4214. Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, du.$$

4215. Доказать равенство

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \ldots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\, dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u)\, du.$$

4216. Доказать *формулу Дирихле*

$$\int\int\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1}} \ldots \int x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \ldots + p_n + 1)} \quad (p_1, \; p_2, \ldots, \; p_n > 0).$$

4217. Доказать *формулу Лиувилля*

$$\int\int\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1}} \ldots \int f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1} \ldots$$
$$\ldots x_n^{p_n - 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)} \int_0^1 f(u)\, u^{p_1 + p_2 + \ldots + p_n - 1}\, du$$
$$(p_1, \; p_2, \ldots, \; p_n > 0),$$

где $f(u)$ — непрерывная функция.

Указание. Применить метод математической индукции.

4218. Привести к однократному интегралу n-кратный интеграл $(n \geqslant 2)$

$$\int\int\limits_{\Omega} \ldots \int f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

распространенный по области $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant R^2$, где $f(u)$ — непрерывная функция.

4219. Вычислить *потенциал на себя* однородного шара радиуса R и плотности ρ_0, т. е. найти интеграл

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \int\int\int\limits_{\substack{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leqslant R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leqslant R^2}} \int\int\int \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

где $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.