4047. Найти площадь части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

4048. Найти площадь части геликоида $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$, где $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

4049. Найти площадь части поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \leqslant b)$, ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$.

Чему равна поверхность всего тора?

4050. Найти телесный угол ω, под которым виден из начала координат прямоугольник $x = a > 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

Вывести приближенную формулу для ω, если a велико.

§ 5. Приложения двойных интегралов к механике

1°. Центр тяжести. Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки, то

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho x\,dx\,dy, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho y\,dx\,dy, \tag{1}$$

где $M = \iint_\Omega \rho\,dx\,dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородна, то в формулах (1) следует положить $\rho = 1$.

2°. Моменты инерции. I_x и I_y — *моменты инерции* пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, относительно координатных осей Ox и Oy — выражаются соответственно формулами

$$I_x = \iint_\Omega \rho y^2\,dx\,dy, \quad I_y = \iint_\Omega \rho x^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

где $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки.

Рассматривается также *центробежный момент инерции*

$$I_{xy} = \iint_\Omega \rho\,xy\,dx\,dy. \tag{3}$$

Полагая $\rho = 1$ в формулах (2) и (3), получим *геометрические моменты инерции* плоской фигуры.

4051. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.