Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona — UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA	**Circuits i Sistemes Lineals – Examen Final** 31 de maig de 2016, de 11:15h a 14:15h
— Departament de TSC —	Notes provisionals . . . . 15 de juny de 2016 Període d'al·legacions . . . . 15-16 de juny de 2016 Notes definitives . . . . 18 de juny de 2016

Professors: **J.García, O.Mas, O.Muñoz i M.Sanz** Durada: 3h Consultes sobre l'examen: **17 de juny de 2016**

P1. (3,5 punts) En la figura 1 es representa l'espectre del senyal captat per una antena en la banda de freqüències corresponents a les emissions en freqüència modulada (FM) a la localitat de Saskatoon (Canadà). Cadascun dels 7 pics correspon a una emissora particular, de la qual es destaca la freqüència d'emissió (en MHz).

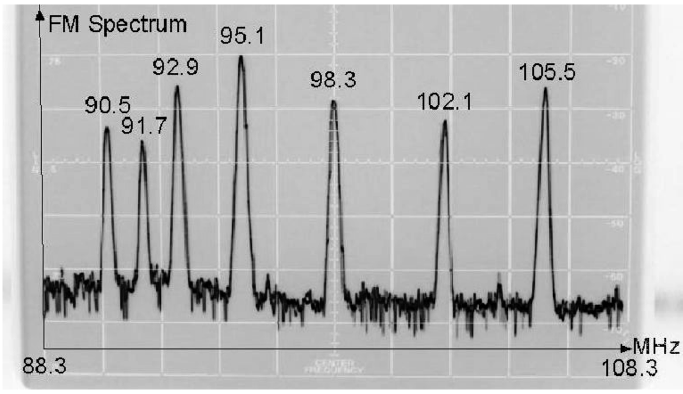

Figura 1: Espectre del senyal captat per l'antena

a) Suposant que volem seleccionar l'emissora de 91,7 MHz amb un filtre passa-banda, indiqueu quin Q haurà de tenir aquest filtre si ha de tenir una amplada de banda igual al de l'emissió FM que volem capturar, la qual típicament és de 150 kHz.

Atès que el Q del filtre surt elevat (superior a 500) serà difícil realitzar-lo amb un filtre LC passiu convencional, i caldrà recórrer a altres tècniques. Una d'elles és la que es mostra a la figura 2, en la qual s'ha afegit al filtre passa-banda una font controlada i una resistència R_x.

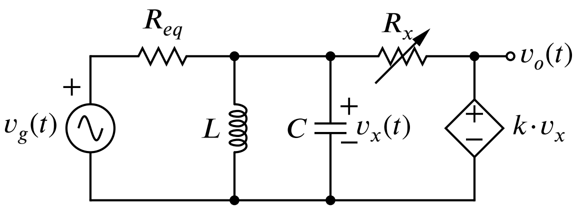

Figura 2: Model simplificat del circuit captador

b) Demostreu que la funció de xarxa del circuit, $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)}$, es pot posar de la forma següent:

$$H(s) = \frac{k \cdot \frac{1}{R_{eq}C}\, s}{s^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1-k}{R_x}\right) s + \frac{1}{LC}}$$

c) Prenent $C = 3\,\text{pF}$, $L = 1\,\mu\text{H}$, $R_{eq} = 13{,}3\,\text{k}\Omega$ i $k = 30$, determineu a quin valor caldria ajustar el resistor R_x per tal d'aconseguir el factor de qualitat desitjat. Fet això, calculeu l'amplificació màxima del circuit, H_{max}.

d) Suposant que el senyal emès per cada emissora és sinusoïdal, i que en captar-lo ens arriba amb les amplituds que es mostren a la taula, ompliu l'esmentada taula amb els valors que falten.

f	$\lvert V_g \rvert$ (pic)	$\lvert H(\mathrm{j}2\pi f) \rvert$	$\lvert V_o \rvert$ (pic)
91,7 MHz	4,02 mV		
92,9 MHz	7,5 mV		

