Университет ИТМО

Численное интегрирование

Евграфов Артём, 465826, Р3109

Вариант 18

Санкт-Петербург 2025

Вычислить приближённо интеграл с погрешностью $\epsilon = 0,00001$ методами: прямоугольников, трапеций, Симпсона.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$$

Метод прямоугольников

$f'(x) = \cot x$ - производная непрерывна на отрезке, можно воспользоваться оценкой погрешности: $|\Delta| \le \dfrac{(b-a)}{4} h \sup\limits_{x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]} |f'(x)|$.

$\sup\limits_{x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]} |f'(x)| = f'(\dfrac{\pi}{4}) = 1$, так как $f'(x)$ - убывающая функция на отрезке.

$|\Delta| \le \frac{\pi}{16} h$, $\frac{16|\Delta|}{\pi} \le h$, значит, чтобы получить погрешность меньше 0,00001, нужно выбрать такой h $h \le \frac{16 \cdot 0.00001}{\pi} \approx 0.000050929$. Пусть $h = 0.00005$, так как $h = \frac{b-a}{n}$, то $n \approx 15708$.

Пусть $x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) h$, где $0 \le i \le n-1$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(\sin\left(x_i\right)\right) \approx -0.08641372538311086$$

```python
from math import pi, log, sin

a = pi / 4
b = pi / 2
h = 0.00005
n = int((b - a) / h)
s = 0

for i in range(n):
    xi = a + (i + 0.5) * h
    s += log(sin(xi))

result = s * h
print(result)
```

Метод трапеций

Пусть $x_i = ih$, где $0 \le i \le n$, тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx h \left(\frac{1}{2} \left(f(x_0) + f(x_n)\right) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right)$ - формула трапеций.

$|\Delta| \le \dfrac{(b-a)}{4} h \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$. Аналогично методу прямоугольников, пусть $h = 0,00005$ и $n = 15708$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(x\right)\right) \approx h \left(\frac{1}{2} \left(\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(\sin\left(x_i\right)\right) \right) \approx -0.08641372569556682$$

```python
from math import pi, log, sin

a = pi / 4
b = pi / 2
h = 0.00005
n = int((b - a) / h)
s = 0.5 * (log(sin(a)) + log(sin(b)))

for i in range(1, n):
    xi = a + i * h
    s += log(sin(xi))

result = s * h
print(result)
```

Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1})\right),$$

При $n = 2m$.
$|\Delta| \le \dfrac{5}{18}(b-a)h \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$,
$|\Delta| \le \frac{5\pi h}{72}$,
$\frac{72|\Delta|}{5\pi} \le h$. Для минимизации погрешности выберем $h \le \frac{72\cdot 0.00001}{5\pi} \approx 0.0000458366$.
Пусть опять $h = 0.00005,\ h = \frac{b-a}{n} \approx 15708,\ m = 7854$.
Пусть $x_i = ih$, где $0 \le i \le n$.
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln((\sin(x)))\,dx \approx \frac{h}{3}\left(\ln(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)) + \ln(\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)) + 2\sum_{i=1}^{m-1} \ln((\sin(x_{2i}))) + 4\sum_{i=1}^{m} \ln((\sin(x_{2i-1})))\right) \approx$$
-0.0864137254870533.

```python
from math import pi, log, sin

a = pi / 4
b = pi / 2
h = 0.00005
n = int((b - a) / h)
s = log(sin(a)) + log(sin(b))

for i in range(1, n // 2):
    xi = a + 2 * i * h
    s += 2 * log(sin(xi))

for i in range(1, n // 2 + 1):
    xi = a + (2 * i - 1) * h
    s += 4 * log(sin(xi))

result = h / 3 * s
print(result)
```

Вывод: точным значением интеграла является -0.08641372548729102...
Наиболее точным оказался метод Симпсона (погрешность $2.3772651 \cdot 10^{-13}$).