

3836. Доказать формулу (*интеграл Липшица*)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0),$$

где  $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) d\varphi$  — функция Бесселя 0-го индекса (см. задачу 3726).

3837. Найти преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy,$$

если:

- а)  $f(y) = 1$ ; б)  $f(y) = y^2$ ;  
в)  $f(y) = e^{2ay}$ ; г)  $f(y) = \cos ay$ .

3838. Многочлены Чебышева — Эрмита определяются формулами

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

3839. Вычислить интеграл

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2} \right]} d\xi$$

$$(\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0),$$

имеющий важное значение в теории вероятностей.

3840. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и абсолютно интегрируема на промежутке  $(-\infty, +\infty)$ .

Доказать, что интеграл

$$u(x, t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$