4327. Вычислить *логарифмический интеграл простого слоя*

$$u(x, y) = \oint_C \varkappa \ln \frac{1}{r}\, ds,$$

где $\varkappa = \text{const}$ — плотность, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ и контур C есть окружность $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы простого слоя

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi \quad \text{и} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой (ρ, φ) и переменной точкой $(1, \psi)$ и m — натуральное число.

4329. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds,$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, соединяющего точку $A(x, y)$ с переменной точкой $M(\xi, \eta)$ простого замкнутого гладкого контура C, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между вектором $\boldsymbol{r}$ и внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к кривой C в точке ее M.

4330. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы двойного слоя

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\, d\psi,$$

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой $A(\rho, \varphi)$ и переменной точкой $M(1, \psi)$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между направлением $AM = \boldsymbol{r}$ и радиусом $OM = \boldsymbol{n}$, проведенным из точки $O(0, 0)$, и m — натуральное число.

4331. Дважды дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ называется *гармонической*, если $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Доказать, что u есть гармоническая