Оценка рыночных рисков с помощью семейства обобщённого гиперболического распределения

Финансовая эконометрика

Обобщённое гиперболическое распределение

Обобщённое гиперболическое распределение (GHD)

$$f_{GHD}(x;\mu,\sigma,\gamma,\lambda,\chi,\psi) =$$

$$\frac{(\psi\chi^2)\psi^{\lambda}\left(\psi+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\left(\chi+\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\left(\psi+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)}\right)e^{\frac{\gamma(x-\mu)}{\sigma^2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma K_{\lambda}(\psi\chi)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\left(\chi+\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\left(\psi+\frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda}}$$

$K_u(v)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода

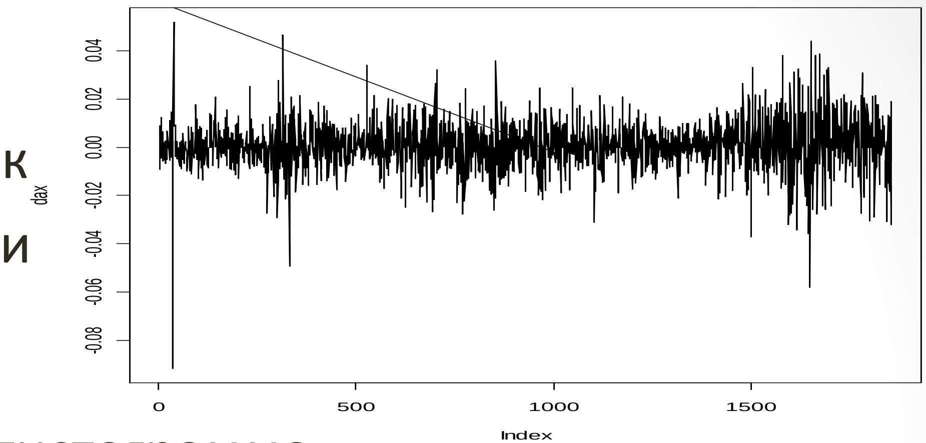
Обобщённое гиперболическое распределение в R

Исходные данные

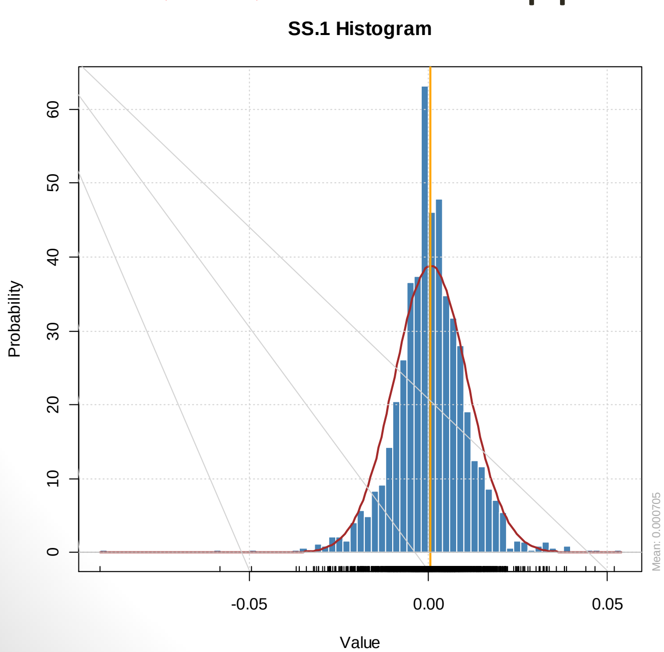
```
library(datasets)
dax <- EuStockMarkets[,"DAX"]

T <- length(dax) - 1
dax <- dax[2:(T+1)]/dax[1:T] - 1
```

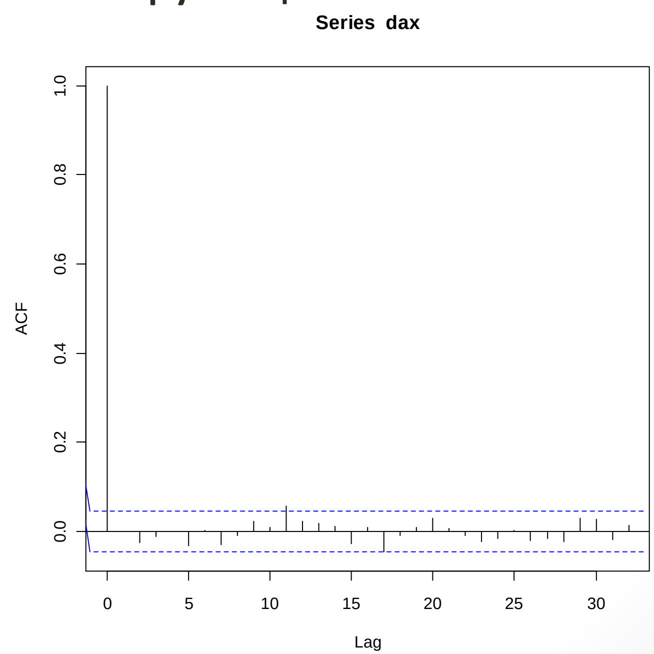
Статистическая информация

```
library(fBasics)
plot(dax,type="l")   # график
basicStats(dax)  # статистики
```




```
histPlot(timeSeries(dax))# гистограмма
acf(dax)   # автокорреляционная функция
```

