

1022. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$; следует ли отсюда, что существует $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ конечный или бесконечный?

Рассмотреть пример: $f(x) = \cos(\ln x)$.

1023. Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

1024. Вывести формулы для сумм:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

и

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}.$$

У к а з а н и е. Рассмотреть $(x + x^2 + \dots + x^n)'$.

1025. Вывести формулы для сумм:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

и

$$T_n = \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx.$$

1025.1. Вывести формулу для суммы

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} 2x + \dots + n \operatorname{ch} nx.$$

У к а з а н и е. $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \dots + \operatorname{sh} nx)'$.

1026. Пользуясь тождеством

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

вывести формулу для суммы

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

1027. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

1028. Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

1029. С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус этого круга $R = 10$ см, если радиус круга растет равномерно со скоростью 2 см/с?

1030. С какой скоростью изменяются площадь и диагональ прямоугольника в тот момент, когда одна сторона