Указание. Изучить разность

$$\frac{1}{x}-y_n.$$

639.2. Для нахождения $y=\sqrt{x}$, где $x>0$, применяется следующий процесс: $y_0>0$ — произвольно,

$$y_n=\frac{1}{2}\left(y_{n-1}+\frac{x}{y_{n-1}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\sqrt{x}.$$

Указание. Использовать формулу

$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{y_{n-1}-\sqrt{x}}{y_{n-1}+\sqrt{x}}\right)^2 \quad (n\geqslant 1).$$

640. Для приближенного решения *уравнения Кеплера*

$$x-\varepsilon\sin x=m \qquad (0<\varepsilon<1) \tag{1}$$

полагают

$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \ldots,\ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\ \ldots$

(*метод последовательных приближений*).

Доказать, что существует $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и число ξ является единственным корнем уравнения (1).

641. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x-\xi|\leqslant h$ $(h>0)$, то число

$$\omega_0[f]=\lim_{h\to 0}\omega_h[f]$$

называется *колебанием функции* $f(x)$ *в точке* ξ.

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x=0$, если $f(0)=0$ и при $x\neq 0$ имеем:

а) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos^2\dfrac{1}{x}$;

в) $f(x)=x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$; г) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

д) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$; е) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$;

ж) $f(x)=(1+|x|)^{1/x}$.

642. Пусть $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.