Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

— Departament de TSC —

Circuits i Sistemes Lineals – Examen REAV
11 de juliol de 2017, de 08:00h a 11:00h

Notes provisionals 17-07-2017
Període d'al·legacions .... de 17-07-2017 a 18-07-2017
Notes definitives 19-07-2017

Professors: **Núria Duffo, Jorge García, Orestes Mas, Olga Muñoz i Margarita Sanz** Durada: 3h
Consultes sobre l'examen: **18-07-2017**

P1. (2 punts) Donat el circuit de la figura 1, es demana:

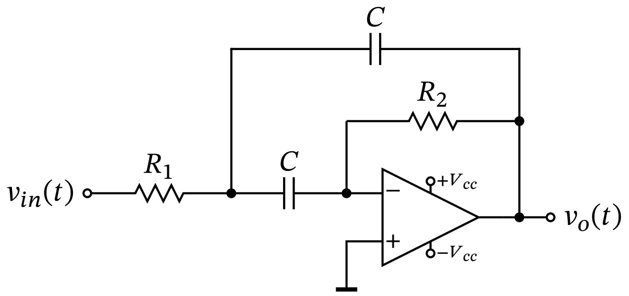


Figura 1: Circuit sota estudi

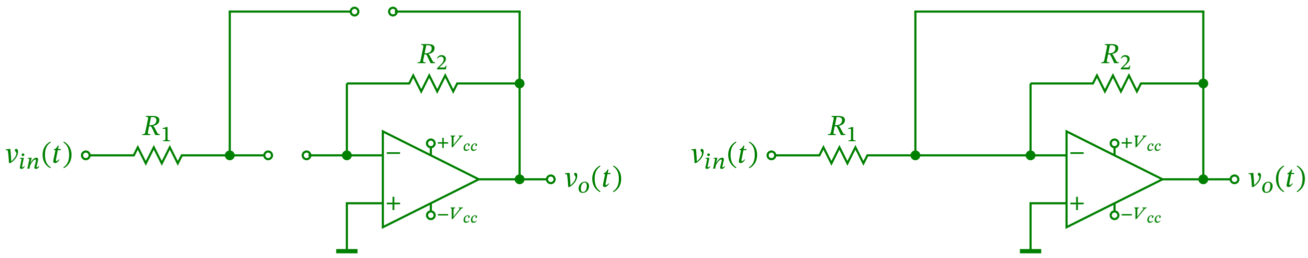
a) Dibuixeu el seu esquema circuital tant per baixes com per altes freqüències i justifiqueu el tipus de filtrat que realitza el circuit.

b) Calculeu la seva funció de xarxa, $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}$.

c) Comproveu que en aquest circuit es compleix que l'amplificació màxima és $2Q^2$, essent Q el factor de qualitat del filtre.

Solució:

a) A la figura 2 s'han dibuixat els circuits per a baixes i altes freqüències



(a) Circuit a baixes freqüències

(b) Circuit a altes freqüències

Figura 2: Circuit sota estudi a altes i baixes freqüències

Concretament a baixes freqüències s'observa que els camins entre entrada i sortida queden tallats, per la qual cosa, concloem que la tensió de sortida a baixes freqüències serà nul·la. D'altra banda, a altes freqüències la tensió de sortida del circuit serà igual a la tensió a l'entrada inversora de l'AO a causa del curtcircuit que s'ha format amb els dos capacitors i, com que la tensió a l'entrada inversora és igual a zero pel curtcircuit virtual, la sortida també en aquest cas serà nul·la.

