GeekBrains

Практические задания к уроку 4

Инструкции к сдаче:
Присылайте фото листочков с вашими решениями или просто ответы в текстовом файле .doc или .txt (1-3 задание).

Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом (4 задание). Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupiter Notebook

Тема “Аналитическая геометрия” и “Графики на плоскости”

1. Задание (на листочке)
Решите уравнение
sin(x)/x=0.

ОДЗ этого уравнения: x≠0. Т.к. на ноль делить нельзя.
Уравнение 1/x = 0 решен й не имеет. Т.к. оно нигде не становится равным 0. Хоть и приближается к этому значению в ±∞.
sin(x) = 0 в каждой точке кратной π. $x = \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$ (Z — множество целых чисел).
Поэтому $\frac{\sin(x)}{x} = 0$ выполняестя во всех точках $x = \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$, кроме $n = 0$. Т.к. в этом случае πn =0 не попадает в область допустимых значений.
Ответ: $x = \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$, кроме $n = 0$.

2. Задание (на листочке)
Даны три прямые y=k1*x+b1, y=k2*x+b2,, y=k3*x+b3. Как узнать, пересекаются они в одной точке или нет?

Две прямые, если они не параллельны, всегда пересекаются на плоскости. Пусть точка их пересечения (x1, y1).

$y_1=k_1*x_1+b_1$; $y_1=k_2*x_1+b_2$ => $x_1 = \frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}$; $y_1 = \frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}k_1+b_1$

Если при подстановке в третье уравнение $x_1 = \frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}$ получим y1, это и будет означать, что все 3 прямые пересекаются в одной точке.
Ответ: Если $\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2}k_3+b_3 = y_1$, тогда, все 3 прямые пересекаются в одной точке.

3. Задание (в программе или на листочке)

На листе тетради «в линейку» (расстояние между линиями равно а) лежит игла (длиной b). Координаты нижней точки иглы (x,y), игла лежит под углом alfa. Пересекает ли игла линию или нет?

Не очень понял, как нужно подходить к решению задачи в рамках темы “Аналитическая геометрия” и “Графики на плоскости”. Мне кажется, что не хватает координат хотя бы одной точки, которая лежала бы на линиях, которыми расчерчен листок. Поэтому пусть первая линия задается уравнением y = a * x, вторая y = 2a * x, третья y = 3a * x и т.д. Т.е. уравнения разделительных линий y = n * a * x, где $n \in \mathrm{N}$ где N – натуральные числа.

В таком случае игла координаты нижней точки которой равны (x,y), а угол наклона = α будет пересекать одну из прямых, если отрезок $[\frac{y}{a}; \frac{y+b\sin(\alpha)}{a}]$ содержит натуральное число. Т.к. в случае пересечения прямой и иголки $[y; y+b\sin(\alpha)]$ должен содержать a или 2a или 3a или любое n*a. Смотря как далеко будет находиться иголка.
Ответ: рискну предположить, что игла пересекает линию, если $[\frac{y}{a}; \frac{y+b\sin(\alpha)}{a}]$ содержит натуральные числа. Их может быть несколько, если иголка очень длинная.

Но, боюсь, что я не совсем верно понял, что хотели получить в качестве ответа в этой задаче. Хотя она очень похожа на задачу «Бюффона о бросании иглы» из теории вероятности.

4. Задание (задание делать по желанию)**
Решите аналитически и потом численно (в программе) уравнение, зависящее от параметра а:
sin(a*x)=0
при условии: 0.01<a<0.02, 100<x<500.
Т.е. надо найти решение x как функцию параметра a - построить график x=x(a).
Если численным методом не получается найти все ветви решения x(a), то отыщите хотя бы одну.

sin(a*x) = 0; тогда общее решение выглядит так: $a * x = \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$ (Z – множество целых чисел); $x = \frac{\pi n}{a},\ n \in \mathrm{Z}$ (Z – множество целых чисел).
Поскольку 0.01 < a < 0.02, то область допустимых значений не будет включать дополнительных исключений. Понятно, что решений x=x(a) бесконечно много, но нас интересуют те, которые на отрезке (0.01, 0.02) попадают в интервал 100<x<500. Т.к. это гиперболы, то локальных всплесков не будет. Поэтому найдем границы.

При a = 0.01:
100 < x < 500 => 100 < 100 πn < 500 => 1 < πn < 5 => $\frac{1}{\pi}$ < n <$\frac{5}{\pi}$ => 0.3 < n < 1.65. т.е. подходит только n =1. Других целых чисел в этом интервале нет.

