$u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ дважды дифференцируемы в области $V + S$.

4395. Функция $u = u(x, y, z)$, обладающая непрерывными производными до второго порядка включительно в некоторой области, называется *гармонической* в этой области, если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Доказать, что если u — гармоническая функция в конечной замкнутой области V, ограниченной гладкой поверхностью S, то справедливы формулы:

а) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0;$

б) $$\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = \iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S.

Пользуясь формулой б), доказать, что функция, гармоническая в области V, однозначно определяется своими значениями на ее границе S.

4396. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ — гармоническая в конечной замкнутой области V, ограниченной гладкой поверхностью S, то

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[u \frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\right] dS,$$

где r — радиус-вектор, идущий из внутренней точки (x, y, z) области V в переменную точку (ξ, η, ζ) поверхности S, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, n — вектор внешней нормали к поверхности S в точке (ξ, η, ζ).

4397. Доказать, что если $u = u(x, y, z)$ — функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R с центром в (x_0, y_0, z_0), то $u(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{1}{4\pi R^2} \displaystyle\iint\limits_S u(x, y, z)\, dS$ (*теорема о среднем*).

4398. Доказать, что функция $u = u(x, y, z)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области V и гармоническая внутри нее, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке обла-