место символическая формула

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x, y, z).$$

3°. Производная сложной функции. Если $w = f(x, y, z)$ дифференцируема и $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, где функции $\varphi$, $\psi$, $\chi$ дифференцируемы, то

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Для вычисления производных второго порядка функции $w$ полезно пользоваться символическими формулами:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x} + Q_2\frac{\partial}{\partial y} + R_2\frac{\partial}{\partial z}\right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

где

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad R_1 = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4°. Производная в данном направлении. Если направление $l$ в пространстве $Oxyz$ характеризуется направляющими косинусами $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ и функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема, то *производная по направлению* $l$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Скорость наибольшего роста функций в данной точке, по величине и направлению, определяется вектором — *градиентом функции*:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

величина которого равна

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$