функция тогда и только тогда, если

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0,$$

где C — произвольный замкнутый контур и $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к этому контуру.

4332. Доказать, что

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy =$$

$$= -\iint\limits_S u\, \Delta u\, dx\, dy + \oint\limits_C u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S.

4333. Доказать, что функция, гармоническая внутри конечной области S и на ее границе C, однозначно определяется своими значениями на контуре C (см. задачу 4332).

4334. Доказать *вторую формулу Грина* на плоскости

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy = \oint\limits_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S и $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к C.

4335. Пользуясь второй формулой Грина, доказать, что если $u = u(x, y)$ — гармоническая функция в замкнутой конечной области S, то

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

где C — граница области S, n — направление внешней нормали к контуру C, (x, y) — внутренняя точка области S и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ — расстояние между точкой (x, y) и переменной точкой (ξ, η) контура C.

Указание. Вырезать точку (x, y) из области S вместе с бесконечно малой круговой окрестностью ее и применить вторую формулу Грина к оставшейся части области S.