CÀLCUL VECTORIAL   ETSETB   10 de gener de 2017

TEMPS: **3h**

PUBLICACIÓ DE NOTES PROVISIONALS: **16 de gener de 2017**

AL·LEGACIONS: **del 16 al 17 de gener de 2017**

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. Considereu la funció $h(x, y) = \ln(1 + x^2 + y) + xy + a^2y$ on a és un paràmetre real.

   (a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació $h(x, y) = 0$ defineix y com a funció implícita de x de classe C^∞, en un entorn de l'origen? Pot definir la mateixa equació en un entorn de l'origen a x com a funció implícita de y per algun valor d'a?

   (b) Siguin $y = f(x)$, la funció implícita de l'apartat anterior, definida en un entorn de 0 que anomenem $U \subset \mathbb{R}$, i $F(x, y) = (e^{x+y} + x^2 - 1, e^{f(x)} + y\cos(x) - 1)$, definida en $U \times \mathbb{R}$. Demostreu que F admet funció inversa de classe C^∞ en un entorn de $(0, 0)$.

   (c) Demostreu que $G = F \circ F + F^{-1}$ és de classe C^∞ en un entorn de $(0, 0)$ i calculeu la seva diferencial en $(0, 0)$.

2. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^4$.

   (a) Calculeu els punts crítics de f. Què en podem deduir del seu caràcter a partir del criteri de Silvester. Digueu si són extrems locals o punts de sella.

   (b) Considereu la regió

   $$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

   Raoneu que f té extrems absoluts a D i calculeu-los.

3. (a) Calculeu el volum limitat per les superfícies $z = 1 - x^2 - 3y^2$ i $z = 0$.

   (b) Calculeu el volum limitat per les superfícies $z = 1 - x^2 - 3y^2$ i $z = x^2 - y^2$.

4. (a) Donat el camp vectorial definit per $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

      i. Determineu si és un camp conservatiu. En cas afirmatiu, trobeu el seu potencial escalar.

      ii. Calculeu la circulació de $\mathbf{f}$ al llarg d'un camí que uneix els punts $(1, 0, 0)$ i $(0, 0, 1)$ sobre la corba determinada per les equacions

      $$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

   (b) Considerem ara el camp vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz^2, x^2z, z)$ i la corba C determinada per les equacions

   $$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ z &= 1/2 \end{aligned}\right\}$$

      i. Calculeu la circulació del camp $\mathbf{f}$ al llarg de la corba C.

      ii. Per a la superfície $S = \{(x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = 1/2)\}$, calculeu el flux de rot$\mathbf{f}$ a través de S i indiqueu l'orientació escollida.

      iii. Trobeu el flux de $\mathbf{f}$ a través de la superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Examen final de Càlcul Vectorial, 10 de gener de 2017.

Resolució.

1. $h(x,y) = \ln(1+x^2+y) + xy + a^2 y$.

a) Com $\ln(1+z) = z + o(z)$ tenim que

$$h(x,y) = y + a^2 y + o(\|(x,y)\|),$$

és a dir, el polinomi de Taylor de grau ≤ 1 de h en $(0,0)$ és

$$T_1(x,y) = y + a^2 y.$$

Per tant, $Dh(0,0) = DT_1(0,0) = (0, 1+a^2)$. $(*)$

Aplicarem el teorema de la funció implícita. Observem que h és una funció C^∞ allà on està definida, doncs és composició de funcions C^∞ (el logaritme i els polinomis ho són en el seu domini). A més, $(0,0)$ pertany al domini de h, amb la qual cosa tenim que h és C^∞ en un entorn de $(0,0)$.

A més, $h(0,0) = \ln 1 = 0$.

Per a poder posar y en funció de x només cal que $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

Però de $(*)$ tenim que $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 1+a^2 > 0 \Rightarrow$ l'equació $h(x,y) = 0$ defineix una funció $y(x)$ de classe C^∞ en un entorn de $(0,0)$.

Aquesta funció satisfà $y(0) = 0$

$$y'(0) = -\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\right)^{-1}}_{(1+a^2)^{-1}} \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)}_{= 0} = 0. \quad (**)$$

Com $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)=0$, no ~~podem~~ l'equació no defineix ~~una funció $\mathcal{C}^\infty$ de y~~ x com a funció de y (de manera $\mathcal{C}^1$) per a cap valor de a.

b) La funció F està definida en un entorn de (0,0) perquè f(x) està definida en un entorn de 0. Com f és $\mathcal{C}^\infty$ (de l'apartat anterior), F també ho és. A més $F(0,0)=(0,0)$ i

$$DF(0,0)=\begin{pmatrix} e^{x+y}+2x & e^{x+y} \\ e^{f(x)}f'(x)-y\sin x & \cos x \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on hem fet servir que $f'(0)=0$ (de (**)).

