

Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $(a, a - \frac{f(a)}{k})$.

1286. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке x_0* , если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x_0 = x - x_0$.

Доказать, что если функция $f(x)$ ($a < x < b$) возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала (a, b) , то она является возрастающей на этом интервале.

1287. Показать, что функция

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Построить эскиз графика функции.

1288. Доказать теорему: если 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ n -кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$); 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то имеет место неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x) \text{ при } x > x_0.$$

1289. Доказать следующие неравенства:

$$\text{а) } e^x > 1 + x \quad \text{при } x \neq 0;$$

$$\text{б) } x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad \text{при } x > 0;$$

$$\text{в) } x - \frac{x^2}{6} < \sin x < x \quad \text{при } x > 0;$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{д) } (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta} \quad \text{при } x > 0, y > 0 \text{ и } 0 < \alpha < \beta.$$

а) — г). Дать геометрическую иллюстрацию неравенств

1290. Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$