Пирамида

Пирамида

Пирамида и призма присутствуют в очень многих задачах по стереометрии (в частности, они фигурируют во всех задачах С2, предлагавшихся на ЕГЭ по математике с 2010 года). Данная статья посвящена пирамиде.

Самая простая пирамида — это *треугольная пирамида*, или *тетраэдр*[1]. На рис. 1 изображена треугольная пирамида $ABCD$. Точки A, B, C, D — это *вершины* пирамиды. Треугольники ABC, ABD, BCD, ACD — это *грани* пирамиды.

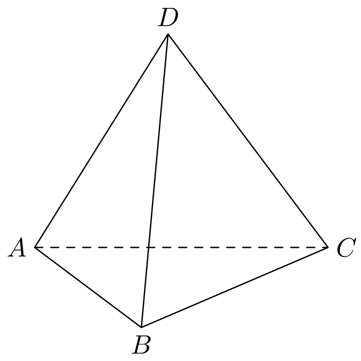

Рис. 1. Треугольная пирамида

В основании пирамиды лежит треугольник ABC, и, соответственно, грань ABC называется *основанием* пирамиды. Остальные грани — ABD, BCD и ACD — называются *боковыми гранями*. Понятно, что на какую грань поставишь треугольную пирамиду — та и будет основанием, а остальные грани тогда станут боковыми.

Отрезки AB, BC, AC, AD, BD, CD, являющиеся сторонами граней, называются *рёбрами* пирамиды. При этом отрезки AD, BD и CD называются также *боковыми рёбрами*.

На рис. 2 изображена четырёхугольная пирамида $ABCDS$. Её основанием служит четырёхугольник $ABCD$.

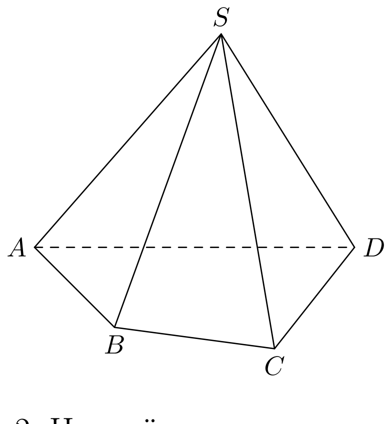

Рис. 2. Четырёхугольная пирамида

Вершиной данной четырёхугольной пирамиды называется точка S. Точки A, B, C, D называются *вершинами основания*.

Отрезки SA, SB, SC, SD, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, снова называются *боковыми рёбрами*, а треугольники SAB, SBC, SCD и SAD — *боковыми гранями* пирамиды.

[1] *Тетраэдр* по-гречески означает *четырёхгранник*.

Обратите внимание, что теперь грани не являются равноправными: основание — это четырёхугольник, а боковые грани — треугольники.

На рис. 3 показаны ещё две пирамиды — пятиугольная и шестиугольная.

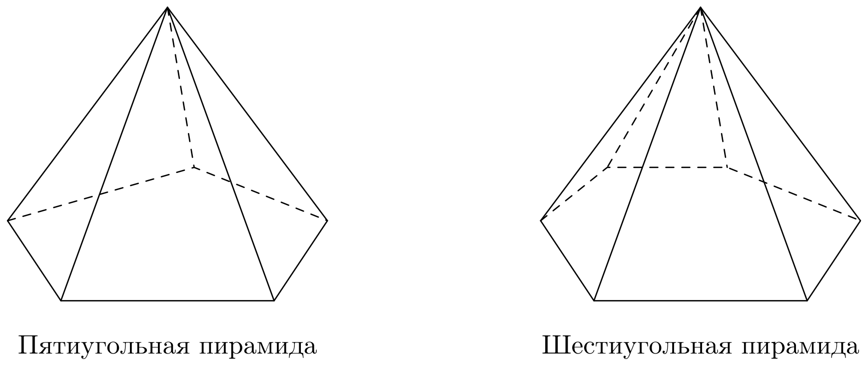

Рис. 3. Многоугольные пирамиды

Основанием пятиугольной пирамиды служит пятиугольник; основанием шестиугольной пирамиды служит шестиугольник. Боковые рёбра соединяют вершины основания с фиксированной точкой — вершиной пирамиды, которая лежит вне плоскости основания. Боковыми гранями пирамиды являются треугольники, образованные двумя соседними боковыми рёбрами и соответствующей стороной основания.

Аналогично описывается произвольная n-угольная пирамида: в её основании лежит n-угольник, а боковыми гранями являются треугольники с общей вершиной (которая и называется вершиной пирамиды).

Высота пирамиды

Высота пирамиды — это перпендикуляр[2], проведённый из вершины пирамиды на плоскость её основания. Длина h этого перпендикуляра также называется высотой пирамиды.

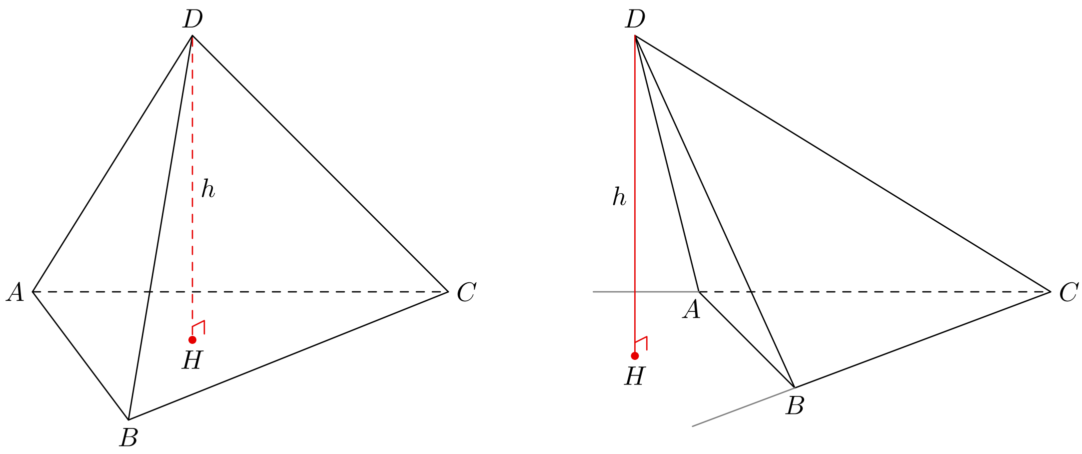

Рис. 4. Высота пирамиды

На рис. 4 изображена треугольная пирамида $ABCD$, из вершины D которой проведена высота DH к плоскости ABC. Точка H лежит в плоскости ABC и называется *основанием*

[2]Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Если через точку D проведена прямая, перпендикулярная плоскости ABC и пересекающая её в точке H, то отрезок DH называется *перпендикуляром* к плоскости. Сейчас вполне достаточно интуитивного понимания перпендикулярности прямой и плоскости; позже мы обсудим это понятие более подробно.

высоты. Как видите, основание высоты может оказаться где угодно — как внутри грани (левый рисунок), так и вне грани (правый рисунок).

Имеется, однако, важный частный случай, когда мы можем точно указать, в какую именно точку основания попадёт основание высоты.

Теорема. Если в n-угольной пирамиде боковые рёбра равны, то основание высоты совпадает с центром окружности, описанной вокруг n-угольника, лежащего в основании пирамиды.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением треугольной пирамиды (в общем случае доказательство совершенно аналогично). Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида с равными боковыми рёбрами, в которой проведена высота DH (рис. 5).

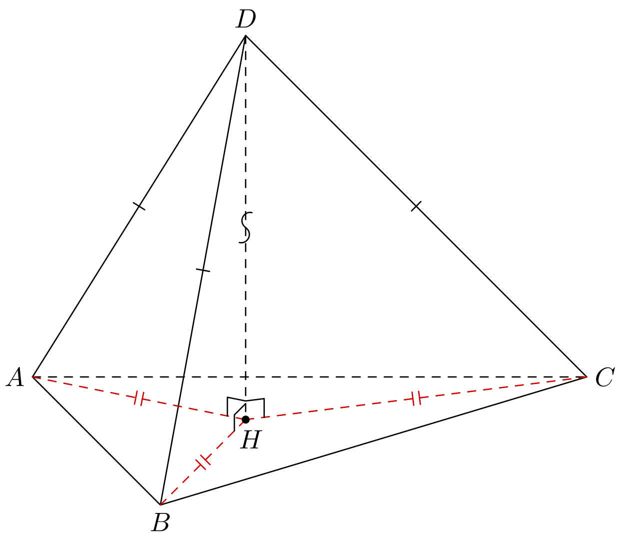

Рис. 5. К доказательству теоремы

Треугольники ADH, BDH и CDH — прямоугольные с общим катетом DH. Их гипотенузы равны, поэтому данные треугольники равны по гипотенузе и катету. Следовательно, равны их вторые катеты: $AH = BH = CH$.

Таким образом, точка H равноудалена от точек A, B, C и потому является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Теорема доказана.

Можно запомнить эту теорему и в такой формулировке: *если боковые рёбра пирамиды равны, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности.*

Объём пирамиды

Объём пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, h — высота пирамиды.

Для треугольной пирамиды всё равно, какую грань считать основанием (разумеется, в таком случае h будет высотой, опущенной на выбранное основание). Мы можем «поставить» треугольную пирамиду так, как нам удобно, и этот факт часто помогает при решении задач.

Задача. Найти объём треугольной пирамиды с рёбрами 6, 8, 10, 13, 13, 13.

Решение. Какую грань выбрать в качестве основания? Здесь сомнений нет: естественно, ту, стороны которой равны 6, 8 и 10. Почему?

Прежде всего, треугольник со сторонами 6, 8, 10 является прямоугольным в силу обратной теоремы Пифагора (поскольку $6^2 + 8^2 = 10^2$). Это уже хорошо.

Кроме того, при таком выборе основания боковые рёбра пирамиды оказываются равными (13, 13 и 13). Значит, вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной вокруг основания.

А где находится центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника? В середине гипотенузы! Делаем рисунок (рис. 6).

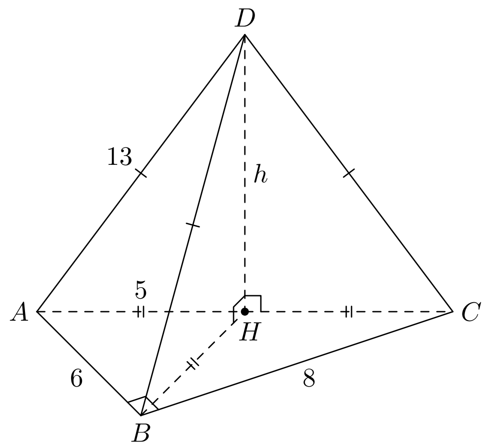

Рис. 6. К задаче

В основании нашей пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Точка H — середина гипотенузы; $h = DH$ — высота пирамиды.

Площадь основания ABC равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

Высоту пирамиды находим по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

И, наконец, вычисляем объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 96.$$

Правильная пирамида

Мы уже убедились, что равенство боковых рёбер пирамиды позволяет легче проводить вычисления. Теперь наложим ещё одно дополнительное требование — на сей раз к основанию пирамиды — и придём к важнейшему понятию *правильной пирамиды*.

Правильная пирамида — это пирамида, у которой боковые ребра равны, а в основании лежит правильный n-угольник.

Легко видеть, что *вершина правильной пирамиды проектируется в центр симметрии правильного n-угольника, лежащего в её основании.* В самом деле, из равенства боковых рёбер следует, что вершина проектируется в центр описанной вокруг основания окружности, который в случае правильного n-угольника совпадает с центром его симметрии.

Чаще всего в задачах встречаются правильная треугольная и правильная четырёхугольная пирамида. Продублируем определение для этих двух случаев.

- **Правильная треугольная пирамида** — это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит равносторонний треугольник.

- **Правильная четырёхугольная пирамида** — это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит квадрат.

Правильную треугольную и правильную четырёхугольную пирамиду лучше всего рисовать следующим образом (рис. 7).

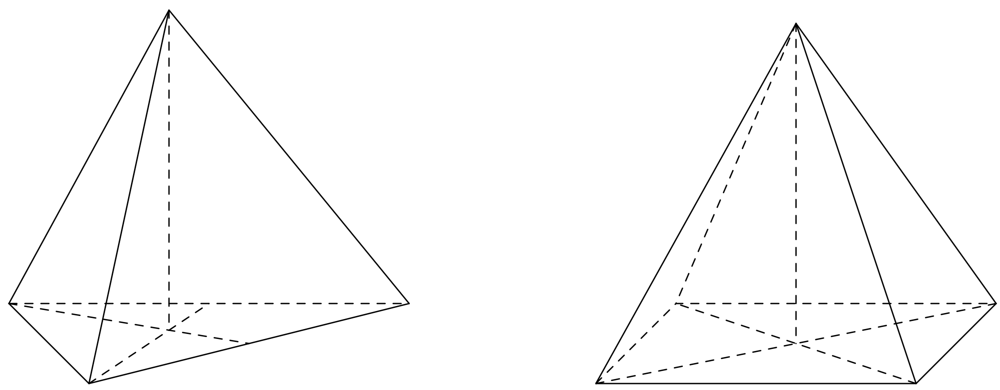

Рис. 7. Как рисовать правильную пирамиду

Последовательность действий такая: 1) рисуем основание пирамиды; 2) строим центр основания, проводя медианы треугольника или диагонали квадрата; 3) из центра ведём вверх высоту и отмечаем на ней вершину пирамиды; 4) соединяем вершину пирамиды с вершинами основания.