Així doncs, estem davant d'un circuit corresponent a un **filtre passa-banda**, atès que el màxim d'amplificació s'haurà de donar a alguna freqüència intermitja.

b) Per trobar la funció de xarxa, primer es transforma el circuit al domini de Laplace i s'analitza el circuit resultant (figura 3). Triant el mètode Nodal per fer l'anàlisi, s'han de plantejar els KCL's als nodes 2 i 3, el que ens porta al següent sistema d'equacions:

$$\begin{bmatrix} 2Cs + G_1 & -Cs \\ -Cs & -G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolent llavors el sistema d'equacions per determinar V_o en funció de V_{in} queda

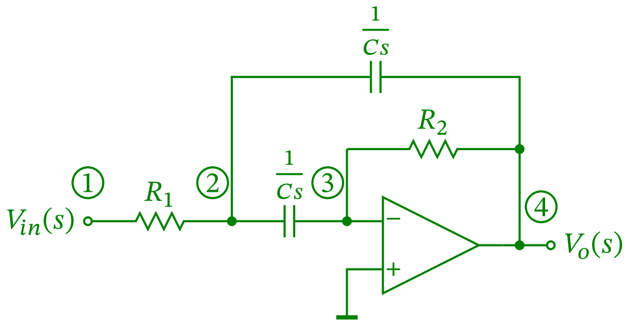


Figura 3: Circuit transformat

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{G_1}{C} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{2G_2}{C}s + \frac{G_1G_2}{C^2}} = -\frac{1}{R_1C} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{2}{R_2C}s + \frac{1}{R_1R_2C^2}}$$

$$\boxed{H(s) = -\frac{1}{R_1C} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{2}{R_2C}s + \frac{1}{R_1R_2C^2}}}$$

Que com es pot observar correspon a la típica funció de xarxa d'un filtre passa-banda $H(s) = k\frac{s}{s^2+2\xi\omega_o s+\omega_o^2}$.

c) L'amplificació màxima en un filtre passa-banda es dóna a la freqüència natural de ressonància, f_o, i és de valor

$$|H(j\omega)| = \frac{|k|}{2\xi\omega_o} = \frac{R_2C}{2R_1C} = \frac{R_2}{2R_1} \tag{1}$$

D'altra banda, el factor de qualitat, Q, és la inversa de l'amplada de banda relativa, essent doncs

$$Q = \frac{\omega_o}{Bw} = \frac{\omega_o}{2\xi\omega_o} = \frac{R_2C}{2Csqrt(R_1R_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \tag{2}$$

Elevant al quadrat el factor de qualitat

$$Q^2 = \frac{R_2}{4R_1} \tag{3}$$

d'on finalment veiem que

$$\boxed{|H(j\omega)| = 2Q^2} \tag{4}$$

P2. (2 punts) El gràfic de la figura 4 correspon a la resposta freqüencial d'un determinat filtre.

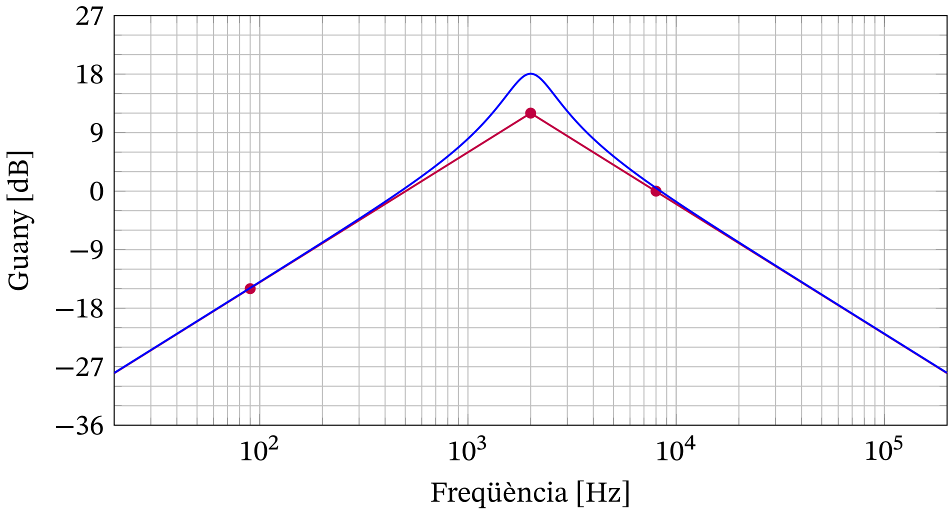


Figura 4: Corba de guany del filtre

Es demana:

a) A partir dels punts marcats a la gràfica, demostreu que el pendent de les asímptotes de baixes i d'altes freqüències és de 20 dB/dec i −20 dB/dec, respectivament.

b) Raoneu de quin tipus de filtre es tracta i justifiqueu el seu ordre.

c) Tenint en compte que el desfasament a la freqüència de 2 kHz és de 180°, deduiu la funció de xarxa corresponent a aquest circuit.

d) Es tracta ara de realitzar el filtre caracteritzat per la funció de xarxa trobada a l'apartat anterior, utilitzant per fer-ho el circuit de la figura 1. En aquest sentit, calculeu els valors dels paràmetres del circuit suposant que s'ha triat $R_1 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$.

Solució:

a) De la gràfica de la figura 4 es pot obervar que el pendent de l'asímptota de baixes freqüències passa per −15 dB a la freqüència de 90 Hz i per 12 dB a la freqüència de 2 kHz. Així doncs, el pendent d'aquesta asímpota serà

$$\boxed{p_1 = \frac{12\,\mathrm{dB} - (-15\,\mathrm{dB})}{\log\frac{2000}{90}\,\mathrm{dec}} = 20\,\mathrm{dB/dec}}$$

De la mateixa manera, veiem que l'asímptota d'altes freqüències passa ara per 12 dB a la freqüència de 2 kHz i per 0 dB a la freqüència de 8 kHz. El càlcul d'aquest pendent, p_2, es pot fer de la mateixa forma que hem fet l'anterior, però si ens fixem que entre els 2 kHz i els 8 kHz la relació és de 4, veiem que hi ha una distància entre les dues freqüències de 2 oct, el que ens porta a veure que el pendent és de $p_2 = \frac{-12\,\mathrm{dB}}{2\,\mathrm{oct}}$ o el que és el mateix

$$\boxed{p_2 = -6\,\mathrm{dB/oct} = -20\,\mathrm{dB/dec}}$$

b) Tal com es pot observar al diagrama de guany de la figura 4, aquest és un circuit que atenua fortament les altes i les baixes freqüències. De fet, en contínua el guany és $-\infty$ pujant paulatinament a mesura que augmenta la freqüència fins arribar a un màxim de 18 dB a una freqüència intermitja que coincideix amb els 2 kHz. A partir d'aquesta freqüència s'observa que el guany va decreixent en augmentar la freqüència fins arribar a un mínim de $-\infty$ a freqüència ∞. És a dir, anul·la la contínua i les freqüències molt elevades mentre que amplifica una banda de freqüències al voltant dels 2 kHz. Tot això ens porta a pensar que es tracta d'un filtre passa-banda.

Per poder deduir l'ordre del filtre ens fixarem, a continuació, en el diagrama asimptòtic. Del pendent de 20 dB/dec de l'asímptota de baixes freqüències deduïm que a la funció de xarxa hi ha un zero a l'origen i, com que el pendent de l'asímptota d'altes freqüències és de −20 dB/dec, aquesta funció de xarxa haurà de tenir un parell de pols complexes conjugats o un pol real doble a la freqüència del colze. Això implica que el denominador de la funció de xarxa serà de segon grau i, per tant, el filtre és un **filtre passa-banda de segon ordre**.

c) Del raonament fet a l'apartat anterior, ja es pot escriure una primera versió incompleta de la funció de xarxa demanada.

$$H(s) = k\frac{s}{\frac{s^2}{(2\pi\cdot 2\cdot 10^3)^2} + \frac{2\xi s}{2\pi\cdot 2\cdot 10^3} + 1} \tag{5}$$

Per tal de determinar el valor del mòdul de la constant k podem fixar-nos en la primera asímptota i escriure l'equació que la representa particularitzada per un valor de la freqüència qualsevol. Prenent per exemple la freqüència del màxim

$$20 \cdot \log|k| + 20 \cdot \log(2\pi \cdot 2\cdot 10^3) = 12\,\text{dB} \tag{6}$$

i aïllant s'obté $|k| = 3{,}17\cdot 10^{-4}$.

