Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA — Departament de TSC —	**Circuits i Sistemes Lineals – Examen Final** 5 de juny de 2018 de 11:15h a 14:15h Notes provisionals . . . . . . 14 de juny de 2018 Període d'al·legacions . . . . . . 14-15 de juny de 2018 Notes definitives . . . . . . 18 de juny de 2018

Professors: **N.Duffo, J.García, O.Mas i O.Muñoz** Durada: 3h Consultes sobre l'examen: **15 de juny de 2018**

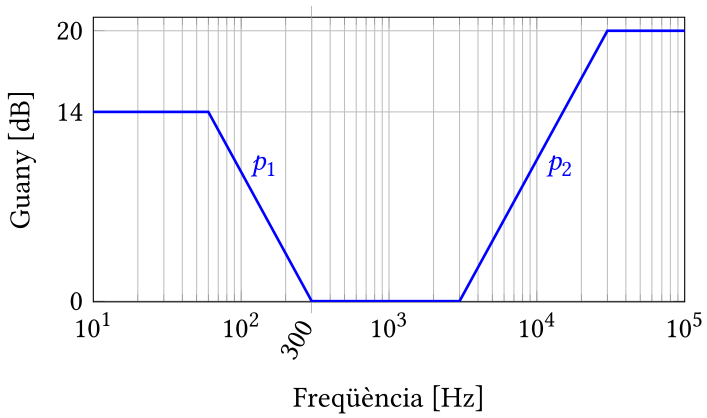
Important

- Escolliu **únicament 3** dels 4 problemes proposats. Feu l'entrega en **fulls separats**.
- En cas que NO entregueu algun dels 3 problemes, entregueu un **full en blanc** en lloc seu.

P1. (10 punts) Els estudis científics han demostrat que la nostra oïda no percep totes les freqüències amb la mateixa intensitat encara que l'altaveu les emeti totes amb igual amplitud. Concretament, sentim molt bé els tons mitjos (banda compresa entre 300 i 3000 Hz) però fora d'aquesta banda percebem els sons amb una atenuació entre 14 i 20 dB. Aquest efecte és especialment notable quan el volum és baix i, com a resultat, l'experiència auditiva no és tan satisfactòria.

Per tal de contrarestar aquesta deficiència, una opció és utilitzar un circuit **equalitzador** que compensi la poca sensibilitat de la nostra oïda a freqüències fora de la banda central. El diagrama de Bode de la figura 1a esquematitza la resposta freqüencial que hauria de tenir el circuit desitjat.

(a) Diagrama asimptòtic de guany



(b) Cèl·lula bàsica

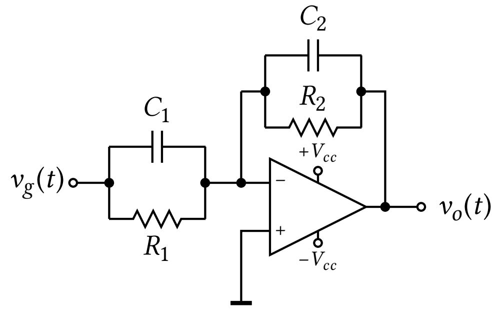


Figura 1: Elements del circuit equalitzador.

Es demana:

a) Identifiqueu les freqüències de colze i calculeu els pendents p_1 i p_2 de la característica asimptòtica.

b) Dibuixeu el diagrama de pols i zeros del filtre, indicant clarament el valor i multiplicitat de cada arrel.

c) Feu un esbós de la corba de guany real, detallant el valor de les correccions a les freqüències de colze.

d) Calculeu una possible funció de xarxa, $H(s)$, de l'equalitzador desitjat. Comproveu la coherència del resultat obtingut analitzant el comportament a freqüències baixes i altes.

e) Determineu la funció de xarxa $H_i(s)$ de la cèl·lula bàsica de la figura 1b, i preneu-la com a base per dissenyar un circuit que implementi la funció de xarxa trobada a l'apartat anterior, amb la restricció que **només disposem de capacitors de** 1 nF i 10 nF.

f) Si a l'entrada de l'equalitzador s'aplica un senyal $v_g(t) = 1{,}41\cos(2\pi 60\, t) + \cos(2\pi 10.000\, t)$, calculeu i representeu detalladament l'espectre **d'amplitud** del senyal de sortida, $v_o(t)$.

Solució:

a) Les freqüències de colze, com el seu nom indica, són aquelles freqüències on el diagrama asimptòtic de Bode de guany presenta un **canvi de pendent**. Observant el gràfic veiem que aquests canvis es produeixen a:

$$\boxed{f_{c1} = 60\,\text{Hz}} \qquad \boxed{f_{c2} = 300\,\text{Hz}} \qquad \boxed{f_{c3} = 3\,\text{kHz}} \qquad \boxed{f_{c4} = 30\,\text{kHz}}$$

Pel que fa als pendents, es calculen com el quocient entre l'increment de guany (en dB) i l'increment de freqüència (en dècades o octaves) que es dóna entre 2 punts qualssevol d'una recta. Així:

$$\boxed{p_1 = \frac{0 - 14}{\log\left(\frac{300}{60}\right)} = -20\,\text{dB/dècada}} \qquad \boxed{p_2 = \frac{20 - 0}{\log\left(\frac{3\cdot 10^4}{3\cdot 10^3}\right)} = 20\,\text{dB/dècada}}$$

b) Analitzant els **canvis de pendent** del diagrama asimptòtic de Bode de guany també podrem inferir la composició de zeros i pols del filtre, el seu tipus (real o complexe conjugat) i la seva multiplicitat. Els canvis de pendent **positius** indiquen la presència de **zeros**, mentre que els canvis de pendent **negatius** indiquen la presència de **pols**. Aquests canvis de pendent sempre són **múltiples enters** de ± 20 dB/dècada i aquesta multiplicitat és precisament el nombre de zeros (o pols). En el cas que la multiplicitat sigui 2, la correcció entre la corba real i l'asímptota a la freqüència de colze ens indicarà si les arrels són dues arrels reals iguals o bé complexes conjugades i, en aquest darrer cas, el factor d'esmorteïment ζ.

