2712. Показать, что $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \quad (|q|<1)$.

2713. Показать, что квадрат сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

есть ряд расходящийся.

2714. Доказать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>0) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta>0)$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha+\beta>1$, и расходящийся, если $\alpha+\beta<1$.

2715. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

§ 4. Функциональные ряды

1°. Область сходимости. Совокупность X_0 тех значений x, для которых сходится *функциональный ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

называется *областью сходимости* этого ряда, а функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (x\in X_0)$$

— его *суммой*.

2°. Равномерная сходимость. Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

называется *равномерно сходящейся* на множестве X, если:

1) существует предельная функция

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x\in X);$$

2) для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать число $N=N(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

при $n>N$ и $x\in X$. В этом случае пишут: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.