

У к а з а н и е. Рассмотреть интеграл

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) f'(x) dx.$$

2385. Можно ли сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

от неограниченной функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$, где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Пусть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

сходится и функция $\varphi(x)$ ограничена.

Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx? \quad (2)$$

Привести соответствующий пример.

Что можно сказать о сходимости интеграла (2), если интеграл (1) сходится абсолютно?

2387. Доказать, что если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится и $f(x)$ — монотонная функция, то $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке $0 < x \leq 1$ и не ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Доказать, что если существует $\int_0^1 f(x) dx$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

2389. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в интервале $0 < x < a$ и существует несобственный интеграл $\int_0^a x^p f(x) dx$, то

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$