В самом начале мы сказали, что треугольная пирамида и тетраэдр — это синонимы. Однако правильный тетраэдр и правильная треугольная пирамида — не одно и то же! Такой вот терминологический курьёз.

Правильный тетраэдр — это треугольная пирамида, все рёбра которой равны.

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро может быть не равно стороне основания; иными словами, боковые грани правильной треугольной пирамиды — равнобедренные, но не обязательно равносторонние треугольники. В правильном тетраэдре все шесть граней — равносторонние треугольники.

Задача. Найти объём правильного тетраэдра со стороной a.

Решение. Делаем рисунок (рис. 8).

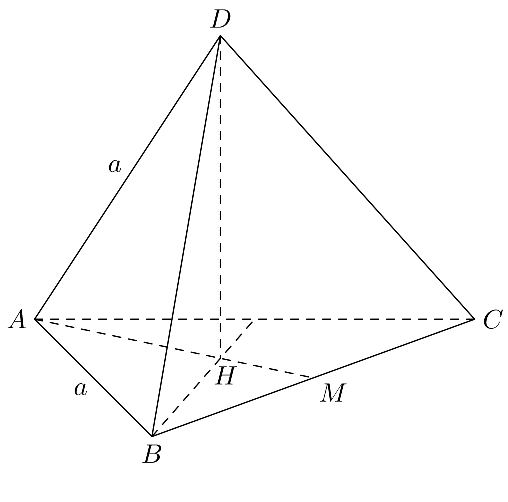

Рис. 8. К задаче

Нам нужно выразить через a площадь S треугольника ABC и высоту тетраэдра DH. Высоту будем искать из треугольника ADH; для этого в треугольнике ABC надо будет найти AH.

Сделаем планиметрический чертёж треугольника ABC (рис. 9). Его площадь проще всего найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(данную формулу площади правильного треугольника имеет смысл помнить).

Длину отрезка AH находим из прямоугольного треугольника AHN:

$$AH = \frac{AN}{\cos 30^\circ} = \frac{a/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

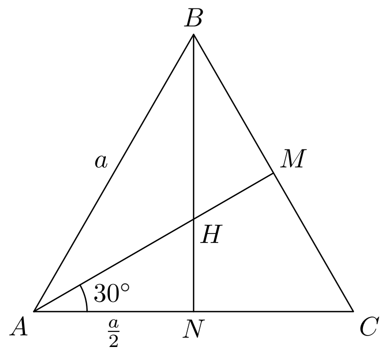

Рис. 9. К задаче

(желательно помнить и это выражение для радиуса окружности, описанной вокруг правильного треугольника).

Высоту тетраэдра найдём из прямоугольного треугольника ADH:

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

И теперь находим объём:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}\,.$$

Площадь поверхности пирамиды

Площадь поверхности пирамиды — это сумма площадей всех её граней. **Площадь боковой поверхности пирамиды** — это сумма площадей всех её боковых граней.

Задача. Найти площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5.

Решение. Пусть $ABCDE$ — наша пирамида (рис. 10).

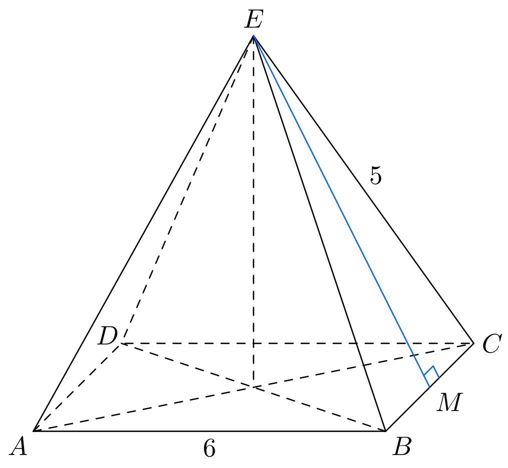

Рис. 10. К задаче

Площадь основания пирамиды равна: $S_{\text{осн}} = 6^2 = 36$. Остаётся найти площадь боковой поверхности.

Проведём высоту EM боковой грани пирамиды[3]. Треугольник BEC — равнобедренный; значит, EM является также его медианой, и потому $MC = 3$. Отсюда

$$EM = \sqrt{EC^2 - MC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Следовательно, площадь S_1 боковой грани равна:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 4S_1 = 4 \cdot 12 = 48.$$

Площадь поверхности пирамиды:

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 36 + 48 = 84.$$

[3]Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из вершины пирамиды, называется *апофемой*.