De la gràfica i del que hem deduït a l'apartat a) podem concloure que:

- A $f = 60$ Hz hi ha un canvi de pendent $\Delta p = (-20 - 0) = -20$ dB/dècada, cosa que implica la presència d'un **pol real simple** a $s = -2\pi \cdot 60$ rad/s.
- A $f = 300$ Hz hi ha un canvi de pendent $\Delta p = (0 - (-20)) = 20$ dB/dècada, cosa que implica la presència d'un **zero real simple** a $s = \pm 2\pi \cdot 300$ rad/s.
- A $f = 3000$ Hz hi ha un canvi de pendent $\Delta p = (20 - 0) = 20$ dB/dècada, cosa que implica la presència d'un **zero real simple** a $s = \pm 2\pi \cdot 3000$ rad/s.
- A $f = 30.000$ Hz hi ha un canvi de pendent $\Delta p = (-20 - 0) = -20$ dB/dècada, cosa que implica la presència d'un **pol real simple** a $s = -2\pi \cdot 30.000$ rad/s.

NOTA: Els pols sempre han d'estar al semiplà esquerre perquè el circuit **ha d'ésser estable**. Els zeros, en canvi, no presenten aquesta restricció i els dos signes són possibles. Per saber quin dels dos cal agafar hauríem de disposar de més informació (corba de fase), cosa que no ens facilita l'enunciat.

En conseqüència, tenim dos diagrames pol/zero possibles, ambdós igualment vàlids, els quals es mostren a la figura 2:

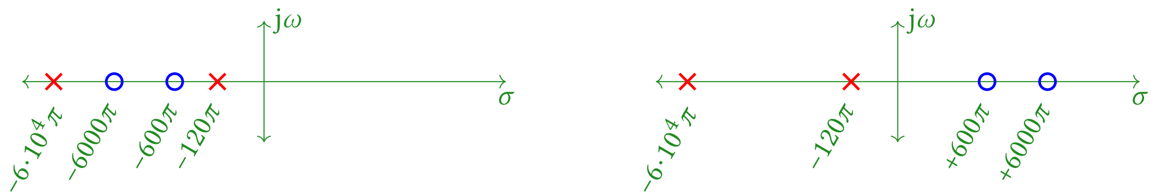


Figura 2: Possibles diagrames pol/zero per al filtre de l'enunciat

c) A l'apartat anterior hem justificat que totes les arrels són reals simples. Això significa que les correccions en els colzes són fixes i valen +3 dB en els zeros i −3 dB en els pols. Així, la corba real passa pels punts indicats a la figura 3.

d) A partir de l'estructura de pols i zeros trobada a l'apartat b) podem deduir la funció de xarxa del filtre:

$$H(s) = k \cdot \frac{(s \pm 600\pi)\cdot(s \pm 6000\pi)}{(s + 120\pi)\cdot(s + 6\cdot 10^4\pi)}$$

La constant k l'haurem d'ajustar amb algun punt conegut de la corba de guany. Per exemple, observem que

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} H(s) = k$$

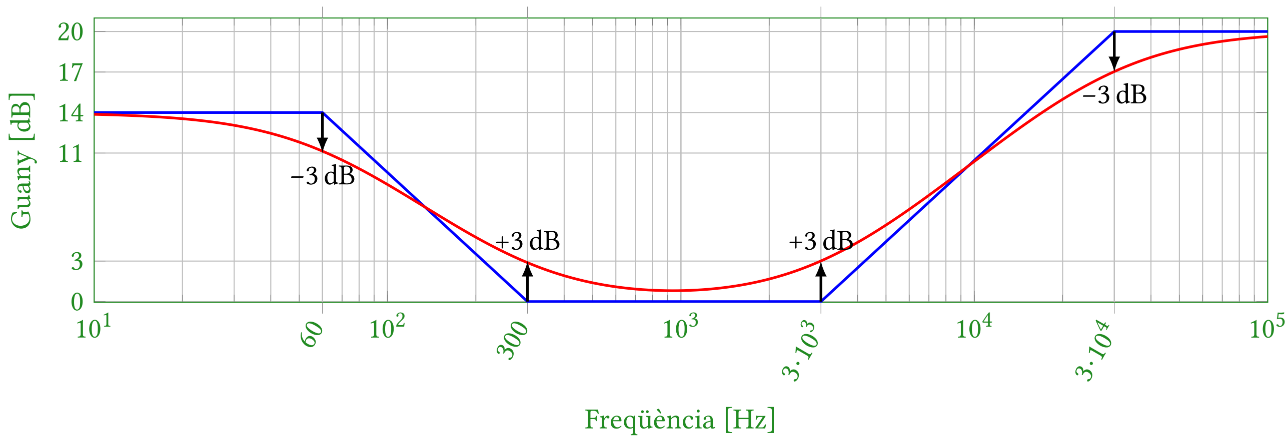


Figura 3: Diagrama de Bode de guany mostrant la corba real i les correccions als colzes

i a la corba de guany veiem que a freqüències altes tendeix a 20 dB, per tant:

$$20\log|k| = 20\text{ dB} \longrightarrow \boxed{k = \pm 10}$$

Així:

$$\boxed{H(s) = \pm 10 \cdot \frac{(s \pm 600\pi)\cdot(s \pm 6000\pi)}{(s+120\pi)\cdot(s+6\cdot 10^4\pi)}} \tag{1}$$

Aquest resultat és coherent a freqüències altes ja que l'hem dissenyat perquè ho sigui. A freqüències baixes tenim

$$\lim_{s\longrightarrow 0} H(s) = \pm 10 \frac{(\pm 600\pi)\cdot(\pm 6000\pi)}{(120\pi)\cdot(6\cdot 10^4\pi)} = \pm\frac{10}{2} = \pm 5$$

valor que és coherent amb el fet que el diagrama de Bode tendeix a $20\cdot\log(|\pm 5|) = +14$ dB a freqüències baixes.

