CÀLCUL VECTORIAL   ETSETB   20-01-2016

TEMPS: **3h**

PUBLICACIÓ DE NOTES PROVISIONALS: **25 de gener de 2016**

AL·LEGACIONS: **25 de gener de 2016**

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. Considereu, per a $\alpha > 0$, la funció $f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha$.

   (a) Per a quins valors de $\alpha > 0$ existeixen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$? Calculeu aquestes derivades quan existeixin.

   (b) Per a quins valors de $\alpha > 0$ és f diferenciable en $(0,0)$?

   (c) Proveu que la funció $xf(x,y)$ és diferenciable a $(0,0)$ per a qualsevol $\alpha > 0$ i calculeu la seva diferencial en $(0,0)$.

2. Sigui C la corba definida implícitament per les equacions

$$\begin{cases} x^3 - (y-1)^2 = 0, \\ x^3 + y^2 - z = 0. \end{cases}$$

   (a) Estudieu al voltant de quins punts de C es pot assegurar que hi ha una parametrització de la corba de la forma $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$. Raona la resposta enunciant el teorema en que es basa.

   (b) Estudieu al voltant de quins punts de C es pot assegurar que existeix una parametrització regular de la corba.

   (c) Troba la recta tangent a C en el punt $(1,0,1)$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy.$$

   (a) Calcula i classifica els punts crítics de f.

   (b) Considereu el conjunt

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le 2x\}.$$

   Raoneu que f té extrems absoluts en A. Calculeu el valor dels extrems absoluts i on s'assoleixen.

4. Considereu la regió $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x^2+y^2-z \le 1\}$ i les superfícies

$$S^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2-z \le 1\},$$
$$S^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1.\ x^2+y^2-z = 1\}.$$

   (Observeu que $\partial D = S^+ \cup S^-$). Considereu també $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, y - zx, z + xy)$.

   (a) Calculeu el volum de D.

   (b) Calculeu $\int_{S^+} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$, amb S^+ orientada amb la **normal cap amunt**.

   (c) Fent servir el teorema de Gauss i els apartats anteriors, calculeu $\int_{S^-} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$, amb S^- orientada amb la **normal cap amunt**. *Nota: si no us ha sortit algun dels dos apartats anteriors, podeu deixar el resultat en funció del volum de D i del flux de* $\mathbf{f}$ *sobre* S^+.

   (d) Sigui $\Sigma = (S^+ \cup S^-) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3/4 \le z \le \sqrt{3}/2\}$, orientada amb la **normal cap a fora**. Feu servir el teorema de Stokes per a calcular $\int_\Sigma \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$.

1. Sigui $f(x,y)=(x^2+y^2)^\alpha$, $\alpha>0$.

a) Derivades parcials a l'origen.

Mirem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \underset{\text{si existeix}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{2\alpha}}{x} = \begin{cases} \text{no existeix si } \alpha\le \frac{1}{2} \\ 0 \quad \text{si } \alpha>\frac{1}{2} \end{cases}$$

El mateix passa per $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

En resum, si $\alpha>1/2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Si $\alpha\le 1/2$, no existeixen.

b) Només pot ser f diferenciable si existeixen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Per tant, com a mínim, $\alpha>1/2$. Comprovem la condició de diferenciabilitat:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-Jf(0,0)\binom{x}{y}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}} \underset{\uparrow}{=} 0,$$

on $Jf(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=(0,0)$

perquè $\alpha>1/2$.

Per tant, f és diferenciable en $(0,0)$ si i només si $\alpha>1/2$.

c) Fem el mateix amb $g(x,y)=x f(x,y)$. Primer calculem les derivades parcials.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x f(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} x^{2\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha>0.}}{=} 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$\Rightarrow Jg(0,0)=0$.

Finalment, fent servir coordenades polars,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)-g(0,0)-\nabla g(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2+y^2)^{\alpha}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{polars}}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\alpha\, r^{2\alpha}}{r} = \lim_{r\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{r^{2\alpha}} \underbrace{\cos\alpha}_{\text{fitat}} = 0.$$

Per tant, g és diferenciable en $(0,0)$.

2) Sea C la curva definida implícitamente por las ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 - (y-1)^2 = 0 \\ x^3 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

a) Estudiar alrededor de qué puntos de C se puede asegurar que hay una parametrización de la forma $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$. Razona la respuesta enunciando el teorema en que te basas.

b) Estudiar alrededor de qué puntos de C se puede asegurar que existe una parametrización regular de la curva.

c) Encuentra la recta tangente a C en el punto $(1, 0, 1)$

---

a) Utilizamos el Teorema de la función implícita.

