3982. Доказать, что если $f(x, y)$ непрерывна, то функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta)\, d\eta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

3983. Пусть линии уровня функции $f(x, y)$ — простые замкнутые кривые и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v_2$.

Доказать, что

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\, dv,$$

где $F(v)$ — площадь, ограниченная кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v$.

Указание. Область интегрирования разбить на части, ограниченные бесконечно близкими линиями уровня функции $f(x, y)$.

§ 2. Вычисление площадей

Площадь области S, расположенной в плоскости Oxy, дается формулой

$$S = \iint\limits_S dx\, dy.$$

Найти площади, ограниченные следующими кривыми:

3984. $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$ $(a > 0)$.

3985. $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2$ $(p > 0, q > 0)$.

3986. $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$; $x^2 + y^2 \geqslant a^2$.

3988. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3-3xy^2)$ $(a > 0)$.

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$; $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leqslant a^2$ $(a > 0)$.