

## § 5. Интегральная формула Фурье

1°. Представление функции интегралом Фурье. Если 1) функция  $f(x)$  задана на оси  $-\infty < x < +\infty$ , 2) кусочно-непрерывна вместе со своей производной  $f'(x)$  в каждом конечном промежутке и 3) абсолютно интегрируема на интервале  $(-\infty, +\infty)$ , то во всех своих точках непрерывности она допускает представление в форме *интеграла Фурье*:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (1)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \text{ и } b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

В точках разрыва функции  $f(x)$  левая часть формулы (1) должна быть заменена на  $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ .

Для четной функции  $f(x)$ , с тем же замечанием относительно точек разрыва, формула (1) дает:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (2)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi.$$

Аналогично для нечетной функции  $f(x)$  получаем:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (3)$$

где

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

2°. Представление функции интегралом Фурье в интервале  $(0, +\infty)$ . Функция  $f(x)$ , заданная в интервале  $(0, +\infty)$  и кусочно-непрерывная вместе со своей производной  $f'(x)$  на каждом конечном интервале  $(a, b) \subset (0, +\infty)$ , абсолютно интегрируемая на  $(0, +\infty)$ , по желанию может быть представлена в данном интервале или формулой (2) (*четное продолжение*), или формулой (3) (*нечетное продолжение*).

Представить интегралом Фурье следующие функции:

$$3881. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$$3882. f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$