Sea $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 y

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto tal que $F(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$

Sea $$DF(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}\Bigg|_{\vec{x}_0}$$

Si $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{x}_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces existe un abierto U de $\mathbb{R}$ tal que $z_0 \in U$

y un abierto V de $\mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in V$

y una aplicación $g: U \subset \mathbb{R} \to V \subset \mathbb{R}^2$ de clase C^1

tal que $F(g(z), z) = (0,0) \quad \forall z \in U$

Además $$Dg(z) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En nuestro caso $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ viene dada por
$F(x,y,z)=\left(x^3-(y-1)^2,\ x^3+y^2-z\right)$ que es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$

$$DF(x,y,z)=\begin{pmatrix} 3x^2 & -2(y-1) & 0 \\ 3x^2 & 2y & -1 \end{pmatrix}$$

Por el teorema de la función implícita podemos asegurar que alrededor de los puntos de la curva C en los que

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & -2(y-1) \\ 3x^2 & 2y \end{vmatrix} \neq 0$$

existe una parametrización del tipo

$$\gamma(z)=(x(z),y(z),z)$$

Veamos en qué puntos de la curva el determinante anterior vale 0

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & -2(y-1) \\ 3x^2 & 2y \end{vmatrix} = 6x^2y+6x^2(y-1)=6x^2(y+y-1)=6x^2(2y-1)=0$$

$$\Rightarrow\ x=0 \quad \text{o} \quad y=\frac{1}{2}$$

En la curva $C\begin{cases} x^3-(y-1)^2=0 \\ x^3+y^2-z=0 \end{cases}$ el único punto con $x=0$ es $(0,1,1)$

y si $y=\frac{1}{2} \Rightarrow x^3=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

y $z=x^3+y^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Por consiguiente, podemos asegurar que alrededor de cada punto de C salvo quizá $(0,1,1)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ se puede dar una parametrización de la forma $\gamma(z)=(x(z),y(z),z)$

b) Por lo explicado en el apartado a) podemos asegurar que existan parametrizaciones locales regulares de la curva de la forma

$\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$ ó $\gamma(y) = (x(y), y, z(y))$ ó $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$

si

$$\begin{vmatrix} -2(y-1) & 0 \\ 2y & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 3x^2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} 3x^2 & -2(y-1) \\ 3x^2 & 2y \end{vmatrix} \neq 0$$

No podemos asegurarlo en los puntos de la curva donde los tres determinantes anteriores valgan 0.

$$\left.\begin{array}{l} 2(y-1) = 0 \\ -3x^2 = 0 \\ 6x^2y + 6x^2(y-1) = 0 \end{array}\right\} \text{ Su única solución es } x=0 \quad y=1$$

Por tanto $(0,1,1)$ es el único punto de la curva alrededor del cual no podemos asegurar que exista una parametrización regular.

c) Vamos a encontrar una parametrización regular de la curva alrededor del punto $(1,0,1)$

$$DF(1,0,1)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

alrededor del punto $(1,0,1)$ existe una parametrización regular de la forma $\gamma(x)=(x, y(x), z(x))$

$\gamma'(x)=(1, y'(x), z'(x))$

y $\begin{pmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$

luego $\gamma'(1)=(1, -3/2, 3) \parallel (2,-3,6)$

La recta tangente a C en $(1,0,1)$ tiene por ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(2,-3,6) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

esto es

$\left.\begin{aligned} x &= 1+2\lambda \\ y &= -3\lambda \\ z &= 1+6\lambda \end{aligned}\right\}$ eliminando λ de estas tres ecuaciones obtenemos

$\left.\begin{aligned} 3x+2y &= 3 \\ 2y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$ ecuación de la recta tangente como intersección de planos ~~en~~

3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$$

a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f.

b) Sea A

Razonar si f tiene extremos absolutos en A

Calcular el valor de los extremos absolutos y dónde se alcanzan

---

a)

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 2y,\ 2y - 2x) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x^2 - 2y = 0 \\ x = y \end{array}\right\} \quad 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x-2) = 0$$

$\Rightarrow$ Solución $(0,0)$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ puntos críticos

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -4 \neq 0 \end{array}$$

aplicamos el criterio de Sylvester $(0,0)$ es punto de silla

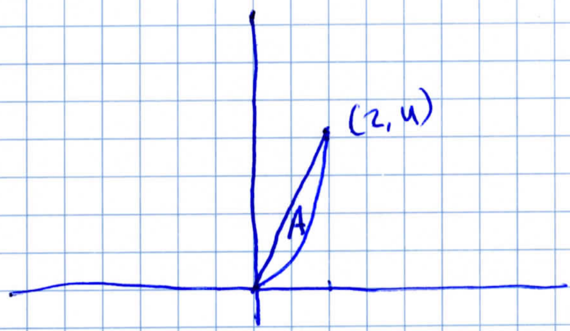
$$Hf\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 4 > 0 \\ \Delta_2 = 4 > 0 \end{array}$$

por el criterio de Sylvester $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ es mínimo local

b) A es un conjunto cerrado y acotado

f es continua en A

Por el teorema de Weierstrass, f alcanza valores extremos en A



Observamos que $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ es el único punto crítico del interior de A

$$\operatorname{Int} A = \{(x,y) : x^2 < y < 2x\}$$

y $$\left(\frac{2}{3}\right)^2 < \left(\frac{2}{3}\right) < 2 \cdot \frac{2}{3}$$

El borde de A está formado por dos curvas Γ_1 y Γ_1

Γ_1 es el segmento de la recta $y = 2x$ que une $(0,0)$ con $(2,4)$

Γ_2 es la porción de parábola $y = x^2$ que une $(0,0)$ con $(2,4)$

Calculamos los extremos locales de f sobre estas curvas

Γ_1 $\quad \gamma_1 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(x) = (x, 2x)$

Sea $g_1(x) = (f \circ \gamma_1)(x) = f(\gamma_1(x)) = f(x, 2x) = x^3 + 4x^2 - 4x^2 = x^3$

$g_1'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

$(0,0)$ está en la intersección de Γ_1 con Γ_2, lo consideramos aparte

$\Gamma_2 \qquad \gamma_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_2(x) = (x, x^2)$

$$g_2(x) = (f \circ \gamma_2)(x) = f(\gamma_2(x)) = f(x, x^2) = x^3 + x^4 - 2x^3$$
$$= x^4 - x^3$$

$$g_2'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3) = 0 < \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{4} \end{array}$$

$\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$ pertenece a Γ_2

Hemos de considerar también los puntos $(0,0)$, $(2,4)$ intersección de Γ_1 con Γ_2

$$f(0,0) = 0$$
$$f(2,4) = 8 + 16 - 16 = 8$$
$$f\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right) = \frac{27}{64} + \frac{81}{256} - \frac{54}{64} = \frac{81}{256} - \frac{27}{64} = \frac{81-108}{256} = -\frac{27}{256}$$
$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = \frac{8-12}{27} = \frac{-4}{27}$$

Como $\frac{27}{256} < \frac{4}{27} \Longrightarrow -\frac{4}{27} < -\frac{27}{256}$

$\Rightarrow$ f alcanza un máximo absoluto sobre A en $(2,4) \Rightarrow \underline{f(2,4) = 8}$

f alcanza mínimo absoluto sobre A en $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{-27}{256}$

4. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2-z \leq 1\}$,

$S^+ = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2-z \leq 1\}$

$S^- = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2-z = 1\}$.

$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y-zx \\ z+xy \end{pmatrix}$

a) Calculeu el volum de D.

Observem que $(x,y,z) \in D$ si i només si

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1-z^2 \\ x^2+y^2 \leq 1+z \end{cases}$$

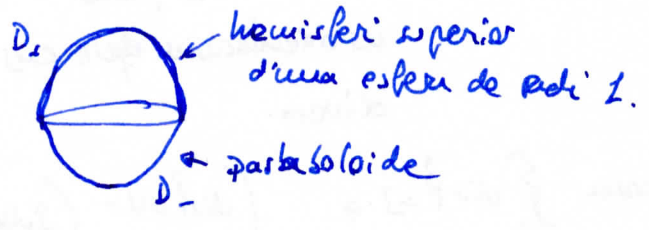
Per tant, cal que $\begin{cases} 1-z^2 \geq 0 \\ 1+z \geq 0 \end{cases} \iff -1 \leq z \leq 1$.

A més, com les gràfiques de $1-z^2$ i $1+z$ amb $-1 \leq z \leq 1$ són

tenim que $D = \underbrace{\{-1 \leq z \leq 0,\ x^2+y^2 \leq 1+z\}}_{D_-} \cup \underbrace{\{0 < z \leq 1,\ x^2+y^2 \leq 1-z^2\}}_{D_+}$

i $D_- \cap D_+ = \emptyset$.

Gràficament:



Per tant $\mathrm{vol}(D) = \mathrm{vol}(D_-) + \mathrm{vol}(D_+)$

Com D_+ és mitja esfera de radi 1, $\mathrm{vol}(D_+) = \frac{2}{3}\pi$

$$\mathrm{vol}(D_-) = \int_{D_-} dx\,dy\,dz \underset{\text{cilíndriques}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{0} \left(\int_0^{\sqrt{1+z}} r\,dr \right) dz \right) d\theta = 2\pi \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(1+z)\,dz = \frac{\pi}{2}$$

En resum,

$$\mathrm{vol}(D) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi$$

b) Observem que si $(x,y,z) \in S_+ = \{ \overbrace{x^2+y^2+y^2}^{g(x,y,z)} = 1,\ 0 \le z \le 1 \}$,

el vector normal a S_+ en (x,y,z) és

$$N(x,y,z) = \frac{\nabla g(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|} = (x,y,z).$$

Per tant, $\vec{f}(x,y,z) \cdot N(x,y,z) = (x,\ y-zx,\ z+xy) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2+y^2+z^2 = 1.$

És a dir:

$$\int_{S^+} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_{S^+} \vec{f} \cdot N\, dS = \int_{S^+} 1 \cdot dS = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mitja esfera} \\ \text{de radi } 1}}{\text{àrea}(S^+)} = 2\pi$$

c) El teorema de Gauss diu que

$$\int_D \mathrm{div}\vec{f}\, dV = \int_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{S} \underset{\substack{\uparrow \\ \partial D = S^+ - S^-, \text{ amb} \\ \text{les orientacions que ens} \\ \text{diuen}}}{=} \int_{S^+} \vec{f} \cdot d\vec{S} - \int_{S^-} \vec{f} \cdot d\vec{S} = 2\pi - \int_{S^-} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

Ara bé, com $\vec{f}$, $\mathrm{div}\,\vec{f} = 3 \Rightarrow \int_D \mathrm{div}\vec{f}\, dV = \int_D 3\, dV = 3\,\mathrm{vol}(V) = \frac{7}{2}\pi$

Per tant

$$\int_{S^-} \vec{f} \cdot d\vec{S} = 2\pi - \frac{7}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi.$$

d) El teorema de Stokes ens diu que

$$\int_\Sigma \text{rot}\,\vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial\Sigma} \vec{f}\cdot d\vec{l}\,.$$

Com Σ és de la forma

$$\partial\Sigma = \gamma_- + \gamma_+$$

les orientacions han de ser com en el dibuix.

Parametritzem les corbes γ_- i γ_+ :

γ_- : $z = -3/4$,
$x^2+y^2 = 1+z = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\gamma_-(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, -3/4\right)$ $t\in[0,2\pi]$

σ : $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$
orientada al revés
$x^2+y^2 = 1-z^2 = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\sigma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $t\in[0,2\pi]$
$\Rightarrow \gamma_+ = -\sigma$

$$\int_{\partial\Sigma}\vec{f}\cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_-}\vec{f}\cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_+}\vec{f}\cdot d\vec{l} = \cancel{\int_0^{2\pi}} \int_{\gamma_-}\vec{f}\cdot d\vec{l} + \int_{-\sigma}\vec{f}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{\gamma_-}\vec{f}\cdot d\vec{l} - \int_{\sigma}\vec{f}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} f(\gamma_-(t))\cdot\gamma_-'(t)\,dt - \int_0^{2\pi} f(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt$$

Calculem ambdues integrals:

$$\int_0^{2\pi} f(\gamma_1(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\cos t,\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos t \sin t\right)\begin{pmatrix} -1/2 \sin t \\ 1/2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{16}\cos^2 t\,dt = \frac{3}{16}\pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\cos t \sin t\right)\begin{pmatrix} -1/2 \sin t \\ 1/2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos^2 t\,dt = -\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

Per tant:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{f}\cdot d\vec{S} = \frac{3}{16}\pi - \left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\right) = \frac{3-2\sqrt{3}}{16}\pi$$