

Вывести отсюда формулу

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad (*)$$

где $0 < \theta_n < 1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5} .

73. Доказать, что число e иррационально.

74. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Доказать неравенства:

$$a) \quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

где n — любое натуральное число;

$$b) \quad 1 + \alpha < e^\alpha,$$

где α — вещественное число, отличное от нуля.

76. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$ ($a > 0$),

где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e = 2,718 \dots$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$77. \quad x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \dots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где p_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1 .

$$78. \quad x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1},$$

$$79. \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$80. \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$81. \quad x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, \quad x_n = \\ = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n \text{ корней}}}, \dots$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей: