# Cálculo vectorial 4 de julio de 2017

1. Sea la función $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy^3\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   (a) Estudiar la continuidad de $f$ en $\mathbf{R}^2$.
   (b) Calcular las primeras derivadas parciales.
   (c) Estudiar si $f$ es diferenciable y si es de clase $C^1$.
   (d) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto correspondiente a $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

2. Sean $A=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq z^2,\quad 0\leq z\leq 1\}$ y $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xz-z$

   (a) Estudiar el carácter de los puntos críticos de $f$ en el interior de $A$.
   (b) Justificar la existendia de extremos absolutos de la función $f$ en $A$ y calcularlos.

3. Calcular el volumen de la región:

$$A=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leq 9,\quad x^2+y^2\leq 4\}$$

4. Sea $A=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 2-x-y\}$ y sean $S_1$, $S_2$ y $S_3$ superficies de $\mathbf{R}^3$ definidas por:

$$\begin{cases} S_1=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=1,\ 0\leq z\leq 2-x-y\}\\ S_2=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq 1,\ z=0\}\\ S_3=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq 1,\ z=2-x-y\}\end{cases}$$

   Consideremos además el campo vectorial $f(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$.

   (a) Calcular $\oint_C f d\vec{l}$ donde $C$ es la curva definida por $\begin{cases} x^2+y^2 &= 1\\ x+y+z &= 2\end{cases}$
   (b) Calcular $\displaystyle\int_{S_1}\mathrm{rot} f d\vec{S}$, $\displaystyle\int_{S_2}\mathrm{rot} f d\vec{S}$ y $\displaystyle\int_{S_3}\mathrm{rot} f d\vec{S}$. Indicar el sentido en que se han calculado los flujos.
   (c) Indicar, si ha lugar, los teoremas de integración empleados al resolver el apartado anterior.

---

**Resolució**

1. (a) A $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ la funció $1/(x^2+y^2)$ és $C^\infty$, perquè és un quocient de funcions $C^\infty$ amb denominador no nul. Llavors $f$ és $C^\infty$ a $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ perquè hi és una composició i producte de funcions $C^\infty$. En particular, hi és contínua.
   A $(0,0)$ també és contínua perquè

$$0\leq|f(x,y)-f(0,0)|=|xy^3|\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq|xy^3|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0.$$

   (b) Les derivades parcials a $(0,0)$ són

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

En els punts $(x,y) \neq (0,0)$ la funció és $C^\infty$ i hi podem aplicar les regles de derivació:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^3 \cos\frac{1}{x^2+y^2} + xy^3 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3xy^2 \cos\frac{1}{x^2+y^2} + xy^3 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(c) Com $f$ és $C^\infty$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, també hi és $C^1$. Només resta estudiar què passa a $(0,0)$. Comprovem que les derivades parcials són contínues a $(0,0)$. Llavors $f$ serà $C^1$ a $\mathbb{R}^2$. En particular, també diferenciable.
En efecte, com $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, tenim que

$$\begin{aligned}
0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &\leq \left|y^3 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| + \left|\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\\
&\leq \left|y^3\right| + \left|\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right|\\
&\leq \left|y^3\right| + \left|\frac{2(x^2+y^2)(x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)^2}\right|\\
&\leq \left|y^3\right| + 2|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.
\end{aligned}$$

La continuïtat de la derivada respecte a $y$ es comprova anàlogament.

(d) És

$$\begin{aligned}
z &= f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + Df\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\begin{pmatrix} x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ y - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{4\pi^2} - ((2\pi)^{-3/2}, 3(2\pi)^{-3/2})\begin{pmatrix} x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ y - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. (a) Els punts crítics són les solucions de $Df(x,y,z) = (0,0,0)$. Es comprova immediatament que l'únic punt crític de $f$ és $p_1 = (-1/3, 0, 2/3)$, que pertany a $A$. Per a estudiar el seu caràcter, calculem la matriu

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicant el criteri de Sylvester, com $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$ i $\Delta_3 = 6 > 0$, aquesta matriu és definida positiva i, per tant, el punt crític és un mínim local.

(b) En primer lloc observem que $A$ és un conjunt tancat, perquè ve definit mitjançant desigualtats no estrictes entre funcions contínues a $\mathbb{R}^3$, que és tancat. A més, si $(x,y,z) \in A$ satisfà $0 \leq z \leq 1$ i, llavors

$$x^2 + y^2 = z^2 \leq 1 \implies -1 \leq x, y \leq 1.$$

És a dir, $A$ és fitat. Finalment, com $f$ és contínua a $\mathbb{R}^3$ (és un polinomi), ho és a $A$. El teorema de Weierstrass assegura que $f$ té extrems absoluts a $A$.

Calculem-los. El primer candidat és un punt crític $p$ trobat a l'apartat anterior. La resta de candidats hauran d'estar a la frontera de $A$:

$$\begin{aligned}
FrA = &\{(z,y,z) \mid x^2+y^2 = z^2,\ 0 < z < 1\}\\
&\cup \{(z,y,z) \mid x^2+y^2 < 1,\ z = 1\}\\
&\cup \{(z,y,z) \mid x^2+y^2 < 0,\ z = 0\}\\
&\cup \{(z,y,z) \mid x^2+y^2 = z^2,\ z = 1\}\\
&\cup \{(z,y,z) \mid x^2+y^2 = z^2,\ z = 0\}
\end{aligned}$$

Clarament, el tercer conjunt és buit. Els dos primers són dues cares que delimiten $A$ i els dos darrers, arestes, encara que el darrer és només un punt.

Candidats a $\{(z,y,z) \mid x^2+y^2=z^2,\ 0<z<1\}$. Són els extrems de $f$ condicionats a $x^2+y^2=z^2$ tals que $0<z<1$. Els trobem mitjançant multiplicadors de Lagrange. Hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} x^2+y^2-z^2 &= 0 \\ 2x+z &= 2\lambda x \\ 2y &= 2\lambda y \\ 2z+x-1 &= -2\lambda z \end{aligned}$$

Per a resoldre'l, observem que de la 3a equació es dedueix que o bé $\lambda=1$, que no pot ser perquè llavors, de la 2a, tenim que $z=0$ i, de la 4a, que $x=1$, que no és solució de la 1a, o bé que $y=0$. Com $y=0$, el sistema queda

$$\begin{aligned} x^2 &= z^2 \\ 2x+z &= 2\lambda x \\ 2z+x-1 &= -2\lambda z \end{aligned}$$

Ara, de la 1a tenim que $z=\pm x$. Si $x=z$, es dedueix immediatament que l'única solució és $p_2=(1/6,0,1/6)$. Si $z=-x$, el punt $p_3=(-1/2,0,1/2)$. Tots dos satisfan la condició $0<z<1$.

Candidats a $\{(z,y,z) \mid x^2+y^2<1,\ z=1\}$. N'hi ha prou en obtenir els punts crítics de $g(x,y)=f(x,y,1)=x^2+y^2+x$ amb $x^2+y^2<1$. L'únic punt crític de $g$ és $p_4=(-1/2,0,1)$, que satisfà la condició requerida.

Candidats a $\{(z,y,z) \mid x^2+y^2=z^2,\ z=1\}$. Aquest conjunt és una corba. Una parametrització n'és $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,1)$. Hem de buscar els punts crítics de $h(t)=f(\gamma(t))=\cos t+1$, que estan a $t=0,\pi$. Per tant, tenim nous candidats $p_5=\gamma(0)=(1,0,1)$ i $p_6=\gamma(\pi)=(0,1,1)$.

L'únic punt a $\{(z,y,z) \mid x^2+y^2=z^2,\ z=0\}$ és $p_7=(0,0,0)$, que afegim a la llista de candidats.

Avaluant en tots els punts obtinguts tenim que el màxim val 2, a $p_5$, i el mínim val $-3/4$, a $p_4$.

3. Hem de calcular el volum de la regió limitada per les gràfiques de les funcions $\sqrt{9-x^2-y^2}$ i $-\sqrt{9-x^2-y^2}$ amb $x^2+y^2\leq 4$, es a dir, fent servir coordenades polars,

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2\leq 2^2\}} 2\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 2\sqrt{9-r^2}\,r\,drd\theta \\ &= 2\pi\left(-\frac{2}{3}(9-r^2)^{3/2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} \\ &= 2\pi\left(18-\frac{10\sqrt{5}}{3}\right). \end{aligned}$$

4. (a) Una parametrització de la corba $C$ és $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,2-\cos t-\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$. Per tant

$$\oint_\gamma \mathbf{f}\cdot d\ell = \int_0^{2\pi}\langle \mathbf{f}(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi}(\cos^2 t+2\sin t-2\cos t)\,dt=\pi.$$

(b) Com les superfícies són la vora de $A$, les orientem amb la normal exterior. Tenim que, com $\partial S_3=C$ (amb la orientació que pertoca), pel teorema de Stokes,

$$\int_{S_3}\operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\int_{\partial S_3}\mathbf{f}\cdot d\ell=\int_C \mathbf{f}\cdot d\ell=\pi.$$

Per altra banda, com $\operatorname{rot}\mathbf{f}=(1,-1,1)$ i $S_2$ és una circumferència al pla $z=0$ (orientat amb la normal cap avall, i per tant, amb vector normal $\mathbf{N}=(0,0,-1)$),

$$\int_{S_2}\operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\int_{S_2}\operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\,dS=-\int_{S_2}dS=-\text{àrea}\,(S_2)=-\pi.$$

Finalment, com $\partial A = S_1 + S_2 + S_3$, tenim que la supefície $S_1 + S_2 + S_3$ no té vora i, pel teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S_1+S_2+S_3} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \\ = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} - \pi + \pi = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$