

773. Показать, что множество значений непрерывной функции $y = 1 + \sin x$, соответствующих интервалу $(0 < x < 2\pi)$, есть сегмент.

774. Доказать равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

776. Доказать теорему сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ — функция, принимающая одно из трех значений: 0, 1, —1.

Для каких значений y при данном значении x возможен разрыв функции ε ? Построить на плоскости Oxy соответствующие области непрерывности функции ε и определить значение этой функции в полученных областях.

777. Доказать теорему сложения арксинусов:

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arcsin y &= \\ &= (-1)^{\varepsilon} \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi \\ &\quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \operatorname{sgn} x, & \text{если } xy > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

778. Доказать теорему сложения арккосинусов:

$$\begin{aligned} \arccos x + \arccos y &= \\ &= (-1)^{\varepsilon} \arccos (xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) + 2\varepsilon\pi \\ &\quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{если } x + y \geq 0, \\ 1, & \text{если } x + y < 0. \end{cases}$$

779. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2}$;

б) $y = \arcsin (2x \sqrt{1-x^2}) - 2 \arcsin x$.