Университет ИТМО

ИДЗ матан

Евграфов Артём, 465826, P3109

1 часть - вариант 3

2 часть - вариант 9

3 часть - вариант 19

Санкт-Петербург 2025

Содержание

1. . . . . **2**

1.1. 2

1.1..1 2

1.1..2 2

1.2. 3

1.2..1 3

1.2..2 3

1.2..3 4

1.3. 5

2. . . . . **5**

2.1. 5

2.2. 5

3. . . . . **6**

1.

1.1.

1.1..1

С помощью интеграла Римана вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций
$y = ax^2e^x,\ y = -x^3e^x$

$ax^2 + y^3 = -x^2e^x$
$x = 0$ и $x = -a$ — единственные точки пересечения
Значит, площадь фигуры, ограниченной графиками функций, равна:

$$\int_{-a}^{0} ax^2e^x + x^3e^x\ dx\ = \int_{-a}^{0} ax^2e^x\ dx\ + \int_{-a}^{0} x^3e^x\ dx,$$

Вычислим отдельно каждый интеграл:

$$\int ax^2e^x\ dx = a\int x^2e^x\ dx = a(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) + C,$$

$$\int_{-a}^{0} ax^2e^xdx = 2a - a(a^2e^{-a} + 2ae^{-a} + 2e^{-a}),$$

$$\int x^3e^x\ dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C,$$

$$\int_{-a}^{0} x^3e^x\ dx = -6 - (-a^3e^{-a} - 3a^2e^{-a} - 6ae^{-a} - 6e^{-a}) + C.$$

$$\int_{-a}^{0} ax^2e^x + x^3e^x\ dx = 2a - a(a^2e^{-a} + 2ae^{-a} + 2e^{-a}) - 6 + a^3e^{-a} + 3a^2e^{-a} + 6ae^{-a} + 6e^{-a} =$$

$$= 2a - a^3e^{-a} - 2a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 6 + a^3e^{-a} + 3a^2e^{-a} + 6ae^{-a} + 6e^{-a} = 2a - 6 + e^{-a}(a^2 + 4a + 6),$$

Итого:

$$S = 2a - 6 + e^{-a}(a^2 + 4a + 6).$$

1.1..2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций.
$y = ax^2e^x,\ y = -x^3e^x$
приближённо с помощью интегральных сумм. Сравнить результаты точного и численного вычисления при n = 10, 100, 1000

Пусть $f(x) = ax^2e^x,\ g(x) = -x^3e^x$
Тогда $S \approx \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) - g(\xi_i))\Delta_i$, где $\Delta_i = \frac{a}{n}$ – длина отрезка разбиения, а $\xi_i = -a + \frac{i}{n}a = \frac{a(i-n)}{n}$ – выбранная на каждом отрезке точка, в которой берётся значение $f(\xi_i) - g(\xi_i)$.

$$S \approx \sum_{i=1}^{n}\left(a\left(\frac{a(i-n)}{n}\right)^2 e^{\frac{a(i-n)}{n}} + \left(\frac{a(i-n)}{n}\right)^3 e^{\frac{a(i-n)}{n}}\right)\frac{a}{n} = \frac{a^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{a(i-n)}{n}} i(i-n)^2.$$

```
from math import exp

def calculate_approximation(n, a=1):
    total = 0.0

    for i in range(1, n + 1):
        deg = a * (i - n) / n
        term = exp(deg) * i * ((i - n) ** 2)
        total += term

```

```python
    total *= (a ** 4) / (n ** 4)
    return total

result = calculate_approximation(int(input()))
print(f"Sum: {result}")
```

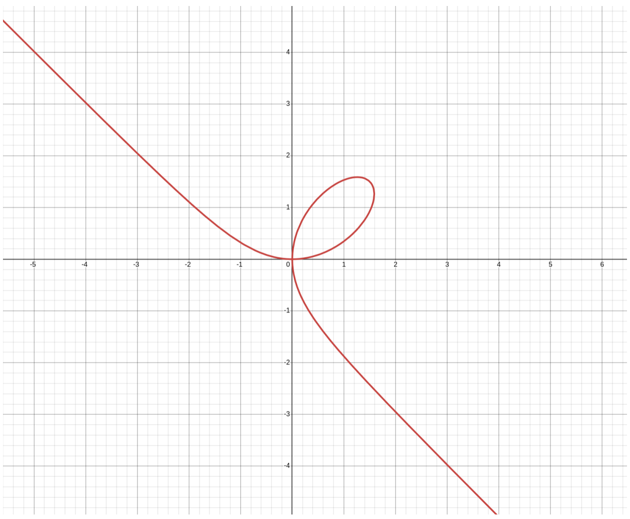
Приближённое значение при $n = 10,\ a = 1$: 0.04636546907481377
Приближённое значение при $n = 100,\ a = 1$: 0.04667078704186313
Приближённое значение при $n = 1000,\ a = 1$: 0.04667382222922722
Точное значение при $a = 1$: 0.046667385288586553

1.2.

1.2..1

Представить геометрическую интерпретацию листа Декарта: $x^3 + y^3 = 3axy$

График очевидно симметричен относительно $y = x$, так как если (x_0, y_0) - решение, то и (y_0, x_0) - тоже решение. При этом в 3-й четверти системы координат графика нет, так как тогда в левой части уравнения выражение < 0, а в правой > 0 (при $a > 0$, иначе петля будет в 3-й четверти, а в 1-й - ничего). Рассмотрим уравнение в полярных координатах, пусть $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$. Отсюда
$r^3(\cos^3\phi + \sin^3\phi) = 3ar^2\cos\phi\sin\phi$,
$r = \frac{3a\cos\phi\sin\phi}{\cos^3\phi+\sin^3\phi}$. Заметим, что при $\phi = 0$ и $\phi = \frac{\pi}{4}$ $r = 0$, значит, при этих значениях ϕ график дважды проходит через (0, 0), а значит, и образуется петля.



1.2..2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлёй листа Декарта, с помощью интеграла Римана.

$$r(\phi) = \frac{3a\cos\phi\sin\phi}{\cos^3\phi + \sin^3\phi} = \frac{3a\cos\phi\sin\phi}{(\cos\phi + \sin\phi)(1 - \cos\phi\sin\phi)} = \frac{\frac{3}{2}a\sin 2\phi}{(\cos\phi + \sin\phi)(1 - \frac{1}{2}\sin 2\phi)}.$$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)\,d\phi$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\phi)\,d\phi = \frac{9a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2\phi)}{(\cos\phi + \sin\phi)^2(1 - \frac{1}{2}\sin 2\phi)^2}\,d\phi = \frac{9a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2\phi)}{(1 + \sin 2\phi)(1 - \frac{1}{2}\sin 2\phi)^2}\,d\phi =$$

$$= \frac{9a^2}{8}\left(\frac{4}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin 2\phi + 1} + \frac{32}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin 2\phi + 2} + \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(\sin 2\phi - 2)^2}\right) ⊜$$

Вычислим каждый интеграл из суммы выше (сумму мы получили просто разложив на простейшие многочлены относительно $\sin 2\phi$):

$$\int \frac{d\phi}{\sin 2\phi + 1} = \int \frac{d\phi}{(\cos\phi + \sin\phi)^2} = \int \frac{d\phi}{\sin^2\phi\,(1+\cot\phi)^2} = -\int \frac{d(\cot\phi)}{(1+\cot\phi)^2} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \sin\phi} + C,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin 2\phi + 1} = 1.$$

$$\int \frac{d\phi}{\sin 2\phi - 2} \overset{2\phi = x}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x - 2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} - 2} = \frac{1}{4}\int \frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{-\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} - 1}\,d\phi \overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{-t^2+t-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C = -\frac{\arctan\frac{2\tan\phi - 1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin 2\phi - 2} = -\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{-2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(\sin 2\phi - 2)^2} = \frac{1}{6} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \text{ ну тут эту глину месить - себя не уважать}$$

$$⊜ \frac{9a^2}{8}\left(\frac{4}{9} - \frac{32}{9}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{a^2}{8}\left(4 - 32\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + 48\left(\frac{1}{6} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{12a^2}{8} = \frac{3a^2}{2}.$$

1.2..3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлёй листа Декарта, приближенно с помощью интегральных сумм. Сравнить результаты точного и численного вычислений при $n = 10,\ 100,\ 1000$.

Мы знаем, что $r(\phi) = \frac{3a\cos(\phi)\sin(\phi)}{\cos^3(\phi)+\sin^3(\phi)}$. Тогда

$$S \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta_i$$

где $\Delta_i = \frac{\pi}{2n}$ — длина отрезка разбиения, а $\xi_i = i\Delta_i = \frac{i\pi}{2n}$ — выбранная на каждом отрезке точка, в которой считается значение функции. Имеем:

$$S \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\phi)\Delta_i = \frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n} r^2(i\Delta_i) = \frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n} \frac{9a^2\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)}{\left(\cos^3\left(\frac{i\pi}{2n}\right) + \sin^3\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\right)^2}$$

```python
from math import pi, sin, cos

n = int(input())
a = 1
total_sum = 0.0

for i in range(1, n + 1):
    angle = i * pi / (2 * n)
    numerator = 9 * (a ** 2) * (cos(angle) ** 2) * (sin(angle) ** 2)
    total_sum += numerator / (cos(angle) ** 3 + sin(angle) ** 3) ** 2

result = total_sum * pi / (4 * n)

print(f"Approximeted S: {result:.15f}")
```

Приближённое значение при $n = 10,\ a = 1$: 1.500001004402789
Приближённое значение при $n = 100,\ a = 1$: 1.500000000001072
Приближённое значение при $n = 1000,\ a = 1$: 1.500000000000782
Точное значение при $a = 1$: 1.5

1.3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой:
$x = a\sin(2t),\ y = a\sin(t),\ a > 0$

$x = a\sin(2t)$ - синусоида вдоль 0y
$y = a\sin(t)$ - синусоида вдоль 0x с периодом в 2 раза меньше, чем у $x(t)$
$x'(t) = 2a\cos(2t),\ y(t) = a\cos(t)$. Достаточно рассмотреть функции на $[0,\pi]$. В этих точках кривая проходит через (0, 0), то есть самопересечение при $t = 0,\ t = \pi$.

$$\int_0^{\pi} y(t)d(x(t)) = \int_0^{\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{\pi} 2a^2\sin t\cdot\cos 2t\ dt = -2a^2\int_0^{\pi}\cos 2t\ d(\cos t) =$$

$$= -2a^2\int_0^{\pi}(2\cos^2 t - 1)\ d(\cos t) = -2a^2\left(\frac{2\cos^3\pi}{3} - \cos\pi\right) - \left(\frac{2\cos^3 0}{3} - \cos 0\right) = -2a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{-4a^2}{3}.$$

$$S = \left|\int_0^{x} y(t)d(x(t))\right| = \frac{4a^2}{3}.$$

2.

2.1.

Вычислить длину кривой, заданной параметрически или в полярных координатах:
$x = 6 - 3t^3,\ y = \frac{9(2t^2 - t^4)}{8},\ y \geq 0$

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$x'(t) = -9t^2,\ y'(t) = \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}t^3$
$y \geq 0,$ значит $2t^2 - t^4 \geq 0,\ t \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-9t^2)^2 + \left(\frac{9}{2}t - \frac{9}{2}t^3\right)^2}dt = \int_0^{2\pi}\frac{9t + 9t^3}{2}dt = \int_0^{2\pi}\frac{9t}{2}dt + \int_0^{2\pi}\frac{9t^3}{2}dt.$$

Так как $t \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ и кривая симметрична относительно оси ординат ($y(t)$ - чётная функция), то:

$$L = 2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{9t}{2}dt + 2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{9t^3}{2}dt = 9\int_0^{\sqrt{2}} t^3 + t\ dt = 9\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\right) = 9\cdot(1+1) = 18.$$

2.2.

$r = 1 + \cos t,\ \phi = t - \tan\frac{t}{2}$ от точки $A(2;0)$ до $B(r_0;\phi_0)$ при $r_0 = 1,\ \phi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Найдём значение t, при котором $r(t) = 2$ и $\phi(t) = 0$:
$r(t) = 2$ возможно только при $\cos t = 1$, значит $t = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при указанных t $\tan\frac{t}{2}$ принимает целые значения, а при $n \neq 0$ t принимает иррациональные значения. Значит, $t = 0$ - единственное решение, при котором кривая проходит через точку A.
Найдём значение t, при котором $r(t) = 1$ и $\phi(t) = \frac{\pi}{2}$:
$r(t) = 1$ может быть только при $\cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
Уравнение $\tan\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} = t$ при t вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$ имеет вид:

$$\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2},$$
$$\pm 1 + \frac{\pi}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2}$$

Уравнение очев не имеет решений при $n \in \mathbb{Z}$, значит кривая не проходит через точку $B\big(1;\frac{\pi}{2}\ \big)$. Раз функция не проходит через B, но проходит через A, будем интегрировать от 0 до t_0.

$$S = \int_0^{t_0}\sqrt{r^2(t)\left(\phi'(t)\right)^2 + \left(r'(t)\right)^2}dt = \int_0^{t_0}\sqrt{(1+\cos t)^2\cdot\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)^2 + \sin^2 t\ dt} =$$

$$= \int_0^{t_0} \sqrt{(1+\cos t)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\cos t}\right)^2 + \sin^2 t}\; dt = \int_0^{t_0} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\; dt = \int_0^{t_0} 1\; dt = t_0$$

3.

