67. Какое выражение больше при достаточно больших n:

а) $100n+200$ или $0{,}01n^2$? б) 2^n или n^{1000}?;
в) 1000^n или $n!$?

68. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

Указание. См. пример 10.

69. Доказать, что последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Указание. Составить отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ и воспользоваться неравенством примера 7.

70. Доказать, что

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

71. Пусть $p_n/(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и q_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$ $(p_n,\ q_n \notin [-1,\ 0])$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

72. Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$