1) а) $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2},\ x\neq 1$

База индукции:

$n=1$: $x=\frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^2}=\frac{x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2}=x$ – верно.

$\exists$ утв. верно для n и всех нат. чисел $\leq n$. Д-жем, что оно верно и для $(n+1)$:

$x+2x^2+\ldots+nx^n+(n+1)x^{n+1}=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}+(n+1)x^{n+1}=$

$=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)(x-1)^2x^{n+1}}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+2}-nx^{n+1}-x^{n+1}+x+(n+1)(x^2-2x+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}=$

$=\frac{nx^{n+2}-nx^{n+1}-x^{n+1}+x+(n+1)(x^{n+3}-2x^{n+2}+x^{n+1})}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+2}-nx^{n+1}-x^{n+1}+x+nx^{n+3}-2nx^{n+2}+nx^{n+1}+x^{n+3}-2x^{n+2}+x^{n+1}}{(x-1)^2}=\frac{(n+1)x^{n+3}-(n+2)x^{n+2}+x}{(x-1)^2}$ – верно.

Согласно принципу мат. индукции, утв. верно, чтд.

б) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$ при $n\geq 3$.

База индукции $(n=3)$: $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{9}{20}+\frac{1}{6}=\frac{74}{120}=\frac{37}{60}>$

$>\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$ – верно.

$\exists$ утв. верно для n и всех нат. ч. $\leq n$. Д-жем для $(n+1)$:

$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n+2}>\frac{3}{5}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}>\frac{3}{5}$, т.к. $\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)>0$.

Согласно принципу мат. индукции, утв. верно, чтд.

1*) $(n!)^2>n^n$, $n\geq 3$.

База для $n=3$: $6^2>27$ – верно. $\exists$ утв. верно для всех нат. ч. $\leq n$. Д-жем для $(n+1)$:

$((n+1)!)^2>(n+1)^{(n+1)}\Leftrightarrow(n!)^2(n+1)^2>(n+1)^{n-1}(n+1)^2\overset{\text{т.к. } n+1>0}{\Leftrightarrow}(n!)^2>(n+1)^{n-1}$.

если $n^n>(n+1)^{n-1}$, то утв. для $(n+1)$ верно, т.к. по ИП $(n!)^2>n^n$.

$n^n>(n+1)^{n-1}\Leftrightarrow 3n^n>3(n+1)^{n-1}$. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e<3$, то

$(n+1)^n<3n^n$, значит $3n^n>(n+1)^n=(n+1)(n+1)^{n-1}>3(n+1)^{n-1}$, т.к.

$n+1\geq 4$, значит утв. для $(n+1)$ верно и утв. доказано по методу мат. индукции.

② $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}C_n^n =$

$= \frac{n!}{2!(n-1)!} - \frac{n!}{3!(n-2)!} + \frac{n!}{4!(n-3)!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} =$

$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{4!(n-3)!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)}\frac{(n+1)!}{0!\,n!}\right) =$

$= \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 - \ldots + (-1)^{n-1}C_{n+1}^{n+1}\right) =$

$= \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + \ldots + (-1)^{n-1}C_{n+1}^{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1\right) =$

$= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i \cdot (-1)^i = (1-1)^{n+1} = 0$

$= \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 - C_{n+1}^0\right) = \frac{1}{n+1}(n+1-1) = \frac{n}{n+1}.$

Ответ: $\frac{n}{n+1}$.

$2^*)$ $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots - ?$

$\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} = (a+b)^n$

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \quad (1)$

$(1+i)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot i - C_n^2 - C_n^3 i + \ldots \quad (2)$

$(1-i)^n = C_n^0 - C_n^1 i - C_n^2 + C_n^3 \cdot i - \ldots \quad (3)$

$(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n \quad (4)$

$(2)-(3) = 2iC_n^1 - 2iC_n^3 + 2iC_n^5 - 2iC_n^7 + \ldots = (1+i)^n - (1-i)^n$

зависит от остатка n по mod 4.

$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots (\pm 1)C_n^n \quad | + (1)$

$2^n + \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = C_n^0 + 2C_n^1 + C_n^2 + C_n^4 + 2C_n^5 + \ldots =$

$= 3C_n^1 + C_n^3 + 3C_n^5 + C_n^7 + \ldots$ – по утв. (4).

$2^n + \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} + \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = 2^n + \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 4(C_n^1 + C_n^5 + \ldots)$

$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = 2^{n-2} + \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{4i} = 2^{n-2} + \frac{(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4} - \left(\cos\frac{\pi n}{4} - i\sin\frac{\pi n}{4}\right)\right)}{4i} = 2^{n-2} + \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot 2i\sin\frac{\pi n}{4}}{4i} = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}\sin\frac{\pi n}{4} =$

$= 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

Ответ: $2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

3) 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+3}{2n+1} = \frac{7}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>N(\varepsilon)\ |x_n-A|<\varepsilon$

$\left|\frac{7n+3}{2n+1} - \frac{7}{2}\right| < \varepsilon$

$\frac{7n+3}{2n+1} - \frac{7}{2} = \frac{14n+6-7(2n+1)}{4n+2} = \frac{-1}{4n+2} < 0$ при $n\in\mathbb{N}$.

$\left|\frac{7n+3}{2n+1} - \frac{7}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} > -\varepsilon \Leftrightarrow 1 > -\varepsilon(4n+2) \,\Big|\cdot\left(\frac{1}{-\varepsilon}\right) < 0$

$\frac{1}{-\varepsilon} < 4n+2 \Leftrightarrow \frac{1+2\varepsilon}{-\varepsilon} < 4n \Leftrightarrow \frac{1+2\varepsilon}{-4\varepsilon} < n$, т.е. (т.к. $\varepsilon>0$, $1+2\varepsilon>0$, $-4\varepsilon<0$).

$N(\varepsilon) = \left[\left|\frac{1+2\varepsilon}{-4\varepsilon}\right|\right] = \left[\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$ и при $\forall n>N(\varepsilon)$ $|x_n-A|<\varepsilon$ выполняется.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3-n\ln n) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>N(\varepsilon)$ $x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$

$3-n\ln n < -\frac{1}{\varepsilon}$

$\Updownarrow$

$n\ln n > 3+\frac{1}{\varepsilon} \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \ln n^n > 3+\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow e^{\ln n}\cdot\ln n > 3+\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\ln n > W\left(3+\frac{1}{\varepsilon}\right)$, где $W(x)$ - ламберт ф-ция, т.е. ф-ция, обратная $f(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

$\Updownarrow$

$n > e^{W(3+\frac{1}{\varepsilon})}$, тогда $N(\varepsilon) = \left[e^{W(3+\frac{1}{\varepsilon})}\right]$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n - n^2) = -\infty$

$\ln n - n^2 < -\frac{1}{\varepsilon}$; т.к. $n > \ln n$ при $n\in\mathbb{N}$, то $\ln n - n^2 < n - n^2$, т.е. если $n-n^2 < -\frac{1}{\varepsilon}$, то $\ln n - n^2 < -\frac{1}{\varepsilon}$.

$n-n^2 < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 - n - \frac{1}{\varepsilon} > 0$. При $n>\frac{1}{\varepsilon}$ $n^2 - n - \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$, т.е.

$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

(4) 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt[4]{16n^4+4n^2}+n\sqrt[3]{8n^3-7n^2+5}}{\sqrt[3]{n^3+3n+4}+3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}+2n^2\sqrt[3]{1-\frac{7}{8n}+\frac{5}{8n^3}}}{n\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}+5n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}+2\sqrt{1-\frac{7}{8n}+\frac{5}{8n^3}}}{\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}}{n}+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6\cdot 1+2\cdot 1}{0+5} = \frac{8}{5}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^2-4n}{n^2+7}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+7+n^2-4n-7}{n^2+7}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2-4n-7}{n^2+7}\right)^{\frac{1}{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{4}{n}-\frac{7}{n^2}}{1+\frac{7}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, т.к. $\alpha_n>0,\ A>0,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}-6n^4}{n^6-25^{n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}-6n^4}{n^6-5^{2n+6}} = -\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}-6n^4}{5^{2n+6}-n^6} =$

$= -\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-\frac{6n^4}{5^{2n}}}{5^6-\frac{n^6}{5^{2n}}} = -\frac{5}{5^6} = -\frac{1}{3125}$

