CÀLCUL VECTORIAL   ETSETB   20-06-2016

TEMPS: **3h**

PUBLICACIÓ DE NOTES PROVISIONALS: **25 de juny de 2018**

AL·LEGACIONS: **27 de juny de 2016**

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

TOTS ELS PROBLEMES PUNTUEN IGUAL

1. Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = |x|y$.
   (a) Raoneu que f és contínua a $\mathbb{R}^2$ i de classe C^∞ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$.
   (b) Donat $y_0 \in \mathbb{R}$, calculeu les derivades parcials de f en $(0, y_0)$. Pot ser f diferenciable en el punt $(0, y_0)$ si $y_0 \neq 0$?
   (c) Proveu que f és diferenciable en $(0, 0)$.

2. Considereu la corba parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definides per

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right), \qquad f(x, y) = 4y^2 - 4x^2 - 4y + 1,$$

   el punt $P = (\sqrt{2}/4, (\sqrt{2} + 2)/4)$ i $t_0 = 1 + \sqrt{2}$. Es compleix que $\gamma(t_0) = P$ i $f(P) = 0$.
   (a) Proveu que γ és una corba parametritzada regular en tots els seus punts. Calculeu la recta tangent a γ en $\gamma(t_0)$.
   (b) Proveu que l'equació $f(x, y) = 0$ defineix implícitament una corba regular en tots els seus punts excepte, potser, a $(0, 1/2)$. Calculeu la recta tangent a aquesta corba en el punt P.
   (c) Les corbes dels apartats anteriors s'intersequen a P. Calculeu l'angle d'intersecció entre les dues corbes en P (es a dir, l'angle que fan les seves respectives rectes tangents en P).

3. (a) Calculeu els punts crítics de $f(x, y, z) = x^3 - 3x - yz$ i estudieu-ne el seu caràcter.
   (b) Raoneu que $g(x, y, z) = xy + z$ té extrems absoluts a la regió $D = \{0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$. Trobeu-los.

4. (a) Calculeu $\int_D f$ on $f(x, y, z) = xy$ i $D = \{0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$
   (b) Calculeu el volum de la regió tancada per les gràfiques de les funcions $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$ i $g(x, y) = 2xy$, és a dir, el volum de la regió $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$.

5. (a) Considereu el camp vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (-y+z^2y, x+z^2x, z+2zxy)$ i les corbes $\gamma_1 = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ x \geq 0\}$ i $\gamma_2 = \{y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ z > 0\}$ (són dues semicircumferències). Calculeu $\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$, indicant amb quina orientació esteu calculant la integral. Llavors, fent servir el teorema de Stokes de forma adient, calculeu $\int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$, indicant amb quina orientació esteu calculant la integral.
   (b) Considereu el camp vectorial $\mathbf{g}(x, y, z) = (x^3 + z^2y, y^3 + z^2x, z^3 + 2xy)$ i la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, orientada amb la normal cap amunt. Calculeu, fent servir el teorema de Gauss de forma adient, $\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}$.

Resolució.

1. (a) Com $f_1(x) = |x|$ i $f_2(y) = y$ són contínues a $\mathbb{R}$, $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ és contínua a $\mathbb{R}^2$. A més, com $f_1(x) = x$, si $x \geq 0$ i $f_1(x) = -x$, si $x < 0$, f_1 és C^∞ a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. f_2 és C^∞ a $\mathbb{R}$. Per tant, $f = f_1 f_2$ és C^∞ a $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$.
   (b) Primer calculem la derivada respecte a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Ara calculem la derivada respecte a x. Primer considerem el cas $y_0 = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Si $y_0 \neq 0$ tenim que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{|t|y_0}{t} = \lim_{t\to 0^-} -\frac{ty_0}{t} = -y_0,$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|y_0}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{ty_0}{t} = y_0.$$

Com $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} \neq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t}$, no existeix $\lim_{t\to 0} \frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t}$ ni, per tant, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$.

En particular, la funció no pot ser diferenciable en el punts $(0,y_0)$ amb $y_0 \neq 0$. Si ho fos, haurien d'existir ambdues derivades parcials.

(c) Ho comprovem directament. Sabem, de l'apartat anterior, que la matriu jacobiana de f en $(0,0)$ és $Jf(0,0) = (0,0)$. Llavors f és diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - Jf(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{\|(x,y)\|} = 0.$$

En efecte, passant a coordenades polars $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, tenim que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{\|(x,y)\|} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2|\cos\theta|\sin\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r|\cos\theta|\sin\theta = 0,$$

perquè $0 \leq |\cos\theta \sin\theta| \leq 1$ i $r \to 0$.