При a = 0.02:

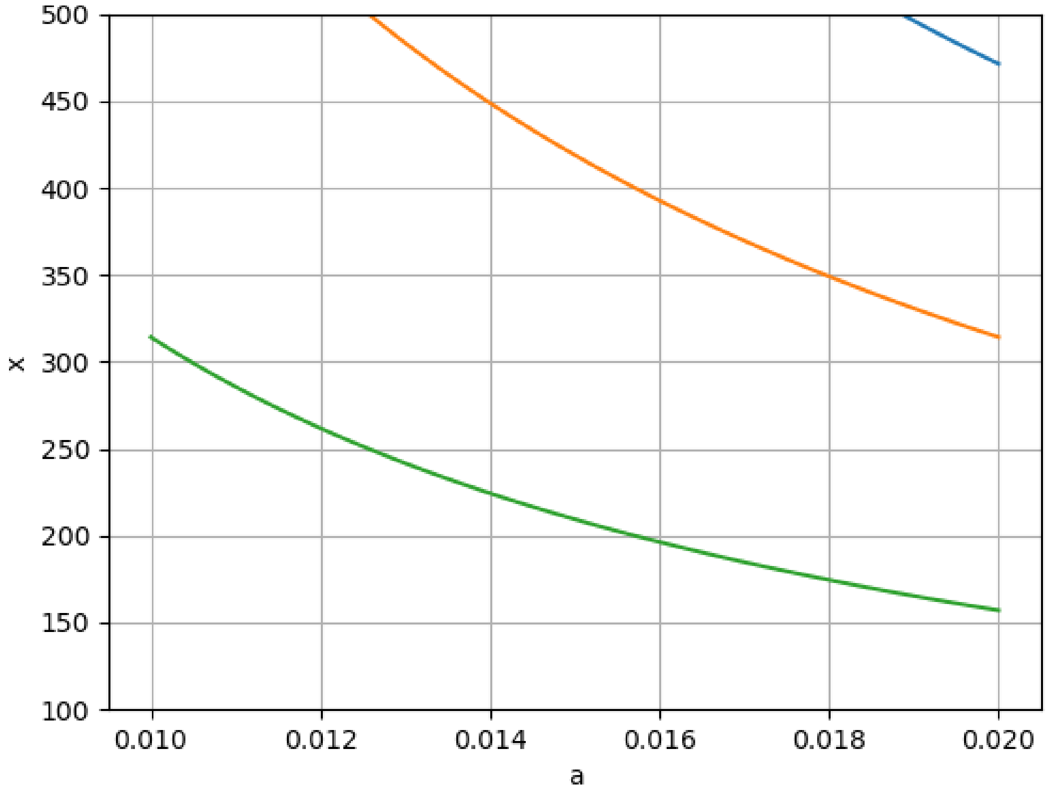
$100 < x < 500 \Rightarrow 100 < 50\pi n < 500 \Rightarrow 2 < \pi n < 10 \Rightarrow \frac{2}{\pi} < n < \frac{10}{\pi} \Rightarrow 0.7 < n < 3.18$. т.е. подходят n =1,2,3. Других целых чисел в этом интервале нет.

Ответ: в указанных ограничениях на x и a подходят только 3 решения

$$x = \frac{\pi}{a}; x = \frac{2\pi}{a}; x = \frac{3\pi}{a}$$

Код на python:

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

a = np.linspace(0.01, 0.02, 100)

n = 3
x1 = n*np.pi / a
n = 2
x2 = n*np.pi / a
n = 1
x3 = n*np.pi / a

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(a, x1)
ax.plot(a, x2)
ax.plot(a, x3)

plt.xlabel("a")
plt.ylabel("x")
ax.grid()
plt.ylim((100, 500))

plt.show()
```



17.6.2. Найти угол α между прямыми $4y - 3x + 12 = 0$ и $7y + x - 14 = 0$.

По формуле tg A между двумя пересекающимися прямыми = (1*4 – (-3)*7) / ((-3)*1+4*7) = (4+21) / (28-3) = 25 / 25 = 1. Таким образом угол между прямыми : $\frac{\pi}{4}$ (т.к. обычно углом между прямыми считают острый, а не тупой, смежный с ним $\frac{5\pi}{4}$.)

Ответ: угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45^0)

17.6.4. Найти угол α между прямыми $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{3}$.

Ответ: вообще-то эти прямые параллельны. И они вообще не пересекаются.

Выяснить тип кривых второго порядка, порожденных следующими уравнениями.

17.6.5. $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0.$
17.6.6. $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0.$
17.6.7. $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0.$
17.6.8. $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0.$

Решения:
17.6.5) $y^2 - 2x - 2y - 5 = (y^2-2y+1) - 2x - 6 = (y-1)^2-2(x-3)=0$ уравнение **параболы**
17.6.6) $3x^2+5y^2+12x-30y+42 = 3(x^2+4x+2) - 6 + 5(y^2-6y+9) - 45 + 42 = 3(x+2)^2 + 5(y-3)^2-9=0$
т.е. $(1/3)(x+2)^2 + (5/9)(y-3)^2 = 1$ уравнение **эллипса**
17.6.7) $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 2x^2 - (y^2-6y+9) + 9 - 7 = 2x^2 - (y-3)^2 + 2 = 0$
т.е. $(1/2)(y-3)^2 - x^2 = 1$ уравнение **гиперболы**
17.6.8) $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 2(x^2-14x+49) - 98 - 3(y^2+14y+49) + 147 - 55 = 2(x-7)^2 - 3(y+7)^2 - 6 = 0$
т.е. $(1/3)(x-7)^2 - (1/2)(y+7)^2 = 1$ уравнение **гиперболы**