Исследовать несобственные интегралы на сходимость (в каждом варианте четыре интеграла). Если подынтегральная функция является знакопеременной, требуется исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимости.

а) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\, dx$,

б) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\cos\left(x^3 - x\right)\, dx$,

в) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(2-x^2\right)}}$,

г) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\, dx$.

а) Заметим, что при $x \geq 1$ подынтегральная функция не является знакопеременной. Исследуем интеграл на сходимость. Так как $\sin x \in [-1; 1]$, то:
$\displaystyle\frac{1}{x} \cdot \frac{x+\sin x}{x-\sin x} \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2+x} \geq 0$. Исследуем на сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x-1}{x^2+x}\, dx$.
$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x-1}{x^2+x}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{2}{x+1}\, dx \; - \; \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{e\to\infty} \left(2\ln(1+e) - \ln(e) - (2\ln(2) - \ln(1))\right) =$
$\displaystyle= \lim_{e\to\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{e}+1\right) + \ln(1+e) - 2\ln 2\right) \; = \; \infty$, то есть интеграл $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x-1}{x^2+x} dx$ расходится, а значит $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\, dx$ расходится.

б) Подынтегральная функция является знакопеременной. Очевидно, что $\displaystyle\int_0^{1} x\cos\left(x^3-x\right)\, dx$ сходится, причём абсолютно. Значит, сходимость исходного интеграла зависит от сходимости $\displaystyle\int_1^{\infty} x\cos\left(x^3-x\right)\, dx$.
$\displaystyle\int_1^{\infty} x|\cos\left(x^3-x\right)|\; dx \; = \; \int_1^{\infty} \frac{x}{3x^2-1}|\cos\left(x^3-x\right)|\; d\left(x^3-x\right) \; \sim \; \int_1^{\infty} \frac{1}{3x}|\cos\left(x^3-x\right)|\; d\left(x^3-x\right) \overset{t=x^3-x}{=}$
$\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{|\cos t|}{t^{\frac{1}{3}}}\; dt.$
Заметим, что $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{1}{3}}}\; dt$ очевидно сходится по признаку Дирихле. Теперь проверим интеграл на абсолютную сходимость:
$\displaystyle\left|\int\limits_{\pi n-\frac{\pi}{2}}^{2\pi n-\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x^{\frac{1}{3}}}\; dx\right| \geq \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{3}}} \int\limits_{\pi n-\frac{\pi}{2}}^{2\pi n-\frac{\pi}{2}} |\cos x|\; dx = \frac{n}{(2\pi n)^{\frac{1}{3}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\; dx = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}} n^{\frac{2}{3}}$. Последнее выражение не стремится к нулю с ростом n - противоречие с критерием Коши, значит исходный интеграл сходится условно.

в) Подыинтегральная функция не является знакопеременной на отрезке. При $x \in [1; \sqrt{2}]$ функция не существует, исследуем интеграл на сходимость при $x \in [\sqrt{2}; 2]$ (аналогично можно было взять $x \in [1; \sqrt{2}]$).
$(1-x^2)(2-x^2) = x^4 - x^2 + 2$ - функция возрастает при $x \geq \sqrt{2}$, а значит функция $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}$ монотонно убывает, причём $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}} = \infty$, а интеграл $\displaystyle\int_2^{\sqrt{2}} 1\; dx$ очевидно ограничен сверху, значит $\displaystyle\int_2^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}$ сходится по Дирихле, но тогда и исходный интеграл $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}$ сходится (знак на сходимость не влияет).

г) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\; dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{\infty} t\cos t\; d\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t}\; dt$ - этот интеграл сходится по признаку Дирихле (аналогично пункту б). Подынтегральная функция является знакопеременной, проверим интеграл на

абсолютную сходимость:
$\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x}\,dx \geq \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$. Первый интеграл, очевидно, расходится. Посмотрим на сходимость второго:
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{\sin 2x}{2x}\Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x^2}\,dx = -\frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$. Так как $\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, а $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$, а значит $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x}\,dx$ расходится. Исходный интеграл сходится только условно.