3313. Доказать, что функция

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и C_1, C_2 — постоянные, удовлетворяет *уравнению Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

3314. Пусть функции $u_1 = u_1(x, y, z)$ и $u_2 = u_2(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Доказать, что функция

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)\, u_2(x, y, z)$$

удовлетворяет *бигармоническому уравнению*

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. Пусть $f(x, y, z)$ есть m раз дифференцируемая однородная функция измерения n. Доказать, что

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) =$$
$$= n(n-1)\ldots(n-m+1)\, f(x, y, z).$$

3316. Упростить выражение

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y},$$

если $z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$, где f — дифференцируемая функция.

3317. Показать, что функция $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. Показать, что $z = yf(x^2 - y^2)$, где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. Упростить выражение $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$, если

$$u = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{6} x^3 (y + z) + \frac{1}{2} x^2 yz + f(y - x, z - x),$$

где f — дифференцируемая функция.