2. (a) Com γ és C^∞ en tot el seu domini (cada component és un quocient de polinomis amb denominador no nul), només ens cal comprovar que $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. En efecte, com

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

la primera component només s'anul·la si $t = \pm 1$, però la segona és diferent de 0 en aquests punts.

La recta tangent en $t_0 = 1 + \sqrt{2}$ és

$$r(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) = P + \gamma'(t_0)(t - t_0).$$

Substituint $t = t_0$ en γ', obtenim

$$\gamma'(t) = \frac{1+\sqrt{2}}{4(3+2\sqrt{2})}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

(b) Com f és un polinomi, és C^∞ a $\mathbb{R}^2$. Ara observem que, fent $y = 0$, l'equació $f(x,y) = 0$ té com a solucions els punts $(\pm 1/2, 0)$. Finalment, comprovem que $\nabla f(x,y) \neq \vec{0}$ en tot punt $(x,y) \neq (0,1/2)$ solució de $f(x,y) = 0$. En efecte, l'única solució de

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}8x\\8y-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

és $(0,1/2)$. La recta tangent en $P = (x_0,y_0)$ té per equació

$$\langle (x,y) - (x_0,y_0), \nabla f(x_0,y_0)\rangle = 0.$$

Només cal avaluar ∇f a P i obtenim

$$\nabla f(P) = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

(c) Com $\nabla f(P)$ és ortogonal a la recta tangent a la corba implícita $f(x,y)=0$ en P, qualsevol vector ortogonal a $\nabla f(P)$ en serà tangent. Per exemple,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Qualsevol múltiple no nul de $\gamma'(t_0)$ és tangent a γ en $\gamma(t_0)$. Després del càlcul de l'apartat a), un n'és

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, l'angle α entre les dues corbes a P satisfà

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

3. (a) Els punts crítics de f aquells on

$$Df(x,y,z) = (3x^2-3, -z, -y) = (0,0,0),$$

és a dir, els punts $P_\pm = (\pm 1, 0, 0)$.
Per a estudiar-ne el seu caràcter, calculem la Hessiana en els punts,

$$Hf(P_\pm) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a aplicar el criteri de Sylvester, calculem els valors de Δ_1, Δ_2 i Δ_3. En el punt $P_\pm$ valen, respectivament,

$$\Delta_1 = \pm 6, \qquad \Delta_2 = 0, \qquad \Delta_3 = \mp 6.$$

Com, en ambdós casos, $\Delta_2 = 0$, el criteri de Sylvester ens diu que $Hf(P_\pm)$ no és ni definida positiva ni negativa. Com $\Delta_3 = \det Hf(P_\pm) \neq 0$, tots els valors propis de $Hf(P_\pm)$ són diferents de 0. Com $Hf(P_\pm)$ no és definida positiva ni negativa, els seus valors propis no poden ser tots positius o tots negatius. Per tant, $Hf(P_\pm)$ ha de tenir valors propis de signe diferent i és, en conseqüència, indefinida. La funció f té a $P_\pm$ punts de sella.

(b) Com g és un polinomi, és contínua a $\mathbb{R}^3$ i, per tant, contínua a D. A més, la regió D és tancada i fitada. En efecte, és tancada perquè està definida mitjançant desigualtats no estrictes entre funcions contínues a tot $\mathbb{R}^3$, que és tancat, i és fitat perquè la condició $0 \le 4 - x^2 - y^2$ implica que $|x|, |y| \le 2$ i la condició $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$ implica que $0 \le z \le 4$. És a dir, D és compacte. Pel teorema de Weierstrass, g té extrems absoluts al conjunt D. Calculem-los.

Els extrems de g a D poden estar a $\overset{\circ}{D}$ o a $\operatorname{Fr} D$.
A $\overset{\circ}{D}$, els possibles extrems seran punts crítics de g, es a dir, les solucions de

$$Dg(x,y,z) = (y, x, 1) = (0,0,0).$$

Com aquesta equació no té solucions, els extrems de g a D no estan a $\overset{\circ}{D}$.
A $\operatorname{Fr} D$, els extrems de g poden estar o bé a $S_1 = \{z = 0,\ x^2+y^2 < 4\}$, o bé a $S_2 = \{0 < z,\ z = 4 - x^2 - y^2\}$ o bé a $\Gamma = \{z = 0,\ x^2+y^2 = 4\}$.
A S_1, com $z = 0$, hi ha prou en considerar $\tilde{g}(x,y) = g(x,y,0)$. L'únic punt crític de $\tilde{g}$ és $(x,y) = (0,0)$. Per tant, l'únic candidat a extrem a S_1 és $P_1 = (0,0,0)$ (està a S_1 perquè $0^2 + 0^2 \le 4$).
A S_2, aplicant el mètode dels multiplicadors de Lagrange, els punts crítics seran les solucions de