e) La cèl·lula bàsica és una estructura inversora amb impedàncies similars (R-C paral·lel) a l'entrada i a la retroalimentació. Si calculem l'**admitància** d'una d'elles (és més senzill ja que R i C estan en paral·lel tenim $Y_x = sC_x + G_x$. Aleshores:

$$H_i(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{Y_1}{Y_2} = -\frac{sC_1 + G_1}{sC_2 + G_2}$$

la qual es pot posar com:

$$\boxed{H_i(s) = -\frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{s+\frac{1}{R_1C_1}}{s+\frac{1}{R_2C_2}}}$$

Veiem que aquesta cèl·lula és capaç d'implementar un zero i un pol (reals i **negatius** ambdós) i també una certa amplificació de valor $\frac{C_1}{C_2}$. Com que el filtre a implementar presenta 2 pols reals negatius, 2 zeros reals (que poden ser negatius) i un guany, es veu fàcilment que **amb dues d'aquestes cèl·lules connectades en cascada** podem implementar el filtre desitjat si agafem els signes de manera adequada.

Només cal definir:

$$H_1(s) = -\frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{s+\frac{1}{R_1C_1}}{s+\frac{1}{R_2C_2}} \qquad H_2(s) = -\frac{C_3}{C_4}\cdot\frac{s+\frac{1}{R_3C_3}}{s+\frac{1}{R_4C_4}}$$

plantejar l'equació $H_1(s)\cdot H_2(s) = H(s)$ i igualar coeficients:

$$\frac{C_1}{C_2}\frac{C_3}{C_4}\cdot\frac{s+\frac{1}{R_1C_1}}{s+\frac{1}{R_2C_2}}\cdot\frac{s+\frac{1}{R_3C_3}}{s+\frac{1}{R_4C_4}} = 10\cdot\frac{(s+600\pi)\cdot(s+6000\pi)}{(s+120\pi)\cdot(s+6\cdot 10^4\pi)}$$

Així arribem a les equacions:

$$\frac{C_1}{C_2}\frac{C_3}{C_4} = 10$$
$$\frac{1}{R_1 C_1} = 600\pi$$
$$\frac{1}{R_2 C_2} = 120\pi$$
$$\frac{1}{R_3 C_3} = 6000\pi$$
$$\frac{1}{R_4 C_4} = 6\cdot 10^4\pi$$

Atès que només disposem de capacitors de 1 nF i 10 nF, per satisfer la primera equació podem fer:

$$\boxed{C_1 = C_2 = C_3 = 10\,\text{nF}} \quad \text{i} \quad \boxed{C_4 = 1\,\text{nF}}$$

i aïllant la resta d'incògnites obtenim:

$$\boxed{R_1 = 53\,\text{k}\Omega} \quad \boxed{R_2 = 265\,\text{k}\Omega} \quad \boxed{R_3 = R_4 = 5{,}3\,\text{k}\Omega}$$

amb la qual cosa finalitzem el disseny del filtre.

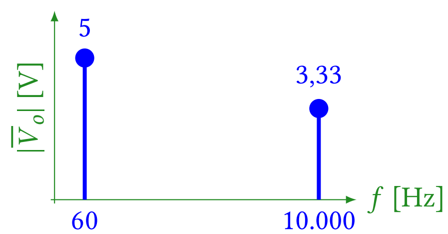
f) Quan apliquem una excitació sinusoïdal d'amplitud $|\overline{V}_g|$ a l'entrada d'un filtre, observem a la sortida un altre senyal sinusoïdal de la mateixa freqüència que el d'entrada i una amplitud que val $|\overline{V}_o| = |H(\mathrm{j}\omega_x)| \cdot |\overline{V}_g|$, on $|H(\mathrm{j}\omega_x)|$ és l'amplificació del filtre a la freqüència ω_x.

Com que en el cas que ens demanen l'entrada presenta dos senyals sinusoïdals de freqüències diferents, haurem de repetir el procediment dues vegades, cercant l'amplificació a cadascuna de les freqüències presents al senyal d'entrada.

Afortunadament els càlculs a realitzar són relativament senzills, atès que podem inferir les amplificacions necessàries directament de la lectura del diagrama de Bode de l'enunciat. Així, podem plantejar la següent taula:

f [Hz]	$\lvert\overline{V}_g\rvert$ [V]	$G(\omega)$ [dB]	$\lvert H(\mathrm{j}\omega_x)\rvert$	$\lvert\overline{V}_o\rvert$ [V]
60	$1{,}41 \simeq \sqrt{2}$	11	$10^{\frac{11}{20}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{1{,}41\cdot 5}{\sqrt{2}} = \boxed{5}$
10.000	1	10,45 dB*	$10^{\frac{10{,}45}{20}} = 3{,}33$	$\boxed{3{,}33}$

* El valor d'aquest guany no surt directament al gràfic, però podem trobar-lo sense massa problemes plantejant un triangle en tram de la corba asimptòtica de pendent 20 dB/dècada: $G = 0 + 20\log\left(\frac{10^4}{3\cdot 10^3}\right) = 10{,}45$ dB. Alternativament es pot fer el càlcul exacte de $|H(\mathrm{j}2\pi\cdot 10.000)|$ a l'equació (1), però és més embolicat. L'espectre demanat és:



✻

P2. (10 punts) El circuit de la figura 4 adapta, a una determinada freqüència, el generador sinusoidal amb resistència R_g al circuit de càrrega amb resistència d'entrada $R_L \neq R_g$. La figura 5 mostra la part real i imaginària de la impedància, Z_{in}, vista des dels terminals d'entrada de la xarxa adaptadora LC.

