

называется *средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$M[f] = f(c).$$

2°. Первая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и соответственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ не меняет знака при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$ и $m = \inf_{a < x < b} f(x)$, $M = \sup_{a < x < b} f(x)$; 3) если, сверх того, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\mu = f(c)$, где $a \leq c \leq b$.

3°. Вторая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и собственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ монотонна при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

где $a \leq \xi \leq b$; 3) если, сверх того, функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая (в широком смысле!) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

3') если же функция $\varphi(x)$ монотонно возрастающая (в широком смысле) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2316. Определить знаки следующих определенных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} x \sin x dx; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

$$\text{в) } \int_{-2}^2 x^3 2^x dx; \quad \text{г) } \int_{1/2}^1 x^3 \ln x dx.$$

2317. Какой интеграл больше:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx \quad \text{или} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx?$$

$$\text{б) } \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx?$$