§ 15. Приближенное решение уравнений

1°. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и

$$f(a) f(b) < 0,$$

причем $f'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то уравнение

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

имеет один и только один действительный корень ξ в промежутке (a, b). За первое приближение этого корня можно принять значение

$$x_1 = a + \delta_1,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Применяя далее этот способ к тому из промежутков (a, x_1) или (x_1, b), на концах которого функция $f(x)$ равнозначна, получим второе приближение x_2 корня ξ и т. д. Для оценки n-го приближения x_n справедлива формула

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \qquad (2)$$

где $m = \inf\limits_{a<x<b} |f'(x)|$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

2°. Правило Ньютона (метод касательных). Если $f''(x) \neq 0$ на сегменте $[a, b]$ и $f(a) f''(a) > 0$, то за первое приближение ξ_1 корня ξ уравнения (1) можно принять значение

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Повторяя этот прием, получаем быстро сходящиеся к корню ξ последовательные приближения ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, точность которых оценивается, например, по формуле (2).

Для грубой ориентировки полезно нарисовать набросок графика функции $y = f(x)$.

Пользуясь методом пропорциональных частей, определить с точностью до 0,001 корни следующих уравнений:

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$. **1618.** $x^4 - x - 1 = 0$.

1619. $x - 0{,}1 \sin x = 2$. **1620.** $\cos x = x^2$.

Пользуясь методом Ньютона, определить с указанной точностью корни следующих уравнений: