

$$4163. \int \int_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^p} dx dy.$$

$$4164. \int \int_{|x|+|y|>1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$4165. \int \int_{x+y>1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy.$$

4166. Доказать, что если непрерывная функция  $f(x, y)$  неотрицательна и  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — какая-нибудь последовательность ограниченных и замкнутых областей, исчерпывающая область  $S$ , то

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

где левая часть имеет или не имеет смысла одновременно с правой.

4167. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{x^2 + y^2 \leq 2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0$$

( $n$  — натуральное число).

4168. Показать, что интеграл

$$\int \int_{x>1, y>1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

сходятся.

Вычислить интегралы (параметры положительны):

$$4169. \int \int_{\substack{x>1, \\ y>1}} \frac{dx dy}{x^p y^q}. \quad 4170. \int \int_{\substack{x+y>1, \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

$$4171. \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \quad 4172. \int \int_{x^2 + y^2 > 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}.$$