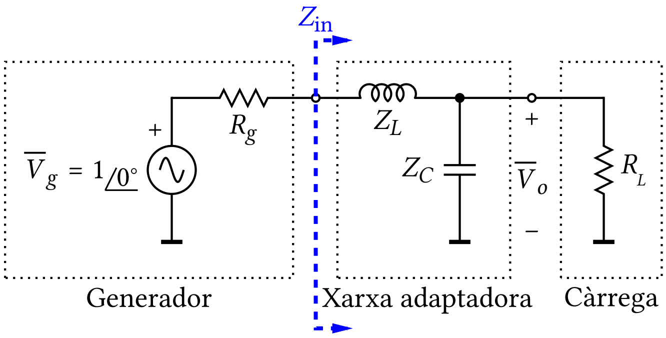


Figura 4: Circuit amb xarxa adaptadora

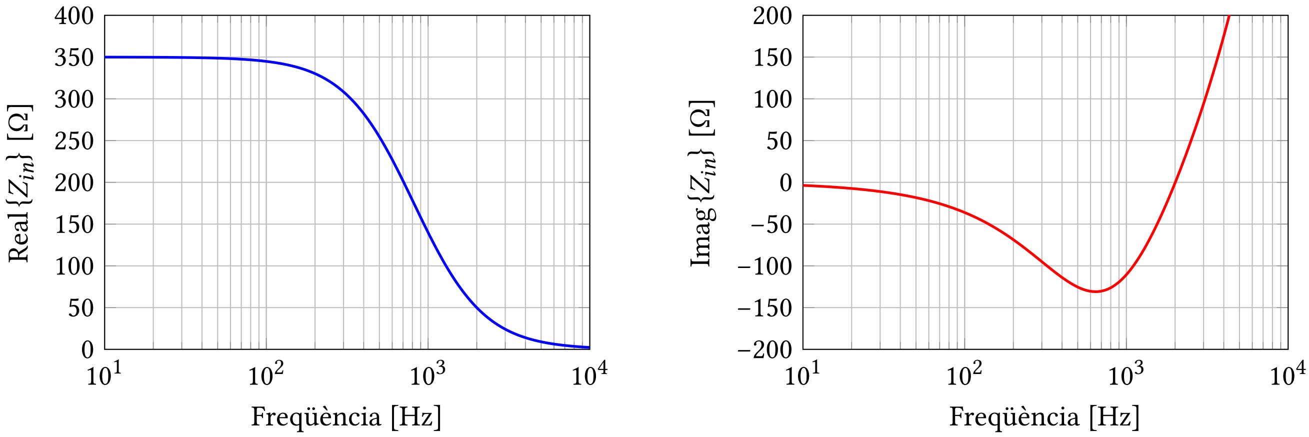


Figura 5: Impedància vista des dels terminals d'entrada de la xarxa adaptadora

Es demana:

a) Indiqueu per a quina freqüència o marge de freqüències Z_{in} té comportament resistiu, inductiu o capacitiu.

b) Indiqueu de forma justificada a quina freqüència generador i càrrega estan adaptats.

c) Indiqueu de forma justificada els valors de R_L, R_g i de l'inductor (en mH) i el capacitor (en nF) del circuit de la figura 4.

d) Calculeu la potència dissipada per R_L a la freqüència d'adaptació. Doneu també l'amplitud de la tensió en bornes de R_L per a aquesta freqüència.

e) Dibuixeu de forma aproximada la corba d'amplificació $|H(j\omega)| = \frac{|\overline{V}_o|}{|\overline{V}_g|}$ en funció de la freqüència, indicant el valor exacte per a les freqüències $f = 0, \infty$ i a la freqüència d'adaptació. De quin tipus de filtre es tracta?

f) Ara substituïm el capacitor de la figura 4 per un capacitor de valor $C_1 = 270\,\text{nF}$ en sèrie amb un inductor de valor $L_1 = 12\,\text{mH}$. La resta de components no es modifiquen. Expliqueu **de forma raonada** si el comportament del circuit variarà a la freqüència d'adaptació. Dibuixeu de forma aproximada la corba d'amplificació per a aquest nou circuit, indicant clarament quines diferències presenta respecte a la corba representada a l'apartat anterior.

Solució:

a) Sabem, a partir del circuit, que per a $f = 0$, $Z_{in} = R_L$, ja que l'inductor es comporta com un curtcircuit i el capacitor com un circuit obert en règim permanent de contínua. També veiem en les gràfiques que $Z_{in} = 50\,\Omega$ (sense part imaginària) a $f = 2\,\text{kHz}$. Per tant:

- Per a $f = 0$ i $f = 2\,\mathrm{kHz}$, Z_{in} té comportament **resistiu** en ser la reactància (part imaginària de Z_{in}) nul·la.
- Per a $0 < f < 2\,\mathrm{kHz}$ el comportament és **capacitiu** (ja que la reactància és negativa).
- Per a $f > 2\,\mathrm{kHz}$ el comportament és **inductiu** (ja que la reactància és positiva).

b) Quan hi ha adaptació, el generador «veu» una impedància $Z_{in} = R_g$ (real). Com s'ha dit abans, només hi ha 2 casos en què la impedància Z_{in} és real: En contínua, en què val $Z_{in} = R_L \neq R_g$ i per tant no hi ha adaptació. L'altre cas és a $f_a = 2000\,\mathrm{Hz}$ i per eliminació podem afirmar que aquesta és la freqüència a la qual es produeix l'adaptació.

c) Observant les gràfiques, veiem que per a $f \longrightarrow 0$, $\Re\{Z_{in}\} \longrightarrow 350\,\Omega$ i $\Im\{Z_{in}\} \longrightarrow 0\,\Omega$. Per altra banda, sabem que per adaptar $R_g > R_L$ necessitem $X_s = \pm\sqrt{R_g(R_L - R_g)}$ i $X_p = \mp R_L\sqrt{\frac{R_g}{R_L - R_g}}$ a la freqüència d'adaptació. Del circuit observem que $X_s = \omega L$ i $X_p = -\frac{1}{\omega C}$. Per tant:

