3836. Доказать формулу (*интеграл Липшица*)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (a>0),$$

где $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi$ — функция Бесселя 0-го индекса (см. задачу 3726).

3837. Найти *преобразование Вейерштрасса*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\, dy,$$

если:

а) $f(y) = 1$; б) $f(y) = y^2$;
в) $f(y) = e^{2ay}$; г) $f(y) = \cos ay$.

3838. *Многочлены Чебышева — Эрмита* определяются формулами

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

3839. Вычислить интеграл

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]} d\xi$$

$$(\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0),$$

имеющий важное значение в теории вероятностей.

3840. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Доказать, что интеграл

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$