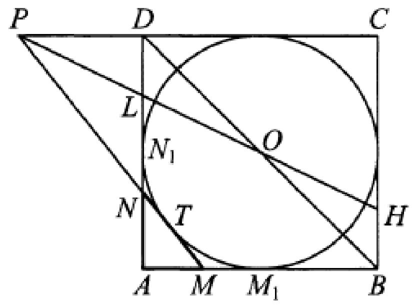
Задача №18

18 К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1:3$?

Решение.



а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны AB в точке M_1, стороны AD — в точке N_1, а прямой MN — в точке T. По свойству касательных $NN_1 = NT$, $MM_1 = MT$ и $AN_1 = AM_1$. Тогда

$$AM + MN + AN = AM + MT + NT + AN = \\ = (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = \\ = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB.$$

б) Положим $AB = 12a$, $TN = NN_1 = x$. Тогда

$$AM = 3a, \; AN = AN_1 - NN_1 = 6a - x, \; MN = MT + TN = 3a + x.$$

По теореме Пифагора $AM^2 + AN^2 = MN^2$, то есть

$$9a^2 + (6a - x)^2 = (3a + x)^2.$$

Отсюда находим, что $x = 2a$. Тогда $AN = 4a$ и $MN = 5a$.

Пусть O — центр окружности, а прямая PO пересекает стороны AD и BC в точках L и H соответственно. Из равенства треугольников DOL и BOH следует, что $DL = BH$, поэтому $\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA}$. Окружность вписана в угол MPC, значит, PL — биссектриса треугольника DPN, который подобен треугольнику AMN. Используя свойство биссектрисы и подобие, находим:

$$\frac{DL}{LN} = \frac{PD}{PN} = \frac{AM}{MN} = \frac{3}{5}, \text{ откуда } DL = \frac{3}{8}DN.$$

Учитывая, что $DN = DA - AN = 12a - 4a = 8a$, находим, что $DL = 3a$, $LA = 9a$.

$$\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) $1:3$.

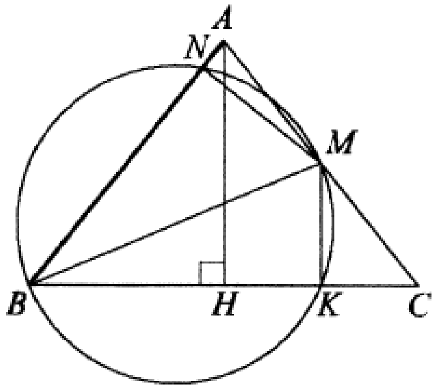
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 9$ и $BN = 11$.

Решение.



а) Пусть AH — высота треугольника ABC. Точка K лежит на окружности с диаметром BM, поэтому $\angle BKM = 90°$, значит, прямые MK и AH параллельны. Так как M — середина AC, отрезок MK — средняя линия треугольника AHC. Тогда K — середина CH, следовательно,

$$CK = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}BC,$$

$$BK = 3CK.$$

б) Положим $AB = AC = 2x$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $AM = x$, $AN = 2x - 11$. В прямоугольном треугольнике AMN:

$$\cos\alpha = \frac{AN}{AM} = \frac{2x-11}{x}.$$

Имеем $BC = BK + CK = 9 + 3 = 12$, значит, по теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\ AC} = \frac{4x^2 + 4x^2 - 12^2}{2\ 2x\ 2x} = \frac{x^2 - 18}{x^2}.$$

Из уравнения $\frac{x^2-18}{x^2} = \frac{2x-11}{x}$ находим, что $x = 2$ или $x = 9$.

В первом случае $AN = 2x - 11 = -7$, что противоречит условию (точка N должна лежать на отрезке AB). Второе решение удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $AB = 2x = 18$.

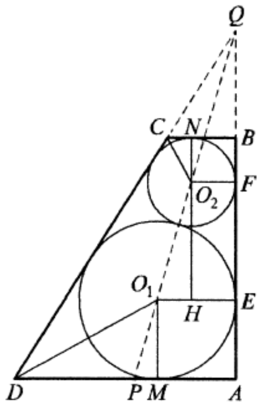
Ответ: б) 18.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.



Решение.

а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон. Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AP}{PD} = \frac{QA}{QD} = \sin D$.

б) Пусть окружность с центром O_1 радиуса $R = 3$ касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD — в точке M; окружность радиуса $r = 1$ с центром O_2 касается боковой стороны AB в точке F, а основания BC — в точке N. Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда

$$O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = 3 - 1 = 2,$$

а так как линия центров окружностей проходит через их точку касания,

$$O_1O_2 = R + r = 3 + 1 = 4.$$

Значит, $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

Обозначим $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Получаем:

$$\angle BQC = 2\alpha,\ \angle BCD = 90° + 2\alpha,\ \angle O_2CN = \frac{1}{2}\angle BCD = 45° + \alpha.$$

Из треугольника O_2CN находим:

$$NC = O_2N\operatorname{ctg}(45° + \alpha) = O_2N\operatorname{tg}(45° - \alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Следовательно, $BC = BN + NC = 1 + 2 - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$.

Аналогично, $\angle O_1DM = 45° - \alpha$,

$$MD = O_1M\operatorname{ctg}(45° - \alpha) = O_1M\operatorname{tg}(45° + \alpha) = 3\cdot\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = 3\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3};$$

$$AD = AM + MD = 3 + 6 + 3\sqrt{3} = 9 + 3\sqrt{3}.$$

Учитывая, что $AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$, получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot AB = \frac{12 + 2\sqrt{3}}{2}\cdot\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 30 + 16\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $30 + 16\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром в точке O.

а) Докажите, что $\sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

Решение.

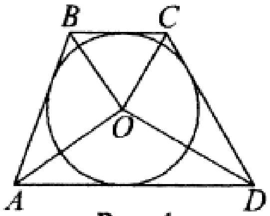


Рис. 1

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC (рис. 1). Сумма этих углов равна 180°, поэтому сумма углов BAO и ABO равна 90°. Значит, $\angle AOB = 90^\circ$.

Аналогично, $\angle COD = 90^\circ$. Тогда

$$\angle AOD + \angle BOC = 360^\circ - (\angle AOB + \angle COD) =$$
$$= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

Следовательно, $\sin\angle AOD = \sin(180^\circ - \angle BOC) = \sin\angle BOC$.

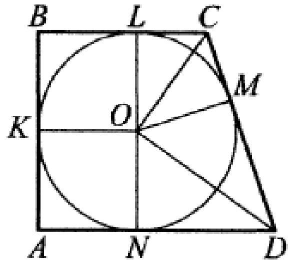


Рис. 2

б) Окружность радиуса R, вписанная в прямоугольную трапецию $ABCD$, касается её сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно (рис. 2). Тогда $AKON$ и $BKOL$ — квадраты, поэтому

$$BL = OL = R,\ AN = ON = R.$$

Значит,

$$CM = CL = BC - BL = 5 - R,$$
$$DM = DN = AD - AN = 7 - R.$$

Отрезок $OM = R$ — высота прямоугольного треугольника COD, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $OM^2 = CM\ DM$, то есть $R^2 = (5-R)(7-R)$. Откуда находим, что $R = \frac{35}{12}$. Следовательно, площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot AB = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot 2R = 6\cdot\frac{35}{6} = 35.$$

Ответ: б) 35.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

Решение.

а) Вписанные углы BAC и DAC опираются на равные хорды, поэтому они равны (рис. 1). Вписанные углы ADB и ACB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ADP = \angle ADB = \angle ACB$. Значит, треугольники ADP и ACB подобны по двум углам. Следовательно,

$$AB : BC = AP : PD.$$

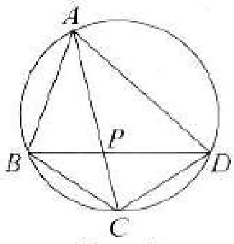


Рис. 1

б) Точки A и C лежат на окружности с диаметром BD, значит, треугольники ABD и BCD прямоугольные (рис. 2). Кроме того, по условию треугольник BCD равнобедренный, поэтому $BD = BC \cdot \sqrt{2} = 12$. Катет AB прямоугольного треугольника ABD равен половине гипотенузы BD, поэтому

