и

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

преобразовать к сферическим координатам, полагая

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

Указание. Замену переменных представить в виде композиции двух частичных замен

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = z$$

и

$$R = r\sin\theta,\ \varphi = \varphi,\ z = r\cos\theta.$$

3512. В уравнении

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

ввести новую функцию w, полагая $w = z^2$.

Приняв u и v за новые независимые переменные и $w = w(u, v)$ за новую функцию, преобразовать следующие уравнения:

3513. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$, если $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$.

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$.

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$, если $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$, $w = ze^y$.

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$.

3518. $(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = \sin u$, $y = \sin v$, $z = e^w$.