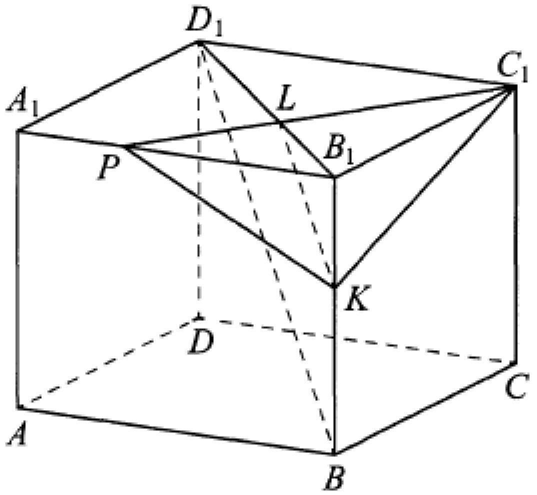
16 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:3$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

Решение.



а) Проведём через точку K прямую, параллельную BD_1. Пусть эта прямая пересекает плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке L. Прямая KL лежит в плоскости BB_1D_1, значит, точка L лежит на диагонали B_1D_1. Более того, $B_1L:LD_1=B_1K:KB=3:4$.

Прямая C_1L пересекает ребро A_1B_1 в точке P, принадлежащей плоскости α. Треугольники B_1LP и D_1LC_1 подобны, поэтому $B_1P:D_1C_1=B_1L:D_1L=3:4$. Значит, $A_1P:PB_1=1:3$.

б) Объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 343. Объём тетраэдра PKC_1B_1 равен

$$\frac{1}{6}B_1P\cdot B_1C_1\cdot B_1K=\frac{3}{56}B_1A_1\cdot B_1C_1\cdot B_1B=\frac{147}{8}.$$

Значит, объём оставшейся части равен $\frac{2597}{8}$.

Ответ: б) $\frac{2597}{8}$.

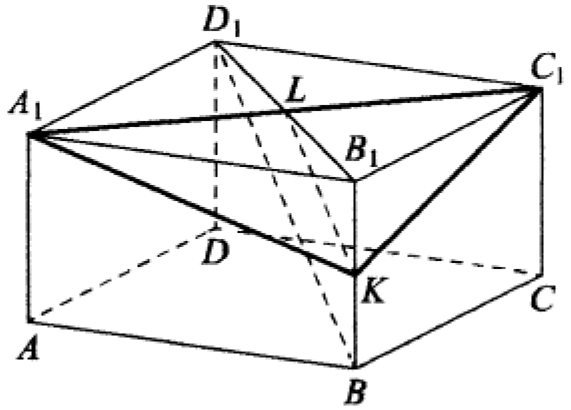
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K — середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

Решение.



а) В треугольнике BB_1D_1 проведём среднюю линию KL. Точка L лежит в плоскости α, поскольку прямые KL и BD_1 параллельны.

В квадрате $A_1B_1C_1D_1$ точка L является серединой диагонали B_1D_1, значит, она также является серединой диагонали A_1C_1, а искомым сечением является треугольник A_1KC_1.

Прямоугольные треугольники A_1B_1K и C_1B_1K равны по двум катетам. Следовательно, $A_1K = C_1K$.

б) В прямоугольных треугольниках $A_1B_1C_1$ и C_1B_1K:

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2} = 10 \text{ и } A_1K = C_1K = \sqrt{B_1C_1^2 + B_1K^2} = 8.$$

Искомый периметр равен 26.

Ответ: б) 26.

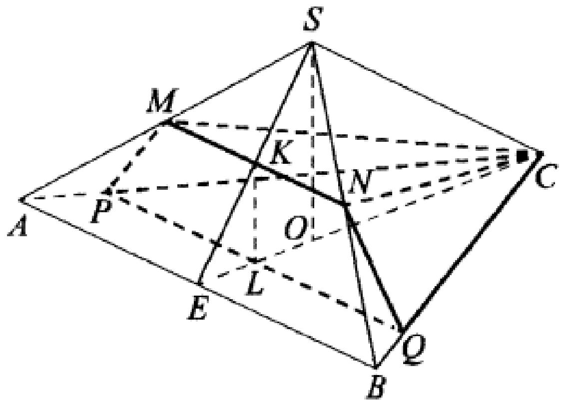
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Значит, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE=5:1$.

б) Прямая CL перпендикулярна KL и PQ. Значит, CL — высота пирамиды $CMNQP$. Эта высота равна $CL=\dfrac{5CE}{6}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$. В трапеции $MNQP$ имеем:

$$MN=\frac{AB}{2}=15,\ PQ=\frac{5AB}{6}=25,\ KL=\frac{SO}{2}=\frac{\sqrt{SC^2-CO^2}}{2}=11.$$

Значит, площадь трапеции $MNQP$ равна $\dfrac{MN+PQ}{2}\cdot KL=220$. Объём пирамиды $CMNQP$ равен $\dfrac{2750\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: б) $\dfrac{2750\sqrt{3}}{3}$.

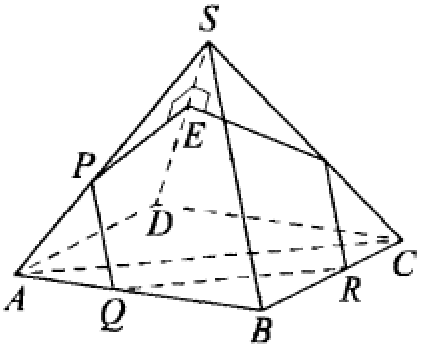
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

Решение.



а) Стороны треугольника SBD равны 5, 5 и $5\sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный, то есть прямая DS перпендикулярна прямой SB. Поскольку прямые SB и PQ параллельны, прямая DS перпендикулярна прямой PQ. Прямая AC перпендикулярна прямой BD, и по теореме о трёх перпендикулярах прямая AC перпендикулярна прямой SD, а значит, и прямая QR перпендикулярна прямой SD. Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Пусть плоскость PQR пересекает ребро SD в точке E. Из доказанного следует. что прямая PE перпендикулярна прямой SD, откуда

$$SE = SP\cos 60^\circ = \frac{3}{2}.$$

Значит, $DE = SD - SE = \frac{7}{2}$.

Поскольку плоскость PQR перпендикулярна ребру SD, искомое расстояние равно DE.

Ответ: б) $\frac{7}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

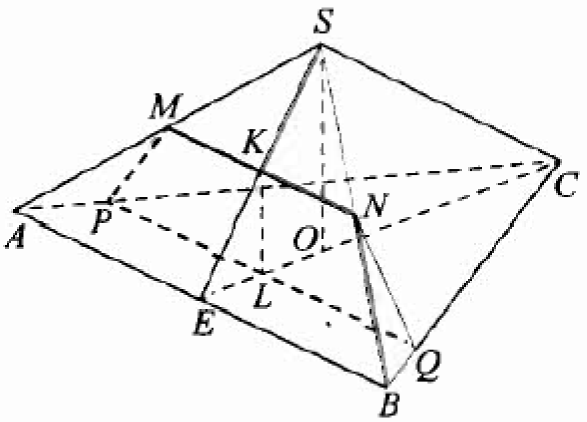
16 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Значит, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE=5:1$.



б) В трапеции $MNQP$ имеем:

$$MN=\frac{AB}{2}=12,\ PQ=\frac{5AB}{6}=20,\ KL=\frac{SO}{2}=\frac{\sqrt{SC^2-CO^2}}{2}=\frac{13}{2}.$$

Значит, площадь трапеции $MNQP$ равна $\dfrac{MN+PQ}{2}\cdot KL=104$.

Ответ: б) 104.

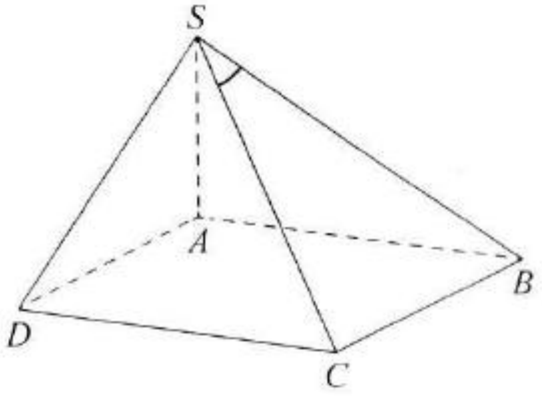
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SB=2\sqrt{3}$, $SD=\sqrt{11}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Решение.



а) В треугольнике SAB имеем:

$$SB^2=12=7+5=SA^2+AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB. Аналогично, из равенства $SD^2=11=7+4=SA^2+AD^2$ получаем, что $\angle SAD=90°$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, прямая SA перпендикулярна плоскости ABD.

б) Прямая BC перпендикулярна прямым SA и AB, значит, она перпендикулярна плоскости ASB, а искомый угол равен углу BSC.

Из прямоугольного треугольника BCS получаем: $\operatorname{tg}\angle BSC=\frac{BC}{SB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\angle BSC=30°$.

Ответ: б) $30°$.

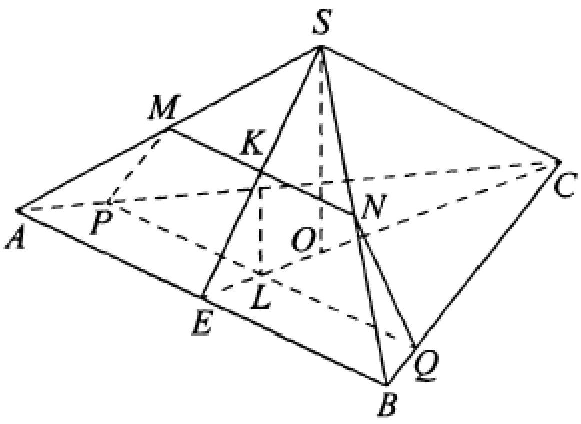
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Следовательно, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении 2 1. Значит, $CL:LE=5:1$.

б) Прямая CE перпендикулярна KL и PQ, поэтому прямая CE перпендикулярна плоскости MNQ. Прямые AB и PQ параллельны, значит, расстояние от вершины A до плоскости сечения равно расстоянию от точки E до плоскости сечения, то есть $EL=\frac{CE}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2