780. Найти функцию $y = y(x)$, заданную уравнениями:

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arcctg} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

В какой области определена эта функция?

781. Пусть $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ $(-\infty < t < +\infty)$. В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать как однозначную функцию от переменной x? Найти выражения y для различных областей.

782. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы система уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ определяла бы y как однозначную функцию от x?

Рассмотреть пример: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. При каких условиях две системы уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a < t < b)$$

и

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \quad y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

определяют одну и ту же функцию $y = y(x)$?

784. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и непрерывны на интервале (a, b) и $A = \inf\limits_{a<x<b} \varphi(x)$, $B = \sup\limits_{a<x<b} \varphi(x)$. В каком случае существует однозначная функция $f(x)$, определенная в интервале (A, B) и такая, что

$$\psi(x) = f(\varphi(x)) \text{ при } a < x < b?$$

§ 9. Равномерная непрерывность функции

1°. Определение равномерной непрерывности. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на данном множестве (интервале, сегменте и т. п.) $X = \{x\}$, если $f(x)$ определена на X и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых значений $x', x'' \in X$ из неравенства

$$|x' - x''| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

2°. Теорема Кантора. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на ограниченном сегменте $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом сегменте.