Αλβανάκη Παρασκευή
ΑΜ 57286

1) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{N_3}{N_2 + N_3}$

2) $P(\omega|x) = \dfrac{P(x|\omega_j) \cdot P(\omega_j)}{\underbrace{\sum p(x|\omega_i) \cdot P(\omega_i)}_{P(x)}}$ (1) και $P(\omega_1) = 0,3$ $P(\omega_2) = 0,3$

Άρα $P(\omega_3) = 0,4$

Υπολογίζω αρχικά τα $P(x)$ ως εξής:

$P(x_j) = \sum_j P(x|\omega_j) \cdot P(\omega_j)$

Άρα έχουμε:

$P(x=1) = \sum_j P(1|\omega_j) \cdot P(\omega_j) = 0,3 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,19$

$P(x=2) = 0,12 + 0,06 + 0,06 = 0,24$

$P(x=3) = 0,03 + 0,12 + 0,06 = 0,21$

$P(x=4) = 0,03 + 0,015 + 0,02 = 0,065$

$P(x=5) = 0,06 + 0,03 + 0,12 = 0,21$

$P(x=6) = 0,03 + 0,015 + 0,04 = 0,085$

Αφού γνωρίζω τα $P(x)$ μπορώ να βρω posterior (γνωρίζοντας και τις prior)

$P(\omega_1|x_1) = \dfrac{0,3 \cdot 0,3}{0,19} = 0,474$

$P(\omega_2|x_1) = \dfrac{0,2 \cdot 0,3}{0,19} = 0,316$

$P(\omega_3|x_1) = \dfrac{0,1 \cdot 0,4}{0,19} = 0,211$

$P(\omega_1|x_2) = \dfrac{0,2 \cdot 0,3}{0,24} = 0,25$

$P(\omega_2|x_2) = \dfrac{0,2 \cdot 0,3}{0,24} = 0,25$

$P(\omega_3|x_2) = \dfrac{0,3 \cdot 0,4}{0,24} = 0,5$

$$P(w_1|x_3) = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,21} = 0,143$$

$$P(w_2|x_3) = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,21} = 0,571$$

$$P(w_3|x_3) = \frac{0,15 \cdot 0,3}{0,21} = 0,375$$

$$P(w_1|x_4) = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,065} = 0,462$$

$$P(w_2|x_4) = \frac{0,05 \cdot 0,3}{0,065} = 0,231$$

$$P(w_3|x_4) = \frac{0,05 \cdot 0,4}{0,065} = \cancel{0,28}\ 0,308$$

$$P(w_1|x_5) = \frac{0,2 \cdot 0,3}{0,21} = 0,286$$

$$P(w_2|x_5) = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,21} = 0,143$$

$$P(w_3|x_5) = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,21} = 0,571$$

$$P(w_1|x_6) = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,085} = \cancel{0,143}\ 0,353$$

$$P(w_2|x_6) = \frac{0,05 \cdot 0,3}{0,085} = \cancel{0,06}\ 0,176$$

$$P(w_3|x_6) = \frac{0,1 \cdot 0,4}{0,085} = 0,471$$

$P(w|x)$

	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6
w1	0,474	0,25	0,143	0,462	0,286	0,353
w2	0,316	0,25	0,571	0,231	0,143	0,176
w3	0,211	0,5	0,375	0,308	0,571	0,471

$$P_e = 1 - \max[P(w_1|x), P(w_2|x), P(w_3|x)]$$

και $P_{e\,tot} = \sum P(x_i) P_e(x_i) = 0,526 \cdot 0,19 + 0,12 + 0,429 \cdot 0,21 + 0,538 \cdot 0,065 + 0,429 \cdot 0,21 + 0,529 \cdot 0,085 = 0,48$

3) $p(\omega_1)=0,25$ Άρα $P(\omega_2)=0,75$

2D

$\bar{\mu_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

$\bar{\mu_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

Έχουμε $\Sigma_1 = \Sigma_2$

και αφού έχω 2D case

προκύπτουν:

$g_i(x) = w_i^T x + w_{i0}$, $w_i = \Sigma^{-1} \mu_i$

$w_{i0} = -\frac{1}{2} \mu_i^T \Sigma^{-1} \mu_i + \ln P(\omega_i)$

Αφού έχω τους Σ και τα $P(\omega_i)$ μπορώ εύκολα να υπολογίσω w_1, w_2 και w_{10}, w_{20}. από matlab

Matlab:

```
S = [4 1; 1 9];
m1 = [1; 2];
m2 = [-2; -1];

w1 = inv(S)*m1;
w2 = inv(S)*m2;
w10 = -(1/2)*(m1.')*inv(S)*(m1) + log(0,25);
w20 = -(1/2)*(m2.')*inv(S)*(m2) + log(0.75);
```

$g_1(x) = 0,2\,x_1 + 0,2\,x_2 - 1,6863$

$g_2(x) = -0,4857\,x_1 - 0,0571\,x_2 - 0,8020$

Άρα έχω συνάρτηση απόφασης Mahal. $\rightarrow$ $g_1(x) - g_2(x) = d(x)$

Επομένως $d(x) = 0,6857\,x_1 + 0,2571\,x_2 - 0,8843$

Για επιφάνεια απόφασης έχουμε: $d(x)=0$ Άρα προκύπτει ότι επιφάνεια απόφασης: $0,6857x_1 + 0,2571x_2 - 0,8843 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,6857 \\ 0,2571 \end{pmatrix}^T x - 0,8843 = 0$ (2)

Αν θέσουμε $\bar{w} = \begin{pmatrix} 0,6857 \\ 0,2571 \end{pmatrix}$ και $w_0 = 0,8843$ τότε η

εξίσωση 2 μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\bar{w}^T x + w_0 = 0$$

Για το ολικό σφάλμα κατηγοριοποίησης θέτω $k = w^T x$ για να μετατρέψω το πρόβλημα από 2D σε 1D. Ουσιαστικά έχω:

$p(w^T x | w_i) = N(w^T \mu_i, w^T \Sigma w)$, $\mu_1' = w^T \mu_1 = \begin{pmatrix} 0,6857 \\ 0,2571 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$1,2$ και $\mu_2' = w^T \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,6857 \\ 0,2571 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1,628$

$$\Sigma' = w^T \Sigma w = \begin{pmatrix} 0,6857 \\ 0,2571 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6857 \\ 0,2571 \end{pmatrix} = 2,829$$

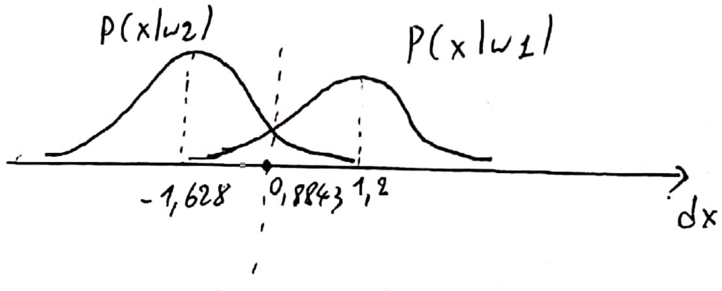
$$P_{\substack{\text{correct} \\ \text{classification}}} = P(w_1) \int_{R_1} P(w^T x | w_1)\, d(w^T x) + P(w_2) \int_{R_2} P(w^T x | w_2)\, d(w^T x) =$$

$$0,25 \int_{-\infty}^{0,8843} N(1,2, \sqrt{2,829})\, dy + 0,75 \int_{0,8843}^{\infty} N(-1,6285, \sqrt{2.8282})\, dy =$$

$$0,25 - 0,25\, \Phi\left(\frac{0,8843 - 1,2}{\sqrt{2,829}}\right) + 0,75\, \Phi(1,494) = 0,25 - 0,25 \cdot (0,425) +$$

$$0,75 \cdot (0,953) = 0,84$$

$$P_{error} = 1 - P_{\substack{\text{correct} \\ \text{Clasification}}} = 0,16$$



4)

a) Γνωρίζουμε ότι $\frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_2)} \geq \frac{\lambda_{12}-\lambda_{22}}{\lambda_{21}-\lambda_{11}} \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$ (1) για κατηγοριοποίηση σε κλάσεις. με $P(x|\omega_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$ (2) ← Gaussian κατανομή

Άρα (1): $\frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_2)} \geq \frac{2-1}{3-1} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{1}$

$$\frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_2)} \geq \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_2)} \geq 1 \quad (3)$$