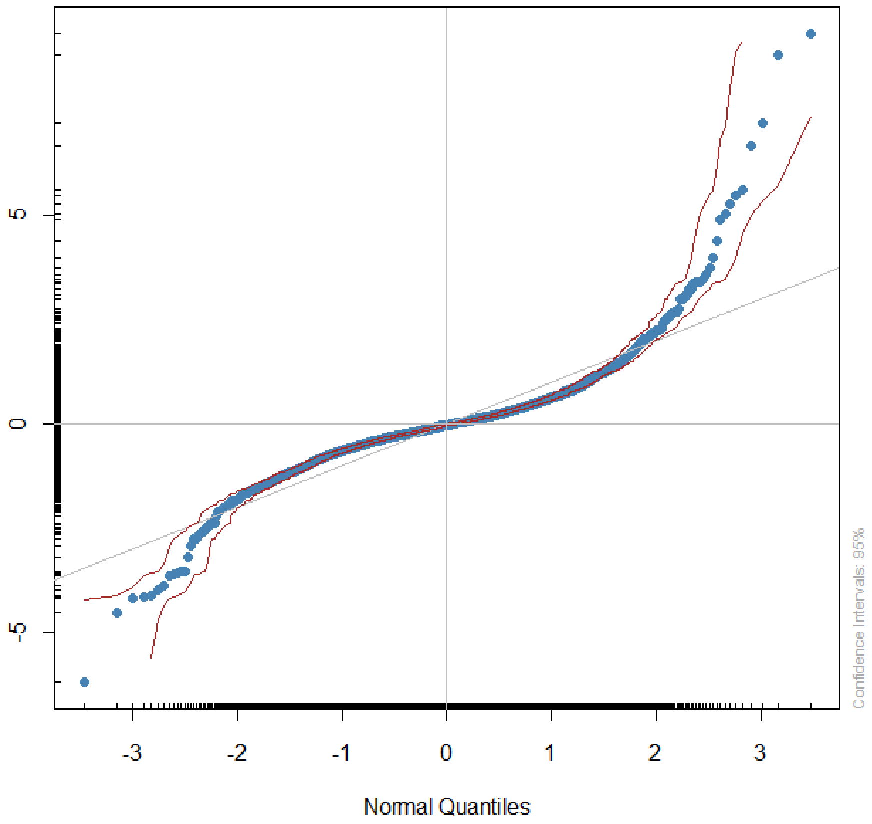




Тесты на нормальность

`qqnormPlot(dax)` # график квантиль-квантиль

`jarqueberaTest(dax)`



Оценка параметров распределения

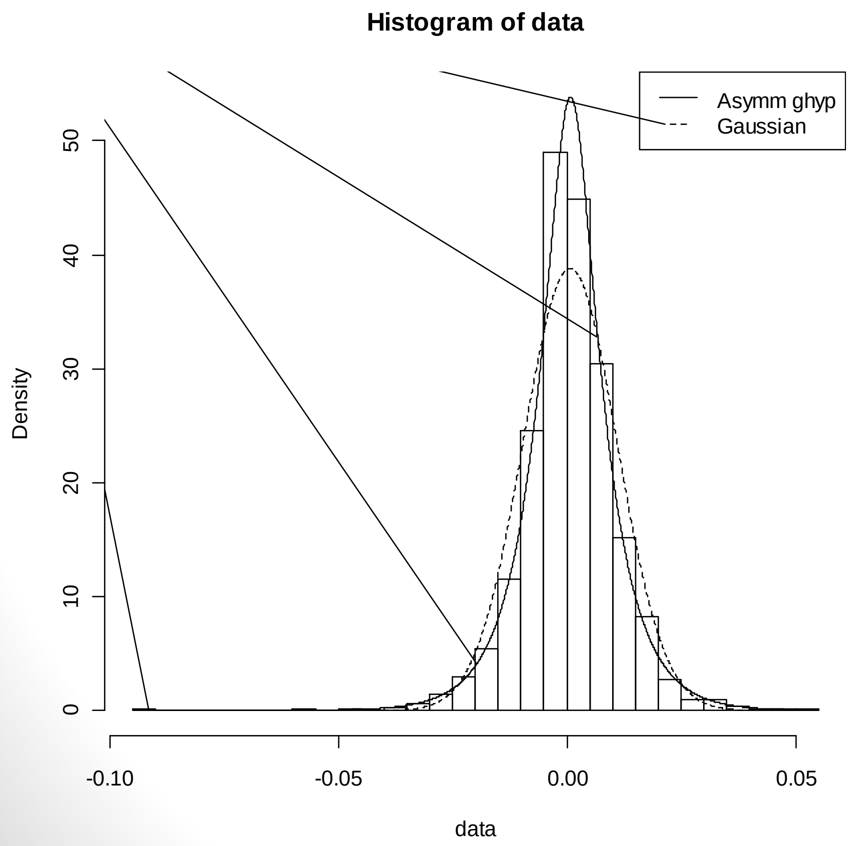
```
library(ghyp)
fit.[…]uv(dax,symmetric=FALSE,silent=TRUE)
```

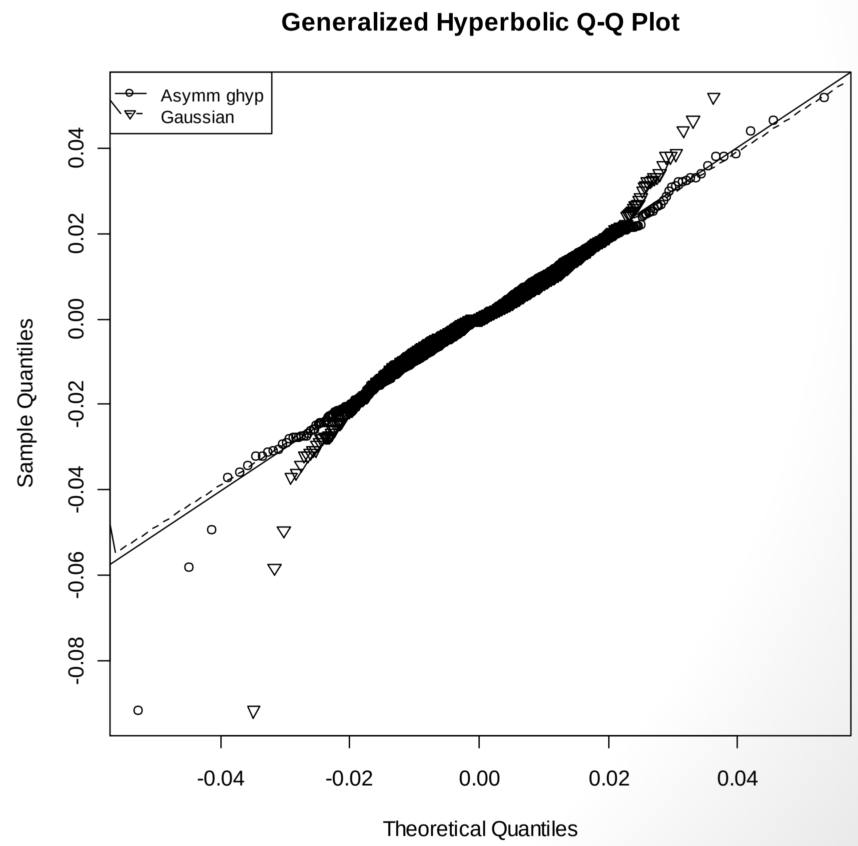
если symmetric == FALSE, то оценивается скошенное
распределение, иначе — симметричное;

вместо […] следует подставить название распределения:
ghyp — обобщённое гиперболическое
hyp — гиперболическое
NIG — нормально-обратное гауссовское
VG — Variance-Gamma
t — t-распределение Стьюдента
gauss — нормальное

Графический анализ модели

```
dax.ghyp <- fit.ghypuv(dax,symmetric=FALSE,silent=TRUE)
hist(dax.ghyp)    # гистограмма
qqghyp(dax.ghyp)    # график квантиль-квантиль
```





Выбор наилучшей модели

Отношение правдоподобия

H_0: более общая модель обладает той же объясняющей силой, что и её частный случай

$$LR = -2ln\frac{L_{H_0}}{L_{H_{alt}}} \sim \chi^2(\nu), \qquad \nu = df_{H_0} - df_{H_{alt}}$$

```
dax.t <- fit.tuv(dax,symmetric=FALSE,silent=TRUE)
lik.ratio.test(dax.ghyp,dax.t,conf.level=0.95)
```

