

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Образовательная программа системное и прикладное программное  
обеспечение

Лабораторная работа №1  
По дисциплине "Математический анализ"  
Вариант 26

Выполнил студент группы Р3109  
Евграфов Артём Андреевич (ISU: 465826)

Санкт-Петербург 2024

Изначально в варианте 26 мне была дана функция  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{x}$ , однако она не имеет действительных корней. Докажем это.

$D(f(x)) = (-1; 1)$ , заметим, что  $f(x) = -f(-x)$ , так как  $f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{x} = \ln \left( \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} \right) - \frac{1}{x} = -\left( \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{x} \right) = -f(x)$ , т.е.  $f(x)$  - нечётная ф-ция. Рассмотрим  $x \in (0; 1)$ .

Найдем производную функции:

$$f(x) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{x}$$

Воспользуемся правилом дифференцирования. Производная суммы равна сумме производных:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right] + \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \right]$$

Для первой части:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right] &= \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{d}{dx} \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] \\ \frac{d}{dx} \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] &= \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Подставляем:

$$\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)}{(1+x)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

Для второй части:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \right] = -\frac{1}{x^2}$$

Итак, производная:

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2 - 1}{x^2(1-x^2)}.$$

Заметим, что при заданных  $x$  знаменатель производной строго больше 0, а числитель равен 0 при  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , причём при  $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$  :  $f'(x) < 0$ , а при  $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$  :  $f'(x) > 0$ , значит  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  - точка минимума функции при  $x$  из интервала  $(0; 1)$ , значит  $\forall x \in D(f(x)) \mid f(x) \geq f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} > 0$ . Это доказывает, что действительных корней нет.

Вследствие того, что у предложенной для 26 варианта функции нет действительных корней, в дальнейшем я буду рассматривать функцию из 9 варианта.

Рассмотрим  $f(x) = x^3 - 3x - 2e^{-x}$ .  $D(f(x)) = \mathbb{R}$

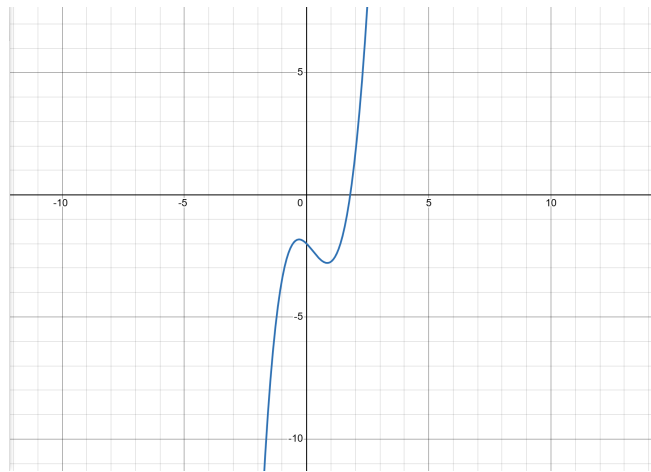


Рис. 1: График  $y = f(x)$

График функции пересекает ось  $Ox$  между  $x = 1$  и  $x = 2$ .

Проверим удовлетворение условий теоремы Больцано-Коши:

$$f(1) = 1 - 3 - 2e^{-1} \approx -2.73576;$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 2e^{-2} \approx 1.72933;$$

$$f(1)f(2) < 0, \text{ значит } \exists c : f(c) = 0.$$

Программа на языке программирования Python, которая позволяет находить корень с точностью  $10^{-17}$ :

```
1 from math import *
2 from decimal import *
3
4 def f(x):
5     x = Decimal(str(x))
6     return x ** Decimal("3") - Decimal("3") * x - Decimal("2"
7         ) * Decimal(str(pow((e), (-x))))
8
9 def bisect(l, r, eps):
10     mid = (l + r) / 2
11     while (abs(f(mid)) > eps):
12         if (f(mid) > 0):
13             r = mid
14         else:
15             l = mid
16         mid = (l + r) / 2
17     return (r + l) / 2
18
19 print(bisect(Decimal(1), Decimal(2),
20     Decimal(str(10 ** (-17)))))
```

Программа выводит результат: 1.785461454619108521285619772

Результат, выводимый WolframAlpha: 1.78546145461910852128561977296418336576