Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Образовательная программа системное и прикладное программное обеспечение

Лабораторная работа №1
По дисциплине "Математический анализ"
Вариант 26

Выполнил студент группы P3109
Евграфов Артём Андреевич (ISU: 465826)

Санкт-Петербург 2024

Изначально в варианте 26 мне была дана функция $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{x}$, однако она не имеет действительных корней. Докажем это.
$D(f(x)) = (-1;1)$, заметим, что $f(x) = -f(-x)$, так как $f(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{x} = \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right) - \frac{1}{x} = -(\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{x}) = -f(x)$, те $f(x)$ - нечётная ф-ция. Рассмотрим $x \in (0;1)$.
Найдем производную функции:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{x}$$

Воспользуемся правилом дифференцирования. Производная суммы равна сумме производных:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]$$

Для первой части:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Подставляем:

$$\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)}{(1+x)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

Для второй части:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x^2}$$

Итак, производная:

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)}.$$

Заметим, что при заданных x знаменатель производной строго больше 0, а чиститель равен 0 при $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, причём при $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$: $f'(x) < 0$, а при $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$: $f'(x) > 0$, значит $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ - точка минимума функции при x из интервала $(0;1)$, значит $\forall x \in D(f(x))\ |f(x)| \geq f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \ln(2+\sqrt{3}) + \sqrt{3} > 0$. Это доказывает, что действительных корней нет.
Вследствие того, что у предложенной для 26 варианта функции нет действительных корней, в дальнейшем я буду рассматривать функцию из 9 варианта.

Рассмотрим $f(x) = x^3 - 3x - 2e^{-x}$. $D(f(x)) = \mathbb{R}$

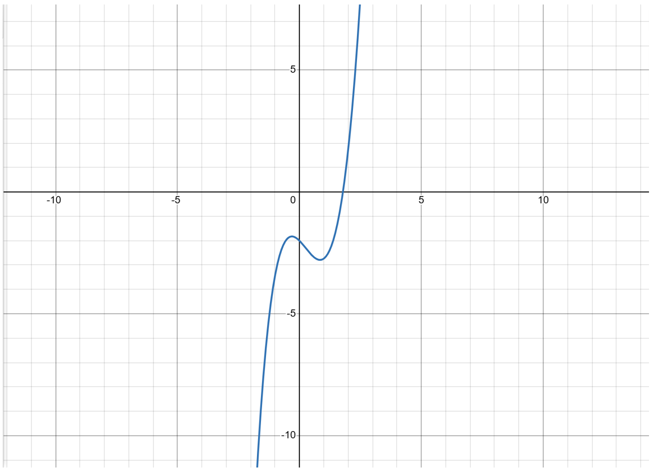

Рис. 1: График $y = f(x)$

График функции пересекает ось Ox между $x = 1$ и $x = 2$.
Проверим удовлетворение условий теоремы Больцано-Коши:
$f(1) = 1 - 3 - 2e^{-1} \approx -2.73576$;
$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 2e^{-2} \approx 1.72933$;
$f(1)f(2) < 0$, значит $\exists c : f(c) = 0$.
Программа на языке программирования Python, которая позволяет находить корень с точностью 10^{-17}:

```python
from math import *
from decimal import *

def f(x):
    x = Decimal(str(x))
    return x ** Decimal("3") - Decimal("3") * x - Decimal("2") * Decimal(str(pow((e), (-x))))

def bisect(l, r, eps):
    mid = (l + r) / 2
    while (abs(f(mid)) > eps):
        if (f(mid) > 0):
            r = mid
        else:
            l = mid
        mid = (l + r) / 2
    return (r + l) / 2


print(bisect(Decimal(1), Decimal(2),
             Decimal(str(10 ** (-17)))))
```

Программа выводит результат: 1.785461454619108521285619772;
Результат, выводимый WolframAlpha: 1.7854614546191085212856197729641833657 6.

Вывод:
В ходе лабораторной работы я научился приблизительно находить корни уравнения $f(x) = 0$, используя метод бисекций.