

$x \rightarrow a$ тот же порядок роста, что и функция $f(x)$, где $f(x) > 0$.

Показать, что

$$\text{а) } o(o(f(x))) = o(f(x)); \quad \text{б) } O(o(f(x))) = o(f(x));$$

$$\text{в) } o(O(f(x))) = o(f(x)); \quad \text{г) } O(O(f(x))) = O(f(x)),$$

$$\text{д) } O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).$$

647. Пусть $x \rightarrow 0$ и $n > 0$. Показать, что

$$\text{а) } CO(x^n) = O(x^n) \quad (C \neq 0 \text{ — постоянная});$$

$$\text{б) } O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m);$$

$$\text{в) } O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

648. Пусть $x \rightarrow +\infty$ и $n > 0$. Показать, что

$$\text{а) } CO(x^n) = O(x^n);$$

$$\text{б) } O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n > m);$$

$$\text{в) } O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

649. Показать, что символ \sim обладает свойствами:

1) рефлексивности: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) симметрии: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\psi(x) \sim \varphi(x)$; 3) транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ и $\psi(x) \sim \chi(x)$, то $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Пусть $x \rightarrow 0$. Доказать следующие равенства:

$$\text{а) } 2x - x^2 = O(x); \quad \text{б) } x \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2});$$

$$\text{в) } x \sin \frac{1}{x} = O(|x|); \quad \text{г) } \ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0);$$

$$\text{д) } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x};$$

$$\text{е) } \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1);$$

$$\text{ж) } (1 + x)^n = 1 + nx + o(x).$$

651. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Доказать следующие равенства:

$$\text{а) } 2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3);$$

$$\text{б) } \frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right);$$