GeekBrains

Введение в высшую математику

Практическое задание №5

5.1.
Вектор – это частный случай матрицы 1xN и Nx1. Повторите материал для векторов, уделяя особое внимание умножению A·B.
Вычислите, по возможности не используя программирование: $(5E)^{-1}$ где E – единичная матрица размера 5x5.

Необходимо найти матрицу $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45} \\ a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55} \end{pmatrix}$ такую, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{pmatrix} 50000 \\ 05000 \\ 00500 \\ 00050 \\ 00005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45} \\ a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_{11} & 5a_{12} & 5a_{13} & 5a_{14} & 5a_{15} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} & 5a_{24} & 5a_{25} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} & 5a_{34} & 5a_{35} \\ 5a_{41} & 5a_{42} & 5a_{43} & 5a_{44} & 5a_{45} \\ 5a_{51} & 5a_{52} & 5a_{53} & 5a_{54} & 5a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 00001 \end{pmatrix}$$

$$5 * a_{11} = 1;\ 5 * a_{12} = 0;\ 5 * a_{13} = 0; 5 * a_{14} = 0;\ 5 * a_{15} = 0; \text{и т. д ....}$$

$$\begin{gathered} 5 * a_{11} = 1 => \ a_{11} = 1/5 \\ 5 * a_{22} = 1 => \ a_{22} = 1/5 \\ 5 * a_{33} = 1 => \ a_{33} = 1/5 \\ 5 * a_{44} = 1 => \ a_{44} = 1/5 \\ 5 * a_{55} = 1 => \ a_{55} = 1/5 \end{gathered}$$

$$\begin{pmatrix} 50000 \\ 05000 \\ 00500 \\ 00050 \\ 00005 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

5.2.
Вычислите определитель:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ =1 $* \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$=1*(0-48) – 2* (36-42) + 3 * (32 - 0) = -48 + 12 + 96 = 60.

Ответ: 60.

5.3.

1. Вычислите матрицу, обратную данной:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Пусть А – исходная матрица. С = присоединенная. В – матрица, обратная указанной в условии. Тогда $b_{ij} = \frac{\det(C_{ij})}{\det(A)}$.

C= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Det(A) = 60. См решение предыдущей задачи. Т.е. матрица не вырождена. И обратная существует.

$$\det(C_{11}) = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 - 48 = -48;\ b_{11} = -\frac{48}{60} = -\frac{4}{5};$$
$$\det(C_{12}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(18 - 24) = 6;\ b_{12} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10};$$
$$\det(C_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12;\ b_{13} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5};$$

$$\det(C_{21}) = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -(36 - 42) = 6;\ b_{21} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10};$$
$$\det(C_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12;\ b_{22} = -\frac{12}{60} = -\frac{1}{5};$$
$$\det(C_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6;\ b_{23} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10};$$

$$\det(C_{31}) = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 0 = 32;\ b_{31} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$$
$$\det(C_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 14) = 6;\ b_{32} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$
$$\det(C_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8;\ b_{33} = -\frac{8}{60} = -\frac{2}{15}$$

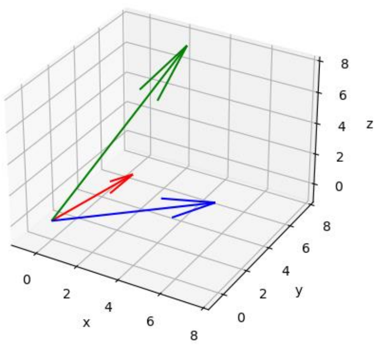
Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{8}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$

2. Приведите пример матрицы 4x4, ранг которой равен 1.

Ответ: Исходя из определения ранга матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ т.к. все столбцы и строки зависимы.

5.4.
Вычислите скалярное произведение двух векторов:
(1, 5) и (2, 8)
(1, 5) * (2, 8) = 2+40=42
Ответ: 42.

5.5
Вычислите смешанное произведение трех векторов:
(1, 5, 0), (2, 8, 7) и (7, 1.5, 3)
(1, 5, 0), (2, 8, 7) и (7, 1.5, 3)



В показанном на картинке случае система координат правая. Поэтому смешанное произведение трех векторов равно

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 7 & 1{,}5 & 3 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1{,}5 & 3 \end{vmatrix} - 5 * \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 1{,}5 \end{vmatrix} =$$

= 24 – 10,5 – (30 - 245) + 0 = 245 – 16,5 = 228,5

Ответ: 228,5

Введение в высшую математику

Практическое задание №6

1. Решите линейную систему:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x + 2y + 3z = 12
4x + 6z = 2 => 3z = 1 – 2x
7x + 8y + 9z = 1

x + 2y + 1 – 2x = 12
7x + 8y + 3 – 6x = 1

x = 2y – 11
x = - 2 - 8y

10y = 9 => y = 9/10
x = 18/10-11 = -9-2/10
z = (1-2x)/3 = (19+4/10)/3 =194/30 = 97/15 = 6 + 7/15

Тот же ответ можно получить заметив, что матрица похожа на матрицу из прошлых заданий Моно обратную матрицу умножить на правую часть и получить ответ.

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{8}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-9{,}2 \quad \frac{9}{10} \quad 6\frac{7}{15})$$

Или можно в питоне набить написать небольшую программу, и получить:

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3], [4, 0, 6], [7, 8, 9]])
B = np.array([12, 2, 1])

S = np.linalg.solve(A, B)
print(S)
```

и получить результат: [-9.2   0.9   6.46666667]

Ответ: X $= (-9{,}2 \quad \frac{9}{10} \quad 6\frac{7}{15})$

2. Найдите псевдорешение:

x + 2y – z = 1

3x – 4y = 7

8x – 5y + 2z = 12

2x – 5z = 7

11x +4y – 7z = 15

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, -1], [3, -4, 0], [8, -5, 2], [2, 0, -5], [11, 4, -7]])
B = np.array([1, 7, 12, 7, 15])

S = np.linalg.lstsq(A, B)
print(S)
```

Ответ: (array([1.13919353, -0.90498444, -0.9009803]), array([0.71523211]), 3, array([15.2817306 , 9.59852942, 3.65197794]))

3. Сколько решений имеет линейная система:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Если ноль – то измените вектор правой части так, чтобы система стала совместной, и решите ее.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = -3 + 12 - 9 = 0$$

Т.е. система не совместна и не может быть решена. Т.к. ранг расширенной матрицы больше, чем ранг исходной.

Но, если правую часть заменить на $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, то получится совместная систем. И убрав одно из уравнений можно найти псевдорешения: [0.07142857, 0.14285714, 0.21428571],
[0.14285714, 0.28571429, 0.42857143],
[0.21428571, 0.42857143, 0.64285714]

Ответ: если правую часть заменить на $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, то получится совместная систем. И убрав одно из уравнений можно найти псевдорешения: [0.07142857, 0.14285714, 0.21428571],
[0.14285714, 0.28571429, 0.42857143],
[0.21428571, 0.42857143, 0.64285714]

4. Вычислите LU-разложение матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 21 \\ 4 & 28 & 73 \end{bmatrix}$$

LU разложение при помощи PYTHON

```
import scipy.linalg

A = np.array([[1, 2, 3], [2, 16, 21], [4, 28, 73]])
P, L, U = scipy.linalg.lu(A)
print(L)
print(U)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 21 \\ 4 & 28 & 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 28 & 73 \\ 0 & -5 & -15{,}25 \\ 0 & 0 & -21{,}6 \end{pmatrix}$$

После этого придумайте вектор правых частей и решите полученную линейную систему трех уравнений с данной матрицей.

Решением системы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 21 \\ 4 & 28 & 73 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ будет вектор (5.54166667; -0.14583333; -0.08333333)

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 21 \\ 4 & 28 & 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 28 & 73 \\ 0 & -5 & -15{,}25 \\ 0 & 0 & -21{,}6 \end{pmatrix}$. Решением системы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 21 \\ 4 & 28 & 73 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ будет вектор (5.54166667; -0.14583333; -0.08333333)

5. Найдите нормальное псевдорешение недоопределенной системы:

x + 2y – z = 1

8x – 5y + 2z = 12

Для этого определите функцию Q(x,y,z), равную норме решения, и найдите ее минимум.

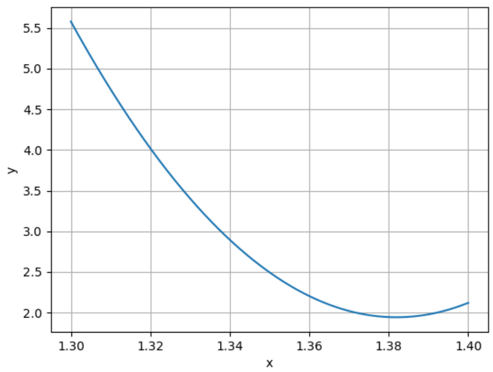
z = x+2y-1
8x-5y+2x+4y-2=12

10x-y-14=0

y= 10x-14
z=x+20x-28-1=21x-29

Q(x, y, z) = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (10x - 14)^2 + (21x - 29)^2}$

$= \sqrt{x^2 + 100x^2 - 280x + 196 + 441x^2 - 1218x + 841} = \sqrt{542x^2 - 1498x + 1037}$



Функция Q(x, y, z) не пересекается с осью Ох. Но ветви направлены вверх и точка, где достигается минимум = $-\frac{b}{2a} - \frac{-1498}{1084} =$ 1,381918819 Т.е. точка (1,381918819; -0,18081; 0,020295) будет максимально нормализованным псевдорешением.

Тот же результат получается и в коде на питоне. [1.38191882, -0.18081181, 0.0202952].

Ответ: (1,381918819; -0,18081; 0,020295)

6. Найдите одно из псевдорешений вырожденной системы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Псевдорешение, найденное в коде: [1.5; 0; 0]
Норма решения : 1.4999999999999996

Попробуйте также отыскать и нормальное псевдорешение.

Ответ: одно из псевдорешений [1.5; 0; 0].