т.к. показательная растёт быстрее степенной.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+5n^2-3}+\sqrt[3]{1-n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+5n^2-3+1-n^3}{\underbrace{(n^3+5n^2-3)^{\frac{2}{3}}+((n^3+5n^2-3)(1-n^3))+(1-n^3)^{\frac{2}{3}}}_{\neq 0}}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5-\frac{2}{n^2}}{(1+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^3})^{\frac{2}{3}}+((1+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^3})(1-\frac{1}{n^3}))^{\frac{1}{3}}+(\frac{1}{n^3}-1)^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{5}{3}.$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^{2n+1}-7n!}{3n!-6^{n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{7^{2n+1}}{n!}-7}{3-\frac{6^{n+3}}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}-\frac{7}{3} = -\frac{7}{3}.$

т.к. факториал

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+11}{9n-13}\right)^{5n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4+\frac{11}{n}}{9-\frac{13}{n}}\right)^{5n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{5n-3} = 0.$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-4}{5n+8}\right)^{5n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-12}{5n+8}\right)^{\frac{5n+8}{-12}}\right)^{\frac{-12(5n-3)}{5n+8}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{-60n+36}{5n+8}} = e^{-12}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{3}-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{3}-1)(2\sqrt[n]{3}+1)}{\sqrt[n]{3}-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{3}+1) = 2+1 = 3$

10) Заметим, что сумма пентагональных чисел $1+4+\ldots+(3n+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$. Д-ем по индукции:

База для $n=0$ очевидна.

$n \to n+1$:

$1+\ldots+3n+1+3n+4 = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} + 3n+4 = \frac{3n^2+5n+2+6n+8}{2} = \frac{3n^2+11n+10}{2} = \frac{(n+2)(3n+5)}{2}$, ч.т.д.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\ldots+(3n+1)}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+2}{6n^2+10} = \frac{1}{2}$$

9) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^4-2n^2-4n}{n^2+7}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\,\frac{n^2-2-\frac{4}{n}}{n^2+7}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{1+\frac{7}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

5) $\sup x_n$; $\inf x_n$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ - ?

$x_n = \operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{2n+3}{n+2}$

$x_{2k+1} = 0$; $x_{2k} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{4k+3}{2k+2} = \frac{\pi}{4}\left(2+\frac{-1}{2k+2}\right) \le \frac{\pi}{2}$ - убывающая,

$\sup x_n = \frac{\pi}{2}$; $\inf x_n = 0$.

↑очевидно.

т.к. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X_{2k}$: $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < x$ - легко выразить ε.

Д-ем, что других пределов нет.

Если из X_{2k} добавить конечное кол-во членов в X_{2k+1} (или наоборот), то предел не изменится.

Если взять послед. с ∞ членами из X_{2k} и ∞ из X_{2k+1}, то у неё не будет предела, т.к. $\lim\limits_{k\to\infty} X_{2k} \ne \lim\limits_{k\to\infty} X_{2k+1}$.

(6) $X_n = X_{n-1} + (-1)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$X_{n+p} = X_{n+p-1} + (-1)^{n+p}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+p} = X_{n+p-2} + (-1)^{n+p-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+p-1} + (-1)^{n+p}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+p} =$

$= X_n + (-1)^{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + \ldots + (-1)^{n+p}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+p}$

$|X_{n+p} - X_n| = \left|X_n + (-1)^{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + \ldots + (-1)^{n+p}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+p} - X_n\right| =$

$= \left|(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + \ldots + (-1)^{n+p}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+p}\right| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+p} =$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\left(1 + \left(\frac{3}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^{p-1}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^p - 1}{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{5\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^p\right)}{2} \leq$

$\leq \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} < \frac{2\varepsilon}{5} \Leftrightarrow -(n+1) < \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{2\varepsilon}{5}\right)$

$n > \left[\left|\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{2\varepsilon}{5}\right)\right|\right].$

(7) $X_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{17} \cdot \ldots \cdot \frac{3n-2}{5n+2}$

$X_n = X_{n-1} \cdot \frac{3n-2}{5n+2}$; $\frac{X_n}{X_{n+1}} = \frac{X_n}{X_n \frac{3n-2}{5n+7}} = \frac{5n+7}{3n-2} > 1$, т. е.

$X_n > X_{n+1}$ и X_n - убывающая последовательность, причём $X_n > 0$. По т. Вейерштрасса она сходится, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} X_n = A$, тогда:

$A = A \cdot \frac{3n-2}{5n+2}$, т. е. $A = 0$.