§ 9. Раскрытие неопределенностей

1-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности U_ε *) точки a, где a — число или символ ∞, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности U_ε точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$; 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

где a — число или символ ∞;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех x, принадлежащих некоторой окрестности U_ε точки a и отличных от a, причем

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon \text{ и } x \neq a;$$

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы для односторонних пределов.

Раскрытие неопределенностей видов $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 и т. п. путем алгебраических преобразований и логарифмирова-

---

*) Под окрестностью U_ε точки a понимается совокупность чисел x, удовлетворяющих неравенству: 1) $0 < |x-a| < \varepsilon$, если a — число, и 2) $|x| > 1/\varepsilon$, если a — символ ∞.