GeekBrains

Задания к уроку 2

1. Задание

Даны два вектора в трехмерном пространстве: (10,10,10) и (0,0,-10)

1) Найдите их сумму. (на листочке)

Ответ: (10,10,10) + (0,0,-10) = (10, 10, 0)

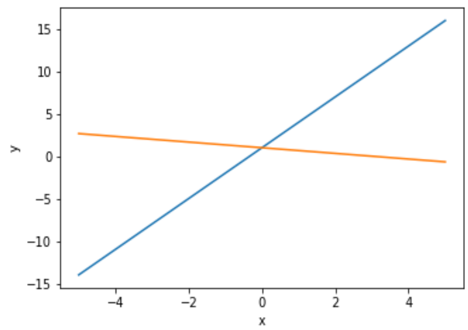
2) Напишите код на Python, реализующий расчет длины вектора, заданного его координатами. (в программе) см.файл lesson-3_gasilin.ipynb

2. Задание (на листочке)

Почему прямые не кажутся перпендикулярными? (см.ролик)

```
x = np.linspace(-5, 5, 21)
y = 3*x+1
y2 = (-1/3)*x+1
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,y2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
```

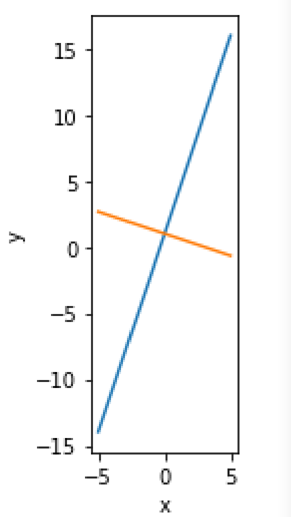
```
<matplotlib.text.Text at 0x6aa80f0>
```



Ответ: Прямые не кажутся перпендикулярными потому, что масштаб единичного отрезка по оси x не совпадает с масштабом единичного отрезка по оси y. Правильно отмасштабированный вывод выглядит так:

```
x = np.linspace(-5, 5, 21)
y = 3*x+1
y2 = (-1/3)*x+1

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(x,y)
ax.plot(x,y2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
ax.set_aspect(1)
```



3. Задание (в программе)

Напишите код на Python, реализующий построение графиков:

1. окружности,
2. эллипса,
3. гиперболы.

См. практическое задание в программе.

4. Задание (на листочке)

1) Пусть задана плоскость:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

Напишите уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через начало координат.

Ответ: Все параллельные плоскости имеют коллинеарные нормальные векторы. Поэтому для построения параллельной к (1) плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нужно взять в качестве нормального вектора искомой плоскости, нормальный вектор n=(A, B, C) плоскости (1). Далее нужно найти такое значение D, при котором точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяла уравнению плоскости (1):

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0 \qquad (2)$$

Решим (2) относительно D:

$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0) \qquad (3)$$

Подставляя значение D из (3) в (1), получим:

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0 \qquad (4)$$

Уравнение (4) можно представить также в следующем виде:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (5)$$

Уравнение (5) является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной плоскости (1).

В нашем случае $M_0 = (0, 0, 0)$. Поэтому ответ: $Ax+By+Cz=0$

2) Пусть задана плоскость: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

и прямая:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Как узнать, принадлежит прямая плоскости или нет?

Ответ: Если $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0$ и $A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 + D_1 = 0$ то точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) принадлежат плоскости. А значит и вся прямая принадлежит плоскости.

5. Задание (в программе)

1) Нарисуйте трехмерный график двух параллельных плоскостей.
2) Нарисуйте трехмерный график двух любых поверхностей второго порядка.

См. практическое задание в программе.

Задание 3

0. Задание (сделайте себе шпаргалку перед глазами, если не помните) - не присылать

Чему равны синус, косинус, тангенс перечисленных углов? Запишите значения в таблицу:

α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α^o	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o	360^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ.	0	Не сущ.	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	Не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не сущ.	0	Не сущ.

1. Задание (в программе)

Нарисуйте график функции:

$$y(x) = k\cdot\cos(x - a) + b$$

для некоторых (2-3 различных) значений параметров k, a, b

См. практическое задание в программе.

2. Задание

Докажите, что при ортогональном преобразовании сохраняется расстояние между точками.

Линейное преобразование на плоскости

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

называется ***ортогональным***, если выполняются соотношения

$$a^2_{11} + a^2_{21} = 1,\ a^2_{12} + a^2_{22} = 1,\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

При ортогональных преобразованиях сохраняются расстояния между точками.

Доказательство. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ посредством ортогонального преобразования переводятся соответственно в точки $M'_1(x'_1, y'_1)$ и $M'_2(x'_2, y'_2)$. Требуется доказать, что отрезки M_1M_2 и $M'_1M'_2$ имеют равные длины. С помощью формул получаем

$$|M'_1 M'_2|^2 = [x'_2 - x'_1]^2 + [y'_2 - y'_1]^2 =$$
$$[a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)]^2 + [a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)]^2 =$$
$$(a^2_{11}+a^2_{21})(x_2 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (a^2_{21}+a^2_{22})(y_2 - y_1)^2 =$$

см. определение **ортогонального** преобразования

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |M_1 M_2|^2$$

Итак, $|M_1M_2| = |M'_1M'_2|$. **Теорема доказана.**

3. Задание (в программе)

1. Напишите код, который будет переводить полярные координаты в декартовы.
2. Напишите код, который будет рисовать график окружности в полярных координатах.
3. Напишите код, который будет рисовать график отрезка прямой линии в полярных координатах.

См. практическое задание в программе. Решение реализовал в одном куске кода.

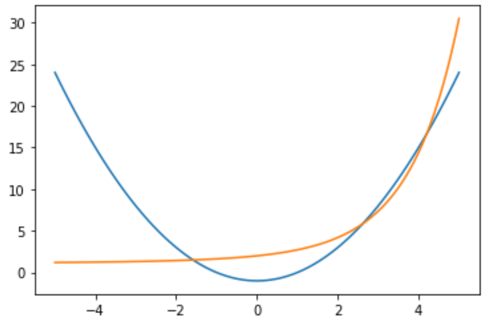
4. Задание (в программе)

1) Решите систему уравнений:

$$y = x^2 – 1$$

$$\exp(x) + x\cdot(1 – y) = 1$$

Ответ: (-1.5818353528958981.5022030836712916)
(2.61814557308543045.854686241866794)
(4.2001058411580505 16.640889076926225)



2) Решите систему уравнений и неравенств:

$$y = x^2 – 1$$

$$\exp(x) + x\cdot(1 – y) > 1$$

$\exp(x) + x – x\ y – 1 > 0$

$\exp(x) + x– 1 > \ x\ y$

$$\frac{\exp(x) + x - 1}{x} > y$$