

§ 11. Приближение непрерывных функций многочленами

1°. Интерполяционная формула Лагранжа. Многочлен Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} y_i$$

обладает свойством $P_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

2°. Многочлены Бернштейна. Если $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[0, 1]$ функция, то многочлены Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

при $n \rightarrow \infty$ сходятся равномерно на сегменте $[0, 1]$ к функции $f(x)$.

3121. Построить многочлен $P_n(x)$ наименьшей степени n , принимающий заданную систему значений:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

Чему приближенно равны

$$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)?$$

3122. Написать уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через три точки: $A(x_0 - h, y_{-1})$, $B(x_0, y_0)$, $C(x_0 + h, y_1)$.

3123. Вывести формулу для приближенного извлечения корней $y = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$), используя значения $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $x_1 = 25$, $y_1 = 5$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$.

3124. Вывести приближенную формулу вида

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90; x = \arg x^\circ),$$

используя значения

$$\sin 0^\circ = 0, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 90^\circ = 1.$$

Пользуясь этой формулой, приближенно найти:

$$\sin 20^\circ, \sin 40^\circ, \sin 80^\circ.$$