661. Доказать, что какова бы ни была последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots\ (x_0 < x < +\infty),$$

можно построить функцию $f(x)$, которая при $x \to +\infty$ растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$).

§ 7. Непрерывность функции

1°. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = x_0$ (или в *точке* x_0), если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x = x_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ для всех значений $f(x)$, имеющих смысл, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на данном множестве* $X = \{x\}$ (интервале, сегменте и т. п.), если эта функция непрерывна в каждой точке множества X.

Если при некотором значении $x = x_0$, принадлежащем области определения $X = \{x\}$ функции $f(x)$ или являющемся предельной точкой этого множества, равенство (1) не выполнено (т. е. или (а) не существует число $f(x_0)$, иными словами, функция не определена в точке $x = x_0$, или (б) не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, или (в) обе части формулы (1) имеют смысл, но равенство между ними не имеет места), то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Различают: 1) *точки x_0 разрыва первого рода*, для которых существуют конечные односторонние пределы:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

и 2) *точки разрыва второго рода* — все остальные. Разность

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

называется *скачком функции* в точке x_0.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

то точка разрыва x_0 называется *устранимой*. Если по меньшей мере один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен символу ∞, то x_0 называется точкой *бесконечного разрыва*.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (\text{или } f(x_0 + 0) = f(x_0)),$$

то говорят, что функция $f(x_0)$ *непрерывна слева* (*справа*) в точке x_0.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трех чисел:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$