Com $\det DF(0,0)=1\neq 0$, ~~F~~ i F és $\mathcal{C}^\infty$, F admet inversa $\mathcal{C}^\infty$ definida en un entorn de $F(0,0)=(0,0)$.

c) G és la composició i suma de funcions $\mathcal{C}^\infty$ i, per tant, és $\mathcal{C}^\infty$ (en un entorn de (0,0)). La seva diferencial és

$$DG(0,0)=DF(F(0,0))DF(0,0)+\overbrace{DF^{-1}(0,0)}^{=\ \cancel{DF(F(0,0))}^{-1}\ DF^{-1}(F(0,0))\ =\ DF(0,0)^{-1}}$$

$$=DF(\underbrace{F(0,0)}_{(0,0)})DF(0,0)+DF(0,0)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 - $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^4$.

a) Els punts crítics de f són:

$$Df(x,y,z) = (2x,\ 2y,\ -4z^3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

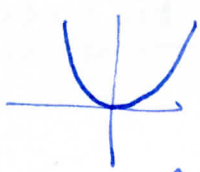
La Hessiana en $(0,0,0)$ és

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = 0$. Com $\Delta_3 = 0$, el criteri de Silvester no ens diu res del seu caràcter.

Comprovem que a $(0,0,0)$ f té un punt de sella. En efecte, observem que

$g(t) = f(t,0,0) = t^2$ té com a gràfica



del que deduïm que f no té un màxim a $(0,0,0)$. Però com

$\tilde{g}(t) = f(0,0,t) = -t^4$

té com a gràfica

f no pot tenir un mínim. Té, per tant, un punt de sella.

b) La regió D és tancada (perquè ve definida per funcions contínues a $\mathbb{R}^3$, que és tancat, i desigualtats estrictes) i fitada, perquè és un subconjunt de la bola tancada de radi 1. És, per tant, un conjunt compacte. A més, f és contínua (perquè és un polinomi). El teorema de Weierstrass assegura llavors que f té extrems absoluts a D.

Ara anem a calcular-los.

Primer busquem els punts crítics a $\mathring{D} = \{x^2+y^2+z^2<1,\ z>0\}$. Com l'únic punt crític és $(0,0,0)$ i $(0,0,0) \notin \mathring{D}$, no hi ha punts crítics a $\mathring{D}$.

Estudiem els candidats a extrems a $\operatorname{Fr} D =$

$$= \underbrace{\{x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}}_{S} \cup \underbrace{\{x^2+y^2+z^2<1,\ z=0\}}_{T} \cup \underbrace{\{x^2+y^2+z^2=1,\ z=0\}}_{C}$$

Extrems condicionats a S. Els calculem mitjançant multiplicadors de Lagrange. Hem de resoldre:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 2x = 2\lambda x \Leftrightarrow (1-\lambda)x = 0 \\ 2y = 2\lambda y \Leftrightarrow (1-\lambda)y = 0 \\ -4z^3 = 2\lambda z \Leftrightarrow z(2z^2+\lambda) = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} z = 0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 \Rightarrow \text{com abans} \\ y = 0 \end{array}\right. \qquad x = 0,\ y = 0 \rightarrow z = \pm 1$$

Obtenim els punts $\{x^2+y^2=1,\ z=0\}$ i $(0,0,1)$ i $\underbrace{(0,0,-1)}$ $\Rightarrow (0,0,1)$

$\{x^2+y^2=1,\ z=0\}$: no estan en S! (la coordenada z no és positiva)

$(0,0,-1)$: no està a S (ídem)

$(0,0,1)$: candidat a extrem.

Sobre T. Parametritzem T: $\sigma(x,y)=(x,y,0)$
$x^2+y^2<1$

Calculem els punts crítics de

$$g(x,y) = f(\sigma(x,y)) = x^2+y^2$$

Llavors $Dg(x,y) = (2x,2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$\Rightarrow \sigma(0,0) = (0,0,0)$ és candidat a extrem.

Sobre C: parametritzem C: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$
$t \in [0,2\pi]$

Hem de calcular els punts crítics de

$$h(t) = f(\gamma(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Com $h'(t) = 0 \Rightarrow$ tot punt de C és punt crític.

