3347. Определить угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A(\varepsilon, 0, 0)$ и $B(0, \varepsilon, 0)$.

3348. На сколько отличается в точке $M(1, 2, 2)$ величина градиента функции $u = x + y + z$ от величины градиента функции

$$v = x + y + z + 0{,}001 \sin (10^6\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})?$$

3349. Показать, что в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ угол между градиентами функций

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

и

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

(a, b, c, m, n, p — постоянны и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

3350. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая функция. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$, если $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы направления l.

3351. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая функция и

$$l_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\},\ l_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\},$$
$$l_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$$

— три взаимно перпендикулярных направления. Доказать, что:

а) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

б) $$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. Пусть $u = u(x, y)$ — дифференцируемая функция и при $y = x^2$ имеем:

$$u(x, y) = 1 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} = x.$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y = x^2$.

3353. Пусть функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$