- Per a $f = 0$, $Z_{in} = R_L = 350\,\Omega$.
- Per a $f_a = 2\,\mathrm{kHz}$, $Z_{in} = R_g = 50\,\Omega$.
- $X_s = \sqrt{R_g(R_L - R_g)} = 123\,\Omega = \omega_a L$, essent $\omega_a = 2\pi 2000$. Llavors $L = 9{,}7\,\mathrm{mH} \approx 10\,\mathrm{mH}$.
- $X_p = -R_L\sqrt{\frac{R_g}{R_L - R_g}} = -143\,\Omega = -\frac{1}{\omega_a C}$. Llavors $C = 556{,}9\,\mathrm{nF} \approx 560\,\mathrm{nF}$.

d) La potència dissipada per R_L a la freqüència d'adaptació és la potència disponible del generador: $P_{disp} = \frac{V_g^2}{8R_g} = \frac{1}{400} = 2{,}5\,\mathrm{mW}$. Sabent que es compleix que $P_L = \frac{V_o^2}{2R_L} = 2{,}5\,\mathrm{mW} \Longrightarrow V_o = \sqrt{1{,}75}\,\mathrm{V} \Longrightarrow |H(j\omega)| = 1{,}3229$.

e) A la 6 es mostra en blau la corba d'amplificació del circuit original:

- Per a $f = 0$, $|H| = \frac{R_L}{R_g + R_L} = 0{,}875$, ja que L es comporta com un curtcircuit i C es comporta com un circuit obert.
- Per a $f = \infty$, $|H| \longrightarrow 0$, ja que C es comporta com un curtcircuit.
- Per a $f = 2\,\mathrm{kHz}$, sabem de l'apartat anterior que $|H| = 1{,}3229$.

És un filtre passa-baixes.

f) A la freqüència d'adaptació, la combinació sèrie de L_1 i C_1 val $\mathrm{j}\omega L_1 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1} = -143{,}9\mathrm{j} \approx \mathrm{j}X_s$. Per tant, el comportament a aquesta freqüència segueix essent el mateix.

A la 6 es mostra en vermell la nova corba d'amplificació. En contínua, l'amplificació és la mateixa que abans: $L_1 - C_1$ segueix essent un circuit obert i l'inductor L un curtcircuit. També a altes freqüències (com que l'inductor L és un circuit obert la sortida és 0). A la freqüència $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 2{,}8\,\mathrm{kHz}$, però, hi ha un zero de transmissió que abans no hi era.

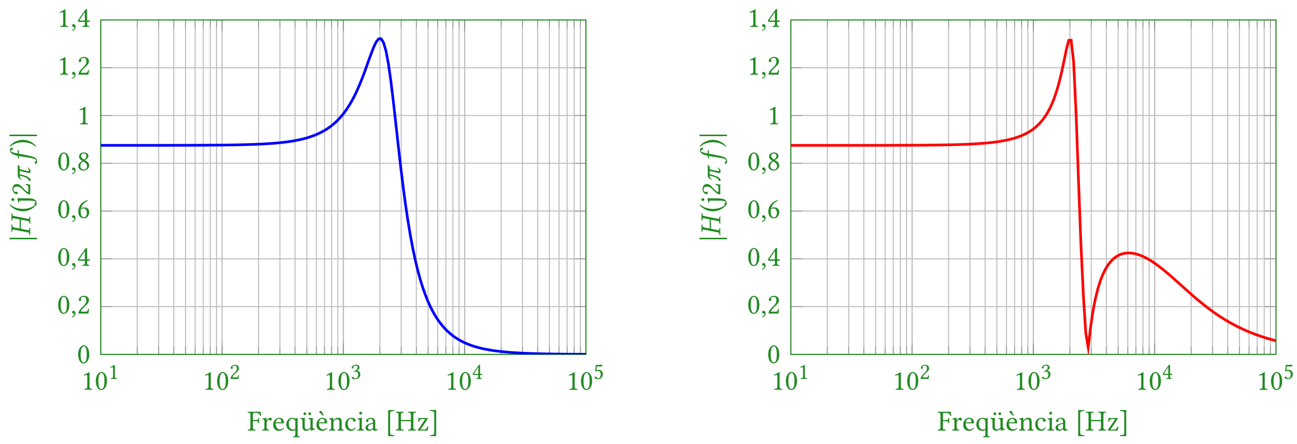


Figura 6: Amplificació del circuit original (en blau) i el de l'apartat f) (en vermell)

∗

P3. (10 punts) En el circuit de la figura 7 se sap que els commutadors porten uns quants minuts sense canviar de posició i aleshores es produeixen els següents esdeveniments:

- En $t = 0$ s l'interruptor de la dreta s'obre i es queda en aquest estat indefinidament.
- En $t = 2$ s el commutador de l'esquerra passa **instantàniament** a la posició Ⓑ.

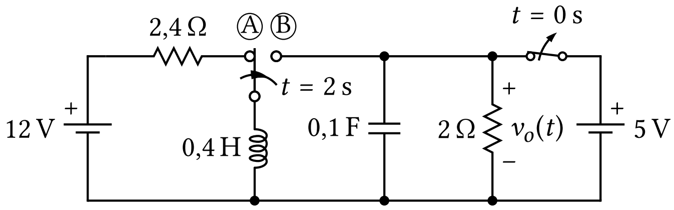


Figura 7: Determinació de la resposta temporal $v_o(t)$ en un circuit amb commutadors

L'objectiu del problema és calcular i dibuixar la tensió $v_o(t)$ en l'interval $t \in [0, 5\,\text{s}]$. Per fer-ho es demana respondre els següents apartats:

a) Discutiu l'estabilitat del circuit.

b) Calculeu la tensió $v_o(t)$ en el tram $t \in [0, 2\,\text{s}]$ i dibuixeu-la amb el detall necessari.

c) Raoneu quin és el valor del corrent que circula per l'inductor i la tensió que cau al capacitor just abans que el commutador passi a la posició Ⓑ ($t = 2^-$ s).