Solució:

a) En un filtre passa-banda, la relació que hi ha entre l'amplada de banda i el factor de qualitat és:

$$Q = \frac{\omega_o}{\mathrm{BW}|_{\mathrm{rad/s}}} = \frac{\cancel{2\pi} f_o}{\cancel{2\pi}\, \mathrm{BW}|_{\mathrm{Hz}}}$$

essent f_o la freqüència central del filtre, que haurà de ser igual a la de l'emissora que volem captar. Així, amb les dades del problema, el factor de qualitat necessari és de:

$$\boxed{Q = \frac{91{,}7 \times 10^6\ \mathrm{Hz}}{150 \times 10^3\ \mathrm{Hz}} = 611{,}3}$$

b) Atesa l'estructura del circuit, el mètode d'anàlisi més ràpid és aplicar un KCL al node central:

$$G_{eq}\left(V_x - V_g\right) + \frac{1}{Ls}V_x + CsV_x + G_x\left(V_x - kV_x\right) = 0$$

$$\left[G_{eq} + \frac{1}{Ls} + Cs + G_x\left(1-k\right)\right] V_x = G_{eq}V_g$$

$$V_x = \frac{G_{eq}}{\left[G_{eq} + \frac{1}{Ls} + Cs + G_x\left(1-k\right)\right]}V_g$$

$$V_x = \frac{\frac{G_{eq}}{C}s}{\frac{G_{eq}}{C}s + \frac{1}{LC} + s^2 + \frac{G_x(1-k)}{C}s}V_g$$

$$V_x = \frac{\frac{1}{R_{eq}C}s}{s^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1-k}{R_x}\right)s + \frac{1}{LC}}V_g$$

I, finalment, la funció de xarxa demanada queda:

$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{k \cdot V_x(s)}{V_g(s)} = \frac{k \cdot \frac{1}{R_{eq}C}s}{s^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1-k}{R_x}\right)s + \frac{1}{LC}}} \tag{1}$$

c) La forma genèrica de la funció de xarxa d'un filtre passa-banda és:

$$H(s) = \frac{H_{\text{màx}} \cdot \mathrm{BW} \cdot s}{s^2 + \mathrm{BW} \cdot s + \omega_o^2} \tag{2}$$

De la funció de xarxa (1) coneixem tots els valors excepte R_x, però aquest el podrem determinar igualant el terme central del polinomi denominador de (2) a l'amplada de banda requerit (que en aquest cas hem d'expressar en rad/s):

$$\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1-k}{R_x}\right) = 2\pi \cdot 150\,\mathrm{kHz}$$

$$\frac{1-k}{R_x} = 2\pi 150 \times 10^3 \cdot C - \frac{1}{R_{eq}}$$

$$\frac{1-30}{R_x} = 2\pi 150 \times 10^3 \cdot 3 \times 10^{-12} - \frac{1}{13.300}$$

$$\boxed{R_x = \frac{-29}{-7{,}236 \times 10^{-5}} = 400{,}771\ \mathrm{k\Omega}}$$

Trobat aquest valor, la funció de xarxa queda, numèricament:

$$H(s) = \frac{751.879.700\, s}{s^2 + 942.478\, s + 3{,}3197 \times 10^{17}}$$

i atenent a l'equació (2), $H_{\text{màx}}$ la calculem dividint el coeficient del numerador entre el coeficient del terme central del denominador:

$$\boxed{H_{\text{màx}} = \frac{751.879.700}{942.478} = 797{,}76}$$

d) L'amplificació màxima del circuit es dóna a la freqüència de 91,7 MHz[1]. En l'apartat anterior hem obtingut el seu valor: $H_{\text{màx}} = 797{,}76$. Sabent-lo calcularem la tensió de sortida com:

$$|\bar{V}_o| = H_{\text{màx}} \cdot |\bar{V}_g| = 797{,}76 \cdot 4{,}02 \times 10^{-3}\,\text{mV} = 3{,}2\,\text{V}$$

L'amplificació a 92,9 MHz la calcularem usant l'expressió de l'amplificació d'un passa-banda en funció de la freqüència:

$$|H(\mathrm{j}2\pi f)| = \frac{H_{\text{màx}}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f}\right)^2}} \tag{3}$$

