

1226. Доказать, что многочлены Чебышева

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2) T_m''(x) - x T_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

1227. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2) P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

У к а з а н и е. Продифференцировать $m+1$ раз равенство $(x^2-1)u' = 2mxu$, где $u = (x^2-1)^m$.

1228. Многочлены Чебышева — Лагерра определяются формулой

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Найти явное выражение для многочлена $L_m(x)$.

Доказать, что $L_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x L_m''(x) + (1-x) L_m'(x) + m L_m(x) = 0.$$

У к а з а н и е. Использовать равенство $xu' + (x-m)u = 0$, где $u = x^m e^{-x}$.

1229. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где $f(u)$ и $\varphi(x)$ — n -кратно дифференцируемые функции.

Доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $A_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) не зависят от функции $f(u)$.

1230. Доказать, что для n -й производной сложной функции $y = f(x^2)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-3)}(x^2) + \dots \end{aligned}$$