1226. Доказать, что *многочлены Чебышева*

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos (m \arccos x) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\, T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

1227. Доказать, что *многочлены Лежандра*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\, P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)\, P_m(x) = 0.$$

Указание. Продифференцировать $m+1$ раз равенство $(x^2-1)\, u' = 2mxu$, где $u = (x^2-1)^m$.

1228. *Многочлены Чебышева — Лагерра* определяются формулой

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найти явное выражение для многочлена $L_m(x)$.

Доказать, что $L_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL''_m(x) + (1-x)\, L'_m(x) + mL(x) = 0.$$

Указание. Использовать равенство $xu' + (x-m)\, u = 0$, где $u = x^m e^{-x}$.

1229. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где $f(u)$ и $\varphi(x)$ — n-кратно дифференцируемые функции.

Доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\, f^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $A_k(x)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) не зависят от функции $f(u)$.

1230. Доказать, что для n-й производной сложной функции $y = f(x^2)$ справедлива формула

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \ldots$$