CÀLCUL VECTORIAL ETSETB 1 de juny de 2017

TEMPS: **3h**

PUBLICACIÓ DE NOTES PROVISIONALS: **8 de juny de 2017**

AL·LEGACIONS: **8 juny de 2017**

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. Sigui la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Raoneu que f és C^∞ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Veieu que f és també contínua a $(0,0)$.

   (b) Calculeu $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) Comproveu que f no és diferenciable en $(0,0)$.

2. Considerem l'equació

$$2x^3 - 3x^2z + 2z^3y - y^2 = 0$$

   (a) Justifiqueu que, al voltant del punt $(1,1,1)$, aquesta equació determina una funció $z = f(x,y)$.

   (b) Determineu $Df(1,1)$.

   (c) Presenta la funció f un extrem local al punt $(1,1)$?

3. Sigui $f(x,y) = x^2 - x\,y + y^2 - x - y + 1$.

   (a) Trobeu i classifiqueu els extrems relatius de f.

   (b) Raoneu que f té extrems absoluts en la regió $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 3\}$. Trobeu-los.

4. Calculeu la integral de la funció $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre la regió de l'espai limitada pel cilindre $x^2+y^2=1$ i els plans $z=0$ i $x+z=2$.

5. Considereu el camp vectorial $\mathbf{f} = (x+ze^y, y+ze^x, 1+z)^\top$.

   (a) Considereu la superfície $S_1 = \{z=0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$, orientada amb la normal cap amunt. Calculeu $\int_{S_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$.

   (b) Sigui $S_2 = \{x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$, orientada amb la normal cap amunt. Tenint en compte que $\operatorname{div}\mathbf{f} = 3$, calculeu $\int_{S_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$.

Resolució

1. (a) A $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la funció f és un quocient de funcions C^∞ (polinomis) i el denominador no s'anul·la mai (x^2+y^2 només s'anul·la a $(0,0)$). Per tant, hi és C^∞.

   Per a veure la continuïtat a l'origen calculem $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Observem que, com $x^2 \geq 0$,

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x| \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0 = f(0,0).$$

   Això prova que f és contínua a $(0,0)$.

(b) Com la funció està definida amb dues fórmules diferents a $(0,0)$ i fora de $(0,0)$, hem de fer servir la definició de derivada parcial. Així tenim

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0.\end{aligned}$$

(c) Comprovem que f no satisfà la condició de tangència. Com a l'apartat anterior hem calculat la matriu jacobiana de f en $(0,0)$, $Jf(0,0)=(0,0)$, hem de veure que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-Jf(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

o bé no existeix o bé és diferent de 0. Veiem que no existeix. Per a fer-ho considerarem el limit per la recta $y=x$. Ens queda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x}{|x|},$$

que no existeix, perquè quan $x\to 0^+$, dóna $1/2\sqrt{2}$ i, quan $x\to 0^-$, $-1/2\sqrt{2}$.
També es pot passar a coordenades polars, la qual cosa transforma el denominador en r^3, i es fa una anàlisi similar.

2. (a) Sigui $F(x,y,z)=2x^3-3x^2z+2z^3y-y^2$. Tenim que, com és un polinomi, F és C^∞ a $\mathbb{R}^3$. A més, com $F(1,1,1)=0$ i

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)_{|(1,1,1)} = (-3x^2+6z^2y)_{|(1,1,1)} = 3\neq 0,$$

el teorema de la funció implícita assegura que l'equació $F(x,y,z)=0$ defineix una funció $z=f(x,y)$, de classe C^∞, en un entorn del punt $(1,1,1)$, és a dir, $f(1,1)=1$ i $F(x,y,f(x,y))=0$ per a tot (x,y) en un entorn de $(1,1)$.

(b) Sabem que

$$Df(1,1) = -\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1),\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)\right).$$

Un càlcul immediat dóna que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 0,$$

amb la qual cosa $Df(1,1)=(0,0)$.

(c) A l'apartat anterior hem vist que $(1,1)$ és un punt crític de f. Per a veure si és un extrem local, hem de calcular $Hf(0,0)$ i estudiar el seu caràcter. Per a fer-ho, derivem implícitament a l'igualtat $F(x,y,f(x,y))=0$ respecte a x i y i obtenim

$$\begin{aligned}6x^2-6xf(x,y)+(6f(x,y)^2y-3x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0,\\ 2f(x,y)^3-2y+(6f(x,y)^2y-3x^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0.\end{aligned}$$

Derivant la primera equació respecte a x i y, la segona respecte a y i avaluant a $x = 1$, $y = 1$, $f(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$, obtenim

$$\begin{aligned} 6 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) &= 0, \\ -2 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) &= 0. \end{aligned}$$

Tenint en compte que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$,

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Com aquesta matriu té un valor propi positiu i un negatiu, és indefinida. En conseqüència, f té un punt de sella a $(1,1)$.

3. (a) Els punts crítics de f són les solucions de $Df(x,y) = (0,0)$, és a dir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - y - 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -x + 2y - 1 = 0. \end{aligned}$$

El sistema es resol de manera immediata i la seva única solució és $(1,1)$. Derivant de nou,

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Apliquem el criteri de Sylvester per a establir el seu caràcter. Com

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \det Hf(1,1) = 3 > 0,$$

la matriu és definida positiva i, per tant, f té un mínim local a $(1,1)$.

(b) Observem que el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}$ és compacte. En efecte, és tancat perquè ve definit mitjançant desigualtats no estrictes entre funcions contínues amb domini tot $\mathbb{R}^2$, que és tancat. I és fitat perquè de les desigualtats tenim que si $(x,y) \in D$, llavors $0 \leq x, y \leq 3$.

A més, com f és un polinomi, és contínua a D. El teorema de Weierstrass ens assegura que f assoleix els seus valors màxim i mínim a D.

Anem a trobar-los.

Un candidat és el punt crític $(1,1)$ trobat a l'apartat anterior, i que pertany a D (doncs $1 \geq 0$ i $1 + 1 = 2 \leq 3$).

Trobem els candidats a la frontera de D, que consta de 3 arestes i 3 vèrtexs.

A l'aresta $\{y = 0, 0 < x < 3\}$ simplement considerem la funció $f_1(x) = f(x,0) = x^2 - x + 1$. Els seus punts crítics són

$$f_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Tenim el punt $(1/2, 0)$ (que pertany a l'aresta).

A l'aresta $\{x = 0, 0 < y < 3\}$ considerem la funció $f_2(y) = f(0,y) = y^2 - y + 1$. Com en el cas anterior, l'únic punt crític és $(0, 1/2)$.

A l'aresta $\{x + y = 3, 0 < x, 0 < y\}$ fem servir el mètode dels multiplicadors de Lagrange (per a variar, també es pot fer parametritzant). Hem de resoldre:

$$\begin{aligned} x+y&=3 \\ 2x-y-1&=\lambda \\ -x+2y-1&=\lambda \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x+y&=3 \\ 2x-y-1&=-x+2y-1 \end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x+y&=3 \\ x-y&=0 \end{aligned}$$

L'única solució és $(3/2, 3/2)$, que pertany a l'aresta.
Finalment, hem d'afegir els vèrtexs: $\{x = 0, y = 0\}$, $\{x = 0, y = 3\}$, $\{x = 3, y = 0\}$, que són els punts $(0, 0)$, $(0, 3)$ i $(3, 0)$.
Avaluant f en tots els punts trobats tenim que el màxim val 7 i el mínim, 0. S'assoleixen en els punts $(3, 0)$, $(0, 3)$ i $(0, 0)$, respectivament.

4. La regió en la que hem de calcular la integral és $\{x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < 2 - z\}$. En coordenades cilíndriques, $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, ve descrita com $\{0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < 2 - r\cos z\}$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\int_{\{x^2+y^2<1,\ 0<z<2-z\}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2-r\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dz \right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2-r\cos\theta} (r^2+z^2) r\,dz \right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(r^3(2-r\cos\theta) + \frac{1}{3} r(2-r\cos\theta)^3 \right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(6\pi r^3 + \frac{16}{3}\pi r \right) dr \\
&= \frac{25}{6}\pi.
\end{aligned}$$

5. (a) Observem que S_1 és una circumferència de radi 1 al pla $z = 0$. El vector normal a la superfície S_1 és $N_1 = (0, 0, 1)^\top$. Sobre S_1, $\mathbf{f} \cdot N_1 = 1$. Per tant

$$\int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{f} \cdot N_1\, dS = \int_{S_1} dS = \text{àrea}(S_1) = \pi.$$

(b) Considerem $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$, és a dir, l'hemisferi superior d'una esfera de radi 1 centrada a l'origen. Observem que la frontera de V orientada amb la normal cap a fora és $\partial V = S_2 - S_1$. Pel teorema de la divergència, tenim que

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2 - S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}.$$

Com $\operatorname{div}\mathbf{f} = 3$ i V és mitja esfera de radi 1,

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV = \int_V 3\, dV = 3\text{volum}\,(V) = 3\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi = 2\pi.$$

De l'apartat anterior sabem que

$$\int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \pi.$$

Per tant,

$$\int_{S_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV + \int_{S_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 3\pi.$$