§ 5. Интегральная формула Фурье

1°. **Представление функции интегралом Фурье.** Если 1) функция $f(x)$ задана на оси $-\infty < x < +\infty$, 2) кусочно-непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ в каждом конечном промежутке и 3) абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, то во всех своих точках непрерывности она допускает представление в форме *интеграла Фурье*:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda, \tag{1}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi \text{ и } b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ левая часть формулы (1) должна быть заменена на $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Для четной функции $f(x)$, с тем же замечанием относительно точек разрыва, формула (1) дает:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda, \tag{2}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi.$$

Аналогично для нечетной функции $f(x)$ получаем:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda, \tag{3}$$

где

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi.$$

2°. **Представление функции интегралом Фурье в интервале $(0, +\infty)$.** Функция $f(x)$, заданная в интервале $(0, +\infty)$ и кусочно-непрерывная вместе со своей производной $f'(x)$ на каждом конечном интервале $(a, b) \subset (0, +\infty)$, абсолютно интегрируемая на $(0, +\infty)$, по желанию может быть представлена в данном интервале или формулой (2) (*четное продолжение*), или формулой (3) (*нечетное продолжение*).

Представить интегралом Фурье следующие функции:

3881. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

3882. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$