

Найти $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\operatorname{grad} u|$, $\sup |\operatorname{grad} u|$ в области $1 < z < 2$.

4407. С точностью до бесконечно малых высших порядков найти расстояние в точке $M_0(x_0, y, z_0)$ между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня

$$u(x, y, z) = c \text{ и } u(x, y, z) = c + \Delta c,$$

где $u(x_0, y_0, z_0) = c$ ($\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0) \neq 0$).

4408. Доказать формулы:

а) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);

б) $\operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);

в) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;

г) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;

д) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;

е) $\operatorname{grad} f'(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

4409. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$,

где $r = xi + yj + zk$.

4410. Найти $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. Найти $\operatorname{grad}(cr)$, где c — постоянный вектор и r — радиус-вектор из начала координат.

4412. Найти $\operatorname{grad} \{c \times r\}^2$ (c — постоянный вектор).

4413. Доказать формулу $\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

4414. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u \nabla^2 v + v \nabla^2 u + 2 \nabla u \nabla v$, где

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема в выпуклой области Ω и $|\operatorname{grad} u| \leq M$, где M — постоянная, то для любых точек A, B из Ω имеем:

$$|u(A) - u(B)| \leq M \rho(A, B),$$

где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B .

4415.1. Для функции $u = u(x, y, z)$ выразить $\operatorname{grad} u$: а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.