Per $t \geq 2$ s:

d) Dibuixeu el circuit transformat de Laplace a partir de l'instant en què el commutador està en la posició B, indicant clarament quines fonts de condicions inicials apareixen i el valor que tenen.

e) Calculeu la variable $V_o(s)$ i pinteu el seu diagrama de pols i zeros. Indiqueu la **forma** i la **durada** que tindrà aquesta resposta.

f) Determineu la seva transformada inversa, $v_o(t)$, dibuixant-la a continuació de la gràfica de l'apartat b). Raoneu si la resposta **total** obtinguda és resposta lliure, forçada o una combinació d'ambdues.

Solució:

a) El circuit és estable ja que està format per elements passius i no hi ha fonts controlades en cap de les configuracions dels commutadors.

b) En el tram $t \in [0, 2\,\text{s}]$ el resistor de $2\,\Omega$ forma part d'un circuit de primer ordre R-C, i per tant la seva resposta temporal segueix la forma genèrica de la resposta de qualsevol circuit de primer ordre:

$$v_o(t) = \left[VF + (VI - VF) \cdot e^{-t/\tau}\right] \mathrm{u}(t)$$

amb $VI = 5$ V, $VF = 0$ V i $\tau = RC = 0{,}2$ s. Per tant,

$$\boxed{v_o(t) = 5 \cdot e^{-5t}\mathrm{u}(t)}$$

La gràfica d'aquesta funció es mostra a la figura 8.

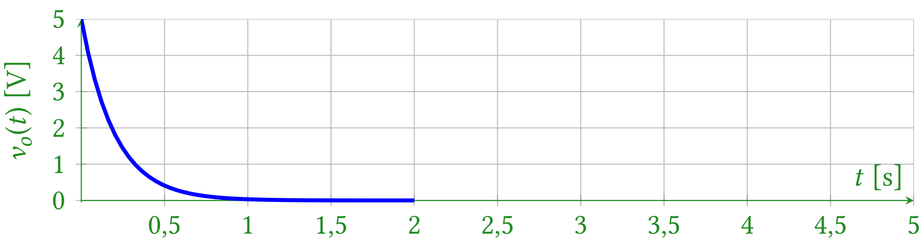


Figura 8: Resposta temporal en l'interval $t \in [0\,\text{s a } 2\,\text{s}]$

c) Per determinar el corrent a l'inductor raonem de la següent manera: l'enunciat del problema ens diu que els commutadors porten **diversos minuts** sense canviar de posició, per la qual cosa, i tenint en compte que l'excitació és constant i el circuit és estable, amb tota seguretat a l'instant $t = 2^{-}$s el circuit R-L de la part esquerra es trobarà en règim permanent. Per corroborar aquesta hipòtesi només hem de calcular la τ d'aquest circuit, que val $\tau = L/R = 0{,}166$ s i veure que el seu transitori dura tan sols 0,83 s.

En la situació indicada, l'inductor es comporta com un curtcircuit i calcular el corrent que el travessa és molt senzill. Definim aquest corrent, $i_L(t)$, amb sentit de dalt a baix. El seu valor és de

$$\boxed{i_L(2^{-}) = 12/2.4 = 5\text{ A}}$$

El capacitor també ha arribat al règim permanent i s'ha descarregat completament, ja que la durada del transitori que hem calculat a l'apartat anterior és de $5\tau = 1$ s (ho podem observar també a la gràfica de la figura 8).

$$\boxed{v_o(2^{-}) = v_C(2^{-}) = 0\text{ V}}$$

d) A la figura 9 tenim el circuit transformat de Laplace. Hem optat per posar les condicions inicials a l'inductor en forma de font de corrent per tal de poder aplicar la fòrmula del divisor de corrent.

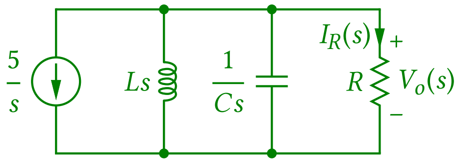


Figura 9: Circuit transformat de Laplace per $t \geq 2$ s

e) Aplicant el divisor de corrent, el corrent que circula pel resistor $I_R(s)$ és:

$$I_R(s) = \frac{G}{G + Cs + \frac{1}{Ls}}\left(-\frac{5}{s}\right) = \frac{-5/(RC)}{s^2 + (1/RC)\,s + (1/CL)}$$

La tensió $V_o(s)$ serà:

$$V_o(s) = R{\cdot}I_R(s) = \frac{-5/C}{s^2 + (1/RC)\,s + (1/CL)}$$

i substituint valors:

$$\boxed{V_o(s) = \frac{-50}{s^2 + 5s + 25}}$$

$V_o(s)$ no té cap zero i presenta un parell de pols complexos conjugats en $s = -\frac{5}{2} \pm j\frac{5}{2}\sqrt{3}$

El diagrama de pols apareix a la figura 10.