Així, en el nostre cas:

$$|H(\mathrm{j}2\pi f)| = \frac{797{,}76}{\sqrt{1 + 611{,}3^2\left(\frac{92{,}9}{91{,}7} - \frac{91{,}7}{92{,}9}\right)^2}} = 50{,}08$$

Finalment la taula demanada queda:

f	$\lvert V_g\rvert$ (pic)	$\lvert H(\mathrm{j}2\pi f)\rvert$	$\lvert V_o\rvert$ (pic)
91,7 MHz	4,02 mV	797,76	3,2 V
92,9 MHz	7,5 mV	$\simeq 50$	0,375 V

NOTA: En cas d'haver agafat $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 91{,}8\,\text{MHz}$ (vegeu la nota al peu de pàgina) i aplicat la fórmula (3) per les dues freqüències demanades, la taula queda de la següent manera:

f	$\lvert V_g\rvert$ (pic)	$\lvert H(\mathrm{j}2\pi f)\rvert$	$\lvert V_o\rvert$ (pic)
91,7 MHz	4,02 mV	285,63	1,148 V
92,9 MHz	7,5 mV	$\simeq 59{,}2$	0,444 V

resultat que també es considerarà vàlid.

⁎

[1] Estrictament hauríem de dir que $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 91{,}8\,\text{MHz}$. Podríem pensar a negligir la diferència, atès que l'error comès és només del 0,1 %, però malauradament en aquest circuit fins i tot aquestes petites diferències acaben donant amplificacions molt diferents ja que el factor de qualitat que es busca és molt elevat.

En qualsevol cas, seria molt difícil aconseguir aquests valors de capacitat i inductància tan precisos utilitzant components comercials, que presenten unes toleràncies força elevades, de manera que en un cas pràctic caldria ajustar la freqüència de ressonància del filtre **manualment**, utilitzant un condensador i/o una bobina variables.

Per aquest motiu, si algú ha calculat correctament els resultats agafant $f_o = 91{,}8\,\text{MHz}$, també se li consideraran vàlids.

P2. (3,5 punts) El circuit de la figura 3 és un control actiu de greus i aguts que permet regular de forma independent el guany a la banda baixa i a la banda alta de l'espectre audible: variant la posició del cursor del potenciòmetre R_2 ajustem el guany pels **greus** i variant la posició del cursor del potenciòmetre R_4 ajustem el guany pels **aguts**.

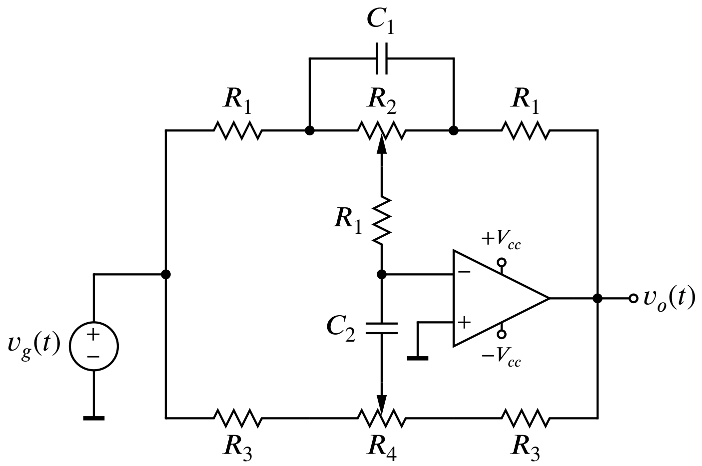

Figura 3: Circuit actiu per al control simultani de greus i aguts

La funció de xarxa depèn dels valors dels components (que en aquest cas són: $R_1 = 11\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 100\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 3{,}3\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 500\,\text{k}\Omega$, $C_1 = 47\,\text{nF}$ i $C_2 = 4{,}7\,\text{nF}$) i de la posició dels cursors dels potenciòmetres.

a) Per a una certa configuració (cursor de R_2 al mig i cursor de R_4 a un extrem), la funció de xarxa val:

$$H(s) = -0{,}0969 \cdot \frac{s + 2\pi \times 9700}{s + 2\pi \times 940}$$

Dibuixeu el diagrama de Bode de guany (asimptòtic i amb correccions) amb el màxim detall possible (valor de les asímptotes, pendents, etc.) corresponent a aquesta $H(s)$.

A continuació, per a una altra posició dels cursors dels potenciòmetres R_2 i R_4, obtenim per simulació la resposta en freqüència mostrada a la figura 4. Per a **aquesta nova posició del cursors**, respongueu els següents apartats:

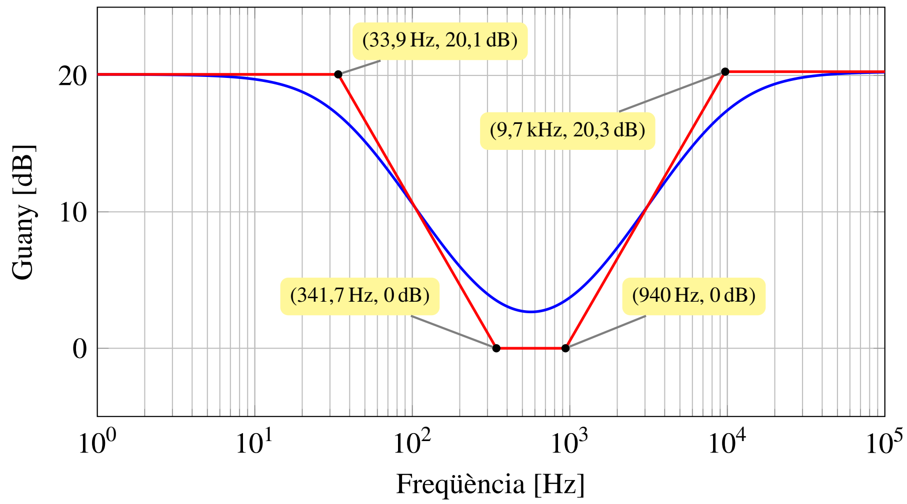

Figura 4: Resposta freqüencial per als apartats b), c) i d)

b) A partir de la corba donada en la figura 4, escriviu com queda ara la funció de xarxa.

c) Atenent al comportament a baixes freqüències, deduïu en quina posició es troba ara el cursor del potenciòmetre R_2. Justifiqueu la resposta raonant sobre el circuit.

d) Basant-vos en el diagrama de Bode de la figura 4, calculeu l'amplitud del senyal de sortida del circuit quan l'excitem amb un senyal sinusoïdal de 3 kHz i amplitud 1 V.

Solució:

a)
- La funció de xarxa donada té un pol i un zero real, per tant, la corba asimptòtica de guany presentarà dues freqüències de colze, una a 940 Hz (deguda al pol) i una altra a 9,7 kHz (deguda al zero).
- Atès que no hi ha cap zero ni pol a l'origen, el diagrama asimptòtic de guany començarà amb pendent nul i en arribar a les freqüències de colze **afegirem** −20 dB/dècada si la freqüència de colze correspon a un pol (real) i +20 dB/dècada si correspon a un zero (real). Així doncs, fins a la freqüència de 940 Hz el pendent de la corba asimptòtica de guany serà 0 dB/dècada, des de 940 Hz fins a 9,7 kHz el pendent serà −20 dB/dècada i a partir de 9,7 kHz el pendent tornarà a ser 0 dB/dècada.
- Per trobar el guany en continua i a altes freqüències podem substituir, a la función de xarxa, s per 0 i per ∞, respectivament:

$$20\log|H(0)| = 20\log\left|-0{,}0969\cdot\frac{2\pi\times 9700}{2\pi\times 940}\right| = 0\,\text{dB}$$

$$20\log|H(\infty)| = 20\log|-0{,}0969| = -20{,}3\,\text{dB}$$

- Pel que fa a la corba de guany real, atès que les dues freqüències de colze estan separades més d'una dècada, la correcció a aplicar és +3 dB si la freqüència de colze correspon a un zero (real) i −3 dB si la freqüència de colze correspon a un pol (real).

Tot això queda representat amb detall a la figura 5.

