в) $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0)$; г) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

д) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

232. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном интервале $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

233. Функция $f(x)$, определенная на множестве E, называется периодической, если существует число $T>0$ (период функции — в широком смысле слова!) такое, что

$$f(x \pm T) \equiv f(x) \text{ при } x \in E.$$

Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить наименьший период их, если:

а) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

б) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; г) $f(x)=\sin^2 x$;

д) $f(x)=\sin x^2$; е) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

ж) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$; з) $f(x)=\sin x+\sin\left(x\sqrt{2}\right)$.

234. Доказать, что для функции Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

235. Доказать, что сумма и произведение двух периодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функции также периодические.

235.1. Функция $f(x)$ называется *антипериодической*, если

$$f(x+T)\equiv -f(x) \quad (T>0).$$

Доказать, что $f(x)$ — периодическая с периодом $2T$.

236. Доказать, что если для функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ выполнено равенство $f(x+T)=kf(x)$, где k и T — положительные постоянные, то $f(x)=a^x\varphi(x)$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T.