

5) Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$ ($1 - \delta < x < 1 + \delta$) удовлетворяет уравнению (1), если $y(1) = 1$ и δ достаточно мало?

3366. Уравнение $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ определяет y как многозначную функцию от x . В каких областях эта функция 1) однозначна, 2) двузначна, 3) трехзначна, 4) четырехзначна? Определить точки ветвления этой функции и ее однозначные непрерывные ветви.

3367. Найти точки ветвления и непрерывные однозначные ветви $y = y(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) многозначной функции y , определяемой уравнением $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

3368. Пусть $f(x)$ — непрерывна при $a < x < b$ и $\varphi(y)$ — монотонно возрастает и непрерывна при $c < y < d$. В каком случае уравнение $\varphi(y) = f(x)$ определяет однозначную функцию $y = \varphi^{-1}(f(x))$?

Рассмотреть примеры: а) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; б) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

3369. Пусть

$$x = y + \varphi(y), \quad (1)$$

где $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi'(y)| \leq k < 1$ при $-a < y < a$. Доказать, что при $-\varepsilon < x < \varepsilon$ существует единственная дифференцируемая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), и такая, что $y(0) = 0$.

3370. Пусть $y = y(x)$ — неявная функция, определяемая уравнением

$$x = ky + \varphi(y),$$

где постоянная $k \neq 0$, и $\varphi(y)$ — дифференцируемая периодическая функция периода ω такая, что $|\varphi'(y)| < |k|$. Доказать, что

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — периодическая функция с периодом $|k| \omega$.

Найти y' и y'' для функций y , определяемых следующими уравнениями:

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. 3372. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3373. $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 < \varepsilon < 1$).

3374. $x^y = y^x$ ($x \neq y$). 3375. $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.