20 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2-xy-7y+4x+12\right)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}}=0, \\ a=x+y \end{cases}$$

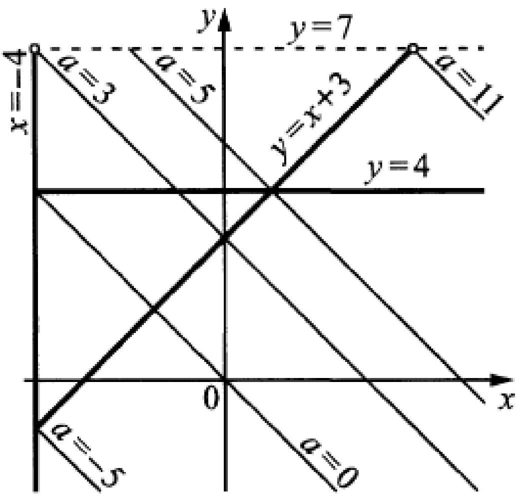
имеет единственное решение.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-4)(y-3-x)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}}=0.$$

При $x<-4$ и $y\geq 7$ левая часть не имеет смысла. При $x\geq -4$ и $y<7$ уравнение задаёт прямые $y=4$, $y=x+3$, $x=-4$ (см. рис.).



При каждом значении a уравнение $a=x+y$ задаёт прямую, параллельную прямой $x+y=0$ или совпадающую с ней. При $x\geq -4$ и $y<7$ такая прямая пересекает прямую $y=4$ при $a\geq 0$, пересекает прямую $y=x+3$ при $-5\leq a<11$, пересекает прямую $x=-4$ при $a<3$. При этом прямая $a=x+y$ проходит через точки пересечения прямых $x=-4$, $y=4$ и $y=x+3$ при $a=-5$, $a=0$ и $a=5$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y=4$, $y=x+3$, $x=-4$ с прямой $a=x+y$ при условиях $x\geq -4$ и $y<7$. Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a\leq -5$; $a=5$; $a\geq 11$.

Ответ: $a\leq -5$; $a=5$; $a\geq 11$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a=11$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-\infty;-5]$ или $[11;+\infty)$, возможно, с исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

20 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y-7)=xy-5(x+2), \\ x\le 6, \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2}=1 \end{cases}$$

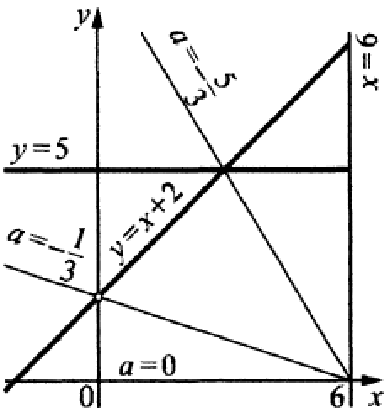
имеет единственное решение.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$y^2-7y-xy+5x+10=0;\ (y-5)(y-2-x)=0.$$

Это уравнение задаёт прямые $y=5$, $y=x+2$ (см. рис.).



При $y\ne 2$ последнее уравнение системы принимает вид $y=a(x-6)$. При каждом значении a уравнение $y=a(x-6)$ задаёт прямую, проходящую через точку $(6;0)$ и не параллельную оси ординат. При $x\le 6$ и $y\ne 2$ такая прямая пересекает прямую $y=5$ при $a<0$, пересекает прямую $y=x+2$ при $a<-\frac{1}{3}$ или $-\frac{1}{3}<a<1$. При этом прямая $y=a(x-6)$ проходит через точку пересечения прямых $y=5$ и $y=x+2$ при $a=-\frac{5}{3}$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y=5$, $y=x+2$ с прямой $y=a(x-6)$ при условиях $x\le 6$ и $y\ne 2$. Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a=-\frac{5}{3}$; $a=-\frac{1}{3}$; $0\le a<1$.

Ответ: $a=-\frac{5}{3}$; $a=-\frac{1}{3}$; $0\le a<1$.

