CÀLCUL VECTORIAL ETSETB 15 de gener de 2018

TEMPS: **3h**

PUBLICACIÓ DE NOTES PROVISIONALS: **22 de gener de 2018**

REVISIÓ DE L'EXAMEN: **22 de gener de 2018, de 15h a 16h, C3-216**

AL·LEGACIONS: **del 22 al 23 de gener de 2018**

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. Considereu la funció $h(x, y) = x^4 - xy + y^4 - 1$.
   (a) Raoneu que l'equació $h(x, y) = 0$ defineix implícitament una funció $y = f(x)$ en un entorn de $(x, y) = (1, 1)$ de manera que $h(x, f(x)) = 0$. Calculeu $f'(1)$.
   (b) Sigui $U \subset \mathbb{R}$ l'entorn de $x = 1$ on la funció $f(x)$ obtinguda a l'apartat anterior està definida. Considereu $F(x, y) = (\sin(f(x) - 1) + y + 1, yf(x))$, definida en $U \times \mathbb{R}$. Raoneu que F és C^∞ en $U \times \mathbb{R}$. Calculeu $F(1, 0)$ i $DF(1, 0)$. Demostreu que F admet funció inversa de classe C^∞ en un entorn de $(1, 0)$.
   (c) Sigui $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció de classe C^∞ tal que
   $$DG(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Raoneu que $H = G \circ F + F^{-1}$ és de classe C^∞ en un entorn de $(1, 0)$ i calculeu $DH(1, 0)$.
2. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^6$.
   (a) Calculeu els punts crítics de f i estudieu-ne el caràcter.
   (b) Considereu la regió
   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1,\ x + y^2 \leq 0\}.$$
   Raoneu que f té extrems absoluts a D i calculeu-los.
3. Calculeu $\int_A f$ on
   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, $f(x, y, z) = y$ i
   (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1/4,\ z \geq 0\}$, $f(x, y, z) = z$.
4. Considereu el camp vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + z\cos(y) + ze^z, y + z\sin(x), 1 + 2z)^\top$. Sigui $R > 0$.
   (a) Considereu la superfície $S_1 = \{z = 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$, orientada amb la normal cap amunt. Calculeu $\int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$.
   (b) Sigui $S_2 = \{x^2 + y^2 = (R - z)^2,\ 0 \leq z \leq R\}$, orientada amb la normal cap amunt. Calculeu $\int_{S_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$. **Indicació:** és convenient fer servir el teorema de la divergència de forma adient.

Resolució

1. (a) Com h és un polinomi, és C^∞ a $\mathbb{R}^2$. Satisfà $h(1, 1) = 0$ i
   $$Dh(1, 1) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial h}{\partial y}(1, 1)\right) = (3, 3).$$
   Així doncs, $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1) = 3 \neq 0$. El teorema de la funció implícita assegura que, sota aquestes condicions, a l'equació $h(x, y) = 0$ és possible aïllar y com a funció de x en un entorn de $(1, 1)$, és a dir, $y = f(x)$ amb $f(1) = 1$. A més, f és C^∞ en un entorn de $x = 1$ i
   $$f'(1) = -\left(\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x}(1, 1) = -1.$$

(b) Com cada component de F és suma i composició de funcions C^∞ a $U \times \mathbb{R}$, hi és C^∞. Com $f(1) = 1$ i $f'(1) = 1$,

$$F(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad DF(1,0) = \begin{pmatrix} \cos(f(1)-1)f'(1) & 1 \\ 0 & f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com $\det DF(1,0) = -1 \neq 0$, el teorema de la funció inversa assegura que F admet inversa local de classe C^∞ en un entorn de $(1,0)$. Tenint en compte que $F(1,0) = (1,0)$, $D(F^{-1})(1,0) = D(F^{-1})(F(1,0)) = DF(1,0)^{-1}$.

(c) H és suma i composició de funcions C^∞ en un entorn de $(1,0)$. En efecte, F, F^{-1} i G són C^∞ en un entorn de $(1,0)$. Per la regla de la cadena i aplicant l'apartat anterior,

$$\begin{aligned} DH(1,0) &= DG(F(1,0))DF(1,0) + D(F^{-1})(1,0) \\ &= DG(1,0)DF(1,0) + D(F^{-1})(1,0) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. (a) Els punts crítics són les solucions de

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= -6xy + 6y^5 = 0. \end{aligned}$$