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z &= 4, \\ y &= \lambda 2x, \\ x &= \lambda 2y, \\ 1 &= \lambda, \end{aligned}\right. \qquad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x^2+y^2+z &= 4, \\ y &= 2x, \\ x &= 2y, \end{aligned}$$

Com l'única solució de

$$\begin{aligned} y &= 2x, \\ x &= 2y, \end{aligned}$$

és $x = y = 0$, tenim que l'únic candidat a extrem a S_2 és $P_2 = (0, 0, 4)$.

Finalment, per a trobar els candidats a extrem a Γ, apliquem de nou el mètode dels multiplicadors de Lagrange. En aquest cas haurem de resoldre

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z &= 4, \\ z &= 0, \\ y &= \lambda 2x, \\ x &= \lambda 2y, \\ 1 &= \lambda + \mu, \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, \\ y &= \lambda 2x, \\ x &= \lambda 2y, \\ 1 &= \lambda + \mu, \end{aligned}$$

Ara bé, com

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} (1 - 4\lambda^2)y &= 0, \\ (1 - 4\lambda^2)x &= 0, \end{aligned}$$

si $1-4\lambda^2 \neq 0$, tenim que $x = y = 0$, però llavors el sistema no té solució. Per tant, $\lambda = \pm 1/2$. Si $\lambda = 1/2$, s'ha de complir que $y = x$ i obtenim les solucions $P_3^{\pm} = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$. Si $\lambda = -1/2$, llavors $y = -x$ i obtenim les solucions $P_4^{\pm} = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, 0)$.

Finalment, avaluant g en els 6 punts obtinguts, el valor mínim de g a D és -2, que s'assoleix als punts $P_4^{\pm}$, i el valor màxim és 4, al punt P_2.

4. (a) Considerem el canvi a coordenades cilíndriques $\Phi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ definit a $\{0 < r,\ 0 < \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$. Sabem que $|\det D\Phi(r, \theta, z)| = r$. Tenim que $\Phi^{-1}(D)$ està definit per les desigualtats

$$0 < r,\ 0 < \theta < 2\pi,\ r^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 4 - r^2,\ 0 \leq r\cos\theta,\ 0 \leq r\sin\theta,$$

es a dir

$$0 < r \leq 2,\ 0 < \theta < \pi/2,\ 0 \leq z \leq 4 - r^2.$$

Per tant, pel teorema del canvi de variables i el de Fubini,

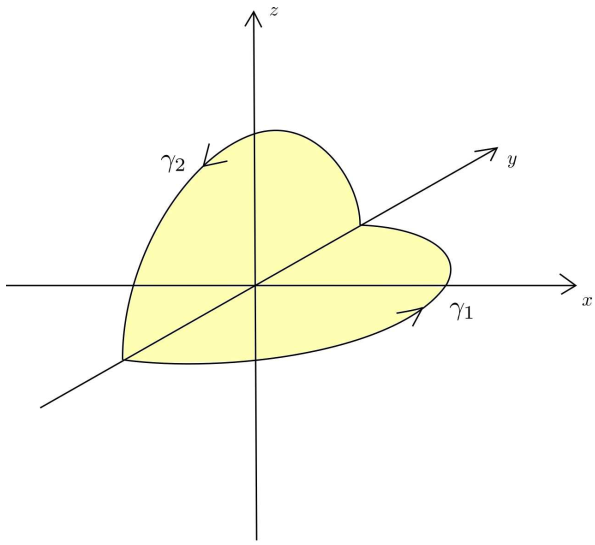
$$\begin{aligned} \int_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \int_{\Phi^{-1}(D)} f \circ \Phi(r, \theta, z) |\det D\Phi(r, \theta, z)|\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^3 \cos\theta \sin\theta\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^2 \left(r^3 \int_0^{4-r^2} dz \right) dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 r^3(4 - r^2)\, dr \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(b) Simplement hem de calcular

$$
\begin{aligned}
\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | g(x,y)\le f(x,y)\}} &(f(x,y)-g(x,y))\,dx\,dy \\
&= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 2xy\le 1+2xy-x^2-y^2\}} \left(1-x^2-y^2\right)\,dx\,dy \\
&= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 1\}} \left(1-x^2-y^2\right)\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)r\,dr \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

on hem passat a coordenades polars al pla.