En resum, els candidats a extrems són

$(0,0,1) \longrightarrow f(0,0,1) = -1$ mínim

$(0,0,0) \longrightarrow f(0,0,0) = 0$

$(x,y,0)$ amb $x^2+y^2=1$ $\longrightarrow f(x,y,0) = 1$ màxim
$x^2+y^2=1$

Cálculo vectorial 10 de enero de 2017

Problema 3)
(a) Calcular el volumen limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - 3y^2$ y $z = 0$

La intersección de estas dos superficies es la elipse que en el plano XY tiene por ecuación $x^2 + 3y^2 = 1$. Elipse con semiejes 1 y $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Si $T = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 \leq 1\}$, el volumen pedido es

$$\int\int\int_V dxdydz = \int\int_T dxdy \int_0^{1-x^2-3y^2} dz = \int\int_T (1 - x^2 - 3y^2)dxdy =$$

Hacemos el cambio de coordenadas $x = r\cos\theta$ y $y = \frac{r}{\sqrt{3}}\sin\theta$ donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. el jacobiano del cambio es $\frac{r}{\sqrt{3}}$. Luego,

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)\frac{r}{\sqrt{3}}dr = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

(b) Calcular el volumen limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - 3y^2$ y $z = x^2 - y^2$

La proyección en el plano XY de la curva de corte de estas dos superficies es: $1 - x^2 - 3y^2 = x^2 - y^2 \implies x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, es decir, la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Sea T el disco limitado por esa circunferencia. El volumen pedido ser:

$$\int\int\int_V dxdydz = \int\int_T dxdy \int_{x^2-y^2}^{1-x^2-3y^2} dz = \int\int_T (1-2x^2-2y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2r^2)rdr = \frac{\pi}{4}$$

Problema 4)

(a) Dado el campo vectorial $f(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

i)Determinar si es un campo conservativo. En caso afirmativo, encontrar su potencial escalar.

Como Dom$f = R^3$ es un conjunto simplemente conexo y rot$f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & -2z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$,

f es campo conservativo. Sea $\varphi : R^3 \longrightarrow R$ tal que $\nabla\varphi = f$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = x & \varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + A(y, z) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y & \varphi(x, y, z) = \frac{y^2}{2} + B(x, z) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2z & \varphi(x, y, z) = -z^2 + C(x, y) \end{array} \right.$$

Luego un potencial escalar será: $\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^2$

ii) Calcular la circulación de f a lo largo de un camino que une los puntos $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ sobre la curva determinada por las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$$

La circulación de f a lo largo del camino indicado desde el punto $(0,0,1)$ al punto $(1,0,0)$ viene dada por:

$$\int_C f d\vec{l}=\varphi(1,0,0)-\varphi(0,0,1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

(b) Consideremos el campo vectorial $f(x,y,z)=(yz^2,x^2z,z)$ y la curva C determinada por las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

i) Calcular la circulación del campo f a lo largo de la curva C.

La proyección de la curva C en el plano XY tiene por ecuación $x^2+y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Parametrizamos pues la curva C por: $\gamma:[0,2\pi]\longrightarrow R^3$ donde $\gamma(t)=(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\frac{1}{2})$. Entonces $f(\gamma(t))=(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4}\sin t,\frac{3}{4}\frac{1}{2}\cos^2 t,\frac{1}{2})=(\frac{\sqrt{3}}{8}\sin t,\frac{3}{8}\cos^2 t,\frac{1}{2})$
y $\gamma'(t)=(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,0)$, luego

$$\int_C f d\vec{l}=\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt=\int_0^{2\pi}(-\frac{3}{16}\sin^2 t+\frac{3\sqrt{3}}{16}\cos^3 t)dt=-\frac{3}{16}\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt+\frac{3\sqrt{3}}{16}\int_0^{2\pi}\cos t(1-\sin^2 t)dt$$

$$=-\frac{3}{16}\pi$$

ii)Para la superficie $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1,\quad z>\frac{1}{2}\}$, calcular el flujo de rot$f$ a través de S e indicar la orientación escogida.

Por el teorema de Stokes

$$\int_S rotf d\vec{S}=\int_C f d\vec{l}=-\frac{3}{16}\pi$$

. El flujo se ha calculado en dirección hacia arriba

iii)Calcular el flujo de f a través de la superficie $x^2+y^2+z^2=1$.

Por el teorema de Gauss el flujo hacia afuera de f a través de la esfera dada es:

$$\int_S f d\vec{S}=\int\int\int_V divf dxdydz=\frac{4}{3}\pi$$

puesto que div$f=1$.