Информационный критерий Акаике

$AIC = 2k - 2\ln(L) \rightarrow min,\ k$ — количество параметров модели

```
aic.uv <- stepAIC.ghyp(dax,dist=c("gauss","t","ghyp"),
symmetric=NULL,silent=TRUE)
summary(aic.uv$best.model)   # статистики по модели
```

Оценка финансового риска

Меры риска:

- граница потерь (Value-at-Risk)

$$P(x < VaR_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

- ожидаемые потери (Expected Shortfall)

$$ES_{1-\alpha} = E(x|\, x < VaR_{1-\alpha})$$

Метод Монте-Карло

```
alpha <- 0.1; N <- 10^6
dax.sim <- rghyp(n=N,object=aic.uv$best.model)
dax.sim <- sort(dax.sim)
VaR <- dax.sim[alpha*N]
```

другой вариант: VaR <- qghyp(alpha,object=aic.uv$best.model)

```
ES <- mean(dax.sim[1:(alpha*N-1)])
```

VaR	-0.011
ES	-0.018

Кривая VaR

Используется для тестирования качества оценок риска

Кривая VaR — набор последовательных во времени значений VaR

\# разделим выборку на обучающую и экзаменующую

```
T1 <- 6*260; T2 <- T - T1
```

\# на пространстве экзаменующей выборки построим набор

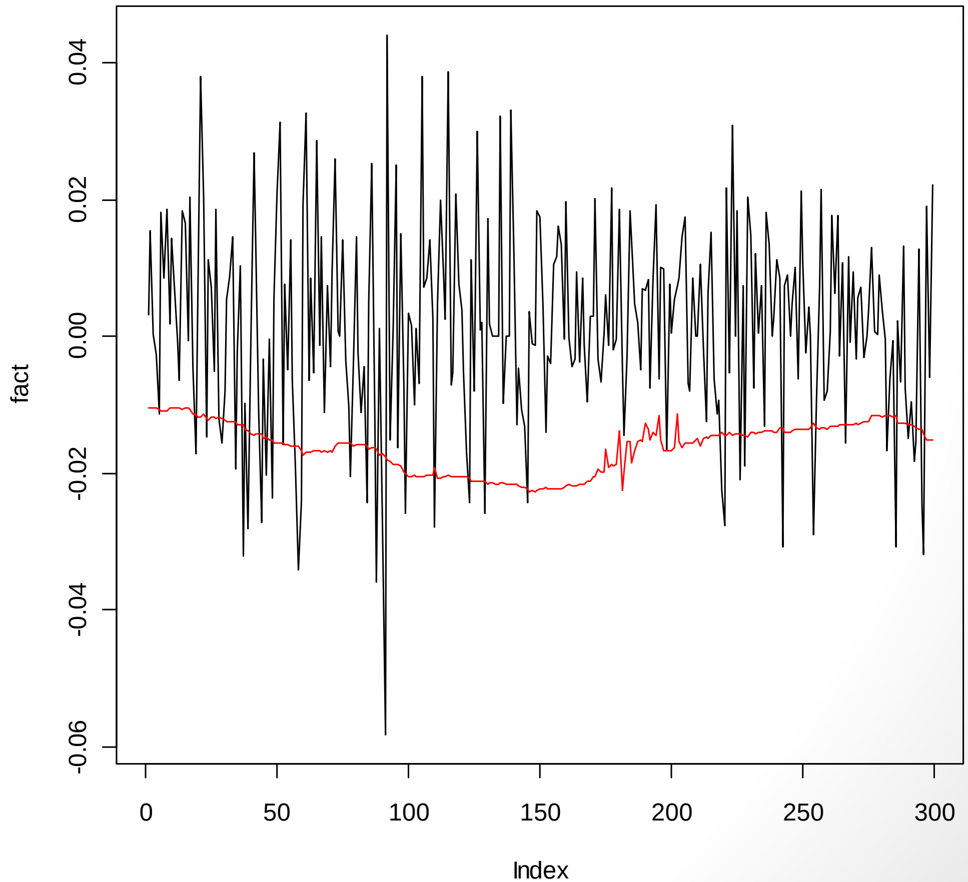
\# последовательных значений VaR

```
VaR <- numeric()
h <- 0.5 * 260   # длина обучающей выборки
for (i in (T1+1):(T1+T2)) {
  h.dax <- dax[(i-h):(i-1)]
  dax.fit <- stepAIC.ghyp(h.dax,dist=c("gauss","t","ghyp"),
  symmetric=NULL,silent=TRUE)
  VaR[i-T1] <- qghyp(alpha,object=dax.fit$best.model)
}
```