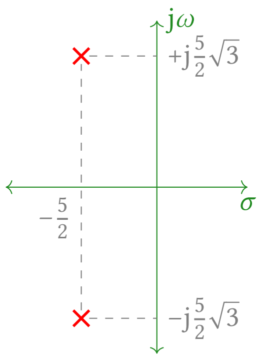


Figura 10: Diagrama de pols i zeros de $V_o(s)$

En haver-hi un parell de pols complexos conjugats la forma de la resposta temporal serà:

$$\boxed{v_o(t) = A \cdot e^{-\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\,t + \phi\right) \cdot u(t)}$$

La durada del transitori serà de $5\tau = 5{\cdot}\frac{2}{5} = 2$ s.

f) Per trobar $v_o(t)$ descomposem $V_o(s)$ en fraccions simples i calculem residus:

$$V_o\left(s\right) = \frac{-50}{s^2 + 5s + 25} = \frac{k_1}{s + \frac{5}{2} - j\frac{5}{2}\sqrt{3}} + \frac{k_1^*}{s + \frac{5}{2} + j\frac{5}{2}\sqrt{3}}$$

$$k_1 = \left(s + \frac{5}{2} - j\frac{5}{2}\sqrt{3}\right) \cdot V_o(s)\Big|_{s=-\frac{5}{2}+j\frac{5}{2}\sqrt{3}} = \mathrm{j}\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

i ens queda finalment:

$$v_o\left(t\right) = \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathrm{u}(t)$$

$$\boxed{v_o\left(t\right) = -\frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t} \sin\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}\,t\right) \cdot \mathrm{u}(t)}$$

A la figura 11 es troba representada l'evolució d'aquesta tensió. Es tracta únicament de resposta lliure ja que no hi ha cap excitació externa que pugui introduir una resposta forçada.

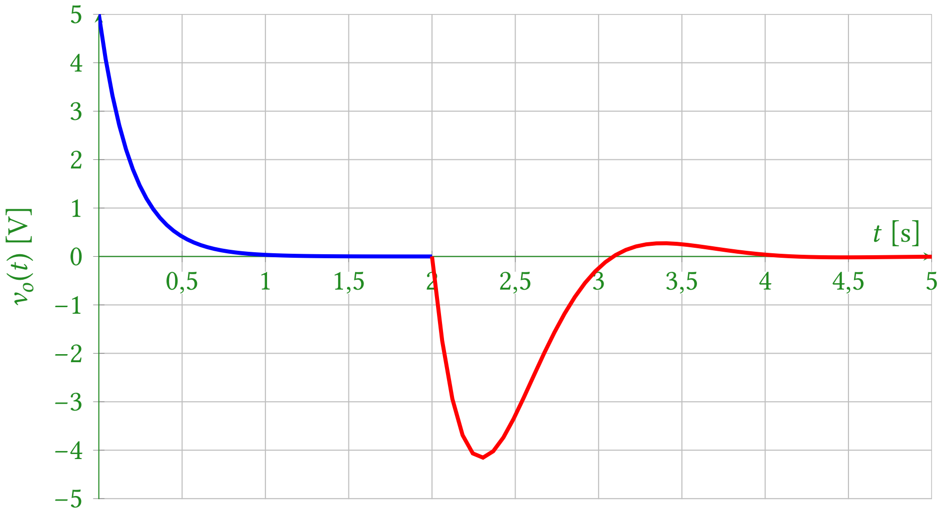


Figura 11: Resposta temporal en l'interval $t \in [0\text{ s a }5\text{ s}]$

*

P4. (10 punts) El circuit de la figura 12 és una estructura Sallen-Key que s'utilitza sovint per implementar filtres.

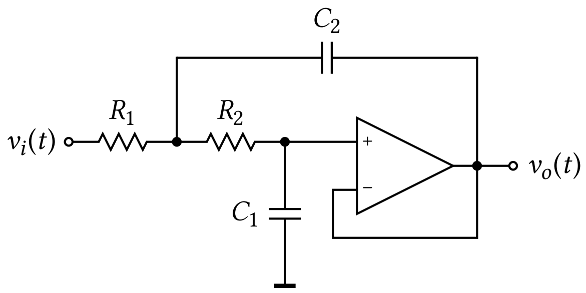


Figura 12: Estructura Sallen-Key

a) Raoneu sobre el circuit quin tipus de filtre és d'acord amb el seu comportament per a $f \longrightarrow 0$ i $f \longrightarrow \infty$.

b) Trobeu la funció de transferència definida com $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

c) Volem que el filtre tingui $\omega_o = 1000\,\text{rad/s}$ i $\zeta = 1$, fent servir resistors $R_1 = R_2 = 10\,\text{k}\Omega$. Trobeu els valors dels dos capacitors C_1 i C_2.

d) Dibuixeu el diagrama de pols i zeros de la funció de transferència dissenyada i discutiu la seva estabilitat i forma de la resposta lliure.

e) Traceu el diagrama de Bode de guany del circuit indicant clarament quina o quines són les freqüències de colze en Hz i la correcció que s'aplica en elles.

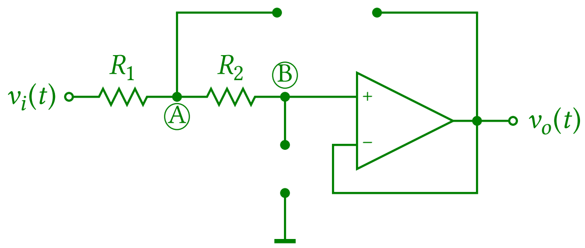
f) Calculeu l'atenuació en dB del filtre a la freqüència 3200 Hz.

Solució:

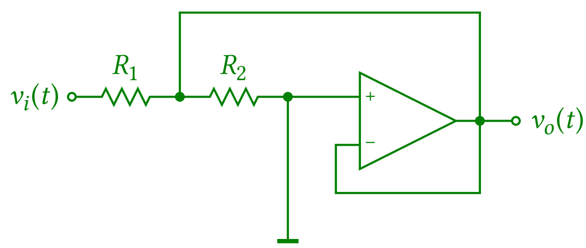
a) Per a $f \longrightarrow 0$ els capacitors es comporten com un circuit obert, per tant, el circuit quedaria com el de la figura 13a. I tenint en compte el seguidor de tensió que queda, la tensió de sortida és igual a la tensió d'entrada (el corrent és zero a l'entrada de l'A.O. i per tant no hi ha caiguda de tensió a les resistències): Llavors, $\boxed{v_o = v_i}$.

