Теория экстремальных значений (многомерный случай)

Финансовая эконометрика

Многомерная максима

- Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \sim F,\ \vec{x}_i \in R^d,\ \vec{x}_i \sim F_i$

$\vec{x}_i = \left(x_{i,1}, \dots, x_{i,d}\right)^T$ — убытки различных видов

$M_{n,j} = \max\left(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}\right)$

$M_n = \left(M_{n,1}, \dots, M_{n,d}\right)^T$ — покомпонентная блочная максима

Нас интересует сходимость нормализованной максимы:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} = \left(\frac{M_{n,1} - d_{n,1}}{c_{n,1}}, \dots, \frac{M_{n,d} - d_{n,d}}{c_{n,d}}\right)^T \xrightarrow{n} H,\ c_n > 0$$

Пусть $\frac{M_n - d_n}{c_n}$ сходится к некоторой векторной случайной величине с совместной функцией распределения H, тогда

$\lim_n P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \le \vec{x}\right) = \lim_n F^n(c_n\vec{x} + d_n) = H(\vec{x})$, т.е.

$F \in MDA(H)$

Экстремальная копула

- Если у H есть невырожденные частные функции распределения, то они должны быть Фреше, Гумбеля или Вейбулла. По теореме Шкляра существует копула $C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = H(\vec{x})$

Теорема о копуле эктремальных значений

Пусть $F \in MDA(H)$ и $H_i \sim GEV$, тогда $C(\vec{u}^t) = C^t(\vec{u}),\ \forall t > 0$

Теорема о представлении Пикандса

Копула C — экстремальная тогда и только тогда, когда её можно представить в виде

$$C(\vec{u}) = e^{B\left(\frac{\ln u_1}{\sum_{k=1}^d \ln u_k}, \dots, \frac{\ln u_d}{\sum_{k=1}^d \ln u_k}\right) \sum_{i=1}^d \ln u_i},$$ где

$$B(\vec{w}) = \int_{S_d} \max(x_1 w_1, \dots, x_d w_d)\, dH(\vec{x}),$$

$$S_d = \left\{\vec{x} : x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, d,\ \sum_{i=1}^d x_i = 1\right\}$$

Примеры

<u>Пример 3</u>. Копула Гумбеля

$$C_{\theta,\alpha,\beta}^{Gu}(u_1,u_2) = u_1^{1-\alpha}u_2^{1-\beta}e^{-\left((-\alpha\ln u_1)^\theta+(-\beta\ln u_2)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}}$$

Из (2) имеем: $A(w) = (1-\alpha)w + (1-\beta)(1-w) + \left((\alpha w)^\theta + \left(\beta(1-w)\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$

<u>Пример 4</u>. Копула Галамбоса

Пусть $A(w) = 1 - \left((\alpha w)^{-\theta} + \left(\beta(1-w)\right)^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$, где $\alpha,\beta \in [0;1]$, $\theta > 0$, тогда с помощью (1) можно сконструировать копулу:

$$C_{\theta,\alpha,\beta}^{Gal}(u_1,u_2) = u_1u_2e^{\left((-\alpha\ln u_1)^{-\theta}+(-\beta\ln u_2)^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}}$$

MGEV в R

Практический пример 2. Биржевые индексы DAX и FTSE

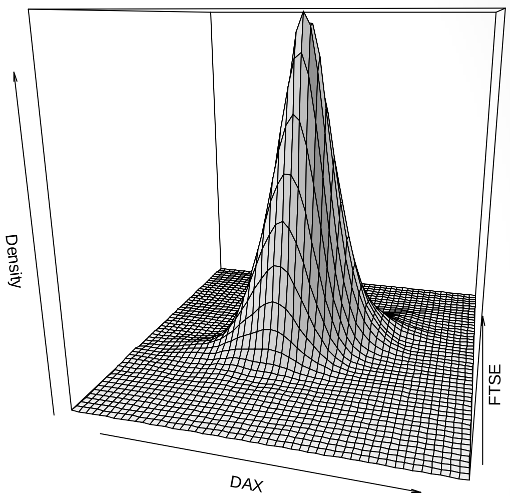
загрузка данных

```
ftse <- EuStockMarkets[,4]
ftse <- ftse[2:(T+1)]/ftse[1:T]-1
ftse <- - ftse
ESM <- cbind(dax,ftse)
```

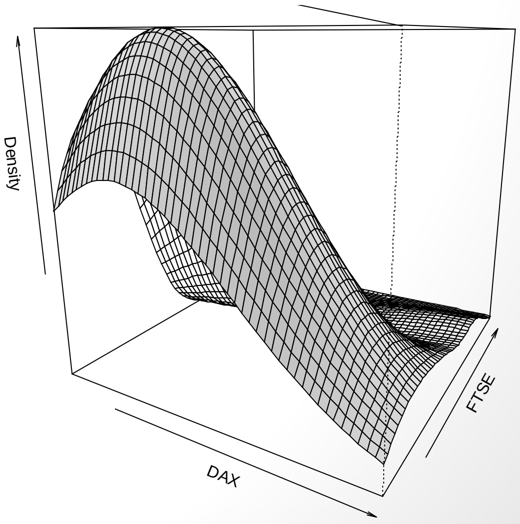
расчёт максим

```
Mn <- rep(0,times=m*2)
dim(Mn) <- c(m,2)
for (i in 1:2) {
  for (j in 1:m)
  Mn[j,i] <- max(ESM[((j-1)*n+1):(j*n),i])
}
```

