

599. Доказать, что

а)  $2^x \rightarrow 1-0$  при  $x \rightarrow -0$ ;

б)  $2^x \rightarrow 1+0$  при  $x \rightarrow +0$ .

600. Найти  $f(1)$ ,  $f(1-0)$ ,  $f(1+0)$ , если  $f(x) = x + [x^2]$ .

601. Найти  $f(n)$ ,  $f(n-0)$ ,  $f(n+0)$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ), если  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ .

Найти:

602.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ . 603.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$ .

604.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ .

605.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$ .

606.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \dots \sin x}_{n \text{ раз}}$ .

607. Если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$ , то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример:  $\varphi(x) = 1/q$  при  $x = p/q$ , где  $p$  и  $q$  — взаимно простые целые числа и  $\varphi(x) = 0$  при  $x$  — иррациональном;  $\psi(x) = 1$  при  $x \neq 0$  и  $\psi(x) = 0$  при  $x = 0$ ; причем  $x \rightarrow 0$ .

608. Доказать теоремы Коши: если функция  $f(x)$  определена в интервале  $(a, +\infty)$  и ограничена в каждом конечном интервале  $(a, b)$ , то

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq C > 0)$ ,

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

609. Доказать, что если: а) функция  $f(x)$  определена в области  $x > a$ ; б) ограничена в каждой конечной области  $a < x < b$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$