

599. Доказать, что

а) $2^x \rightarrow 1-0$ при $x \rightarrow -0$;

б) $2^x \rightarrow 1+0$ при $x \rightarrow +0$.

600. Найти $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, если $f(x) = x + [x^2]$.

601. Найти $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), если $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

Найти:

602. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$. 603. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

604. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$.

605. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$.

606. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \dots \sin x}_{n \text{ раз}}$.

607. Если $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = 1/q$ при $x = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа и $\varphi(x) = 0$ при x — иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$; причем $x \rightarrow 0$.

608. Доказать теоремы Коши: если функция $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b) , то

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq C > 0)$,

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

609. Доказать, что если: а) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; б) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$