ОТДЕЛ VII

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1°. Непрерывность интеграла. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной области $R\ [a \leqslant x \leqslant A;\ b \leqslant y \leqslant B]$, то

$$F(y) = \int_a^A f(x, y)\,dx$$

представляет собой функцию, непрерывную на сегменте $b \leqslant y \leqslant B$.

2°. Дифференцирование под знаком интеграла. Если сверх указанного в 1°, частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывна в области R, то при $b < y < B$ справедлива *формула Лейбница*.

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A f'_y(x, y)\,dx.$$

В более общем случае, когда пределы интеграции являются дифференцируемыми функциями $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ параметра y и $a < \varphi(y) < A$, $a < \psi(y) < A$ при $b < y < B$, имеем:

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx = f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx \qquad (b < y < B).$$

3°. Интегрирование под знаком интеграла. При условиях 1° имеем:

$$\int_b^B dy\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A dx\int_b^B f(x, y)\,dy.$$

3711. Показать, что интеграл

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\,dx$$