$$\angle ADB = 30°,\ \angle ABD = 60°.$$

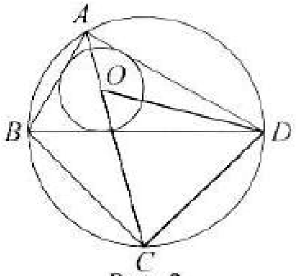


Рис. 2

Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения его биссектрис, поэтому точка O лежит на биссектрисе AC угла BAD и на биссектрисе угла ADB. Тогда

$$\angle ACD = \angle ABD = 60°,\ \angle ODB = \frac{1}{2}\angle ADB = 15°;$$

$$\angle ODC = \angle ODB + \angle BDC = 15° + 45° = 60°.$$

Следовательно, треугольник COD равносторонний, причём $CD = BC = 6\sqrt{2}$. Следовательно, площадь треугольника COD равна $18\sqrt{3}$.

Ответ: б) $18\sqrt{3}$.

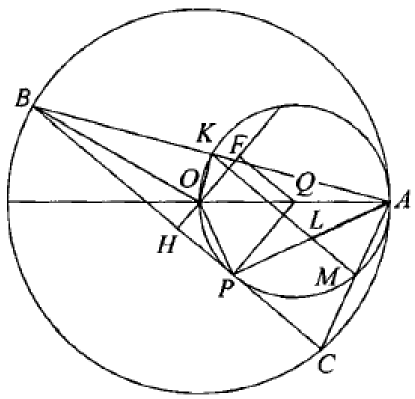
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

Решение.



а) Пусть O — центр большей окружности. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, поэтому OA — диаметр меньшей окружности.

Точка K лежит на окружности с диаметром OA, значит, $\angle AKO = 90°$. Отрезок OK — перпендикуляр, опущенный из центра большей окружности на хорду AB. Поэтому K — середина AB. Аналогично, M — середина AC, поэтому KM — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, прямые MK и BC параллельны.

б) Опустим перпендикуляр OH на хорду BC. Тогда H — середина BC. Из прямоугольного треугольника OHB находим, что

$$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{676 - 576} = 10.$$

Пусть Q — центр меньшей окружности. Тогда прямые QP и OH параллельны. Опустим перпендикуляр QF из центра меньшей окружности на прямую OH. Тогда

$$OF = FH - OH = QP - OH = 13 - 10 = 3;$$

$$PH^2 = QF^2 = QO^2 - OF^2 = 169 - 9 = 160;$$

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = 100 + 160 = 260,$$

а из прямоугольного треугольника APO находим, что

$$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{676 - 260} = 4\sqrt{26}.$$

Отрезок KM — средняя линия треугольника ABC, поэтому L — середина AP. Следовательно,

$$AL = \frac{1}{2}AP = 2\sqrt{26}.$$

Ответ: б) $2\sqrt{26}$.

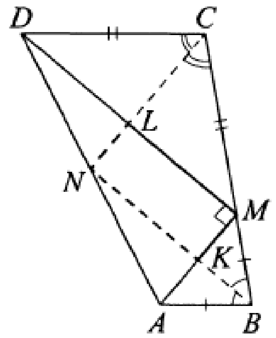
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC=3:4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 24.

Решение.



а) Пусть K — середина отрезка AM. Треугольник AMB равнобедренный, поэтому отрезок BK является в нём медианой, биссектрисой и высотой. Поскольку прямые DM и AM перпендикулярны, прямая KB содержит среднюю линию треугольника AMD, то есть проходит через середину стороны AD. Аналогично, биссектриса угла MCD тоже проходит через середину стороны AD. Следовательно, биссектрисы углов B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть прямые AM и BN пересекаются в точке K, а прямые DM и CN — в точке L. Тогда четырёхугольник $KMLN$ — прямоугольник. Площадь треугольника AMB равна

$$S_{ABM} = BK\ \ KM = \frac{BM}{MC}\cdot NK\cdot KM = \frac{3}{4}S_{KMLN} = 18.$$

Аналогично, $S_{DCM} = 32$. Площадь треугольника DMA равна

$$S_{DMA} = \frac{1}{2}\ AM\ \ DM = 2\ \ KM\cdot LM = 2S_{KMLN} = 48.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = S_{DMA} + S_{AMB} + S_{DMC} = 48 + 18 + 32 = 98.$$

Ответ: б) 98.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3