De la primera equació tenim que $x^2 = y^2$. De la segona, $y(y^4 - x) = 0$. Per tant, o bé $y = 0$ (i, conseqüentment, $x = 0$), o bé $x = y^4$. Substituint a l'altre equació, s'ha de complir $y^8 - y^2 = y^2(y^6 - 1) = 0$. És a dir, o bé $y = 0$ o bé $y = \pm 1$. En el darrer cas, $x = 1$. Resumint, els punts crítics són $(0,0)$, $(1,1)$ i $(1,-1)$.
Estudiem-ne el caràcter. La matriu de les derivades segones és

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x + 30y^4 \end{pmatrix}.$$

En el punt $(1,1)$, aplicant el criteri de Sylvester,

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 108 > 0 \quad \Longrightarrow \text{mínim local a } (1,1).$$

En el punt $(1,-1)$,

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 108 > 0 \quad \Longrightarrow \text{mínim local a } (1,-1).$$

En el punt $(0,0)$,

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = 0 \quad \Longrightarrow \text{la Hessiana no decideix.}$$

Per a estudiar el caràcter de $(0,0)$, avaluem f sobre la recta $y = 0$. Com $f(x,0) = x^3$, f té un punt de sella a $(0,0)$. En efecte, si $x < 0$, $f(x,0) < 0 = f(0,0)$ i, si $x > 0$, $f(x,0) > 0 = f(0,0)$.

(b) Per una banda, D és un compacte. En efecte, com està definit per desigualtats no estrictes entre funcions contínues (polinomis) amb domini tancat (tot $\mathbb{R}^2$), D és tancat. Per l'altra, els punts $(x, y) \in D$ han de satisfer $-1 \leq x \leq -y^2$ o, equivalentment, $y^2 \leq -x \leq 1$. En particular, $y^2 \leq 1$, és a dir, $|y| \leq 1$, i $-1 \leq x \leq 0$, la qual cosa implica que D és fitat. En resum, D és compacte. El teorema de Weierstrass assegura llavors que f té extrems absoluts a D.

Els punts crítics trobats a l'apartat anterior no pertanyen a $\overset{\circ}{D}$. Per tant, els extrems de f estaran a $\operatorname{Fr} D = \{x = -1, -1 < y < 1\} \cup \{x = -y^2, -1 < y < 1\} \cup \{(-1, 1)\} \cup \{(-1, -1)\}$. Per a trobar els candidats a extrem a $\{x = -1, -1 < y < 1\}$ considerem $g(t) = f(-1, t) = -1 + 3t^2 + t^6$. L'equació $g'(t) = 6t + 6t^5 = 6t(1 + t^4) = 0$ té una única solució, $t = 0$, que correspon al punt $(-1, 0) \in \{x = -1, -1 < y < 1\}$.

A $\{x = -y^2, -1 < y < 1\}$ considerem $h(t) = f(-t^2, t) = 3t^4$. L'únic punt crític de h és $t = 0$, que correspon al punt $(0, 0) \in \{x = -y^2, -1 < y < 1\}$.

En resum, els candidats a extrem són els punts $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$ i $(-1, -1)$. Com $f(-1, 0) = -1$, $f(0, 0) = 0$, $f(-1, 1) = f(-1, -1) = 3$, el màxim de f és 3 i el mínim -1.

3. (a) En coordenades esfèriques $x = r \cos\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \cos\phi$, $z = r \sin\phi$, el domini A ve donat per $0 < r < 1$, $0 < \theta < \pi$ i $0 < \phi < \pi/2$. Per tant

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r \sin\theta \cos\phi \, r^2 \cos\phi \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \cos^2\phi \, d\phi \\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

(b) En coordenades cilíndriques $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ el domini A ve donat per $1/2 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < z < \sqrt{1 - r^2}$. Per tant,

$$\int_B f = \int_{1/2}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr \, dz \, d\theta \, dr = \pi \int_{1/2}^1 r(1 - r^2) \, dr = \frac{9\pi}{64}.$$

4. (a) Observem que $\mathbf{f}(x, y, 0) = (x, y, 1)^\top$. A més, el vector normal cap amunt a S_1 és $\mathbf{N} = (0, 0, 1)^\top$. Per tant,

$$\int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, dS = \int_{S_1} 1 \, dS = \text{àrea}(S_1) = \pi R^2.$$

(b) Observem que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 4$. A més, si considerem el volum

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq R, \ x^2 + y^2 \leq (R - z)^2\},$$

es compleix que $\partial V = S_2 - S_1$. Pel teorema de la divergència,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2 - S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}.$$

Com

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \int_V 4 \, dV = 4 \text{vol}\,(V) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

(hem fet servir que V és un con d'alçada R i base circular d'àrea πR^2)

$$\int_{S_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV + \int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi R^3}{3} + \pi R^2.$$