

$$2287. I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

Если $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ есть комплексная функция от действительной переменной x , где $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ и $i^2 = -1$, то по определению полагают:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx$$

и

$$\operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im} f(x) dx.$$

2288. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

показать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n \end{cases}$$

(n и m — целые).

2289. Показать, что

$$\int_a^b e^{(\alpha + i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha + i\beta)} - e^{a(\alpha + i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(α и β — постоянные).

Пользуясь формулами Эйлера:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

вычислить интегралы (m и n — целые положительные числа):

$$2290. \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$$

$$2291. \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx. \quad 2292. \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

$$2293. \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx. \quad 2294. \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx.$$