3416. Функция $u = u(x)$ определяется системой уравнений

$$u = f(x, y, z),\ g(x, y, z) = 0,\ h(x, y, z) = 0.$$

Найти $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d^2u}{dx^2}$.

3417. Функция $u = u(x, y)$ определяется системой уравнений

$$u = f(x, y, z, t),\ g(y, z, t) = 0,\ h(z, t) = 0.$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3418. Пусть $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

3419. Пусть функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет системе уравнений $f(x, y, z, t) = 0$, $g(x, y, z, t) = 0$, где t — переменный параметр. Найти dz.

3420. Пусть $u = f(z)$, где z — неявная функция от переменных x и y, определяемая уравнением $z = x + y\varphi(z)$.

Доказать *формулу Лагранжа*

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

Указание. Доказать формулу для $n = 1$ и применить метод математической индукции.

3421. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \qquad (1)$$

где $\Phi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменных u и v (a и b — постоянные), являются решением уравнения

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (1).

3422. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0, \qquad (2)$$

где $\Phi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменных u и v, удовлетворяет уравнению

$$(x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$