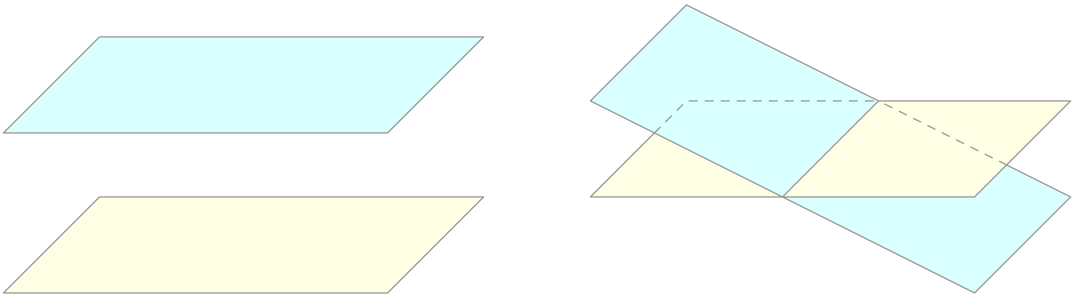
Взаимное расположение плоскостей

Взаимное расположение плоскостей

Две различные прямые на плоскости или параллельны, или пересекаются. Точно так же две различные плоскости в пространстве либо параллельны, либо пересекаются (рис. 1).



Плоскости параллельны

Плоскости пересекаются

Рис. 1. Взаимное расположение плоскостей

Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Предположим, в некоторой задаче нам хотелось бы доказать, что некоторые плоскости параллельны. Как это сделать? Для такой цели имеется специальное утверждение.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Мы видим эту ситуацию на рис. 2. Именно, пусть пересекающиеся прямые a и b, лежащие в плоскости π, параллельны соответственно прямым a' и b', лежащим в плоскости σ. Тогда плоскость π параллельна плоскости σ.

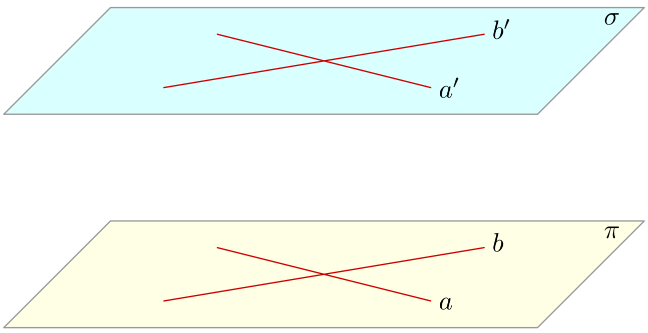


Рис. 2. Если $a \parallel a'$ и $b \parallel b'$, то $\pi \parallel \sigma$

Вопрос. Почему в формулировке признака параллельности плоскостей важно, что прямые *пересекающиеся*? Останется ли верным признак, если это слово убрать?

Доказывать признак параллельности плоскостей мы не будем — это теорема из школьной программы, на которую можно сослаться на экзамене. Давайте лучше посмотрим, как работает данный признак в конкретной задаче.

Задача. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости A_1BC_1 и ACD_1 параллельны.

Решение. Делаем чертёж (рис. 3).

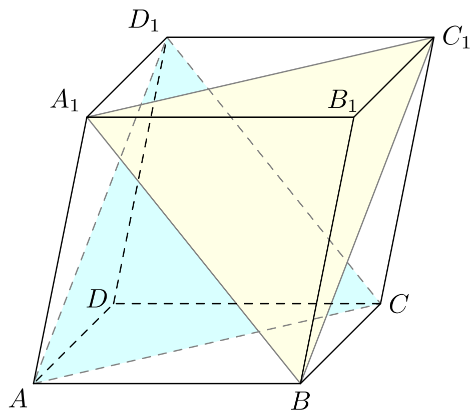


Рис. 3. К задаче

Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $BC \parallel AD$ и $BC = AD$. Четырёхугольник ADD_1A_1 — также параллелограмм, поэтому $A_1D_1 \parallel AD$ и $A_1D_1 = AD$. Имеем, таким образом: $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$. Следовательно, четырёхугольник A_1BCD_1 является параллелограммом[1], и потому $A_1B \parallel D_1C$.

Аналогично докажем, что четырёхугольник ABC_1D_1 — параллелограмм, и, стало быть, $BC_1 \parallel AD_1$.

Мы получили, что две пересекающиеся прямые плоскости A_1BC_1 (а именно, A_1B и BC_1) соответственно параллельны двум прямым плоскости ACD_1 (а именно, прямым D_1C и AD_1). Следовательно, данные плоскости параллельны, что и требовалось.

Важное свойство параллельных плоскостей: *если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то прямые пересечения параллельны.*

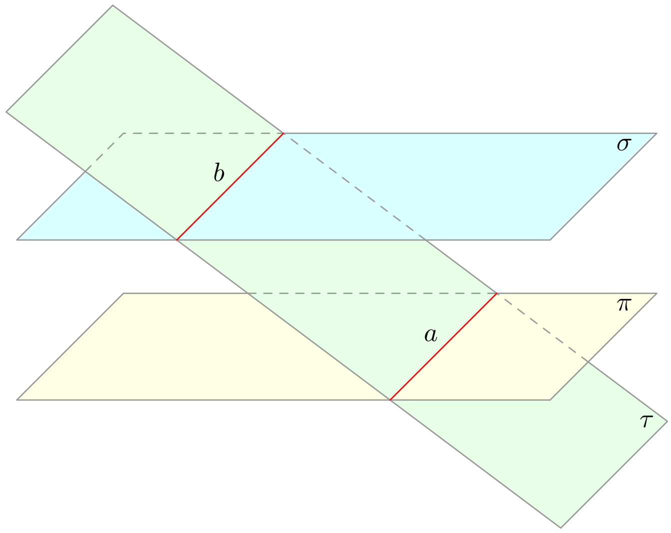


Рис. 4. Если $\pi \parallel \sigma$, то $a \parallel b$

Именно, пусть плоскость π параллельна плоскости σ (рис. 4). Если плоскость τ пересекает плоскость π по прямой a и пересекает плоскость σ по прямой b, то $a \parallel b$.

