Доказать, что

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

где λ — постоянно.

1234. Доказать, что если в уравнении

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_x^{(k)} = 0$$

положить $x = e^t$, где t — независимая переменная, то это уравнение примет вид:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)y = 0,$$

где $D = \frac{d}{dt}$.

§ 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

1°. Теорема Ролля. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого сегмента; 3) $f(a) = f(b)$, то существует по меньшей мере одно число c из интервала (a, b) такое, что

$$f'(c) = 0.$$

2°. Теорема Лагранжа. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на интервале (a, b), то

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \text{ где } a < c < b$$

(*формула конечных приращений*).

3°. Теорема Коши. Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a, b); 3) $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; 4) $g(a) \neq g(b)$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{где } a < c < b.$$

1235. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.