где область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, полагая

$$x+y+z=\xi,\ y+z=\xi\eta,\ z=\xi\eta\zeta.$$

§ 7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов

Объем области V выражается формулой

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4101. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$.

4102. $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4103. $x^2+z^2=a^2$, $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.

4104. $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$.

4105. $az=a^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0\ (a>0)$.

4106. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объемы, ограниченные поверхностями:

4107. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\leqslant z^2$.

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

4110. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2\ (z\geqslant 0)\ (0<a<b)$.

В следующих примерах удобно пользоваться обобщенными сферическими координатами

$$r,\ \varphi \text{ и } \psi\left(r\geqslant 0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

вводя их по формулам

$$\left.\begin{aligned} x&=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\\ y&=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\\ z&=cr\sin^\beta\psi \end{aligned}\right\}\quad (a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta \text{ — постоянные}),$$

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$