[1]Напомним соответствующий признак параллелограмма: *если в четырёхугольнике две стороны параллельны и равны, то такой четырёхугольник — параллелограмм.*

Задача. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка K — середина ребра A_1D_1. Найдите площадь сечения куба плоскостью ACK.

Решение. Секущая плоскость ACK пересекает плоскость ABC нижней грани куба по прямой AC (рис. 5). Плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости ABC; следовательно, секущая плоскость пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой KM, параллельной AC.

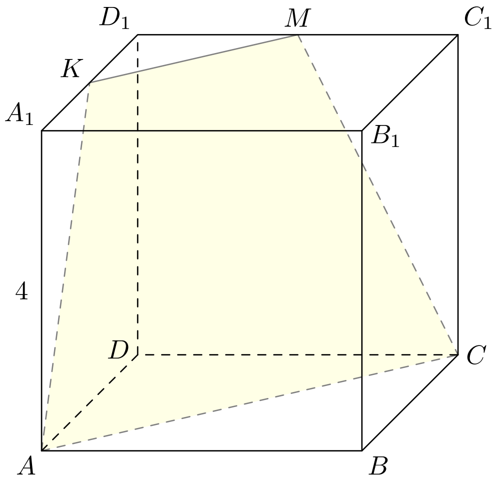


Рис. 5. К задаче

Плоскости ADD_1 и CDD_1 пересекаются секущей плоскостью по прямым AK и CM соответственно. Таким образом, сечение куба — трапеция $AKMC$, в которой

$$AC = 4\sqrt{2}, \quad AK = CM = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad KM = \frac{1}{2}A_1C_1 = 2\sqrt{2}.$$

Нарисуем эту трапецию отдельно (рис. 6). Проведём высоты KE и MF.

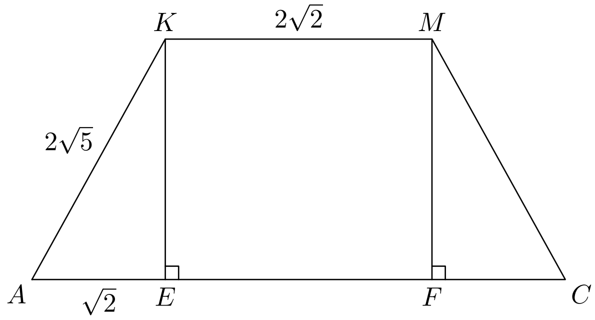


Рис. 6. Планиметрический чертёж сечения

Ясно, что

$$AE = CF = \frac{AC - KM}{2} = \sqrt{2}.$$

Тогда высота трапеции:

$$KE = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Остаётся найти площадь трапеции:

$$S = \frac{AC + KM}{2} \cdot KE = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$$

Ответ: 18.

Пересечение плоскостей

Выше мы неоднократно использовали утверждение о том, что одна плоскость пересекает другую по прямой. Это — одно из базовых утверждений стереометрии, которое нередко принимается в качестве аксиомы: *если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

Данное утверждение используется при построении сечений многогранников. Рассмотрим самый простой пример — сечение тетраэдра.

Задача. На рёбрах AB, BC и CD тетраэдра $ABCD$ расположены соответственно точки K, N и M, отличные от вершин тетраэдра (при этом прямые KN и AC не параллельны). Постройте сечение тетраэдра плоскостью KMN.

Решение. Сечение показано на рис. 7 — это четырёхугольник $KLMN$. Объясним, как выполнено построение.

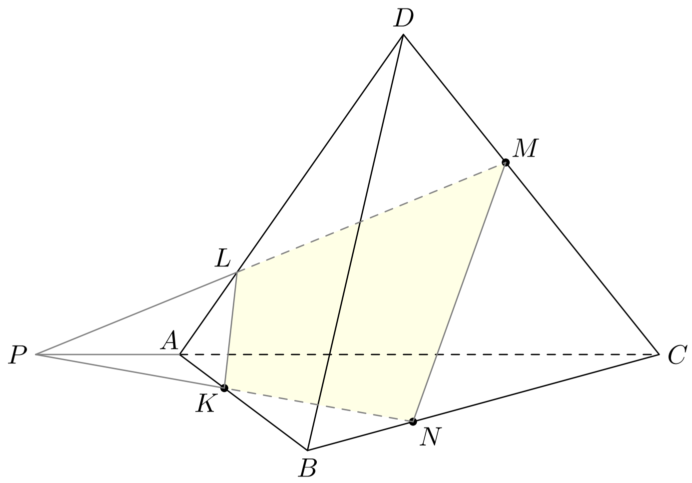


Рис. 7. Сечение тетраэдра

Грани ABC и BCD пересекаются секущей плоскостью KMN по отрезкам KN и MN соответственно.

Пересечением секущей плоскости и плоскости ABC служит прямая KN, которая пересекает прямую AC в точке P. Таким образом, точка P принадлежит одновременно секущей плоскости и плоскости ACD.

Точка M также является общей точкой секущей плоскости и плоскости ACD. Значит, секущая плоскость пересекает плоскость ACD по прямой PM.

Прямая PM пересекает AD в точке L. Остаётся провести KL и LM. В результате получается четырёхугольник $KLMN$, который и является искомым сечением.