Эмпирическое распределение доходностей DAX и FTSE



Эмпирическое распределение максим



MGEV в R

частные распределения на основе GED

```
fit1 <- fgev(Mn[,1])
fit2 <- fgev(Mn[,2])
```

экстремальные копулы

```
library(copula)
gumb.cop <- gumbelCopula(2)
gal.cop <- galambosCopula(2)
```

значения частных функций распределения

```
cdf1 <- pgev(Mn[,1],loc=fit1$estimate[1],
    scale=fit1$estimate[2],shape=fit1$estimate[3])
cdf2 <- pgev(Mn[,2],loc=fit2$estimate[1],
    scale=fit2$estimate[2],shape=fit2$estimate[3])
cdf <- cbind(cdf1,cdf2)
```

MGEV в R

подгонка копулы

```
gumb.fit <- fitCopula(cdf,copula=gumb.cop)
gal.fit <- fitCopula(cdf,copula=gal.cop)
```

gumb.fit@loglik	**5.798**
gal.fit@loglik	**5.846**

модельные значения максим

```
N <- 10^5
cdf.sim <- rcopula(n=N,copula=gal.fit@copula)
sim1 <- qgev(cdf.sim[,1],loc=fit1$estimate[1],
    scale=fit1$estimate[2],shape=fit1$estimate[3])
sim2 <- qgev(cdf.sim[,2],loc=fit2$estimate[1],
    scale=fit2$estimate[2],shape=fit2$estimate[3])
```

MGEV в R

модельные убытки

```
w <- c(0.5,0.5)
loss <- sort(w[1]*sim1+w[2]*sim2)
```

расчёт мер риска

```
k <- 4
alpha <- 1-1/k
VaR <- loss[alpha*N]
ES <- mean(loss[(alpha*N+1):N])
```

VaR	**0.029**
ES	**0.043**

Превышение многомерного порога

- Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \sim F(\vec{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \in MDA(MGEV)$

Согласно теории для одномерного случая частные распределения величин, превышающих многомерный порог $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$ имеет вид:

$$\tilde{F}_i(x_i) = 1 - \bar{F}_i(u_i)\left(1 + \frac{\xi_i(x_i - \mu_i)}{\beta_i}\right)^{\frac{1}{\xi_i}}, \ \vec{x} \geq \vec{u}$$

Для многомерного случая используется приближение

$$F(\vec{x}) \approx C\left(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d)\right), \ \vec{x} \geq \vec{u}$$

Поскольку исходное распределение $F(\vec{x})$ неизвестно, копулу *C(.)* также нужно аппроксимировать

Для этого применяется экстремальная копула:

$$F(\vec{x}) \approx C_0\left(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d)\right), \ \vec{x} \geq \vec{u}$$

Превышение многомерного порога в R

\# выборка значений, превышающих многомерный порог

```
u <- c(sort(dax)[0.9*T],sort(ftse)[0.9*T])
t.ESM <- ESM[(ESM[,1]>u[1])&(ESM[,2]>u[2]),]
```

\# частные распределения на основе GED

```
fit1 <- fpot(t.ESM[,1],threshold=u[1],
    model="gpd",method="SANN")
fit2 <- fpot(t.ESM[,2],threshold=u[2],
    model="gpd",method="SANN")
```

\# значения частных функций распределения

```
cdf1 <- pgpd(t.ESM[,1],loc=u[1],scale=fit1$par[1],
    shape=fit1$par[2])
cdf2 <- pgpd(t.ESM[,2],loc=u[2],scale=fit2$par[1],
    shape=fit2$par[2])
cdf <- cbind(cdf1,cdf2)
```

Превышение многомерного порога в R

подгонка копулы

```
gumb.fit <- fitCopula(cdf,copula=gumb.cop)
gal.fit <- fitCopula(cdf,copula=gal.cop)
```

gumb.fit@loglik	12.27
gal.fit@loglik	12.69

модельные значения убытков

```
cdf.sim <- rcopula(n=N,copula=gal.fit@copula)
sim1 <- qgpd(cdf.sim[,1],loc=u[1],scale=fit1$par[1],
    shape=fit1$par[2])
sim2 <- qgpd(cdf.sim[,2],loc=u[2],scale=fit2$par[1],
    shape=fit2$par[2])
```

Превышение многомерного порога в R

убытки по портфелю

```
loss <- sort(w[1]*sim1+w[2]*sim2)
```

расчёт мер риска

```
Fu <- nrow(t.ESM)/T
alpha <- 1-1/(260*Fu)
VaR <- loss[alpha*N]
ES <- mean(loss[(alpha*N+1):N])
```

VaR	**0.029**
ES	**0.037**

Домашнее задание

- рассчитать оценки риска для портфеля из двух биржевых индексов с помощью многомерных версий метода блочных максим и метода превышения порогового значения
- построить кривую VaR для портфеля и проверить качество оценок