CÀLCUL VECTORIAL   ETSETB   17-06-2016

TEMPS: **3h**

PUBLICACIÓ DE NOTES PROVISIONALS: **20 de juny de 2016**

AL·LEGACIONS: **20 de juny de 2016**

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

TOTS ELS PROBLEMES PUNTUEN IGUAL

1. Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ el conjunt dels punts del pla que satisfan l'equació $x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$.

   (a) Estudieu en quins punts de C es compleixen les condicions del teorema de la funció implícita.

   (b) Determineu els punts al voltant dels quals l'equació ens permet expressar y en funció de x.

   (c) En quins dels punts trobats a l'apartat anterior la funció $y = y(x)$ definida al seu voltant presenta un punt crític?

   (d) Estudieu el caràcter (màxim, mínim) d'aquests punts crítics.

2. Siguin $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4x$ i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (a) Raoneu que D és un conjunt compacte. Podem assegurar que f té extrems absoluts a D?

   (b) Trobeu els punts crítics de f a D. Estudieu-ne el seu caràcter.

   (c) Trobeu, mitjançant el mètode dels multiplicadors de Lagrange, els extrems condicionats de f a la frontera de D.

   (d) Digueu quan valen el màxim i el mínim absoluts de f a D i on s'assoleixen.

3. Qüestions breus d'integració.

   (a) Siguin $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ x - y \geq 0\}$ i $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$. Calculeu
   $$\int_D f(x, y)\, dx dy.$$

   (b) Calculeu $\int_V f$, on $f(x, y, z) = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i
   $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

   (c) Sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $\int_{[-1,1]} g = 2$. Calculeu
   $$\int_Q g(x + y)g(x - y)\, dx\, dy, \quad Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x + y < 1,\ -1 < x - y < 1\}.$$

4. Qüestions breus d'integració sobre corbes i superfícies.

   (a) Al pla $\mathbb{R}^2$ hi considerem dues corbes que uneixen els punts (a, a^2) i (b, b^2), on $a < b$. Concretament, la recta que uneix aquests punts i l'arc de la paràbola $y = x^2$ limitat per ells. Considerem a $\mathbb{R}^2$ el camp vectorial $\mathbf{f}(x, y) = (-y/2, x/2)$.

      i. Determineu la circulació del camp $\mathbf{f}$ al llarg de les dues corbes.

      ii. Relacioneu els valors obtinguts a l'apartat anterior amb l'àrea de la regió del pla limitada per les dues corbes.

   (b) Sigui $\mathbf{g}(x, y, z) = (ze^{yz}, \sin(zx^2), z + 1)$, un camp vectorial a $\mathbb{R}^3$. Calculeu, fent servir el teorema de Gauss de forma adient, $\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}$, on $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$.

Resolució de l'examen final de Càlcul Vectorial del 17 de juny de 2016.

1. $C = \{(x,y) \mid x^3 - 3x^2 y + y^2 = 0\}$.

a) Sigui $f(x,y) = x^3 - 3x^2 y + y^2$.

Els punts de C on es pot aplicar el teorema de la funció implícita són aquells on o bé $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$, o bé $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$, amb $(x,y) \in C$.

Mirem on no es satisfà cap de les dues condicions, es a dir,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6xy = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x^2 + 2y = 0 \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow 3x^2 - 3^2 x^3 = 0 \Rightarrow 3x^2(1-3x) = 0 \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x = 1/3,\ y = 1/6 \end{cases}$$

En els punts $(0,0)$ i $(1/3, 1/6)$. $Df(0,0) = (0,0)$.

Tenim, però, que $(0,0) \in C$ $(f(0,0) = 0)$ i ~~i~~ $(1/3, 1/6) \notin C$ $(f(1/3, 1/6) = \frac{1}{36} \neq 0)$.

En resum: podem aplicar el T.F.I. en tots els punts de C excepte a $(0,0)$.

b) Podem aïllar y en funció de x si $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x^2 + 2y \neq 0$.

Mirem on no es compleix això, es a dir:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x^3 - 3x^2 y + y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x^2 \frac{3}{2}x^2 + \frac{3^2}{2^2}x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left[1 - \frac{9}{4}x\right] = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2^2}{3^2}$$

$$y = \frac{2^3}{3^3}$$

És a dir, podem aïllar y com a funció de x ~~en to~~ al voltant de tots els punts de C excepte el $(2^2/3^2, 2^3/3^3)$ (i $(0,0)$).

c) Els punts crítics de $y(x)$ són aquells on $y'(x)=0$.

Com, derivant implícitament $x^3-3x^2y+y^2=0$, es compleix que

$$y'(x)=\frac{6xy-3x^2}{2y-3x^2} \quad (*)$$

Els punts crítics són aquells on:

$$\left.\begin{array}{l} y'(x)=0 \\ (x,y)\in C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 6xy-3x^2=0 \Leftrightarrow x(2y-x)=0 \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \text{ (no)} \\ x=2y \end{cases} \\ x^3-3x^2y+y^2=0 \\ (\text{i } 2y-3x^2\neq 0) \end{array}$$

$$\Rightarrow 2^2y^2\left[(2-3)y+\frac{1}{4}\right]=0 \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=0 \text{ (no)} \\ y=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Per tant, ~~(1,2)~~ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

d) Per a estudiar el caràcter del punt crític, derivem la fórmula $(*)$ obtinguda a l'apartat anterior:

val 0 quan $x=1$ — val 0 avaluat a $(1,2)$

$$y''(x)=\frac{(6y(x)+6xy'(x)-6x)(2y(x)-3x^2)-\overbrace{(6xy-3x^2)}^{}(2y-3x^2)}{(2y-3x^2)^2}$$

$$\Rightarrow y''(1)=\frac{\left(\frac{3}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-0}{[\quad]^2}>0$$

Com $y''(1)>0 \Rightarrow y(x)$ té un mínim local a $x=1$.

2. (a) D és tancat perquè ve definit mitjançant desigualtats no estrictes i funcions contínues amb domini tancat (tot $\mathbb{R}^2$).

És fitat perquè està inclòs en la bola de radi 1 ($x^2+y^2\leq 1$).

Com f és contínua a $\mathbb{R}^2$ (és un polinomi) i, per tant, és contínua a D, el teorema de Weierstrass assegura que f té extrems absoluts a D.

b) Els punts crítics de f són els (x,y) on

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 8x-4=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 8y=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x&=1/2\\ y&=0\end{aligned}$$

És a dir, $(1/2,0)$ és l'únic punt crític de f. A més,

com

$$\begin{aligned}&0^2+(1/2)^2 \leq \frac{1}{4}\leq 1\\ &(1/2)^2+0^2 \leq \frac{1}{4}\leq 1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad (1/2,0)\in D.$$

Estudiem el seu caràcter mitjançant la Hessiana:

$$Hf(1/2,0)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

Aplicant el criteri de Sylvester, com $\Delta_1=8>0$ i $\Delta_2=\begin{vmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{vmatrix}=64>0$,

$Hf(0,0)$ és definida ~~neg~~ positiva i, per tant, a $(1/2,0)$ f té un mínim local.

c) $\mathrm{Fr}\, D = \overbrace{\{x^2+y^2 \leq 1,\ (x-1)^2+y^2=1\}}^{C_1} \cup \overbrace{\{x^2+y^2=1,\ (x-1)^2+y^2\leq 1\}}^{C_2}$

$\cup \underbrace{\{x^2+y^2=1,\ (x-1)^2+y^2=1\}}_{V}$

Sobre C_1: hem de resoldre

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & (x-1)^2+y^2=1 \\ & 8x-4=2\lambda(x-1) \\ & 8y=2\lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow (4-\lambda)y=0 \left\{\begin{array}{l} y=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} (x-1)^2=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ \lambda=4 \Rightarrow -4=-8!! \end{array}\right.$$

Aquest sistema té solucions $(0,0)$ i $(0,2)$. Observem que $(0,2) \notin C_1$ perquè $0^2+2^2>1$.

Sobre C_2:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ 8x-4=2\lambda x \\ 8y=2\lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow (4-\lambda)y=0 \left\{\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ \lambda=4 \Rightarrow -4=0!! \end{array}\right.$$

Obtenim els punts $(1,0)$ i $(-1,0)$. Observem, però, que $(-1,0) \notin C_2$ perquè $(-1-1)^2+0^2>1$.

d) Els extrems absoluts de f que s'assoleixen, segons hem vist a l'apartat (a), es prendran als en algun dels punts trobats a b) $((1/2, 0))$ a c) $((0,0)$ i $(1,0))$ o a els vèrtexs de D, es a dir, els punts de $V = \{ x^2+y^2=1,\ (x-1)^2+y^2=1 \}$.

Calculem els punts de V:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow -2x+1=0 \Rightarrow x = 1/2 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En resum:

$$(1/2, 0) \xrightarrow{f} f(1/2, 0) = -1$$ valor mínim, s'assoleix a $(1/2, 0)$

$$(0,0) \longrightarrow f(0,0) = 0$$

$$(1,0) \longrightarrow f(1,0) = 0$$

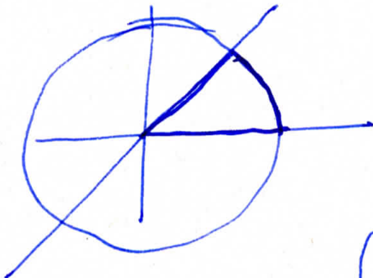
$$(1/2, \sqrt{2}/2) \longrightarrow f(1/2, \sqrt{2}/2) = 1$$

$$(1/2, -\sqrt{2}/2) \longrightarrow f(1/2, -\sqrt{2}/2) = 1$$ valor màxim, s'assoleix a $(1/2, \sqrt{2}/2)$ i $(1/2, -\sqrt{2}/2)$

jacobià del canvi

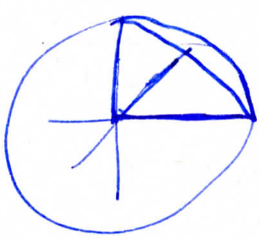
3. a) $$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{polars}}{=} \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \underbrace{r\cos\theta \cdot r}_{f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)} \cdot r \; d\theta\, dr$$

$D = \{ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ x-y \geq 0 \}$



$$= \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

b) $$\int_V f \underset{\text{esfèriques}}{=} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r\cos\theta\cos\varphi \cdot r \cdot r^2\cos\varphi \; dr\, d\theta\, d\varphi$$



$$= \int_0^R r^4\,dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{R^5}{5} \cdot \frac{\pi}{4}$$

c) Considerem el canvi de variables definit per

$$\varphi^{-1}: \quad \begin{aligned} x+y &= u \\ x-y &= v \end{aligned}$$

Llavors

$$\int_Q g(x+y)\,g(x-y)\,dx\,dy = \int_{\{-1\leq u\leq 1,\ -1\leq v\leq 1\}} g(u)\,g(v)\,|\det D\varphi(u,v)|\,du\,dv = (*)$$

$\rightarrow$ continua

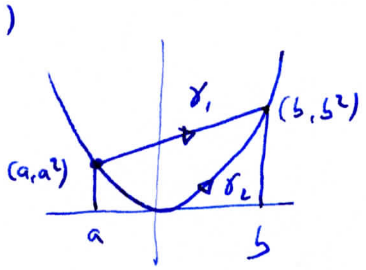
Com $\varphi^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$; $\det D\varphi^{-1}(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$,

llavors, $|\det D\varphi(u,v)|=\dfrac{1}{|\det D\varphi^{-1}(x,y)|}=\dfrac{1}{2}$

$$(*)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(u)\,g(v)\,\frac{1}{2}\,du\,dv \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(u)\,du\int_{-1}^{1} g(v)\,dv = 2$$

T. de Fubini

4. a)



$\vec{f}(x,y)=(-y/2,\, x/2)$

i) $\gamma_1(t)=(a,a^2)+t\,((b,b^2)-(a,a^2))=(a+t(b-a),\, a^2+t(b^2-a^2))\quad t\in[0,1]$

$\gamma_1'(t)=((b-a),\,(b^2-a^2))$

$\vec{f}(\gamma_1(t))=\left(-\frac{1}{2}(a^2+t(b^2-a^2)),\, \frac{1}{2}(a+t(b-a))\right)$

$$\int_{\gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{l} \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{1}{2}ab(b-a)\,dt = \frac{1}{2}ab(b-a)$$

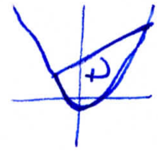
es fan operacions

$\gamma_2(t)=(t,t^2)\quad t\in[a,b]$

$\gamma_2'(t)=(1,2t)$

$\vec{f}(\gamma_2(t)) = \left(-\frac{1}{2}t^2,\, \frac{1}{2}t\right)$

$$\int_{\gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{f}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{2}t^2\,dt = \frac{1}{6}(b^3-a^3)$$

ii. ~~Refer~~ Aplicant la fórmula de Green, si D:  , $\vec{f} = (P, Q)$

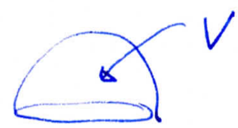
$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_D dx\,dy = \text{àrea}(D)$$

$$\|$$

$$\int_{\partial D} \vec{f}\cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{l} - \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot dl$$

5) Considerem la regió

$$V = \{ x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge 0 \}$$



Llavors,

$$\partial V = S + \Pi$$

on Π és el disc de pla $\{x^2+y^2 \le R^2,\ z = 0\}$, 

Com $\operatorname{div}\vec{g} = 1$,

$$\text{volum}(V) = \int_V \underbrace{\operatorname{div}\vec{g}}_{=1}\, dV = \int_{\partial D} \vec{g}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} + \int_\Pi \vec{g}\cdot dS.$$

Com V és mitja esfera, $\text{Volum}(V) = \frac{2}{3}\pi R^3$.

A més

$$\int_\Pi \vec{g}\cdot dS = \int_\Pi \langle g, N\rangle\, dS = -\int_\Pi dS = -\text{àrea}(\Pi) = -\pi R^2$$

$N = (0,0,-1)$

$$\langle g, N\rangle\big|_{z=0} = \langle (0,0,1), (0,0,-1)\rangle = -1$$

Per tant, $\int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \frac{2}{3}\pi R^2 + \pi R^2$.