Университет ИТМО

Длина кривой Безье

Евграфов Артём, 465826, P3109

Вариант 15

Санкт-Петербург 2025

Протянуть оптоволоконный кабель от точки А до точки С, огибая точку К и используя наименьшее количество материала (длина кабеля минимальная). Для моделирования кабеля необходимо использовать единственную кривую Безье второго порядка на плоскости, проходящую через все три точки. В процессе решения нужно в явном виде использовать интегральную формулу вычисления длины кривой. Разрешается использовать любые программные пакеты для выполнения алгебраических операций и взятия интегралов, все вычисления следует привести в отчете с подробным описанием. В ответе должна присутствовать длина провода и координаты опорных точек кривой Безье. Также необходимо продемонстрировать результат графически. Кривая Безье второго порядка на плоскости имеет следующее уравнение:
$B(t) = (1-t^2)A + 2t(1-t)B + t^2C$ — опорные точки кривой. А(0, 0); С(10, 0); К(3, 1).

Пусть $B(x_0, y_0)$ — неизвестная опорная точка, найдём её координаты.
$x_K = (1-t_0)^2x_A + 2t_0(1-t_0)x_B + t_0^2x_C$
$y_K = (1-t_0)^2y_A + 2t_0(1-t_0)y_B + t_0^2y_C$

Подставим известные значения:
$3 = (1-t_0)^2 \cdot 0 + 2t_0(1-t_0)x_B + t_0^2 \cdot 10$
$x_B = \frac{3-10t_0^2}{2t_0(1-t_0)}$

$1 = (1-t_0)^2 \cdot 0 + 2t_0(1-t_0)y_B + t_0^2 \cdot 0$
$y_B = \frac{1}{2t_0(1-t_0)}$

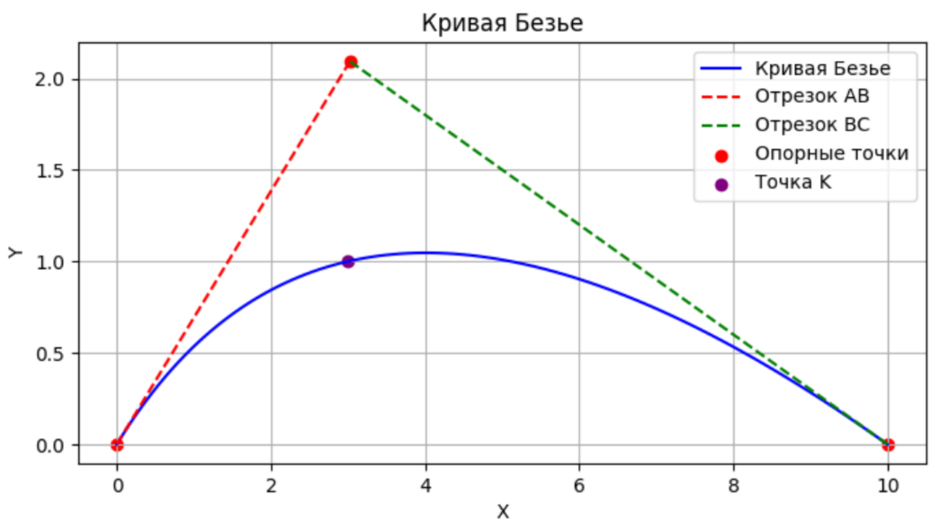
$x(t) = (1-t^2) \cdot 0 + 2t \cdot (1-t) \cdot \frac{3-10t_0^2}{2t_0(1-t_0)} + t^2 \cdot 10 = t^2\left(10 - \frac{3-10t_0^2}{t_0(1-t_0)}\right) + t \cdot \frac{3-10t_0^2}{t_0(1-t_0)},\ t_0 \in [0, 1]$
$y(t) = (1-t^2) \cdot 0 + 2t \cdot (1-t) \cdot \frac{1}{2t_0(1-t_0)} + t^2 \cdot 0 = \frac{-t^2}{t_0(1-t_0)} + \frac{t}{t_0(1-t_0)}$

Длину кривой посчитаем по формуле:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$\frac{dx}{dt} = 2t\left(10 - \frac{3-10t_0^2}{t_0(1-t_0)}\right) + \frac{3-10t_0^2}{t_0(1-t_0)},\ \frac{dy}{dt} = \frac{-2t}{t_0(1-t_0)} + \frac{1}{t_0(1-t_0)}$
$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{\left(2t\left(10 - \frac{3-10t_0^2}{t_0(1-t_0)}\right) + \frac{3-10t_0^2}{t_0(1-t_0)}\right)^2 + \left(\frac{-2t}{t_0(1-t_0)} + \frac{1}{t_0(1-t_0)}\right)^2}\, dt =$
$= \frac{1}{t_0(1-t_0)} \int_0^1 \sqrt{(2t(10t_0^2 + 10t_0 - 3) + (3 - 10t_0^2))^2 + (1-2t)^2}\, dt$
Методом бин поиска по ответам заметим, что минимум выражения достигается при $a \approx 0.3943$, $\int \approx$ 10.3099505958.

Итого, координаты опорных точек: $A(0, 0),\ B(3.0257, 2.0935),\ C(10, 0)$, а длина кабеля ≈ 10.3099505958.



```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

A = np.array([0, 0])
B = np.array([3.0257, 2.0935])
C = np.array([10, 0])

def bezier(t, A, B, C):
    return (1-t)**2 * A + 2*t*(1-t) * B + t**2 * C

t = np.linspace(0, 1, 100)
curve = np.array([bezier(ti, A, B, C) for ti in t])

plt.figure(figsize=(8, 4))

plt.plot(curve[:, 0], curve[:, 1], label="Кривая Безье", color='blue')

plt.plot([A[0], B[0]], [A[1], B[1]], color='red', linestyle='--', label="Отрезок AB")
plt.plot([B[0], C[0]], [B[1], C[1]], color='green', linestyle='--', label="Отрезок BC")

plt.scatter([A[0], B[0], C[0]], [A[1], B[1], C[1]], color='red', label="Опорные точки")

plt.scatter([3], [1], color='purple', label="Точка K")

plt.legend()
plt.title("Кривая Безье")
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.grid(True)

plt.show()
```

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы я научился задавать кривую Безье и моделировать её.