Кривая VaR

сравнение оценок риска с фактом

```
fact <- dax[(T1+1):(T1+T2)]
plot(fact,type="l")
lines(VaR,col="red")
```



Кривая VaR

Тест Купика

Идея состоит в сравнении модельной и эмпирической частот превышений фактическими убытками границы VaR

$$K = \sum I(x_t < VaR_t), \; \alpha_0 = \frac{K}{T_2}$$

$$H_0: \; \alpha_0 = \alpha$$

Статистика:

$$S = -2\ln\left((1-\alpha)^{T_2-K}\alpha^K\right) + 2\ln\left((1-\alpha_0)^{T_2-K}\alpha_0^K\right) \sim \chi^2(1)$$

тест Купика в R:

```
K <- sum(fact<VaR); alpha0 <- K/T2
S <- -2*log((1-alpha)^(T2-K)*alpha^K)+
2*log((1-alpha0)^(T2-K)*alpha0^K)
p.value <- 1-pchisq(S,df=1)
```

alpha	0.100
alpha0	0.130
p.value	0.092

Кривая VaR

Функции потерь

Величина функции потерь измеряет глубину пробоев кривой VaR и интерпретируется как размер понесённых потерь

Функция потерь Лопеса:

$$L_{Lo} = \frac{1}{K}\sum_{t=T_1+1}^{T_2}\left((x_t - VaR_t)^2 \cdot I(x_t < VaR_t)\right)$$

Функция потерь Бланко-Ила:

$$L_{BI} = \frac{1}{K}\sum_{t=T_1+1}^{T_2}\left(\frac{x_t - VaR_t}{VaR_t} \cdot I(x_t < VaR_t)\right)$$

\# функции потерь в R:

```
L.Lo <- sum((fact-VaR)^2*(fact<VaR))/K
L.BI <- sum((fact-VaR)/VaR*(fact<VaR))/K
```

L.Lo*10^4	1.399
L.BI	0.611

Домашнее задание

- рассчитать оценки риска для биржевого индекса по всей совокупности наблюдений на основе наилучшей модели
- построить кривую VaR на основе ОГР и проверить качество оценок
- проделать то же самое, моделируя доходности с помощью нормального распределения, и сравнить результаты

Исходные данные — дневные котировки акций и биржевых индексов за период с 2010 г. по н.в. с сайтов finam.ru, finance.yahoo.com

Бонусное задание (необязательное):

- провести тест Колмогорова–Смирнова на эквивалентность распределения доходностей биржевого индекса и выбранной вами наилучшей модели

Двумерный случай

```
smi <- EuStockMarkets[,"SMI"]
smi <- smi[2:(T+1)]/smi[1:T] - 1
# доходности портфеля из двух активов
prt <- array(c(dax,smi),dim=c(T,2))

# оценка параметров модели
prt.fit <- fit.[…]mv(prt,symmetric=FALSE,silent=TRUE)
aic.mv <- stepAIC.ghyp(prt, […])

# оценки риска
prt.fit <- fit.ghypmv(prt,symmetric=FALSE,silent=TRUE)
w <- c(0.5,0.5)   # веса активов в портфеле
sim <- rghyp(n=N,object=prt.fit)
prt.sim <- w[1]*sim[,1]+w[2]*sim[,2]
prt.sim <- sort(prt.sim)
VaR <- prt.sim[alpha*N]
ES <- mean(prt.sim[1:(alpha*N-1)])
```

VaR	-0.009
ES	-0.017

Оптимизация портфеля

```
# выбор оптимальных весов активов в портфеле
opt <- portfolio.optimize(prt.fit,
risk.measure="value.at.risk",type="minimum.risk",
target.return=NULL,risk.free=NULL,level=0.95,silent=TRUE)
```

- ***risk.measure*** определяет целевой измеритель риска
  "sd", "value.at.risk", "expected.shortfall"
- ***type*** — вид оптимизации
  "minimum.risk" — по минимальному риску
  "tangency" — по соотношению "(доходность – безрисковая ставка) / риск"
  "target.return" — минимальный риск при заданной доходности

```
opt$opt.weights    # искомые веса
```

Домашнее задание

- рассчитать оценки риска для портфеля из двух биржевых индексов по всей совокупности наблюдений на основе наилучшей модели

Исходные данные — котировки с сайтов finam.ru, finance.yahoo.com

Бонусное задание (необязательное):

- построить кривую VaR для портфеля и проверить качество оценок