En canvi, per a $f \longrightarrow \infty$ els capacitors equivalen a un curtcircuit i l'estructura quedaria com a la figura 13b, per tant la tensió de sortida ara és igual a zero, $\boxed{v_o = 0}$.

En conseqüència, el seu comportament a freqüències baixes i altes és compatible amb el comportament d'un **filtre passabaix**.



(a) Circuit equivalent a freqüències baixes



(b) Circuit equivalent a freqüències altes

Figura 13: Circuits asimptòtics (amb nodes numerats segons s'indica al text)

b) Per trobar la funció de transferència plantegem el circuit transformat de Laplace i apliquem KCL als nodes Ⓐ i Ⓑ de l'estructura (a la figura 13a es mostra on prenem aquests nodes) tot tenint en compte que a causa del curtcircuit virtual $V_B = V_o$. Les equacions que resulten són:

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + sC_2 & -G_2 - sC_2 \\ -G_2 & G_2 + sC_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 V_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

i d'aquí

$$V_o = V_B = \frac{G_1 G_2}{S^2 C_1 C_2 + (C_1 G_1 + C_1 G_2)\, s + G_1 G_2} \cdot V_i$$

Es a dir, la funció de xarxa $H(s)$ és:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \overset{R_1=R_2}{=} \boxed{\frac{\frac{1}{R_1^2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{R_1 C_2} s + \frac{1}{R_1^2 C_1 C_2}}}$$

c) Si comparem la funció de xarxa trobada a l'apartat anterior amb la d'un filtre passabaix genèric de segon ordre:

$$H(s) = \frac{K \cdot \omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o \cdot s + \omega_o^2}$$

veiem que $K = 1$ i podem trobar les següents equacions:

$$2\zeta\omega_o = \frac{2}{R_1 C_2}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R_1^2 C_1 C_2}$$

Aïllant C_2 de la primera equació i substituïnt els valors:

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{R_1 \zeta \omega_o} = 100\,\mathrm{nF}}$$

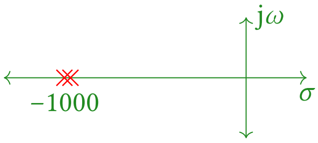
Fem el mateix a la segona equació: aïllem C_1:

$$\boxed{C_1 = \frac{1}{R_1^2 C_2 \omega_o^2} = 100\,\mathrm{nF}}$$

d) La funció de transferència trobada substituïnt els valors de ω_o i ζ ens queda:

$$H(s) = \frac{10^6}{s^2 + 2000\,s + 10^6}$$

Aquesta funció de transferència té un pol doble $s = -1000$ i cap zero, per tant, el diagrama de pols i zeros és el següent:



És **estrictament estable** (tots els pols reals negatius) amb esmorteïment crític: $\zeta = 1$

Pel que fa a la forma de la resposta lliure, al tenir un pol doble, en general tindrà dos termes del tipus:

$$\boxed{v_o(t) = A \cdot e^{-1000\,t}\mathrm{u}(t) + B \cdot t \cdot e^{-1000\,t}\mathrm{u}(t)}$$

e) Per trobar el diagrama de Bode de guany de la funció de transferència, el primer que hem de fer és factoritzar els pols i normalitzar la funció, quedant

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{1000} + 1\right)^2}$$

Veiem que només tenim una freqüència de colze a $\omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$ que equival a $f = \frac{1000}{2\pi} = 159{,}15\,\mathrm{Hz}$

Per a baixes freqüències ($\omega \ll 1000\,\mathrm{rad/s}$) el guany és:

$$20 \cdot \log(1) = 0\,\mathrm{dB}$$

I a la freqüència de colze, com que tenim un pol real doble, el pendent passarà de 0 dB/dèc a -40 dB/dèc i la correcció serà de -6 dB (-3 dB per cada pol).

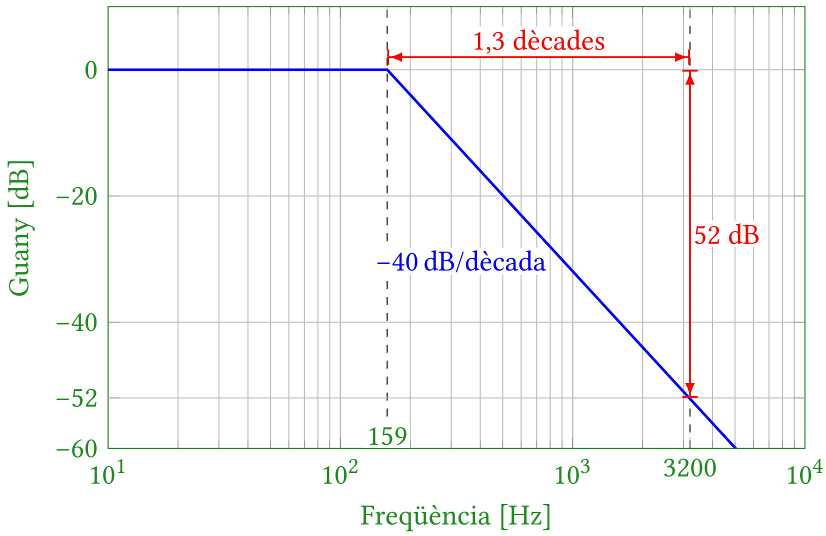
f) Per calcular l'atenuació del filtre a 3200 Hz, podem calcular el número de dècades des de la freqüència de colze:

$$n = \log\left(\frac{3200}{159{,}15}\right) = 1{,}3 \text{ dècades}$$

A partir del colze la característica asimptòtica baixa a raó de −40 dB/dècada, i l'atenuació serà (recordem que l'atenuació en dB es defineix com el guany canviat de signe i s'acostuma a denotar amb la lletra «*L*» de *Loss*):

$$\boxed{L = -G = -\left[1{,}3 \text{ dècades} \times (-40 \text{ dB/dècada})\right] = 52 \text{ dB}}$$

Els dos darrers apartats queden resumits a la figura següent:



✻