D'altra banda, del enunciat sabem que el desfasament a la freqüència del màxim és de 180° i això implica que el signe de la constant hagi de ser negatiu, atès que $H(\mathrm{j}\omega_o) = \frac{k}{2\xi}$ i, com que ξ ha de ser positiu per tal que el circuit sigui estable, la k haurà de ser negativa per a complir amb l'especificació del desfasament. Així doncs, $k = -3{,}17\cdot 10^{4}$.

Per últim, volem determinar el coeficient d'esmorteïment, ξ, i per fer-ho ens hem de fixar ara en la correcció que hi ha entre el diagrama real i el diagrama asimptòtic.

$$\text{Correcció} = 18\,\text{dB} - 12\,\text{dB} = 6\,\text{dB} = -20 \cdot \log 2\xi$$

D'on s'obté, $\xi = 0,25$.

Finalment doncs, la funció de xarxa serà

$$H(s) = -3,17 \cdot 10^{-4}\frac{s}{\frac{s^2}{(2\pi\cdot 2\cdot 10^3)^2} + \frac{2\cdot 0{,}25 s}{2\pi\cdot 2\cdot 10^3} + 1}$$

$$\boxed{H(s) = -8\frac{2\pi 10^3 s}{s^2 + 2\pi 10^3 s + (4\pi 10^3)^2}}$$

Funció a la que també es podria haver arribat partint dels valors de l'amplificació màxima

$$\boxed{|H(\mathrm{j}\omega_o)| = 10^{18/20} = 8}$$

de la freqüència de ressonància del filtre $f_o = 2\,\text{kHz}$ i del factor de qualitat del filtre que es pot trobar a partir de la correcció com $20\log(Q) = 6\,\text{dB}$.

$$\boxed{Q = 2}$$

D'on es pot deduïr l'amplada de banda

$$\boxed{Bw = \frac{f_o}{Q} = 1\,\text{kHz}}$$

d) Identificant els coeficients de la funció de xarxa amb l'obtinguda al primer problema o bé identificant els paràmetres del filtre en els dos casos s'obté

$$\frac{R_2}{2R_1} = 8 \tag{7}$$

que amb la R_1 de 1,5 kΩ lleva a una $\boxed{R_2 = 24\,\mathrm{k\Omega}}$.

$$\frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}} = \frac{1}{4R_1C} = 4\pi 10^3 \tag{8}$$

Aïllant la capacitat obtenim finalment $\boxed{C = 13{,}26\,\mathrm{nF}}$

I finalment, amb la última equació comprovem que amb la R_1 donada es poden fer cumplir totes les especificacions donades.

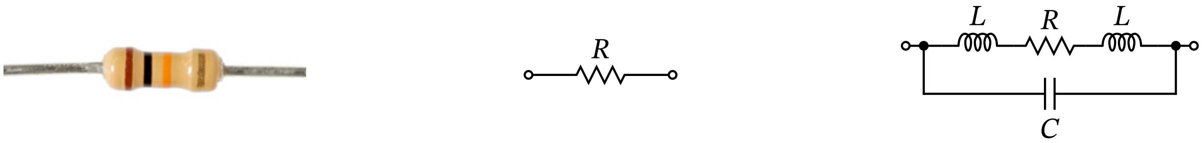
$$Bw = \frac{2}{2\pi R_2 C} = \frac{2}{2\pi 24 \cdot 10^3 \cdot 13,26 \cdot 10^{-9}} = 1\,\mathrm{kHz} \tag{9}$$

que efectivament correspon a l'ample de banda obtingut a partir del diagrama de guany.

P3. (2 punts) La Teoria de Circuits permet fer prediccions sobre el comportament de sistemes electrònics reals a través de l'anàlisi de **circuits** que els modelen. Tanmateix, la qualitat d'aquestes prediccions depèn enormement del grau d'aproximació entre el model i la realitat.

Per tal d'il·lustrar les implicacions del procés de modelació, considereu la figura 5a, on es mostra una resistència de carbó, component típic de molts equips electrònics. Aquest component està fabricat de forma que el seu efecte principal sigui aproximar la llei d'Ohm (dins d'uns certs marges de funcionament), de manera que normalment el modelem com un simple resistor, representat a la figura 5b.

