2740. Доказать, что если *ряд Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

2741. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\sup_{x\in X} r_n(x)\right\} = 0,$$

где $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. Что значит, что последовательность $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$: а) сходится на интервале $(x_0, +\infty)$; б) сходится равномерно на каждом конечном интервале $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; в) сходится равномерно на интервале $(x_0, +\infty)$?

2743. Для последовательности

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (0 < x < 1)$$

определить наименьший номер члена $N = N(\varepsilon, x)$, начиная с которого отклонение членов последовательности в данной точке x от предельной функции не превышает 0,001, если $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \ldots$

Сходится ли эта последовательность равномерно на интервале $(0, 1)$?

2744. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ следует взять, чтобы частная сумма $S_n(x)$ отличалась при $-\infty < x < +\infty$ от суммы ряда меньше чем на ε? Произвести численный расчет при: а) $\varepsilon = 0,1$; б) $\varepsilon = 0,01$; в) $\varepsilon = 0,001$.

2745. При каких n будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0,001 \quad (0 \leqslant x \leqslant 10)?$$

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках: