# Моделирование доходности финансовых активов с использованием копул

Финансовая эконометрика

# Содержание

- основы теории копул
- модель «copula–GARCH»

# Основы теории копул

# Копулы: определение и свойства

Копула $C(\vec{u})$, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$ — функция $C$: $[0;1]^d \to [0;1]$ со следующими свойствами:

- $\exists u_i = 0,\ i \in \{1; \dots; d\} \Rightarrow C(\vec{u}) = 0;$
- $C(1,1, \dots, u_i, \dots, 1,1) = u_i;$
- $\forall u_{i,1} \le u_{i,2}\ \ \forall w_i \in \{u_{i,1}; u_{i,2}\}$
  $\sum_{\forall \vec{w}} \left( C(\vec{w}) \prod_{i=1}^{d} sgn\left(2w_i - u_{i,1} - u_{i,2}\right) \right) \ge 0$

Копула — совместная функция распределения *d* стандартных равномерных случайных величин:

$C(\vec{u}) = P(r_1 < u_1; \dots; r_d < u_d),\ r_i \sim U[0;1]$

# Копула и совместная функция распределения

Пусть $\xi \sim F_\xi(u)$, тогда $r_1 = F_\xi(\xi) \sim U[0;1]$ и $F_\xi^{-1}(r_1) = \xi$

$C\big(F_{\xi_1}(u_1), \dots, F_{\xi_d}(u_d)\big) = P\big(r_1 < F_{\xi_1}(u_1); \dots; r_d < F_{\xi_d}(u_d)\big) =$
$= P\big(F_{\xi_1}^{-1}(r_1) < u_1; \dots; F_{\xi_d}^{-1}(r_d) < u_d\big) = P(\xi_1 < u_1; \dots; \xi_d < u_d) =$
$= F_{\xi_1,\dots,\xi_d}(u_1, \dots, u_d)$

Таким образом, при подстановке в копулу значений частных функций распределения случайных величин мы получим их совместную функцию распределения

Плотностью $c(\vec{u})$ копулы $C(\vec{u})$ называется отношение

$c(\vec{u}) = \frac{\partial^d C(u_1,\dots,u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$

Если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_d$ непрерывны, то

$c\big(F_{\xi_1}(u_1), \dots, F_{\xi_d}(u_d)\big) = \frac{f_{\xi_1,\dots,\xi_d}(u_1,\dots,u_d)}{f_{\xi_1}(u_1)\dots f_{\xi_d}(u_d)}$

# Теорема Шкляра

Теорема Шкляра (Šklar, 1959)

Пусть $F_{\xi_1}(u), \dots, F_{\xi_d}(u)$ — частные функции распределения, $F_{\xi_1,\dots,\xi_d}(\vec{u})$ — совместная функция распределения, тогда существует такая копула $C(\vec{u})$, что

$$C\left(F_{\xi_1}(u_1), \dots, F_{\xi_d}(u_d)\right) = F_{\xi_1,\dots,\xi_d}(u_1, \dots, u_d)$$

Теорема Шкляра позволяет разделить процедуру оценки параметров совместного распределения на два шага:

- оценка параметров частных функций распределения
- оценка параметров копула-функции

# Виды копул

Виды копула-функций:

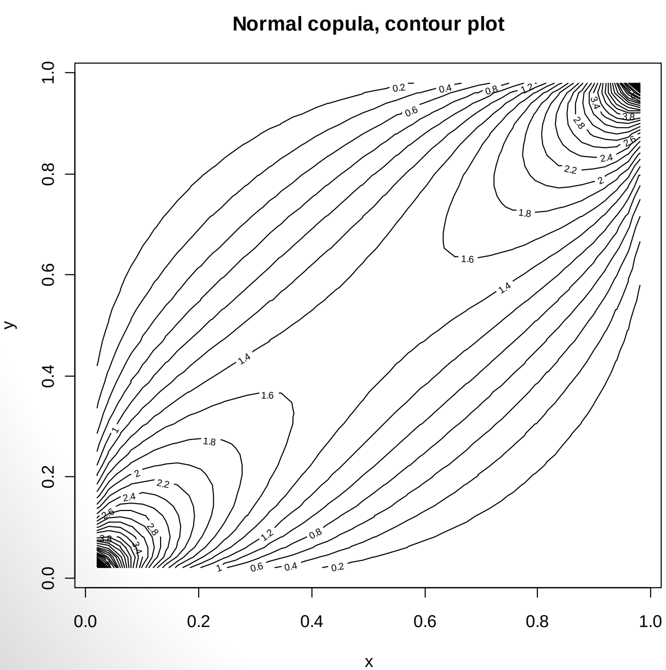
- эллиптические — строятся на основе известных функций распределения (нормальная, Стьюдента, Коши, Лапласа и другие);
- архимедовы — строятся на основе функции-генератора (Гумбеля, Клейтона, Франка и другие);
- экстремальные копулы (Гумбеля, Галамбоса и другие);
- непараметрические копулы

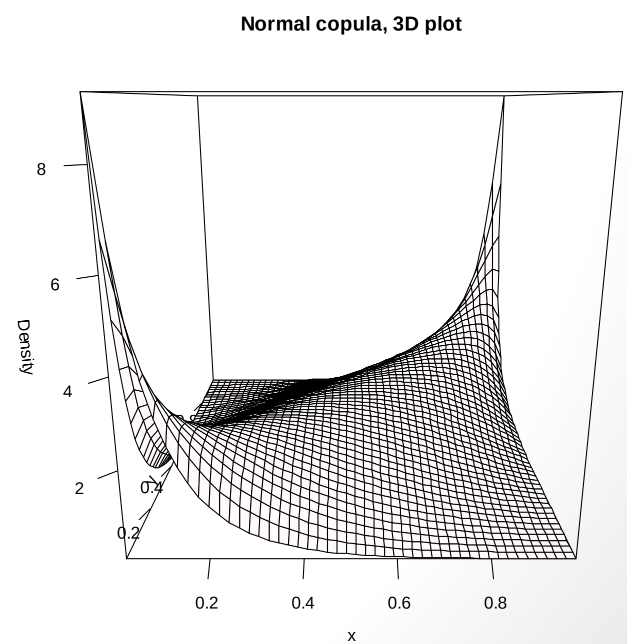
# Эллиптические копулы (1:2)

Копула Гаусса (нормальная копула)

$$C_N = \Phi_{\rho_{\xi\eta}}(\Phi^{-1}(x); \Phi^{-1}(y))$$

$$c_N = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{\left(\frac{\Phi^{-2}(u_1)+\Phi^{-2}(u_2)}{2}+\frac{2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)-\Phi^{-2}(u_1)-\Phi^{-2}(u_2)}{2(1-\rho^2)}\right)}$$



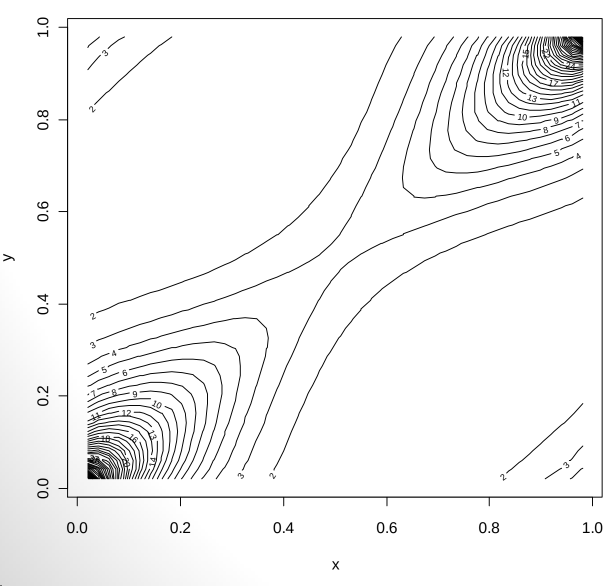
# Эллиптические копулы (2:2)

Копула Стьюдента (t-копула)

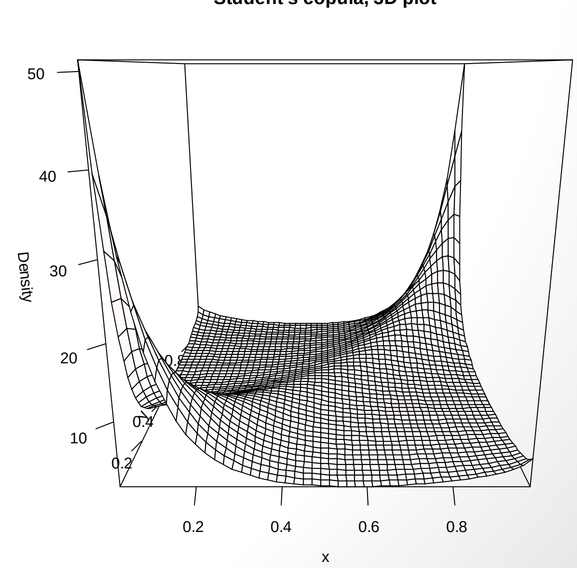
$$C_T = t_{\nu,\rho}\left(t_{1,\nu}^{-1}(u_1), t_{2,\nu}^{-1}(u_2)\right)$$

$$c_T = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\rho}\,\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(1+\frac{t_{1,\nu}^{-2}(u_1)+t_{2,\nu}^{-2}(u_2)-2\rho t_{1,\nu}^{-1}(u_1)t_{2,\nu}^{-1}(u_2)}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\left(\left(1+\frac{t_{1,\nu}^{-2}(u_1)}{\nu}\right)\left(1+\frac{t_{2,\nu}^{-2}(u_2)}{\nu}\right)\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}$$

Student's copula, contour plot




Student's copula, 3D plot

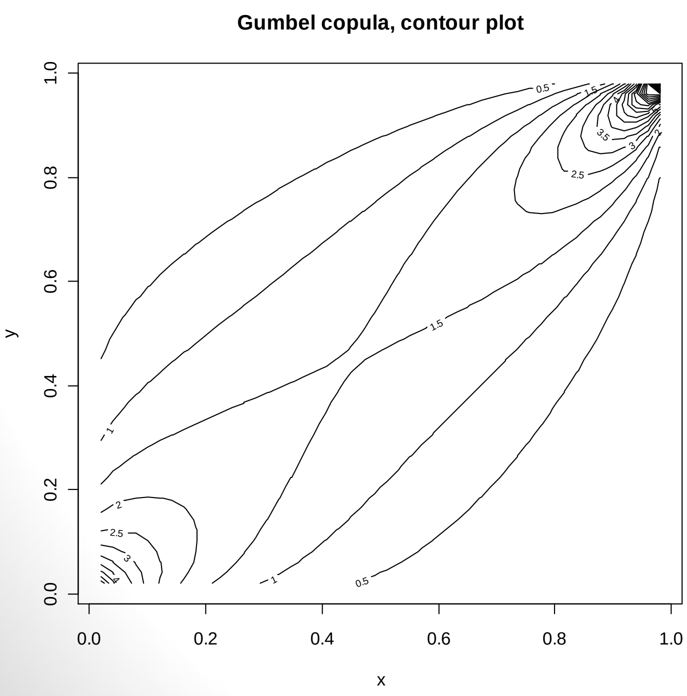


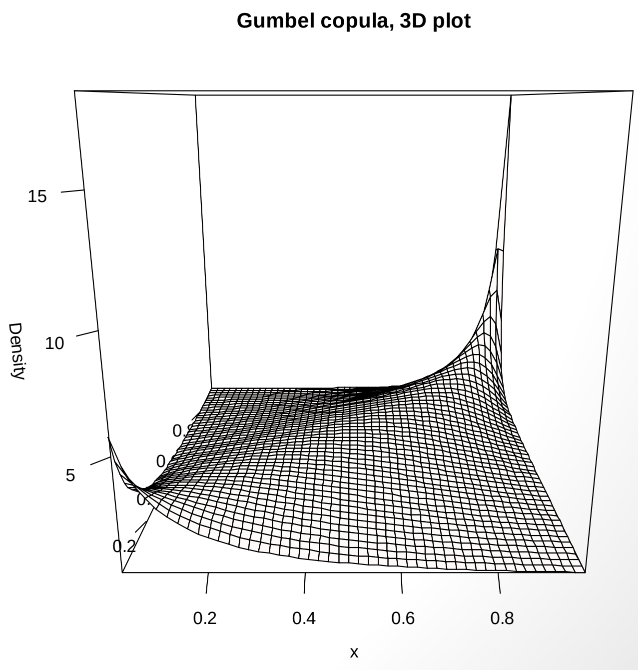
# Архимедовы копулы (1:2)

Копула Гумбеля

$$C_G = \exp\left(-\left((-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right),\ \ \varphi = (-\ln t)^{\alpha}$$

$$c_G = \frac{-\varphi''(C_G(u_1,u_2))\varphi'(u_1)\varphi'(u_2)}{(\varphi'(C_G(u_1,u_2)))^3},\ \ \alpha \in [1;+\infty)$$



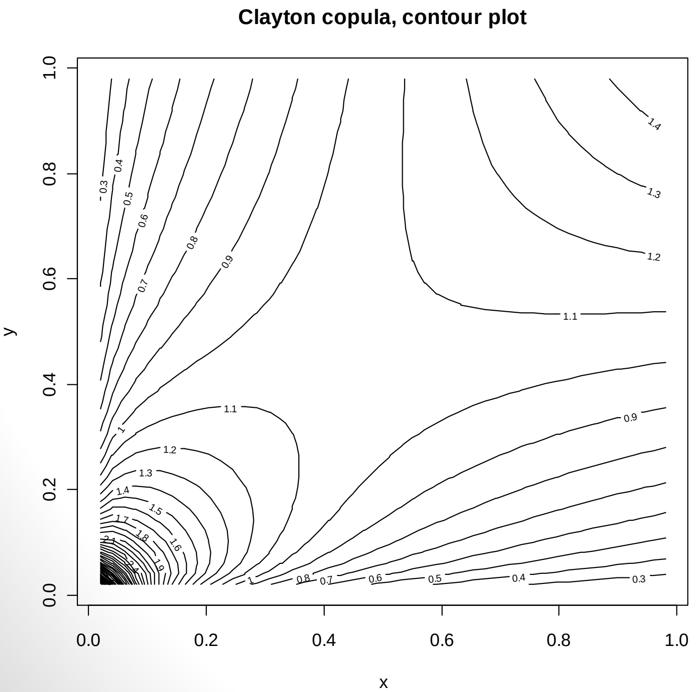



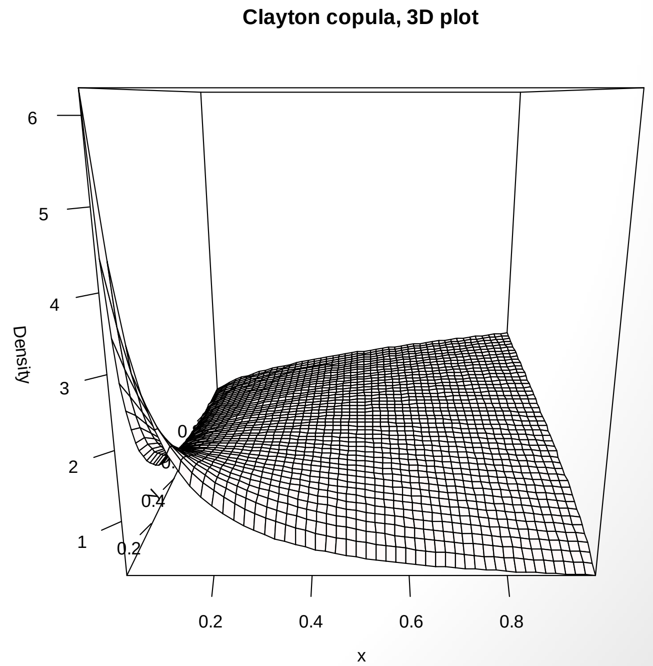
# Архимедовы копулы (2:2)

Копула Клейтона

$$C_C = \max\left(\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, 0\right),\ \varphi = \frac{1}{\alpha}\left(t^{-\alpha} - 1\right)$$

$$c_C = \frac{-\varphi''(C_C(u_1,u_2))\varphi'(u_1)\varphi'(u_2)}{(\varphi'(C_C(u_1,u_2)))^3},\ \alpha \in [-1;0) \cup (0;+\infty)$$



# Исходные данные

```
library(datasets)

T <- nrow(EuStockMarkets) - 1

dax <- EuStockMarkets[,"DAX"]
dax <- dax[2:(T+1)]/dax[1:T] - 1

smi <- EuStockMarkets[,"SMI"]
smi <- smi[2:(T+1)]/smi[1:T] - 1
```

# Моделирование частных функций распределения

```
library(ghyp)
```

\# моделирование частных функций распределения

```
dax.fit <- stepAIC.ghyp(dax,dist=c("gauss","t","ghyp"),
  symmetric=NULL,silent=TRUE)$best.model
smi.fit <- stepAIC.ghyp(smi,dist=c("gauss","t","ghyp"),
  symmetric=NULL,silent=TRUE)$best.model
```

\# расчёт значений $F_1(u)$ и $F_2(u)$

```
dax.cdf <- pghyp(dax,object=dax.fit)
smi.cdf <- pghyp(smi,object=smi.fit)
cdf <- array(c(dax.cdf,smi.cdf),dim=c(T,2))
```

# Моделирование копулы

```
library(copula)
```

# объявление копул

```
norm.cop <- normalCopula(dim=2,param=0.5,dispstr="un")
stud.cop <- tCopula(dim=2,param=0.5,df=5,
  df.fixed=TRUE,dispstr="un")
gumb.cop <- gumbelCopula(dim=2,param=2)
clay.cop <- claytonCopula(dim=2,param=2)
```

# подгонка копулы

```
norm.fit <- fitCopula(cdf,copula=norm.cop)
stud.fit <- fitCopula(cdf,copula=stud.cop)
gumb.fit <- fitCopula(cdf,copula=gumb.cop)
clay.fit <- fitCopula(cdf,copula=clay.cop)
```

| | |
|---|---|
| norm.fit@loglik | 558.4 |
| stud.fit@loglik | 595.0 |
| gumb.fit@loglik | 533.3 |
| clay.fit@loglik | 486.3 |

# Оценка финансового риска

\# значения частных функций распределения

```
N <- 10^4
stud.sim <- rcopula(n=N,copula=stud.fit@copula)
```

\# доходности активов

```
dax.sim <- qghyp(stud.sim[,1],object=dax.fit)
smi.sim <- qghyp(stud.sim[,2],object=smi.fit)

w <- c(0.5,0.5)
prt.sim <- w[1]*dax.sim + w[2]*smi.sim
```

\# измерители риска

```
alpha <- 0.1
prt.sim <- sort(prt.sim)
VaR <- prt.sim[alpha*N]
ES <- mean(prt.sim[1:(alpha*N-1)])
```

| | |
|---|---|
| VaR | -0.009 |
| ES | -0.016 |

# Домашнее задание

- рассчитать показатели VaR и ES для портфеля финансовых активов
- построить кривую VaR
- провести тест Купика и рассчитать значения функций потерь
- написать комментарии

Исходные данные – котировки с сайтов finam.ru, finance.yahoo.com и др.

# Модель «copula–GARCH»

# Формализация модели

Уравнения для дисперсии по частным GARCH-моделям:

$$\varepsilon_{i,t} = z_{i,t}\sigma_{i,t}, \qquad z_{i,t} \sim idd(0;1)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{i,k}\varepsilon_{i,t-k}^2 + \sum_{k=1}^{q} \beta_{i,k}\sigma_{i,t-k}^2$$

$$i \in \{1; \dots ; d\}$$

Этапы моделирования:

1. Оценка частных GARCH-моделей;
2. Расчёт условных стандартизированных остатков $z_{i,t}$
3. Моделирование многомерной величины $z_t$

# Модель «copula–GARCH» в R

# одномерные GARCH-модели

```
library(fGarch)
dax.gfit <- garchFit(data=dax,formula=~garch(1,1),
  shape=1.25,include.shape=F,cond.dist="ged",trace=F)
smi.gfit <- garchFit(data=smi,formula=~garch(1,1),
  shape=1.3,include.shape=F,cond.dist="sged",trace=F)
```

# стандартизированные остатки

```
z <- matrix(nrow=T,ncol=2)
z[,1] <- dax.gfit@residuals / dax.gfit@sigma.t
z[,2] <- smi.gfit@residuals / smi.gfit@sigma.t
```

# частные распределения остатков

```
mean <- c(0,0); sd <- c(1,1); nu <- c(1.25,1.3)
xi <- c(1,smi.gfit@fit$par["skew"])

cdf <- matrix(nrow=T,ncol=2)
for (i in 1:2) cdf[,i] <- psged(z[,i],mean=mean[i],
  sd=sd[i],nu=nu[i],xi=xi[i])
```

# Модель «copula–GARCH» в R

\# подгонка копул

```
norm.fit <- fitCopula(cdf,copula=norm.cop)
stud.fit <- fitCopula(cdf,copula=stud.cop)
gumb.fit <- fitCopula(cdf,copula=gumb.cop)
clay.fit <- fitCopula(cdf,copula=clay.cop)
```

\# метод Монте-Карло

```
cdf.sim <- rcopula(n=N,copula=stud.fit@copula)

z.sim <- matrix(nrow=N,ncol=2)
for (i in 1:2) z.sim[,i] <- qsged(cdf.sim[,i],
  mean=mean[i],sd=sd[i],nu=nu[i],xi=xi[i])

frc1 <- predict(dax.gfit,n.ahead=1)
frc2 <- predict(smi.gfit,n.ahead=1)

mu <- c(frc1[,1],frc2[,1])
sigma <- c(frc1[,3],frc2[,3])
```

# Оценка финансового риска

\# модельные доходности портфеля

```
prt.sim <- w[1]*(mu[1]+sigma[1]*z.sim[,1]) +
           w[2]*(mu[2]+sigma[2]*z.sim[,2])
```

\# измерители риска

```
prt.sim <- sort(prt.sim)
VaR <- prt.sim[alpha*N]
ES <- mean(prt.sim[1:(alpha*N-1)])
```

| | |
|---|---|
| VaR | -0.017 |
| ES | -0.026 |

# Домашнее задание

- рассчитать показатели VaR и ES для портфеля финансовых активов
- построить кривую VaR
- провести тест Купика и рассчитать значения функций потерь

Исходные данные – котировки с сайтов finam.ru, finance.yahoo.com и др.