

сходится равномерно при каждом значении $\alpha \neq 0$ и не сходится равномерно при $\alpha = 0$.

3772. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx?$$

3773. Функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3773.1. Доказать, что если $f'(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, +\infty]$, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3774. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0,$$

если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$.

3775. Доказать, что если 1) $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f(x, y_0)$ в каждом конечном интервале (a, b) ; 2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, где $\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

3776. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} \right] dx,$$

используя предельный переход под знаком интеграла.

3776.1. Пусть $f(x)$ — непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0).$$

3776.2. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}.$$