Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA — Departament de TSC —	**Circuits i Sistemes Lineals – Examen Final** 19 de gener de 2018 de 08:00h a 11:00h Notes provisionals . . . . 24 de gener de 2018 Període d'al·legacions . . . . 24-25 de gener de 2018 Notes definitives . . . . 26 de gener de 2018

Professors: **N.Duffo, J.García, O.Mas i M.Sanz** Durada: 3h Consultes sobre l'examen: **25 de gener de 2018**

P1. (4 punts) Es vol implementar un filtre amb el circuit que es mostra a la figura 1.

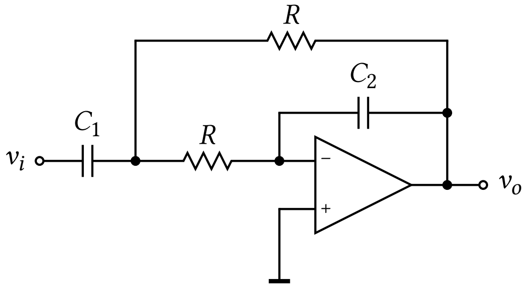


Figura 1: Filtre escollit.

Es demana:

a) Estudieu el seu comportament asimptòtic i digueu de quin tipus de filtre es tracta.

b) Determineu la funció de xarxa $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ en funció de R, C_1 i C_2.

c) Si fixem el valor de $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, trobeu els valors de les capacitats C_1 i C_2 que calen per tal que el filtre presenti els següents paràmetres: $\omega_0 = 10\,\mathrm{krad/s}$ i $\xi = 0{,}05$.

d) Dibuixeu el diagrama de pols i zeros de la funció de transferència.

e) Dibuixeu el diagrama de Bode de guany, indicant les asímptotes, les correccions a les freqüències de colze i esbossant el millor possible la corba real. Utilitzeu rad/s com a unitat de freqüència a l'eix d'abcisses.

Solució:

a) Per a continua (freqüència zero), el circuit equivalent seria el de la figura 2. S'observa que $V_0 = 0$, essent

$$\boxed{|H(0)| = 0}$$

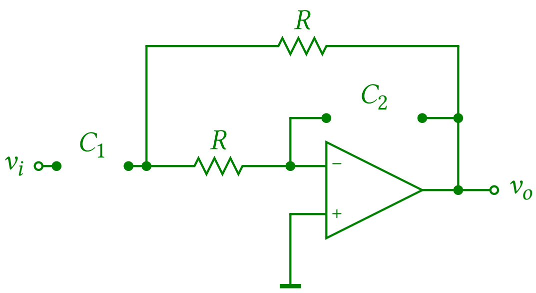


Figura 2: Circuit equivalent en contínua

Per a altes freqüències, el circuit equivalent és el que apareix a la figura 3. Per tant es troba

$$\boxed{|H(\infty)| = 0}$$

Com que no deixa passar ni les altes ni les baixes freqüències, es pot deduir que només deixarà passar les freqüències mitges, tractant-se d'un **filtre passa-banda**

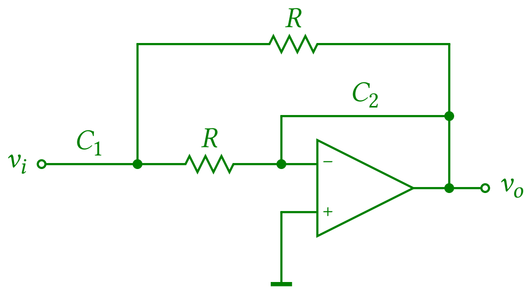


Figura 3: Circuit equivalent a freqüències altes

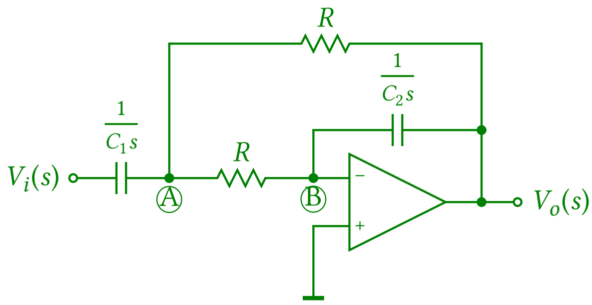


Figura 4: Circuit transformat de Laplace

---

b) Per determinar la funció de xarxa $H(s)$ es troba el circuit transformat de Laplace sense condicions inicials: (figura 4)

Plantegem llavors dos KCL en els nodes Ⓐ i Ⓑ. La tensió en el node Ⓑ serà nul·la per l'efecte del curtcircuit virtual.

$$\begin{aligned} \text{KCL A:} \quad & (V_A - V_i)C_1 s + (V_A - 0)G + (V_A - V_o)G = 0 \\ \text{KCL B:} \quad & (0 - V_A)G + (0 - V_o)C_2 s = 0 \end{aligned}$$

Reordenant i plantejant les equacions en forma matricial, s'obté:

$$\begin{pmatrix} 2G + C_1 s & -G \\ -G & -C_2 s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A \\ V_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_i C_1 s \\ 0 \end{pmatrix}$$

i resolent per Cramer obtenim la tensió $V_o(s)$:

$$V_o(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2G + C_1 s & V_i C_1 s \\ -G & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2G + C_1 s & -G \\ -G & -C_2 s \end{vmatrix}} = V_i(s) \cdot \frac{-G C_1 s}{C_1 C_2 s^2 + 2G C_2 s + G^2} = V_i(s) \cdot \frac{\frac{-1}{RC_2} s}{s^2 + \frac{2}{RC_1} s + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$$

i per tant la funció de xarxa és

$$H(s) = \boxed{\frac{\frac{-1}{RC_2} s}{s^2 + \frac{2}{RC_1} s + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}}$$

c) Tenint en compte que un polinomi de segon grau es pot expressar com $s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2$, pels valors donats a l'enunciat, $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\xi = 0{,}05$ i $\omega_0 = 10\,\mathrm{krad/s}$ obtenim:

$$\frac{2}{RC_1} = 2\xi\omega_0 = 1000\,\mathrm{rad/s}$$

Aïllant C_1:

$$C_1 = \frac{1}{R\xi\omega_0} = 2\,\mathrm{\mu F}$$

I també:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C_1 C_2}$$

Per tant aïllant C_2:

$$C_2 = \frac{1}{R^2 C_1 \omega_0^2} = 5\,\text{nF}$$

d) Substituint els valors a la funció de xarxa obtenim:

$$H(s) = \frac{-2{\cdot}10^5 s}{s^2 + 1000\,s + 10.000^2}$$

Veiem que la funció te un zero a l'origen i dos pols que són complexos conjugats ($\xi = 0{,}05$):

$$p_{1,2} = -500 \pm 9987{,}5\text{j}$$

e) Escrivim la funció de xarxa normalitzada:

$$H(s) = \frac{-2{\cdot}10^{-3}\,s}{\left(\frac{s}{10.000}\right)^2 + \frac{s}{100.000} + 1}$$

En règim permanent sinusoïdal tindrem:

$$H(j\omega) = \frac{-2{\cdot}10^{-3}\,\text{j}\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{10.000}\right)^2 + \text{j}\frac{\omega}{100.000}}$$

Per fer el diagrama de Bode (vegeu la figura 5), observem que tenim una freqüència de colze: ω_0 i un zero a l'origen. Per tant, sabem que per a $\omega << \omega_0$ la funció de xarxa es pot aproximar per:

$$H(j\omega) = -2{\cdot}10^{-3}\,\text{j}\omega$$

I per tant,

$$G = 20 \cdot \log(2{\cdot}10^{-3} \cdot \omega)\,(\text{dB})$$

que en el diagrama de Bode suposa una recta de pendent +20 dB/dècada fins arribar a la freqüència de colze. Per dibuixar la recta necessitem un punt. Per a $\omega = 1$ rad/s

$$G = -20 \cdot \log(2{\cdot}10^{-3}) = -54\,\text{dB}$$

La freqüència de colze, $\omega = 10.000$ rad/s està 4 dècades per damunt d'aquest punt, per tant el guany asimptòtic (tenint en compte només aquesta recta) ens dóna un valor de

$$G = -54 + 20 \cdot 4 = 26\,\text{dB}$$

A partir d'aquest punt hem de dibuixar l'altre recta asimptòtica que ens dóna els pols complexes conjugats. Per a $\omega >> 10.000$ rad/s podem aproximar la funció de xarxa per:

$$H(j\omega) \approx \frac{2{\cdot}10^{-3}\,\text{j}\omega}{\left(\frac{\omega}{10.000}\right)^2} = \frac{2{\cdot}10^5\text{j}}{\omega}$$

que suposa una recta de pendent negatiu −20 dB/dècada

Només queda calcular el valor real a la freqüència de colze $\omega_0 = 10.000$ rad/s:

$$H(10.000\text{j}) = \frac{2{\cdot}10^{-3}\,\text{j} \cdot 10.000}{\text{j}\frac{10.000}{100.000}} = -200$$

Per tant

$$G(\omega_0) = 20 \cdot \log(200) = 46\,\text{dB}$$

que es correspon a la correcció de $-20 \cdot \log(2\xi) = 20$ dB respecte al valor de les dues rectes (26 dB).

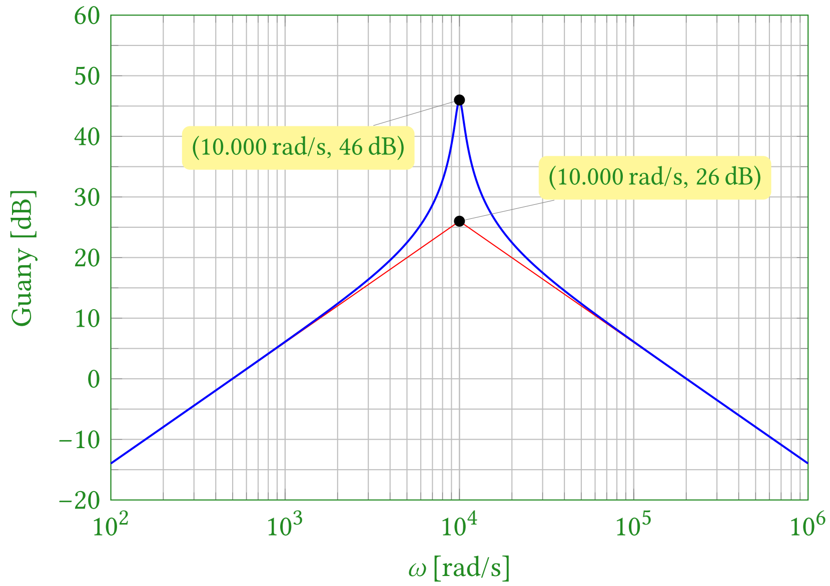


Figura 5: Diagrama de Bode de guany del filtre

---

*

P2. (3 punts) En el circuit de la figura 6, l'interruptor està inicialment tancat i s'obre a l'instant $t = 2$ s. L'objectiu del problema és dibuixar amb precisió la gràfica del **corrent** $i_L(t)$ en l'interval $t \in [0, 4\,\text{s}]$. Per fer-ho es demana respondre els següents apartats:

a) Discutiu l'estabilitat del circuit.

b) Determineu l'expressió matemàtica del corrent $i_L(t)$ en l'interval $t \in [0, 2\,\text{s}]$ (interruptor tancat) i dibuixeu-lo amb el detall necessari.

c) Indiqueu quin corrent estarà circulant a través de l'inductor en l'instant en què s'obre l'interruptor.

d) Calculeu ara l'expressió del corrent a partir de l'instant en què s'obre l'interruptor i fins a $t = 4$ s. Dibuixeu la gràfica d'aquest corrent a continuació de l'anterior.

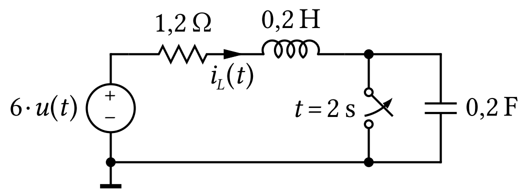


Figura 6: Circuit per a la determinació de la resposta temporal.

Solució:

a) El circuit per $t < 0$ té una excitació nul·la (el graó val zero per t negatiu) i podem assumir que porta així un temps llarg. Com que el circuit és estable (no té fonts controlades) qualsevol transitori haurà desaparegut i ens trobarem en règim permanent, amb tots els elements dinàmics «descarregats». Per tant, la condició inicial a l'inductor serà zero ($i_L(0^-) = 0$). Pel que fa al capacitor, la seva tensió també és nul·la per les mateixes raons i en aquest cas també pel fet que està curtcircuitat per l'interruptor, o sia $v_C(0^-) = 0$.

En l'interval $t \in [0, 2\,\text{s}]$ el circuit és un circuit RL de primer ordre que presentarà una resposta lliure de tipus exponencial amb $\tau = \frac{L}{R}$. Amb els valors d'elements que tenim, $\tau = \frac{0{,}2}{1{,}2} = \frac{1}{6}$ s i la durada del règim transitori, 5τ, serà $\frac{5}{6}$ s, quantitat inferior a 1 s.

Com que la durada de l'interval (2 s) és superior a la durada del règim transitori, el circuit haurà arribat al règim permanent quan s'obri l'interruptor, i la resposta serà de la forma,

$$i_L(t) = \left[\text{VF} + (\text{VI} - \text{VF})\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

on «VI» i «VF» són els valors del corrent en l'instant inicial i en règim permanent, respectivament.

Abans hem vist que VI $= i_L(0^-) = 0$ A. Quant a VF, el valor del corrent que circularà per l'inductor en règim permanent el podem trobar resolent el circuit asimptòtic, on l'inductor se substitueix per un curtcircuit. En aquest cas obtenim VF $= i_L(2) = \frac{6}{1{,}2} = 5$ A.

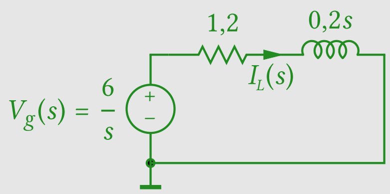
Així doncs, en el primer tram,

$$\boxed{i_L(t) = 5\left(1 - \mathrm{e}^{-6t}\right)\, u(t)}$$

Naturalment, aquesta resposta també es pot calcular utilitzant la transformada de Laplace (vegeu el desglossat a continuació), però és conceptualment més llarg.

Resolució emprant la transformació de Laplace

Com que en aquest tram les condicions inicials són nul·les, el circuit transformat és,



Com que tots els elements estan en sèrie, clarament el corrent que circula per la malla és igual a la tensió de la font dividida per la impedància total:

$$I_L(s) = \frac{V_g(s)}{Ls + R} = \frac{6/s}{0{,}2s + 1{,}2} = \frac{30}{s(s+6)}$$

La funció resultant presenta 2 pols a $s = 0$ i $s = -6$ respectivament. Com que no apareix a la taula de transformades immediates, caldrà descomposar-la en fraccions simples i calcular els residus de cada terme:

$$I_L(s) = \frac{30}{s(s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+6} = \frac{5}{s} + \frac{-5}{s+6}$$

on els residus s'han trobat fent

$$A = s \cdot I_L(s)\Big|_{s=0} = \frac{30}{s+6}\Big|_{s=0} = 5$$
$$B = (s+6) \cdot I_L(s)\Big|_{s=-6} = \frac{30}{s}\Big|_{s=-6} = -5$$

Finalment, aplicant la transformació inversa a la $I_L(s)$ calculada obtenim l'expressió del corrent en el primer tram:

$$i_L(t) = 5\,u(t) - 5\,\mathrm{e}^{-6t}\,u(t) = 5\left(1 - \mathrm{e}^{-6t}\right)\,u(t)$$

b) El corrent en un inductor i la tensió en un capacitor són variables contínues, és a dir que no presentaran salts bruscs. En conseqüència, les condicions inicials del segon tram (de 2 a 4 segons) són precisament les que hi ha al final del primer tram, o sigui $\boxed{i_L(2) = 5\text{ A}}$ i $\boxed{v_C(2) = 0\text{ V}}$.

c) En obrir l'interruptor el capacitor ja no estarà curtcircuitat i per tant el circuit passa a ser un circuit RLC sèrie (de segon ordre). Trobarem la resposta temporal corresponent a aquest tram a través del circuit transformat de Laplace, el qual dibuixem a la figura 7.

NOTA IMPORTANT: Per simplificar els càlculs, en aquest tram considerarem que l'instant $t = 2$ és el nostre nou orígen de temps ($t' = t - 2$), i la resposta que obtindrem serà relativa a aquest nou origen $t' = 0$.

En el circuit transformat, la font de condicions inicials val $L \cdot i_L(0^-) = 0{,}2 \cdot 5 = 1$.

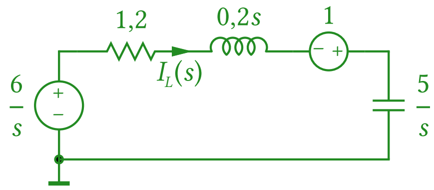


Figura 7: Circuit transformat de Laplace - Tram 2

Podem associar en sèrie les dues fonts i llavors és senzill veure que el corrent és igual a la suma de les dues tensions dividit per la suma de les impedàncies de la malla:

$$I_L(s) = \frac{\frac{6}{s} + 1}{0{,}2\,s + 1{,}2 + \frac{5}{s}} = \frac{5s + 30}{s^2 + 6s + 25}$$

La funció presenta 2 pols complexes conjugats a $s = -3 \pm 4\mathrm{j}$. Per tant, la descomposició en fraccions simples és:

$$I_L(s) = \frac{5s + 30}{s^2 + 6s + 25} = \frac{k}{s + 3 - 4\mathrm{j}} + \frac{k^*}{s + 3 + 4\mathrm{j}}$$

on

$$\begin{aligned} k &= (s + 3 - 4\mathrm{j}) \cdot I_L(s)\big|_{s=-3+4\mathrm{j}} \\ &= \frac{-15 + 20\mathrm{j} + 30}{8\mathrm{j}} = 2{,}5 - 1{,}875\mathrm{j} = 3{,}125\underline{/-36{,}87^\circ} \end{aligned}$$

Per tant, la resposta temporal en aquest tram val:

$$\boxed{i_L(t') = 6{,}25\,\mathrm{e}^{-3t'}\cos(4t' - 36{,}87^\circ)\,u(t')} \quad (t' > 0)$$

tot i que, per ser matemàticament rigorosos, l'hauríem de referir al mateix temps del primer interval:

$$\boxed{i_L(t) = 6{,}25\,\mathrm{e}^{-3(t-2)}\cos(4(t-2) - 36{,}87^\circ)\,u(t-2)} \quad (t > 2)$$

Finalment, a la figura 8 es mostra la gràfica del corrent $i_L(t)$ en l'interval total $t \in [0, 4\,\mathrm{s}]$:

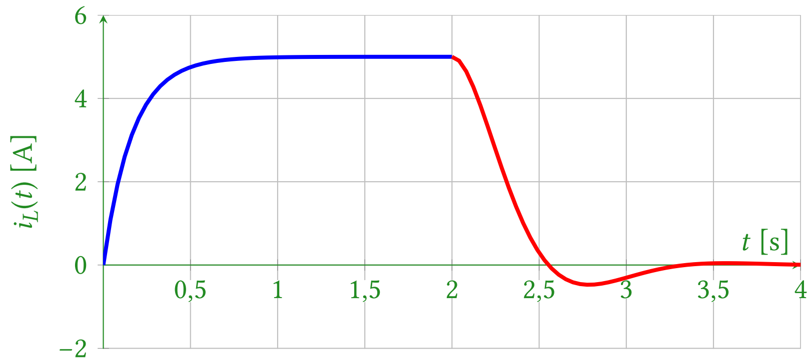
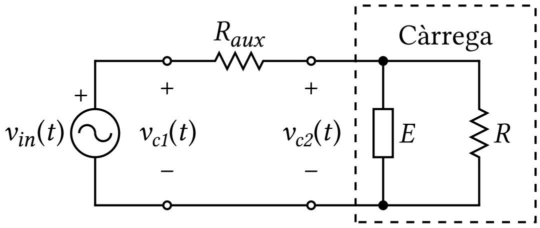


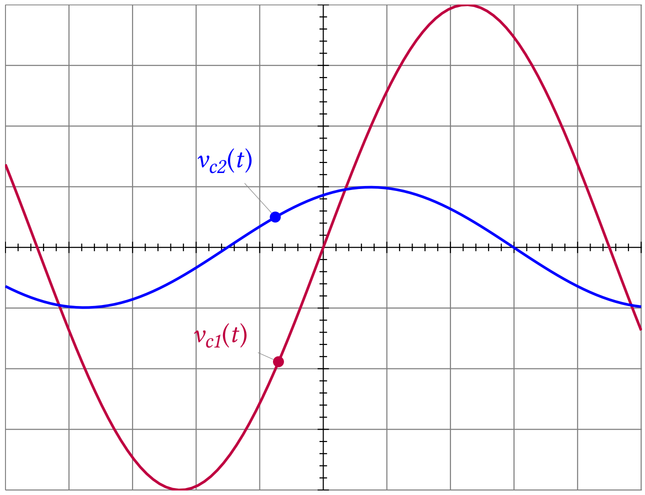
Figura 8: Resposta temporal del problema

*

P3. (3 punts) Es disposa d'una càrrega desconeguda de la qual volem obtenir un model equivalent en RPS format per un resistor R **en paral·lel** amb un element E reactiu pur ($Z_E = jX$). A tal efecte s'ha connectat una resistència auxiliar entre el generador i aquesta càrrega segons l'esquema de la figura 9(a) i s'han obtingut els oscil·logrames de la figura 9(b).



