1110. Доказать, что углы по логарифмической таблице тангенсов определяются точнее, чем по логарифмической таблице синусов с тем же самым числом десятичных знаков.

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. Основные определения. *Производные высших порядков* от функции $y = f(x)$ определяются последовательно соотношениями (предполагается, что соответствующие операции имеют смысл!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b), то кратко пишут: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на (a, b), то употребляется запись: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

Дифференциалы высших порядков от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

где принято $d^1 y = dy = y' dx$.

Если x — независимая переменная, то полагают:

$$d^2x = d^3x = \ldots = 0.$$

В этом случае справедливы формулы

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2°. Основные формулы:

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n}.$

V. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

3°. Формула Лейбница. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные n-го порядка (n-кратно дифференцируемы) то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и C_n^i — число сочетаний из n элементов по i.