Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если равномерно сходится на этом множестве последовательность его частичных сумм:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (1) на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ было выполнено неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in X.$$

4°. Признак Вейерштрасса. Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на множестве X, если существует сходящийся числовой ряд

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{2}$$

такой, что

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \text{ при } x \in X \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

5°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{3}$$

сходится равномерно на множестве X, если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве X; 2) функции $b_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) ограничены в совокупности и при каждом x образуют монотонную последовательность.

6°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится равномерно на множестве X, если: 1) частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$ в совокупности ограничены; 2) последовательность $b_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) монотонна для каждого x и равномерно на X стремится к нулю при $n \to \infty$.

7°. Свойства функциональных рядов. а) Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная.

б) Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и 2) имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\}.$$