(a) Muntatge per la mesura



(b) Oscil·logrames obtinguts

Figura 9: Mesura de l'admitància Y d'una càrrega desconeguda.

Es demana:

a) Indiqueu si la tensió $\overline{V}_{c2}$ està avançada o retrassada respecte $\overline{V}_{c1}$.

b) Expresseu l'admitància Y de la càrrega en funció de R_{aux}, $\overline{V}_{c1}$ i $\overline{V}_{c2}$.

Sabent que $R_{aux} = 100\,\Omega$, i que a l'oscil·loscopi s'ha seleccionat una base de temps de 5 µs/div i una mateixa sensibilitat per als dos canals de valor 2 V/div, es demana:

c) Determineu els fasors $\overline{V}_{c1}$ i $\overline{V}_{c2}$ a partir dels oscil·logrames.

d) Calculeu el valor de Y i indiqueu si és de tipus inductiu o capacitiu.

e) A partir del resultat anterior, determineu els valors de la resistencia R i de l'element E (L o C, segons correspongui).

f) Calculeu el valor de la potència que s'està dissipant a la càrrega.

Solució:

a) Clarament els zeros, màxims, etc. de $v_{c2}(t)$ es produeixen **abans** que els de v_{c1}, per la qual cosa $\overline{V}_{c2}$ està **avançada** respecte $\overline{V}_{c1}$.

b) $Y = \dfrac{\overline{I}_{aux}}{\overline{V}_{c2}} = \dfrac{(\overline{V}_{c1} - \overline{V}_{c2})/R_{aux}}{\overline{V}_{c2}}$, on i_{aux} és el corrent que travessa R_{aux} i entra a la càrrega.

c) Dels oscil·logrames es desprèn que l'amplitud de $v_{c1}(t)$ és de 8 V i la de $v_{c2}(t)$ de 2 V. Pel que fa a les fases, observem que la tensió $v_{c2}(t)$ està **avançada** 1,5 divisions respecte $v_{c1}(t)$, sobre un període total de 9 divisions. Aquest avançament ha de ser proporcional al desfasament $\Delta\varphi$ entre ambdós senyals sobre 360°. Per tant:

$$\Delta\varphi = \measuredangle H(j\omega) = \frac{1{,}5}{9} \cdot 360^\circ = 60^\circ$$

Si prenem $v_{c1}(t)$ com a referència de fase (fase zero), aleshores assignarem a $v_{c2}(t)$ una fase de 60°.

Amb tota aquesta informació podem concloure que el valor dels dos fasors demanats és:

$$\overline{V}_{c1} = 8\underline{/0^\circ} \quad , \quad \overline{V}_{c2} = 2\underline{/60^\circ}$$

d) Substituint els fasors anteriors a l'expressió de Y obtenim,

$$Y = (0{,}0100 - 0{,}0346\mathrm{j})\,\mho$$

El fet que la susceptància sigui negativa ens indica que ens trobem davant d'una admitància (o impedància) de tipus **inductiu**. L'element E és, per tant, un inductor.

e) El model equivalent d'aquesta admitància està format per un resistor R en paral·lel amb un inductor de valor L. L'admitància del conjunt la trobem sumant les admitàncies dels dos elements:

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L}$$

I els valors de R i L els trobem igualant l'expressió anterior amb el valor de l'admitància que hem mesurat amb l'ajut de l'oscil·loscopi. Identificant es troba que

$$R = \frac{1}{0{,}01} = 100\,\Omega \qquad , \qquad L = \frac{1}{0{,}0346\ \omega} = 206{,}99\,\mu\mathrm{H} \simeq 207\,\mu\mathrm{H}$$

Per fer l'últim càlcul hem utilitzat un valor de ω que hem obtingut a partir de l'oscil·loscopi tenint en compte que $T = 9$ divisions $\times$ 5 µs/divisió = 45 µs, resulta $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}3963\cdot10^5$ rad/s ($f = 22.222$ Hz).

f) De la gràfica de l'oscil·loscopi veiem que l'amplitud de la tensió que cau a la càrrega és de $|\overline{V}_{c2}| = 2$ V. Dels dos elements del model de la càrrega, l'únic que dissipa potència és el resistor, i aquesta potència es calcula com:

$$P = \frac{|\overline{V}_{c2}|^2}{2R} = \frac{4}{2\cdot 100} = 20\,\mathrm{mW}$$

✻