:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Если пределы (1) или (2) существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся* (в элементарном смысле!).

2°. Критерий Коши. Для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $b = b(\varepsilon)$ такое, что при любых $b' > b$ и $b'' > b$ было бы выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Аналогично формулируется критерий Коши для интеграла типа (2).

3°. Признаки абсолютной сходимости. Если $|f(x)|$ несобственно интегрируема, то соответствующий элементарный интеграл (1) или (2) от функции $f(x)$ называется *абсолютно сходящимся* и является интегралом заведомо сходящимся.

Признак сравнения I. Пусть $|f(x)| \leqslant F(x)$ при $x \geqslant a$. Если $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

Признак сравнения II. Если $\psi(x) > 0$ и $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ при $x\to+\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}\psi(x)\,dx$ сходятся