$|x-x_0| < \delta$, то выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

672. Пусть для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при значении $x = x_0$? Какое свойство функции описывается этими неравенствами?

673. Пусть для каждого числа $\delta > 0$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$.

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

674. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать непрерывность следующих функций: а) $ax + b$; б) x^2; в) x^3; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\sin x$; ж) $\cos x$; з) $\operatorname{arctg} x$.

Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x \neq 2; \\ A, & \text{если } x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, если $x \neq -1$ и $f(-1)$ — произвольно.

678. а) $f_1(x) = \left|\dfrac{\sin x}{|x|}\right|$, если $x \neq 0$ и $f_1(0) = 1$;

б) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, если $x \neq 0$ и $f_2(0) = 1$.

679. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0)$ — произвольно.

680. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.