Доказать, что функция

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \quad (|f_n(x)| < 1).$$

непрерывна на интервале (a, b).

3109. Найти выражение для производной функции

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)].$$

Каковы достаточные условия существования $F'(x)$?

3110. Доказать, что если $0 < x < y$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n)} = 0.$$

§ 10. Формула Стирлинга

Для вычисления $n!$ при больших значениях n полезна *формула Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\theta_n/12n} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Пользуясь формулой Стирлинга, приближенно вычислить:

3111. $\lg 100!$ 3112. $1\cdot 3\cdot 5\ldots 1999$.

3113. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 99}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 100}$. 3114. C_{100}^{40}.

3115. $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}$.

3116. $\int\limits_0^1 (1-x^2)^{50}\,dx$. 3117. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^{200} x\,dx$.

3118. Вывести асимптотическую формулу для произведения

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1).$$

3119. Приближенно вычислить C_{2n}^n, если n велико.

3120. Пользуясь формулой Стирлинга, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.