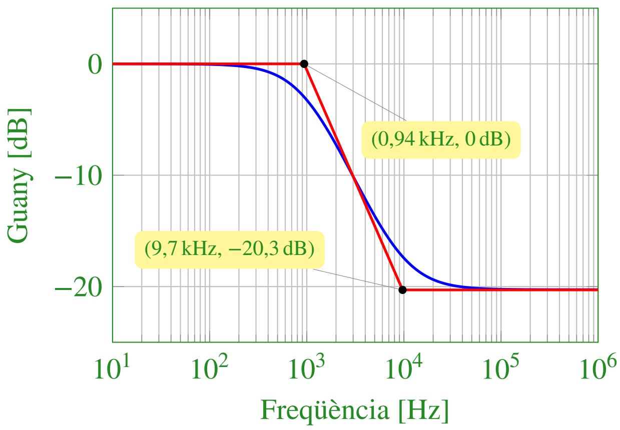

Figura 5: Diagrama de Bode (asimptòtic en vermell i amb correccions en blau) demanat al apartat a)

b) A partir de la corba asimptòtica de guany (corba vermella) de l'enunciat podem deduir el següent:

- A baixes freqüències el pendent de la corba asimptòtica de guany és nul: no hi ha cap zero ni pol a l'origen.
- Entre 33,9 Hz i 341,7 Hz, el pendent val $m = \frac{0-20{,}1}{\log(\frac{341{,}7}{33{,}9})} = -20$ dB/dècada. Aquest decrement de 20 dB/dècada ens indica que hi ha un pol real en $s = -2\pi\times 33,9$.
- Entre 341,7 Hz i 940 Hz el pendent torna a ser 0 dB/dècada. Aquest increment de 20 dB/dècada ens indica que hi ha un zero real en $s = -2\pi\times 341,7$.
- Entre 940 Hz i 9,7 kHz, el pendent val $m = \frac{20{,}3-0}{\log(\frac{9700}{940})} = 20$ dB/dècada. Aquest increment de 20 dB/dècada ens indica que hi ha un zero real en $s = -2\pi\times 940$.
- A partir de 9,7 kHz el pendent torna a ser 0 dB/dècada. Aquest decrement de 20 dB/dècada ens indica que hi ha un pol real en $s = -2\pi\times 9700$.

La funció de xarxa es pot escriure doncs com:

$$H(s) = -k^{'}\cdot\frac{(\frac{s}{2\pi\times 341{,}7}+1)(\frac{s}{2\pi\times 940}+1)}{(\frac{s}{2\pi\times 33{,}9}+1)(\frac{s}{2\pi\times 9700}+1)} = -k\cdot\frac{(s+2\pi\times 341,7)(s+2\pi\times 940)}{(s+2\pi\times 33,9)(s+2\pi\times 9700)}$$

amb $k^{'} = |H(0)| = 10^{\frac{20{,}1}{20}} = 10,11$ i $k = |H(\infty)| = 10^{\frac{20{,}3}{20}} = 10,35$.

c) Tal com s'indica a l'enunciat, el guany a baixes freqüències depèn de la posició del cursor potenciòmetre R_2 i no de la posició del cursor del potenciòmetre R_4.

A baixes freqüències els condensadors C_1 i C_2 es comporten com a circuits oberts. Per tant, no circula corrent per la resistència R_1 i la tensió del node al qual connectem el cursor del potenciòmetre R_2 val 0 V. Plantejant KCL en aquest node tenim:

$$\frac{0-\overline{V}_g}{R_1+\alpha R_2}+\frac{0-\overline{V}_o}{(1-\alpha)R_2+R_1}=0 \rightarrow \overline{V}_o=-\frac{R_1+(1-\alpha)R_2}{R_1+\alpha R_2}\overline{V}_g$$

Si α en val 0, és a dir, cursor a l'extrem més proper a la font $v_g(t)$ i, per tant, tota la resistència del potenciòmetre a la rama de realimentació, el guany val $20\log\frac{R_1+R_2}{R_1}=20{,}1$ dB, que coincideix amb el guany a baixes freqüències del diagrama de Bode de l'enunciat.

Una altra manera de justificar la solució hauria estat adonar-se que, atès que els condensadors C_1 i C_2 es comporten com a circuits oberts i no hi circula corrent per R_2, el circuit es comporta com un amplificador inversor (la branca $R_3-R_4-R_3$ és supèrflua per al càlcul de la sortida a baixes freqüències). Si el cursor del potènciometre R_2 es troba a l'extrem més proper a la font $v_g(t)$, el guany val $20\log\frac{R_1+R_2}{R_1}=20{,}1$ dB.

d) A la freqüència de 3 kHz el guany del circuit és 10 dB. Per tant, l'amplitud a la sortida val:

$$\left|\overline{V}_o\right|=10^{10/20}\cdot 1=3{,}16\text{ V}$$

⁂

P3. (3 punts) En aquest exercici es tracta d'estudiar el circuit de la figura 6 des del punt de vista de la seva resposta temporal.

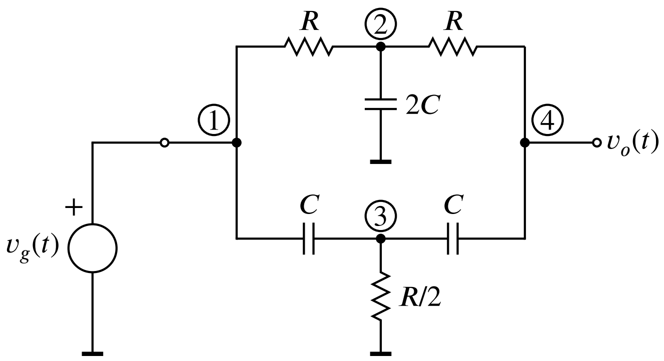

Figura 6: Circuit sota estudi

Tenint en compte que inicialment els capacitors es troben completament descarregats, es demana:

a) A partir del circuit, deduïu els valors inicial i final de la seva resposta a un graó unitari.

b) Ompliu els espais en blanc del sistema d'equacions del dessota amb els valors que s'obtenen en aplicar el mètode d'anàlisi nodal al circuit. [2]

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot V_g$$

Considerant que al resoldre el sistema d'equacions anterior s'arriba a la següent funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{R^2C^2}}{s^2 + \frac{4}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}}$$

c) Dibuixeu el diagrama de pols i zeros del circuit en funció de R i C.

d) Discutiu l'estabilitat del circuit i expliqueu en quines condicions la resposta lliure serà subesmorteïda, sobreesmorteïda o amb esmorteïment crític.

e) Prenent $C = 6{,}8\,\text{nF}$ calculeu el valor de R necessari per tal que la durada del règim transitori sigui de 594 µs.

f) Determineu quina seria la resposta forçada a una excitació sinusoïdal de freqüència $f = \frac{1}{2\pi RC}$ i 2 V d'amplitud.

Solució:

a) Com que els condensadors ens diuen que estan descarregats, en $t = 0^+$ es comportaran com curtcircuits i, per tant, el camí entre la sortida i l'entrada és també un curtcircuit. Així doncs, $\boxed{v_o(0^+) = v_g(0^+) = 1}$. D'altra banda, al ser l'excitació un senyal constant, en règim permanent els condensadors es comportaran com a circuits oberts quedant una única branca entre la sortida i l'entrada a través de les dues resistències de valor R. Tanmateix, com que per aquests resistors no pot passar corrent al no haver-hi cap camí tancat, tampoc hi caurà tensió i, per tant, $\boxed{v_o(\infty) = v_g(\infty) = 1}$.

b) Aplicant el mètode d'anàlisi sistemàtica Nodal al circuit de la figura 6, per determinar la funció de xarxa, cal plantejar KCL's als nodes 2, 3 i 4. No així en el node 1 atès que aquesta equació únicament seria útil en el cas de voler determinar el corrent que circula per la font de tensió.

$$\begin{aligned} \text{KCL } 2 &\rightarrow G(V_2 - V_1) + G(V_2 - V_4) + CsV_2 = 0 \\ \text{KCL } 3 &\rightarrow Cs(V_3 - V_1) + Cs(V_3 - V_4) + 2GV_3 = 0 \\ \text{KCL } 4 &\rightarrow G(V_4 - V_2) + Cs(V_4 - V_3) = 0 \end{aligned}$$

[2] Noteu que al vector de tensions nodals les variables V_2, V_3 i V_4 corresponen als nodes marcats al circuit amb els mateixos números encerclats.