5. (a) Les corbes γ_1 i γ_2 són dos arcs de circumferència, γ_1 al pla $z=0$ i γ_2 al pla $x=0$. Observem que els punts $(0,\pm1,0)$ pertanyen a les dues corbes. Per a fer els càlculs, les orientarem com al següent dibuix



Una parametrització de γ_1 és

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0), \qquad t\in[3\pi/2, 5\pi/2].$$

Observem que té l'orientació que volem perquè $\gamma_1(3\pi/2)=(0,-1,0)$ i $\gamma_1(5\pi/2)=(0,1,0)$. Per tant,

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l} &= \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \mathbf{f}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt \\
&= \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \langle(-\sin t,\cos t,0),(-\sin t,\cos t,0)\rangle\,dt \\
&= \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} 1\,dt = \pi.
\end{aligned}
$$

Ara aplicarem el teorema de Stokes en una superfície S delimitada per les corbes γ_1 i γ_2. Escollim la superfície S pintada en color groc al dibuix, es a dir, $S=S_1+S_2$ (aquí S_1+S_2 simplement vol dir $S_1\cup S_2$, orientant S_1 i S_2 amb l'orientació del principi de l'exercici, és a dir, S_1 amb la normal cap amunt i S_2 amb la normal cap a la dreta), on

$$S_1=\{z=0,\ x^2+y^2\le1, x\ge0\}, \qquad S_2=\{x=0,\ y^2+z^2\le1, z\ge0\}.$$

Si orientem S amb la normal cap amunt, llavors $\partial S = \gamma_1 + \gamma_2$. Per tant, pel teorema de Stokes,

$$\int_S \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l},$$

es a dir,

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} - \pi.$$

Només ens falta calcular la integral de superfície. Tenim que, com $S = S_1 + S_2$,

$$\int_S \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1+S_2} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

Observem que $\nabla \wedge \mathbf{f} = (0, 0, 2)$. Com el vector normal a S_2 és $(1, 0, 0)$, que és ortogonal a $(0, 0, 2)$,

$$\int_{S_2} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

A més, con el vector normal a S_1 és $\mathbf{N}_1 = (0, 0, 1)$,

$$\int_{S_1} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS = \int_{S_1} 2 \, dS = 2 \, \text{àrea}\,(S_1) = \pi,$$

perquè l'àrea d'un cercle de radi 1 és π i S_1 és mig cercle. En conseqüència,

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \pi - \pi = 0.$$

(b) Considerem $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ 0 \leq z\}$. Observem que $\partial V = S + T$, on $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ z = 0, \ x^2 + y^2 + \leq 1\}$, si orientem S amb la normal cap amunt i T amb la normal cap avall. Per tant, pel teorema de Gauss,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S+T} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} + \int_T \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}.$$

Per tant, la integral que volem és

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV - \int_T \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}.$$

Calculem aquestes dues darreres.

Observem que $\nabla \cdot \mathbf{g} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Per tant, passant a coordenades esfèriques $x = r \cos\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \cos\varphi$, $z = r \sin\varphi$, amb $0 < r$, $0 < \theta < 2\pi$ i $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, que té jacobià $r^2 \cos\varphi$,

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV &= \int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \\
&= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \\
&= \frac{6\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Per a calcular el flux de $\mathbf{g}$ sobre T, observem que el vector normal a T és $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$ i que $\mathbf{g}(x, y, 0) = (x^3, y^3, 2xy)$. Per tant, fent servir que $\sigma(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, 0)$, amb

$(r,\theta) \in (0,1) \times (0,2\pi)$ és una parametrització de T, satisfent $\|\sigma_r \wedge \sigma_\theta(r,\theta)\| = r$,

$$\begin{aligned}
\int_T \mathbf{g}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} &= \int_T \mathbf{g}(x,y,z) \cdot \mathbf{N}\, dS \\
&= -\int_T 2xy\, dS \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\, r\cos\theta\, r\sin\theta\, r\, d\theta\, dr \\
&= -\int_0^{2\pi} 2\cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr \\
&= 0,
\end{aligned}$$

del que deduïm que

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g}\, dV - \int_T \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \frac{6\pi}{5}.$$