130. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$? Рассмотреть пример: $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

131. Доказать, что

$$\text{а)}\ \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

$$\text{б)}\ \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

132. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Доказать, что

$$\text{а)}\ \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

$$\text{б)}\ \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

133. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, имеем:

$$\text{а)}\ \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

$$\text{б)}\ \varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \qquad (x_n \geqslant 0).$$

134. Доказать, что если для некоторой последовательности x_n $(n=1, 2, \ldots)$, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, имеет место по меньшей мере одно из равенств:

$$\text{а)}\ \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$