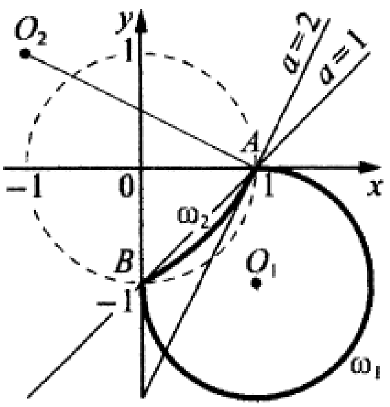
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=1$, $a=0$ и/или $a=-\frac{1}{3}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $[0;1)$ множества значений a, возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

20 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.



Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2+y^2\geq 1$, то получаем уравнение

$$2x-2y-2=x^2+y^2-1,$$
$$x^2-2x+y^2+2y+1=0,$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2=1.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(1;-1)$ и радиусом 1.

2) Если $x^2+y^2\leq 1$, то получаем уравнение

$$2x-2y-2=1-x^2-y^2;\ x^2+2x+y^2-2y-3=0;\ (x+1)^2+(y-1)^2=5.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-1;1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(1;0)$ и $B(0;-1)$, лежащих на окружности $x^2+y^2=1$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.)

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку A и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=1$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=2$ прямая m перпендикулярна прямой O_2A, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{2}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке A и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка A), то есть исходная система имеет два решения.

При $1<a<2$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и еще в одной точке, отличной от точки B, то есть исходная система имеет три решения.

При $0\leq a<1$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2 в точках, отличных от точки A, то есть исходная система имеет одно решение.

При $a<0$ или $a>2$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки A, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $1<a<2$.

Ответ: $1<a<2$.

20 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(y^2-xy+x-3y+2\right)\sqrt{x+3}=0,\\ a-x-y=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде $(y-1)(y-x-2)\sqrt{x+3}=0$. Решения первого уравнения системы совпадают с решениями уравнений $y=1$, $y=x+2$ и $x=-3$ при условии $x\ge -3$.

При $x=-3$ уравнение $a-x-y=0$ имеет единственное решение при любом значении a.

При $y=1$ уравнение $a-x-y=0$ принимает вид $a-x-1=0$, откуда $x=a-1$. С учётом условия $x\ge -3$ получаем, что при $a<-2$ решений нет, а при $a\ge -2$ имеется одно решение.

При $y=x+2$ уравнение $a-x-y=0$ принимает вид $a-x-x-2=0$, откуда $x=\frac{a}{2}-1$. С учётом условия $x\ge -3$ получаем, что при $a<-4$ решений нет, а при $a\ge -4$ имеется одно решение.

Определим значения a, при которых возможны совпадения решений из трёх разобранных выше случаев. Имеем: либо $x=-3$, $y=1$, откуда $a=-2$; либо $x=-3$, $y=x+2=-1$, откуда $a=-4$; либо $y=1$, $y=x+2$, откуда $x=-1$, $a=0$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a\le -4$, имеет два решения при $-4<a\le -2$ и $a=0$, имеет три решения при $-2<a<0$ и $a>0$.

Ответ: $-4<a\le -2$; $a=0$.

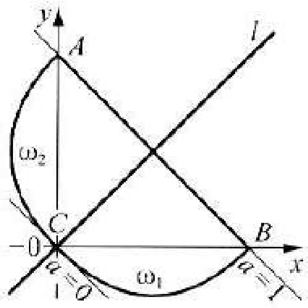
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=-4$ и/или $a=-2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-4;-2)$ множества значений a, возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Верно найдено хотя бы одно из значений a: $a=-2$ или $a=0$; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

20 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|x^2-2x\right|-x^2=\left|y^2-2y\right|-y^2, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.



Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим четыре случая:

1) Если $x^2-2x\le 0$ и $y^2-2y\le 0$, то получаем уравнение

$$-x^2+2x-x^2=-y^2+2y-y^2;\ y^2-x^2-y+x=0;$$
$$(y-x)(x+y-1)=0.$$

Полученное уравнение задаёт пару прямых $y=x$ и $x+y=1$.

2) Если $x^2-2x\le 0$ и $y^2-2y\ge 0$, то получаем уравнение

$$-x^2+2x-x^2=y^2-2y-y^2;\ y=x^2-x.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $y=x^2-x$.

