148. Последовательность чисел x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определяется следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \qquad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

149 (н). Пусть x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

150. Доказать, что последовательности x_n и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, определяемые следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(*арифметико-геометрическое среднее* чисел a и b).

§ 3. Понятие функции

1°. Понятие функции. Переменная y называется однозначной функцией f от переменной x в данной области изменения $X = \{x\}$, если каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное действительное значение $y = f(x)$, принадлежащее некоторому множеству $Y = \{y\}$.

Множество X носит название *области определения* или *области существования* функции $f(x)$; Y называется *множеством значений* этой функции.

В простейших случаях множество X представляет собой или *открытый промежуток* (*интервал*) $]a, b[= (a, b)$: $a < x < b$ или *полуоткрытые промежутки*

$$]a, b] = (a, b]: a < x \leqslant b, \quad [a, b[= [a, b): a \leqslant x < b,$$

или *замкнутый промежуток* (*сегмент*) $[a, b]$: $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — некоторые вещественные числа или символы $-\infty$ и $+\infty$ (в последних случаях равенства исключаются). Если каждому значению x из X соответствует одно или несколько значений $y = f(x)$, то y называется *многозначной функцией* от x.

2°. Обратная функция. Если под x понимать любое значение, удовлетворяющее уравнению

$$f(x) = y,$$

где y — фиксированное число, принадлежащее множеству зна-