

818. Найти все непрерывные функции  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), удовлетворяющие для всех вещественных значений  $x$  и  $y$  уравнению

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

819. Найти все непрерывные ограниченные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), удовлетворяющие для всех вещественных значений  $x$  и  $y$  системе уравнений:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

и, сверх того, условиям нормировки:

$$f(0) = 1 \text{ и } g(0) = 0.$$

У к а з а н и е. Рассмотреть функцию

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x).$$

820. Пусть  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  и  $\Delta^2 f(x) = \Delta \{\Delta f(x)\}$  суть конечные разности функции  $f(x)$  соответственно первого и второго порядков.

Доказать, что если функция  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) непрерывная и  $\Delta^2 f(x) \equiv 0$ , то эта функция линейная, т. е.  $f(x) = ax + b$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные.