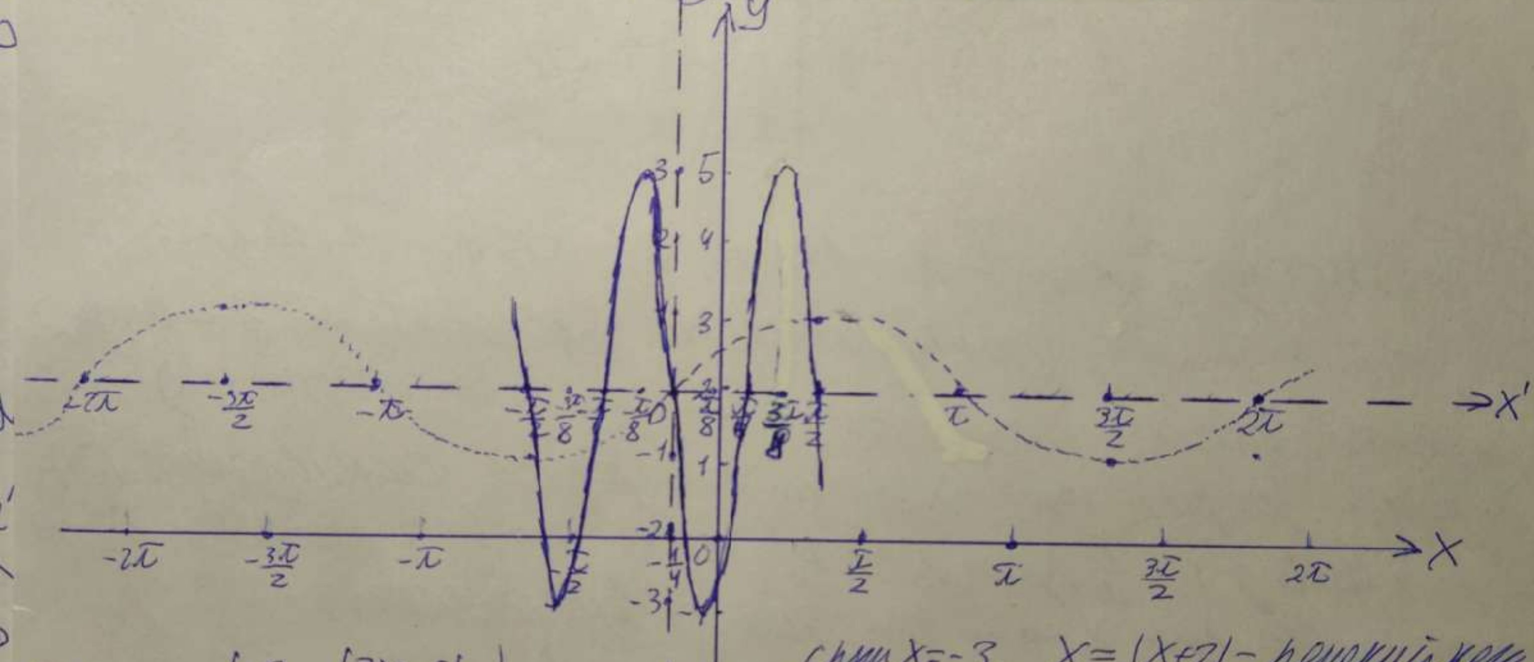
№1

а) $y = 2 - 3\sin(1+4x)$; ~~D(y)~~ $y \in [-1; 5]$, $x \in \mathbb{R}$.

Введём новые координаты $(x'; y')$: $y' = y - 2$; $x' = x + \frac{1}{4}$,
тогда $y' = -3\sin 4x'$.

На одной координат. плоскости строим системы XOY и $X'O'Y'$, отн. $X'O'Y'$ строим $y' = \sin x'$, увеличивая каждую ординату в 3 раза, сжимая график в 4 раза отн. $O'Y'$ и симм. отн. $O'X'$ отображая график получаем в $X'O'Y'$ $y' = -3\sin 4x'$, а в XOY $y = 2 - 3\sin(1+4x)$.

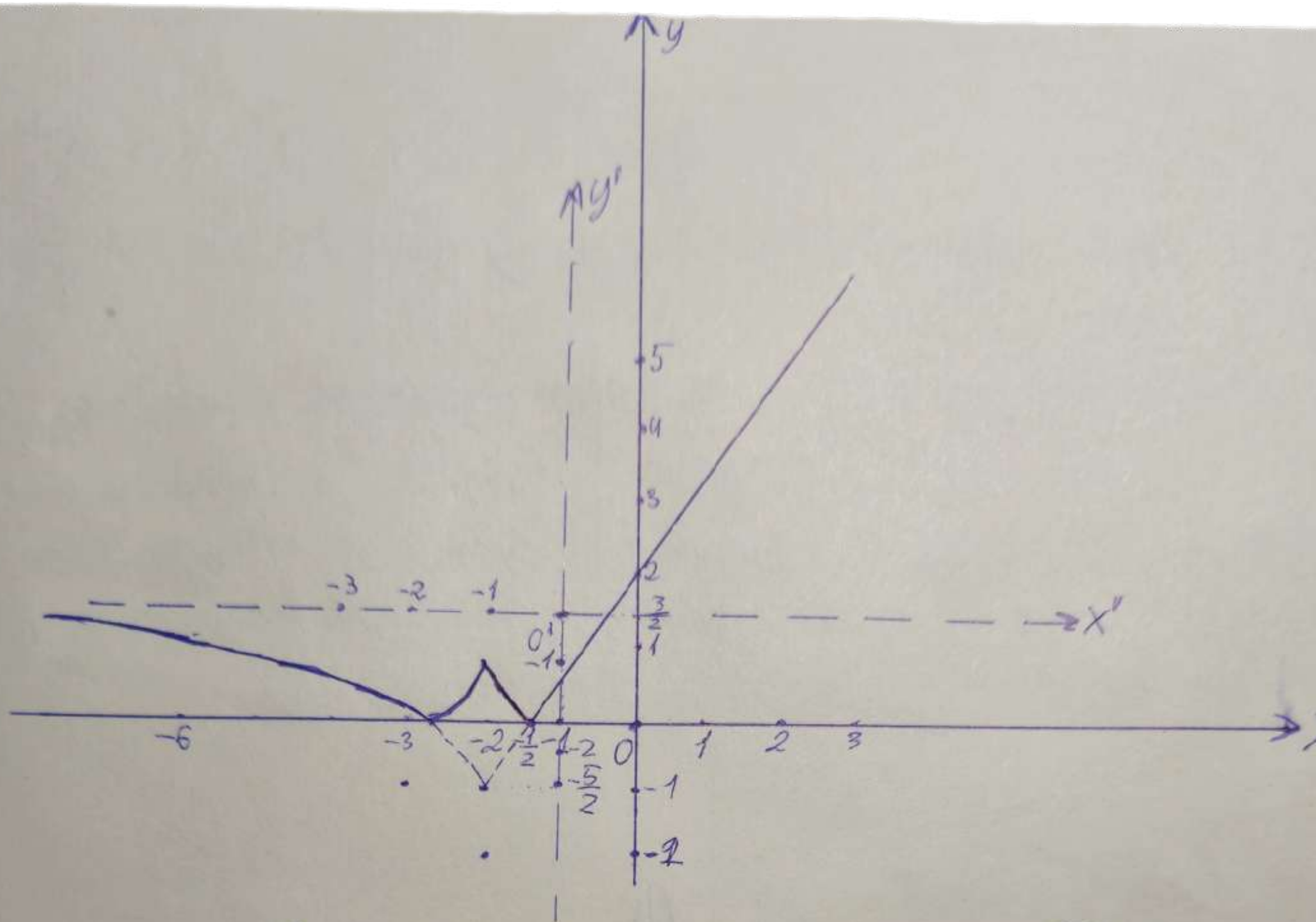


б) $y = \left|\dfrac{2-|3x+6|}{x-|x+2|}\right|$, $y \in [0; +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$ при $x=-3$. $x=|x+2|$ — решений нет

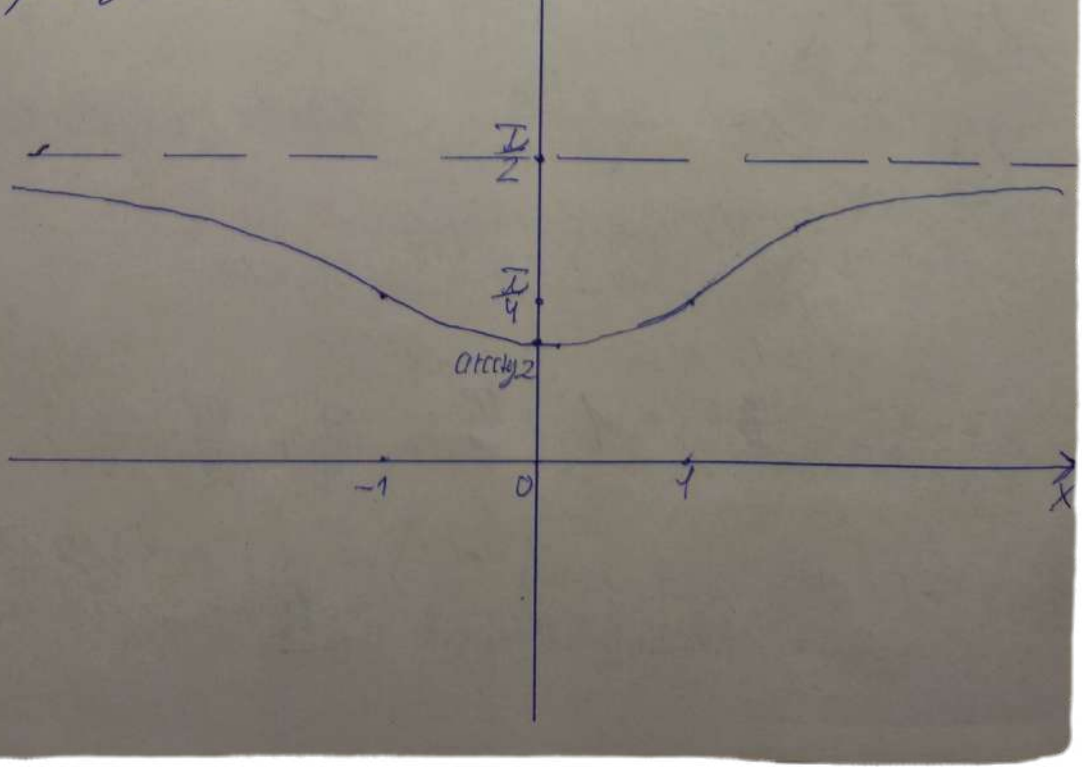
Строим $y = \dfrac{2-|3x+6|}{x-|x+2|}$. Часть графика ниже OX симм. отн. OX отобразим наверх.

$$y = \begin{cases} \dfrac{3x+8}{2(x+1)}, & x < -2 \text{ — гипербола.} \\ 3x+4, & x \geq -2 \text{ — прямая} \end{cases}$$

$$\frac{3x+8}{2x+2} = \frac{3(x+1)+5}{2(x+1)} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$ В осях $X'O'Y'$ строим $y = \frac{1}{x'}$, O' в XOY имеет координаты $(-1; \frac{3}{2})$, после построения увелич. ординаты в $\frac{5}{2}$ раз и отбросим часть правее $x' = -1$.



в) $y = \operatorname{arcctg}\frac{2}{1+x^2}$. Т.к. $1+x^2 \neq 0$, то $x \in \mathbb{R}$. Т.к. при увеличении x $\frac{2}{1+x^2}$ уменьшается, то $y \geq \operatorname{arcctg} 2$.
Заметим, что ф-ция $y = f(x)$ – чётная, т.е. $f(x) = f(-x)$.
Строим график при $x \geq 0$ и отобразим симм. отн. Oy.
$y \longrightarrow \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ при $x \to \infty$. Т.к. $\operatorname{arcctg} x$ – убывающая ф-ция, то при $x \to \infty$ значение y увеличивается.
$E(y) = [\operatorname{arcctg} 2; \frac{\pi}{2})$, $D(y) = \mathbb{R}$.
При $x = 1$:
$y = \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.



№2 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}} = -6$, $f(x) = \frac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}}$, $f: E \to \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x\in E: 0<|x+\frac{1}{3}|<\delta\ \ |f(x)+6|<\varepsilon$.

$\left|\frac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}}+6\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{9x^2+6x+1}{x+\frac{1}{3}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(3x+1)^2}{x+\frac{1}{3}}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{9(x+\frac{1}{3})^2}{x+\frac{1}{3}}\right|<\varepsilon \overset{\text{при } x\neq -\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} \left|9(x+\frac{1}{3})\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+\frac{1}{3}|<\frac{\varepsilon}{9}$.

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$, тогда нер-во выполняется, т.е. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}} = -6$, чтд.

№3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\sqrt{x+1})$, $f(x) = \sin\sqrt{x+1}$.

Найдём $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, такие что ~~$\lim f(x_n)$~~ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не существует.

Пусть $x_n' = (\frac{\pi}{2}+2\pi n)^2-1$, очев. что $x_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n') = 1$.

Пусть $x_n'' = (-\frac{\pi}{2}+2\pi n)^2-1$, $x_n'' \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n'') = -1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$.

№4 1) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{x+2}{x-2} = -\frac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to0} \frac{4x^2-2x}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{1-2x+3x^2}+1+x\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{4x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{1-2x+3x^2}+1+x\right)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{0}{2} = 0.$

3) $\cancel{\lim\limits_{x\to2} \frac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x} = \lim\limits_{x\to2} \frac{\ln(1+(8-2x^2))}{\sin(2\pi x)} = \lim\limits_{x\to2}\frac{8-2x^2}{2\pi x} =}$

$\cancel{= \lim\limits_{x\to2} \frac{\frac{8}{x}-2x}{2\pi}} = \lim\limits_{x\to2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(1+(8-2x^2))}{\sin 2\pi x}\overset{8-2x^2\xrightarrow[x\to2]{}0}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{\sin 2\pi x}=$

] $x=t+2$, тогда при $x\to 2$ $t\to 0$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{8-2(t+2)^2}{\sin(2\pi(t+2))}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{8-2(t^2+4t+4)}{\sin 2\pi t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2t^2-8t}{2\pi t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-4}{\pi}=$

$=-\frac{4}{\pi}$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(1+\frac{x}{2})}{\sqrt[3]{x^2+x+2}-9}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(1-1)}{\sqrt[3]{0}-9}=0.$

5) $\lim\limits_{x\to +0}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to +0}\left(1+\frac{1}{3}x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to +0}\left(\left(1+\frac{x^3}{3}\right)^{\frac{3}{x^3}}\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$

6) $\lim\limits_{x\to a\pm 0}\left(1+\frac{2x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}=\lim\limits_{x\to a\pm 0}(1+2)^{\operatorname{tg}\pi}=1$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}\cos\frac{1}{x}+3}{2-\ln(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}\cos\frac{1}{x}+3}{-\sin x+2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}\cos\frac{1}{x}}{2-\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2-\sin x}=$ переход равносилен, т.к не возникает неопределённости.

$=\frac{3}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}\cos\frac{1}{x}}{2-\sin x}=\frac{3}{2}$, т.к. $\cos\frac{1}{x}$ - ограниченная ф-ция, а $\operatorname{tg}x\xrightarrow[x\to0]{}0.$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{1+(1-x^2)}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{2-x^2}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-x^2}{1-x}=2.$

т.к $\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$

№5 а) $x(t) = \frac{t^2}{1-2t}$; $y(t) = \frac{t^3}{1-2t}$.

$x(1-2t) = t^2 \Leftrightarrow t^2 + 2tx - x = 0$; $D_t = 4x^2 + 4x \geq 0$

$x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

Кривая лежит в полуплоскостях $x \leq -1$ и $x \geq 0$.

Найдем асимптоты кривой в виде $y = kx + b$.

$y = kx + b$ асимптота $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists t_0 \in \mathbb{R}: \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = k < \infty, \text{ т.е. } k \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - kx(t)) = b \in \mathbb{R} \end{cases}$

$t_0 = -\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2} \pm 0} x(t) = \mp\infty$; $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2} \pm 0} y(t) = \mp\infty$.

$k = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \frac{t^3}{1-2t} \cdot \frac{1-2t}{t^2} = \frac{1}{2}$

$b = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \left(\frac{t^3}{1-2t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1-2t} \right) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \left(\frac{2t^3 - t^2}{2(1-2t)} \right) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \frac{-t^2}{2} = -\frac{1}{8}$,

значит $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ – наклонная асимптота.

$k' = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to \infty} t = \infty \notin \mathbb{R}$, других асимптот нет.

$x'(t) = \frac{-2t^2 + 2t}{(1-2t)^2} = \frac{-2t(t-1)}{(2t-1)^2}$

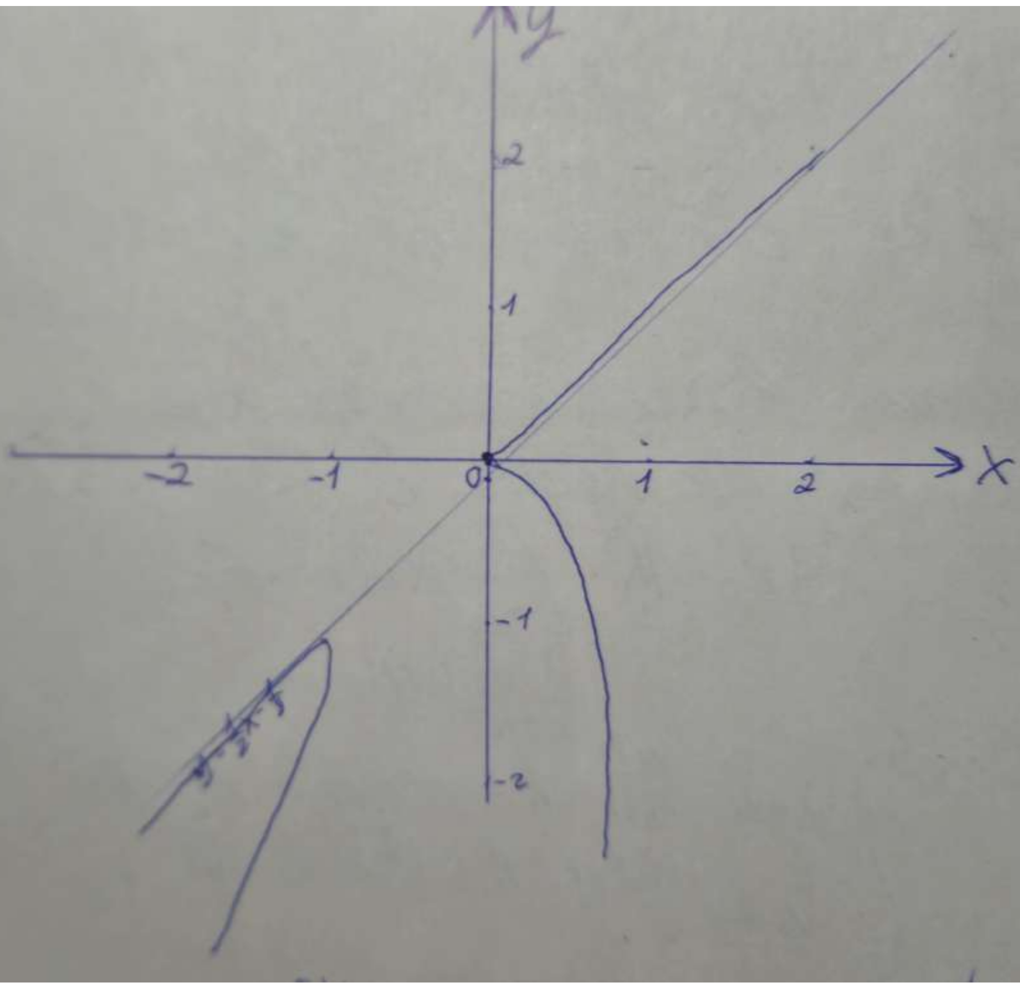
$x'(t)$: $-$ 0 $+$ $\frac{1}{2}$ $+$ 1 $-$

$y'(t) = \frac{-4t^3 + 3t^2}{(2t-1)^2} = \frac{-t^2(4t-3)}{(2t-1)^2}$

$y'(t)$: $+$ 0 $+$ $\frac{1}{2}$ $+$ $\frac{3}{4}$ $-$

$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-2t(t-1)}{(2t-1)^2} \cdot \frac{(2t-1)^2}{-t^2(4t-3)} = \frac{t(4t-3)}{2(t-1)}$

y'_x: $-$ 0 $+$ $\frac{3}{4}$ $-$ 1 $+$



y
2
1
-1
-2
x
-2
-1
0
1
2

б) $y=\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. Заметим, что ф-ция чётная.

$-1\le\frac{1-x^2}{1+x^2}\le1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1-x^2}{1+x^2}\ge-1 \mid\cdot(1+x^2)>0\\ \frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1 \mid\cdot(1+x^2)>0\end{cases}$ $\begin{cases}1-x^2\ge-1-x^2\\ 1-x^2\le1+x^2\end{cases}$

верно всегда.

$D(y)=\mathbb{R}$; при $x=\pm1$ $y=0$

$\frac{1-x^2}{1+x^2}=t$; $1-x^2=t+tx^2 \Leftrightarrow x^2(t+1)+t-1=0$

При $t=-1$ р-во неверно.

$D_t = 4(t+1)\ge0$

$t\ge-1.$

$\frac{1-x^2}{1+x^2}=1-\frac{2x^2}{1+x^2}$, значит $t\le1$.

~~$E(y)=[-\pi;\pi]$~~, $t\in[-1;1]$, значит $E(y)=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Ф-ция непрерывна на своей области определения.

Найдём асимптоты в виде $y=kx+b$.

$b=\lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ — горизонтальная асимптота

~~$\lim_{x\to\infty}\left(\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\frac{\pi}{2}x\right)$~~

$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin(-1)}{x}=\infty$, значит

$y=-\frac{\pi}{2}$ — единственная асимптота.

$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-(\ldots)^2}}\cdot\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=$

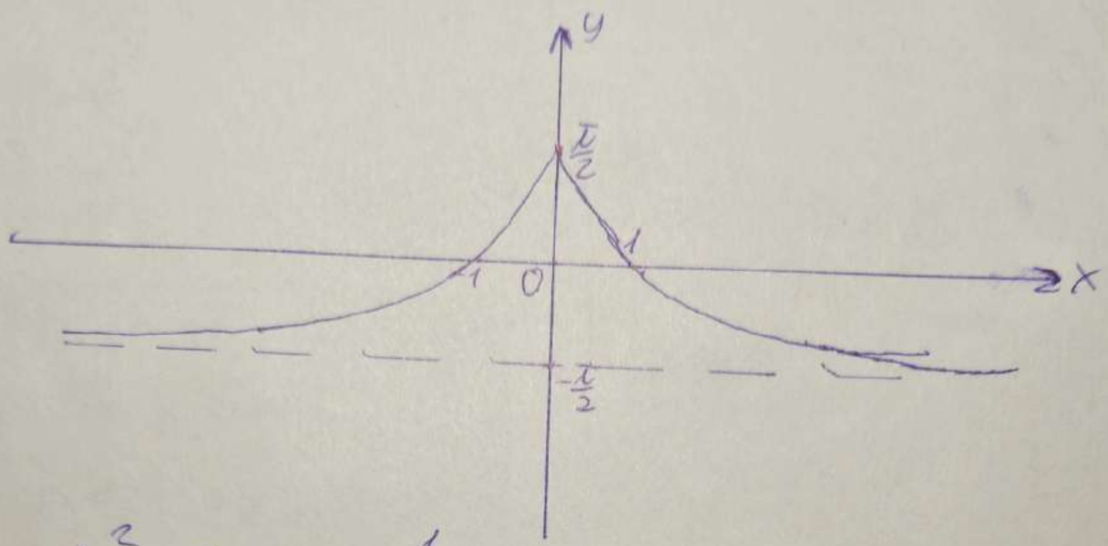
$=-\frac{4x}{\sqrt{\frac{2x^2+2x^2}{(1+x^2)^2}}(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{2|x|(1+x^2)}=-\frac{2x}{|x|(1+x^2)}$

0 — единств. корень производной. При $x\ge0$ ф-ция ↓, при $x<0$ ф-ция ↑. $x=0$ — точка max ф-ции.

Если $x\ge0$, то $y'=-\frac{2}{1+x^2}$ и $y''=\frac{4x}{(1+x^2)^2}\ge0$,

а при $x<0$ $y''=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}>0$, т.е. (·) перегиба нет.

Т.к. ф-ция чётная, то ~~[зачёркнуто]~~ график симм. относительно Oy.



в) $y = \frac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}}$. $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ф-ция общего вида, при $x=1$ $y=0$ и $x=-3$.

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2+2x-3}{x} + e^{\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}(-x^2-2x+3) + x \cdot e^{\frac{1}{x}}(x^2+3)}{x^3} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x^3+3x-x^2-2x+3)}{x^3} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}(x^3-x^2+x+3)}{x^3} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x+1)(x^2-2x+3)}{x^3}$$

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad x$

$x=-1$ – (·) локально max, при $x=-1$ $y = \frac{4}{e}$

Найдём асимптоты в виде $y = kx + b$

Т.к. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}} = -\infty$, то $x=0$ – верт. асимптота.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = 1 = k.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\left(x+2-\frac{3}{x}\right) - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) + \lim_{x\to\infty} 2e^{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1+2-0 = 3 = b.$$

$y = x+3$ и $\cancel{y}\, x = 0$ – единств. асимптоты.

$$\cancel{y'' = \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{3}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1+x}{x^3} - \frac{1+2x}{x^4} - \frac{1+3x}{x^5}\right)}$$

$$y'' = \left(e^{\frac1x}\left(1-\frac1x+\frac1{x^2}+\frac3{x^3}\right)\right)' = -\frac{e^{\frac1x}}{x^2}\left(1-\frac1{x}+\frac1{x^2}+\frac3{x^3}\right)+$$

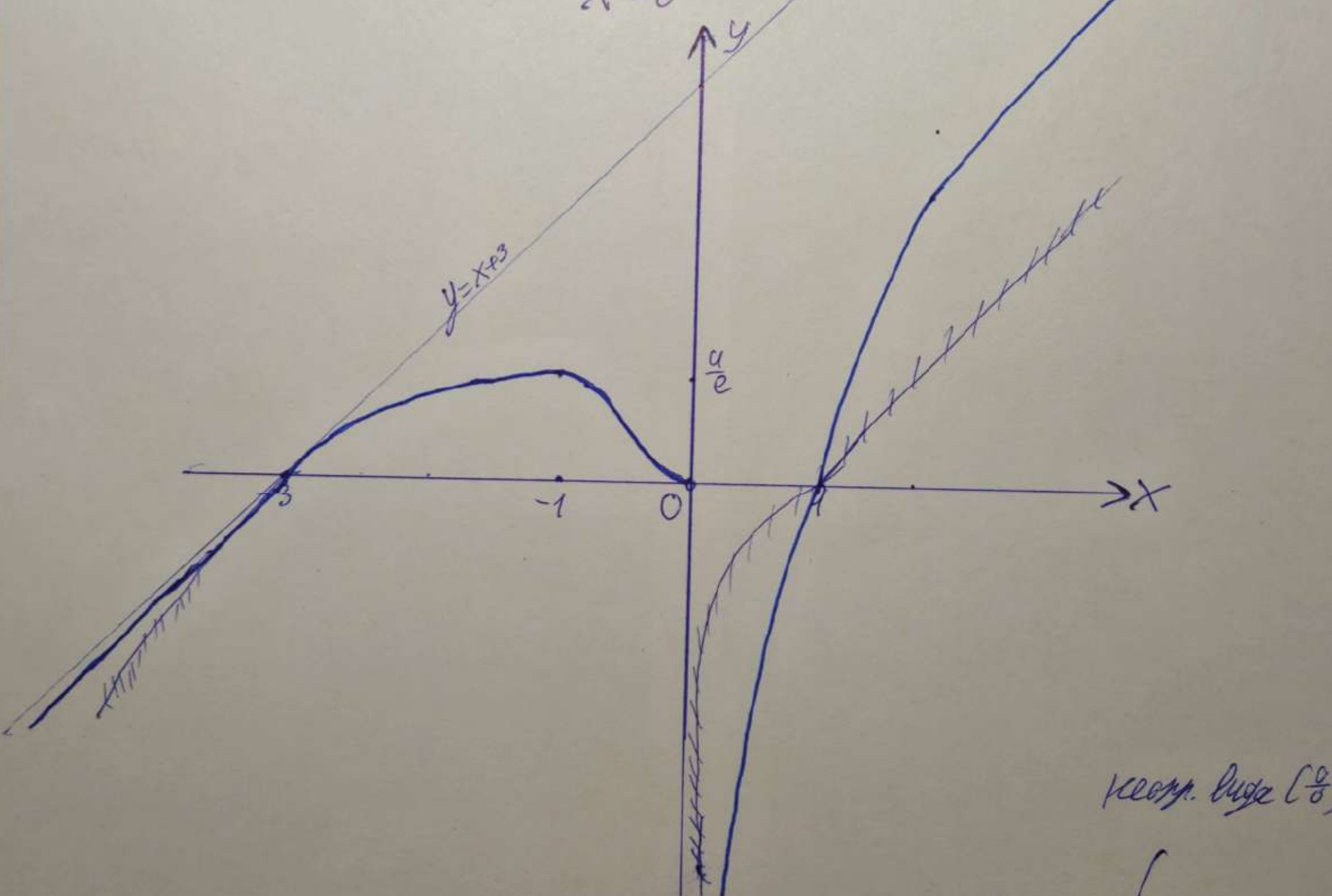
$$+e^{\frac1x}\left(\frac1{x^2}-\frac2{x^3}-\frac9{x^4}\right) = -e^{\frac1x}\left(\frac1{x^2}-\frac1{x^3}+\frac1{x^4}+\frac3{x^5}\right)+$$

$$+e^{\frac1x}\left(\frac1{x^2}-\frac2{x^3}-\frac9{x^4}\right) = -e^{\frac1x}\left(+\frac1{x^3}+\frac{10}{x^4}+\frac3{x^5}\right)=$$

$$=-e^{\frac1x}\left(\frac{x^2+10x+3}{x^5}\right) = -e^{\frac1x}\cdot\frac{(x-(-5-\sqrt{22}))(x-(\sqrt{22}-5))}{x^5}$$

$+ \quad -5-\sqrt{22} \quad - \quad \sqrt{22}-5 \quad + \quad 0 \quad - \quad y''$

$x=-5\pm\sqrt{22}$ и $x=0$ – точки перегиба.

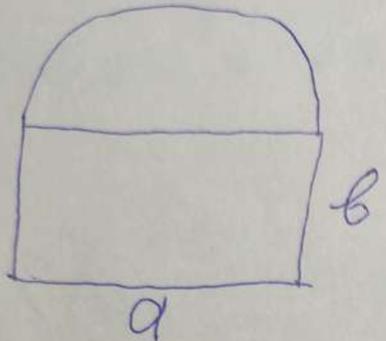


неопр. вида $\left(\frac00\right)$

$$\lim_{x\to0-}\left(\frac{x^2+2x-3}{x}e^{\frac1x}\right) = -3\lim_{x\to0-}\frac{e^{\frac1x}}{x} = -3\lim_{x\to0-}\frac{\left(e^{\frac1x}\right)'}{x'} =$$

$$=-3\lim_{x\to0-}-\frac1{x^2}e^{\frac1x} = 3\lim_{x\to0-}\frac{e^{\frac1x}}{x^2} = 0-$$ т.к. показ. функция растёт быстрее степенной ф-ции.

16



Пусть стороны п/у — а и в, тогда радиус окр. — $\frac{a}{2}$, значит

$$P = 2b + a + \frac{2\pi \cdot \frac{a}{2}}{2} = 2b + a + \frac{\pi a}{2}$$

$$S_{окна} = ab + \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = ab + \frac{\pi a^2}{8}$$

$$P - a - \frac{\pi a}{2} = 2b; \quad b = \frac{P}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\pi a}{4}$$

$$S = a\left(\frac{P}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\pi a}{4}\right) + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{aP}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{8} =$$

$$= \frac{aP}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = a^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{aP}{2}$$

$S = f(a) = a^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{aP}{2}$ — парабола с ветвями вниз, значит максимум S в вершине

$$a_0 = \frac{-\frac{P}{2}}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2} = \frac{P/2}{1 + \frac{\pi}{4}} = \frac{2P}{4 + \pi}, \text{ значит}$$

$$b_0 = \frac{P}{2} - \frac{P}{4 + \pi} - \frac{\pi P}{8 + 2\pi}$$

Максимум достигается при $a = a_0$ и $b = b_0$.

№7 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)+ch\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-1}{sh\,x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

Формула Маклорена для гиперболического косинуса:

$$ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$ch\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{9\cdot 24}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{216}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

Для гипер. синуса:

$$sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Для логарифма:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Для бинома:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot x^4+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^6+o(x^3)=$$

$(|x^2|<1$ при $x\to 0)$

$$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+o(x^3)=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

$$x+\sqrt{(1+x^2)}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(1+\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)\right)=$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)^3=$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3).$$

Знаменатель равен $sh\,x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-$

$-x-\frac{1}{3}x^3-o(x^3)=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

Для синуса:

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$; $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{o(x^3)}{x}=$

$=1-\left(\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right)$

$\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right)\right)=$

$=-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right)^3+o(x^3)=-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)$

Для синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5); \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

Числитель равен:

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - 1 = -\frac{x^2}{6} + o(x^3) + 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) - 1 =$$

$$= o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - 1}{\operatorname{sh} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 0.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\arcsin x^3}}$

По формуле Маклорена для бинома:

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{2x}{1-x}=1+2x(1-x)^{-1}\underset{(|x|<1 \text{ при } x\to 0)}{=}$$

$$=1+2x\left(1+(-x)(-1)+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}(-x)^2+o(x^2)\right)=$$

$$=1+2x(1+x+x^2+o(x^2))=1+2x+2x^2+2x^3+o(x^3)$$

$$\ln(1+(2x+2x^2+2x^3+o(x^3)))=2x+2x^2+2x^3+o(x^3)-$$

$$-\frac{1}{2}(2x+2x^2+2x^3+o(x^3))^2+\frac{1}{3}(2x+2x^2+2x^3+o(x^3))^3=$$

$$=2x+2x^2+2x^3+o(x^3)-\frac{1}{2}\cdot 4x^2+\frac{1}{3}\cdot 8x^3=2x+\frac{14}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$1+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg}x=1+x+\frac{7}{3}x^3+o(x^3)-x+\frac{x^3}{3}=1+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\arcsin x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{\ln(1+\frac{8}{3}x^3+o(x^3))}{\arcsin x^3}\right)}=$$

$$=e^{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{8}{3}x^3+o(x^3))}{\arcsin x^3}\right)}=e^{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{8}{3}x^3+o(x^3))}{x^3}\right)}=$$

$$=e^{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{8}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}\right)}=e^{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{8}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1}\right)}=e^{\frac{8}{3}}$$