4°. Потенциал поля тяготения. *Ньютоновым потенциалом тела* в точке $P(x, y, z)$ называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

где V — объем тела, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность тела, и

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Материальная точка массы m притягивается телом с силой $\boldsymbol{F} = (X, Y, Z)$, проекции которой X, Y, Z на оси координат Ox, Oy, Oz равны:

$$X = km \frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Y = km \frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Z = km \frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где k — постоянная закона тяготения.

4131. Найти массу тела, занимающего единичный объем $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность тела в точке $M(x, y, z)$ дается формулой $\rho = x + y + z$.

4132. Найти массу тела, заполняющего бесконечную область $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$, если плотность тела меняется по закону $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $\rho_0 > 0$ и $k > 0$ постоянны.

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

4133. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \dfrac{p}{2}$, $z = 0$.

4136. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

4139. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{xyz}{abc}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.