Substituïnt en les equacions $V_1 = V_g$, treien factor comú les tesions nodals i aïllant s'arriba a:

$$\begin{bmatrix} 2G+2Cs & 0 & -G \\ 0 & 2G+2Cs & -Cs \\ -G & -Cs & G+Cs \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ Cs \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V_g$$

Sistema d'equacions en forma matricial que també es pot botenir directament de l'observació del circuit.

c) Trobant les arrels del numerador i del denominador de $H(s)$ es deueixen els valors dels zeros i els pols de la funció de xarxa, respectivament.

$$z_{1,2} = \pm \mathrm{j}\frac{1}{RC} \qquad ; \qquad p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{RC} \tag{4}$$

Així el diagrama de pols i zeros queda:

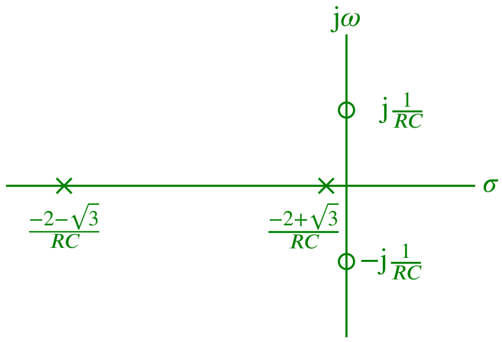

Figura 7: Diagrama pol-zero

d) Respecte de l'estabilitat del circuit podem dir que aquest serà sempre estable i es pot veure de diferents formes:

- *A partir del diagrama pol-zero de la funció de xarxa*
  Observem que tots els pols es situen a l'esquerra de l'eix jω i, com que aquesta és justament la condició d'estabilitat per a qualsevol circuit, podem concloure que és estable.
- *A partir dels coeficients del denominador de la funció de xarxa*
  Veiem que tots els coeficients són del mateix signe i, com que aquesta és una condició necessaria i suficient en circuits de segon ordre com el nostre per tal que és compleixi la condició d'estabilitat, podem concloure que és estable.
- *A partir del coeficient d'esmorteïment*
  Identificant el denominador de la funció de xarxa amb la forma canònica de segon ordre, $s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$, s'obté un coeficient d'esmorteïment de $\xi = 2$ i, com que l'estabilitat es cumpleix sempre que $\xi > 0$, podem concloure que és estable.

A més, com que el coeficient d'esmorteïment és $\xi > 1$, el que implica que els pols siguin reals, la resposta lliure del circuit serà sempre sobreesmorteïda, no poden-se donar els casos de subesmorteïment o esmorteïment crític.

e) Com que els pols són reals, la resposta lliure (que és la que determina la durada del règim transitori) serà la suma de dues exponencials decreixents amb constants de temps iguals a la inversa del mòdul dels valors dels pols. En aquest sentit, una de les exponencials s'extingirà més lentament que l'altra essent aquesta la que determini la durada del règim transitori. Així doncs, hem de trobar la constant de temps més gran de les dues exponencials involucrades i la que tindrà la τ_{max} serà la corresponent al valor de mòdul del pol mínim (pol dominant), que en el nostre cas és $p_1 = \frac{-2+\sqrt{3}}{RC}$.

Amb el criteri de que la durada del transitori és igual a cinc vegades la constant de temps màxima, igualant al valor donat a l'enunciat i aïllant s'obté:

$$\frac{5RC}{\left|-2+\sqrt{3}\right|} = 594 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \boxed{R = 4681\,\Omega} \text{ (estandarditzat més proper } R = 4{,}7\,\mathrm{k}\Omega) \tag{5}$$

f) Veiem que la freqüència del senyal excitador, $f = \frac{1}{2\pi RC}$, coincideix amb el valor d'un dels zeros imaginaris de la funció de xarxa i això implica que $\left|H(\mathrm{j}\frac{1}{RC})\right| = 0$. Així doncs, independentment de l'amplitud del senyal d'entrada, la resposta forçada del circuit (que és la que queda en règim permanent) serà nul·la.

$\circledast$