сти, если эта функция не является тождественной постоянной (*принцип максимума*).

4399. Тело V целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (*закон Архимеда*).

4400. Пусть S_t — переменная сфера $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$ и функция $f(\xi, \eta, \zeta)$ — непрерывна. Доказать, что функция

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\, dS_t$$

удовлетворяет *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и начальным условиям: $u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x, y, z).$

Указание. Производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ выразить тройным интегралом.

§ 17. Элементы теории поля

1°. Градиент. Если $u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z)$, где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, есть непрерывно дифференцируемое скалярное поле, то *градиентом* его называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

или, короче, $\operatorname{grad} u = \nabla u$, где $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Градиент поля u в данной точке (x, y, z) направлен по нормали к *поверхности уровня* $u(x, y, z) = C$, проходящей через эту точку. Этот вектор для каждой точки поля по величине

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

и направлению дает наибольшую скорость изменения функции u. Производная поля u в некотором направлении $\boldsymbol{l}\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2°. Дивергенция поля и ротация (вихрь) поля. Если

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$