Найти $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\operatorname{grad} u|$, $\sup|\operatorname{grad} u|$ в области $1 < z < 2$.

4407. С точностью до бесконечно малых высших порядков найти расстояние в точке $M_0(x_0, y, z_0)$ между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня

$$u(x, y, z) = c \text{ и } u(x, y, z) = c + \Delta c,$$

где $u(x_0, y_0, z_0) = c$ ($\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0) \neq 0$).

4408. Доказать формулы:

а) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);
б) $\operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);
в) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;
г) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;
д) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;
е) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

4409. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$,

где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4410. Найти $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. Найти $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор из начала координат.

4412. Найти $\operatorname{grad}\{|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2\}$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

4413. Доказать формулу $\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

4414. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v$, где

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема в выпуклой области Ω и $|\operatorname{grad} u| \leqslant M$, где M — постоянная, то для любых точек A, B из Ω имеем:

$$|u(A) - u(B)| \leqslant M\rho(A, B),$$

где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B.

4415.1. Для функции $u = u(x, y, z)$ выразить $\operatorname{grad} u$: а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.