или

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n \quad (x_n\geqslant 0),$

то последовательность x_n — сходящаяся.

135. Доказать, что если $x_n>0$ ($n=1, 2, \ldots$) и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n}=1,$$

то последовательность x_n — сходящаяся.*

136. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, то частичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между ее нижним и верхним пределами:

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \quad\text{и}\quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n,$$

то есть любое число из отрезка $[l, L]$ является частичным пределом данной последовательности.

137. Пусть числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n \quad (m,\ n=1,\ 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$ существует.

138. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) сходится, то последовательность средних арифметических

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n) \qquad (n=1,\ 2, \ldots)$$

также сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Обратное утверждение неверно: построить пример.

139. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) сходится и $x_n>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$