Вывести отсюда формулу

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \qquad (*)$$

где $0 < \theta_n < 1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5}.

73. Доказать, что число e иррационально.

74. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Доказать неравенства:

а) $$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

где n — любое натуральное число;

б) $1 + \alpha < e^\alpha$,

где α — вещественное число, отличное от нуля.

76. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(a^{1/n} - 1) = \ln a \quad (a > 0)$, где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e = 2{,}718\ldots$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

77. $x_n = p_0 + \dfrac{p_1}{10} + \ldots + \dfrac{p_n}{10^n} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$,

где p_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

78. $x_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \ldots \dfrac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ \ldots, \ x_n =$

$$= \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}, \ \ldots$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей: