Указание. Изучить разность

$$\frac{1}{x} - y_n.$$

639.2. Для нахождения $y = \sqrt{x}$, где $x > 0$, применяется следующий процесс: $y_0 > 0$ — произвольно,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}.$$

Указание. Использовать формулу

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2 \quad (n \geqslant 1).$$

640. Для приближенного решения *уравнения Кеплера*

$$x - \varepsilon \sin x = m \qquad (0 < \varepsilon < 1) \qquad (1)$$

полагают

$$x_0 = m, \ x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \ \ldots, \ x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \ \ldots$$

(*метод последовательных приближений*).

Доказать, что существует $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и число ξ является единственным корнем уравнения (1).

641. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x - \xi| \leqslant h$ $(h > 0)$, то число

$$\omega_0[f] = \lim_{h\to 0} \omega_h[f]$$

называется *колебанием функции* $f(x)$ *в точке* ξ.

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x = 0$, если $f(0) = 0$ и при $x \neq 0$ имеем:

а) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

в) $f(x) = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$; г) $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

д) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$; е) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$;

ж) $f(x) = (1 + |x|)^{1/x}$.

642. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.