1065. Показать, что касательная к логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ (a и m — постоянные) образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

1066. Определив длину подкасательной к кривой $y = ax^n$, дать способ построения касательной к этой кривой.

1067. Доказать, что у параболы $y^2 = 2px$

а) подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания;

б) поднормаль постоянна.

Дать способ построения касательной к параболе.

1068. Доказать, что показательная кривая

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

имеет постоянную подкасательную. Дать способ построения касательной к показательной кривой.

1069. Определить длину нормали к цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

в любой ее точке $M(x_0, y_0)$.

1070. Доказать, что у астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0)$$

длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.

1071. При каком соотношении между коэффициентами a, b и c парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox?

1072. При каком условии кубическая парабола

$$y = x^3 + px + q$$

касается оси Ox?

1073. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

1074. Доказать, что кривые

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0) \text{ и } y = f(x) \sin ax,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция, касаются друг друга в общих точках.

1075. Показать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют *ортогональную сетку*, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.