$= 0, 1, 2, \ldots$) при $x \in (a, b)$. Доказать, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x_0 \in (a, b)),$$

сходящийся в интервале (a, b).

2899.2. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ и $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) при $x \in [-1, 1]$. Доказать, что в интервале $(-1, 1)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Указание. Используя монотонность производных $f^{(n)}(x)$ для остаточного члена $R_n(x)$ ряда Тейлора функции $f(x)$, получить оценку

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} f(1).$$

2900. Доказать, что если 1) $a_n \geqslant 0$ и 2) существует

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

Разложить в степенной ряд функции:

2901. $\int_0^x e^{-t^2} dt$. **2902.** $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$.

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. **2904.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

2905. $\int_0^x \frac{t\, dt}{\ln(1 + t)}$ (написать четыре члена).

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$