3) Если $x^2-2x\ge 0$ и $y^2-2y\le 0$, то получаем уравнение

$$x^2-2x-x^2=-y^2+2y-y^2;\ x=y^2-y.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $x=y^2-y$.

4) Если $x^2-2x\ge 0$ и $y^2-2y\ge 0$, то получаем уравнение

$$x^2-2x-x^2=y^2-2y-y^2;\ y=x.$$

Полученное уравнение задаёт прямую $y=x$.

Точки $A(0;1)$, $B(1;0)$ и $C(0;0)$ являются точками пересечения полученных парабол с полученными прямыми и лежат на прямых $x=0$ и/или $y=0$, поэтому искомое множество состоит из прямой l, задаваемой уравнением $y=x$, отрезка AB прямой $x+y=1$, дуги ω_1 параболы $y=x^2-x$ с концами в точках B и C и дуги ω_2 параболы $x=y^2-y$ с концами в точках A и C (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямой AB или совпадающую с ней.

Заметим, что при $a=0$ прямая m касается парабол $x=y^2-y$ и $y=x^2-x$ в точке C.

При $a=1$ прямая m содержит отрезок AB, то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $a=0$ прямая m касается дуг ω_1 и ω_2 в точке C, пересекает прямую l в точке C и не пересекает отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение.

При $0<a<1$ прямая m не пересекает отрезок AB, пересекает прямую l в точке, отличной от точки C, и пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в одной точке, отличной от точки C, то есть исходная система имеет три решения.

При $a<0$ или $a>1$ прямая m пересекает прямую l в одной точке и не пересекает дуги ω_1 и ω_2 и отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $0<a\le 1$.

Ответ: $0<a\le 1$.

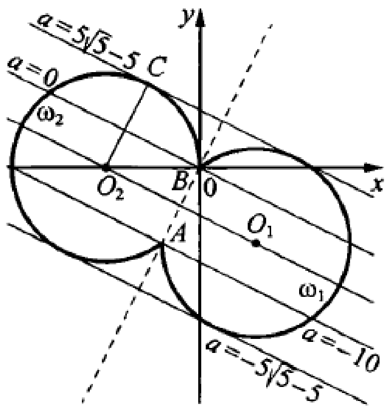
20 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2+4y=4|2x-y|, \\ x+2y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим два случая:

1) Если $2x-y\geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+2x+y^2+4y=8x-4y;$$

$$x^2-6x+y^2+8y=0;$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(3;-4)$ и радиусом 5.

2) Если $2x-y\leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+2x+y^2+4y=4y-8x;\ (x+5)^2+y^2=25.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-5;0)$ и радиусом 5.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-2;-4)$ и $B(0;0)$, лежащих на прямой $2x-y=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Заметим, что точка $C\left(\sqrt{5}-5;2\sqrt{5}\right)$ лежит на дуге ω_2 и прямая O_2C перпендикулярна прямой O_1O_2.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямой O_1O_2 или совпадающую с ней.

При $a=0$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки B, то есть исходная система имеет три решения.

Аналогично, при $a=-10$ прямая m проходит через точку A и исходная система имеет три решения.

При $a=5\sqrt{5}-5$ прямая m проходит через точку C, значит, прямая m касается дуг ω_2 и ω_1, то есть исходная система имеет два решения.

Аналогично, при $a=-5\sqrt{5}-5$ прямая m касается дуг ω_2 и ω_1, то есть исходная система имеет два решения.

При $-5\sqrt{5}-5<a<-10$ или $0<a<5\sqrt{5}-5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в двух точках, отличных от точек A и B, то есть исходная система имеет четыре решения.

При $-10<a<0$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке, отличной от точек A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-5\sqrt{5}-5$ или $a>5\sqrt{5}-5$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2, то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $-5\sqrt{5}-5<a\leq-10$ или $0\leq a<5\sqrt{5}-5$.

Ответ: $-5\sqrt{5}-5<a\leq-10$; $0\leq a<5\sqrt{5}-5$.