§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла

1°. Дифференцирование по параметру. Если 1) функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x, y)$ в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится; 3) $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ сходится равномерно в интервале (y_1, y_2), то

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$$

при $y_1 < y < y_2$ (*правило Лейбница*).

2°. Формула интегрирования по параметру. Если 1) функция $f(x, y)$ непрерывна при $x \geqslant a$ и $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится равномерно в конечном сегменте $[y_1, y_2]$, то

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy. \qquad (1)$$

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то формула (1) верна также и для бесконечного промежутка (y_1, y_2) в предположении, что внутренние интегралы равенства (1) непрерывны и одна из частей равенства (1) имеет смысл.

3784. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx, \text{ где } m \text{ — натуральное число.}$$

3785. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0),$$

вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$