Задания для проекта про булевы схемы
Им Евгений

1) В этом проекте мне нравится то, что он является исследовательским, а так же то, что он связан с математикой. Также привлекает тема булевых схем, для меня это что-то новое и хотелось бы побольше про них узнать.

2)Нам нужно научиться получать двоичное представление суммы n входящих битов. Для этого можно сначала разбить все входные биты на пары, и посчитать сумму в каждой паре, затем из ответов сформировать новые пары, и посчитать сумму в них и т.д. Давайте сначала оценим сверху размер схемы для сложения n-битных чисел (пусть это числа $x_1...x_n, y_1...y_n$). Заметим, что при сложении чисел, мы будем делать поразрядное сложение. Еще у нас будет n битов переноса (если мы сложили 2 бита и получили, что их сумма больше 1, то это нужно учесть). В итоге алгоритм сложения будет выглядеть так: мы складываем 2 последних разряда, в новое число в последний разряд записываем сумму этих разрядов по модулю 2 ($z_n = x_n \oplus y_n$), первый бит переноса (c_{n-1}) будет равен значению выражения ($x_n \wedge y_n$). Дальше $z_i = x_i \oplus y_i \oplus c_i$, а $c_{i-1} = (x_i \wedge y_i) \vee ((x_i \vee y_i) \wedge c_i)$, а первый бит нового числа будет равен нулевому биту переноса c_0. Таким образом, всего для сложения 2-х n-битных чисел нам понадобится $2 + (2+4) \cdot (n-1) + 4$ – первое слагаемое – последний бит нового числа и n-ый бит переноса, 2 слагаемое – n-1 битов переноса и битов нового числа, последнее слагаемое – последний бит переноса. Всего получилось $6n$ новых гейтов.
Теперь давайте сделаем схему, вычисляющую сумму n входных битов. Для этого мы сначала разобьем все числа на пары, потом сложим числа в парах. В итоге у нас получатся какие-то 2-х битные числа. С ними сделаем ту же самую операцию, у нас получатся 3-х битные числа, и так далее, пока в итоге не останется одно число, состоящее из $\log n$ битов, оно то и будет ответом. Теперь давайте оценим размер всей схемы. На первом уровне будет просто n входных гейтов. На втором – $6 \cdot \frac{n}{2}$ (гейты, получающие числа длины 2 из чисел длины 1, уже учтены сами биты чисел), на 3 – $6 \cdot 2 \cdot \frac{n}{4}$($6 \cdot 2$– количество гейтов чтобы сложить 2 2-хбитных числа, всего пар двухбитных чисел – $\frac{n}{4}$), на i-ом уровне будет $6 \cdot (i-1) \cdot \frac{n}{2^{i-1}}$, т.к. на этом уровне мы складываем пары (i-1)-битных чисел, а всего пар таких чисел $\frac{n}{2^{i-1}}$. Получается, что во всей схеме всего порядка $n + \sum_2^{\log n} 6 \cdot (i-1) \cdot \frac{n}{2^{i-1}}$. Воспользуемся тем, что ряд $\sum_1^{\infty} \frac{i}{2^i} = 2$, тогда у нас всего $n + \sum_2^{\log n} 6 \cdot (i-1) \cdot \frac{n}{2^{i-1}} \leqslant n + 6 \cdot n \cdot \sum_1^{\infty} \frac{i}{2^i} = 13n$ Таким образом мы построили сумматор размера $\sim 13n$