82. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$,
где $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $|q| < 1$.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

86. Говорят, что последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет *ограниченное изменение*, если существует число C такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

87. Сформулировать, что значит, что для данной последовательности не выполнен критерий Коши.

88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

89. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, то любая ее подпоследовательность x_{p_n} также сходится и имеет тот же самый предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

91. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$