Συνεπώς Αντικαθιστώ την (2) στην (3) και προκύπτει:

$$\frac{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}} \geq 1$$

$$\frac{\frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0,5}}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{0,5}}}{\frac{e^{-\frac{(x-1,5)^2}{0,4}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{0,2}}} \geq 1$$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0,5}} - (x-2)^2 \geq \ln\frac{1}{\sqrt{0,4\pi}} - \frac{(x-1,5)^2}{0,4}$$

$$-0,572 - x^2 + 4x - 4 > -0,114 - \frac{(x^2 - 3x + 2,25)}{0,4}$$

$$-x^2 + \frac{5}{2}x^2 + 4x - \frac{15}{2}x - 4 + \frac{48}{8} - 0,459 \geq 0$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 3,5x + \frac{13}{8} - 0,459 \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3,5x + 1,166 \geq 0 \quad (4)$$

Αρα $1,5x^2 - 3,5x + 1,16660 = 0$ ① εχει ριζες απο Matlab τις $x1 = 0,403006$ και $x2 = 1,93033$.

Αρα η ① ειναι μεγαλύτερη του μηδενος στα διαστήματα:

$x \in (-\infty, 0,403)$ και $(1,930, +\infty)$ και συνεπως ανηκει στην 1η κλαση στα διαστήματα αυτα. Εσω $(0,403, 1,930)$ ειναι μικροτερη του μηδενος αρα στο διαστημα αυτο ανηκει στη δευτερη κλαση.

Συνεπώς η ανίσωση ④ επαληθευεται στο διαστήμα $(-\infty, 0,41) \cup (1,93, +\infty)$ στα οποια η βέλτιστη απόφαση του ταξινομητή κατα Bayes ειναι η κατηγορία ω1. Ομοιως επιλεγουμε την κατηγορια ω2 αν αυτη ελαχιστοποιει το δεσμευμενο ρίσκο ως $R(a_2|x) \geq R(a_1|x)$

Ελαχιστο κοστος C:

$$C = \int_{R_1} R(a_1|x)p(x)dx + \int_{R_2} R(a_2|x)p(x)dx =$$

$$= P(\omega_1)\left(\lambda_{11}\int_{R_1} p(x|\omega_1)dx + \lambda_{21}\int_{R_2} p(x|\omega_1)dx\right) +$$

$$P(\omega_2)\left(\lambda_{12}\int_{R_1} P(x|\omega_2)dx + \lambda_{22}\int_{R_2} p(x|\omega_2)dx\right) \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{3}\left(\int_{R_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx + 3\int_{R_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_{-\infty}^{0,4039}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx + \int_{1,9260}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx + 3\int_{0,4039}^{1,9260}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx\right)$$

$$C_{11} = \int_{-\infty}^{0,4039}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx = 1 - \Phi(2,26) = 1 - 0,9881 = 0,0119$$

$$C_{12} = \int_{1,9260}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx = \Phi(0,105) = 0,5596$$

$$C_{13} = \int_{0,4039}^{1,9260}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0,5}} e^{-(x-2)^2}dx = \Phi(-0,105) - \Phi(-2,26) = \Phi(2,26) - \Phi(0,105) =$$

$$0,9881 - 0,5596 = 0,4285$$

Αρα $C_1 = \frac{1}{3}(0,0119 + 0,5596 + 3 \cdot 0,4285) = 0,614$

Ομοίως: $C_2 = P(\omega_2)(\lambda_{12}\int_{R_1} p(x|\omega_2)dx + \lambda_{22}\int_{R_2} p(x|\omega_2)dx =$

$$\frac{2}{3}\left(2\int_{-\infty}^{0,4039}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0,2}}e^{-\frac{(x-1,5)^2}{0,4}}dx + 2\int_{1,9260}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{0,4\pi}}e^{-\frac{(x-1,5)^2}{0,4}}dx + \int_{0,4039}^{1,9260}p(x|\omega_2)dx\right) =$$

$$\frac{2}{3}\left(2\cdot(1-\Phi(2,45)) + 2(1-\Phi(0,95)) + (\Phi(0,95)+1-\Phi(2,45)\right) =$$

$$\frac{2}{3}(2\cdot 0,0071 + 2\cdot 0,174 + 0,818) = 0,7893$$

Άρα $C = C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_2 = 1,4133$

4β.) Αναλυτική απάντηση πάνω στο matlab file