с плотностью, равной p кгс/м². Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центре луга, если работа по транспортировке груза P кгс на расстояние r равна kPr $(0 < k < 1)$.

§ 6. Тройные интегралы

1°. Непосредственное вычисление тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна и область V ограничена и определяется следующими неравенствами:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\quad z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ — непрерывные функции, то тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область V, может быть вычислен по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Иногда удобно также применять формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

где $S(x)$ — сечение области V плоскостью $x = \text{const}$.

2°. Замена переменных в тройном интеграле. Если ограниченная кубируемая замкнутая область V пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область V' пространства $O'uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v, w),\quad y = y(u, v, w),\quad z = z(u, v, w),$$

причем якобиан $I = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ при $(u, v, w) \in V'$, почти всюду (в смысле меры) сохраняет постоянный знак, то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

Как частные случаи, имеем: 1) *цилиндрическую систему координат* φ, r, h, где

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = h,$$

и

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, h)} = r,$$