Ara bé, si volem ser realment precisos hem de tenir en compte que cadascun dels dos terminals de la resistència presentarà una certa **inductància** (com qualsevol conductor), encara que el seu valor sigui força petit. A més, els dos terminals estan separats entre sí per una substància exterior aïllant, cosa que fa aparèixer una certa **capacitat** entre ells. Tot plegat porta a proposar un model més acurat, el qual es mostra a la figura 5c.



(a) Resistència comercial (b) Model simplificat (c) Model circuital més acurat

Figura 5: Modelació d'una resistència

Sabent que els valors del model (c), mesurats per una resistència de 10 kΩ són $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 8{,}7\,\mathrm{nH}$ i $C = 0{,}3\,\mathrm{pF}$, es demana:

a) Expliqueu perquè el model de la figura 5b permet fer unes prediccions adequades a freqüències baixes.

b) Calculeu amb precisió la impedància del component a la freqüència de 200 MHz i proposeu-ne un circuit equivalent format únicament per **dos** elements de circuit.

c) A la vista dels resultats de l'apartat anterior, creieu que el model de la figura 5b és suficient per explicar el comportament del component a $f = 200\,\mathrm{MHz}$? En cas negatiu, quin seria el factor que fa desviar més les prediccions obtingudes amb el model simplificat?

Solució:

a) **A freqüències baixes** els inductors tendeixen a comportar-se com a curtcircuits i els capacitors com a circuits oberts, per la qual cosa el model de la figura 5c tendeix al de la figura 5b i les prediccions que s'obtenen en utilitzar-ne un o l'altre són pràcticament les mateixes.

b) A $f = 200\,\mathrm{MHz}$ les impedàncies dels elements reactius del model de la figura 5c són:

$$Z_L = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}2\pi f L = +10{,}932\mathrm{j}$$
$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f C} = -2652{,}582\mathrm{j}$$

La impedància total del model la calculem com la impedància del capacitor, en paral·lel amb la impedància en sèrie del resistor i els dos inductors:

$$Z_T = Z_C || (Z_L + Z_R + Z_L) = -2652{,}582\mathrm{j} || (10.000 + 21{,}865\mathrm{j})$$
$$Z_T = (658{,}07 - 2479{,}46\mathrm{j})\ [\Omega]$$

Aquesta impedància és **capacitiva** i la podem modelar amb un resistor de 658,07 Ω en **sèrie** amb un capacitor de 0,32 pF.

Alternativament, si partim de l'admitància total podem trobar un model format per dos elements en paral·lel:

$$Y_T = \frac{1}{Z_T} = \frac{1}{658{,}07 - 2479{,}46\mathrm{j}} = (0{,}9999 + 3{,}7677\mathrm{j})\cdot 10^{-4}\ [\mathrm{S}]$$

la qual també és capacitiva (susceptància positiva) i es pot modelar amb un resistor d'aproximadament 10 kΩ en **paral·lel** amb un capacitor d'aproximadament 0,3 pF (0,299 per ser exactes).

c) En l'apartat anterior hem comprovat com la impedància del resistor a $f = 200\,\text{MHz}$, calculada segons el model acurat, s'allunya molt dels $10\,\text{k}\Omega$ que prediu el model simplificat i, en conseqüència, hem de concloure que aquest darrer **no és suficient** per fer prediccions fiables a freqüències elevades.

Si observem detingudament les impedàncies dels diversos elements que formen el model de la figura 5c, observem que $Z_L \simeq 10\text{j}\,\Omega$, la qual és molt menor que la impedància del resistor ($10\,\text{k}\Omega$) i, per tant, afecta poc al seu valor. Per contra, la impedància del capacitor és $Z_C \simeq -2652\text{j}\,\Omega$, la qual connectada en paral·lel amb el resistor fa variar notablement el seu valor. Per tant, podem afirmar que **el factor determinant en el comportament del resistor a freqüències elevades és la capacitat que apareix entre els seus terminals**.

P4. (2 punts) En el circuit de la figura 6 se sap que el condensador es troba inicialment descarregat.

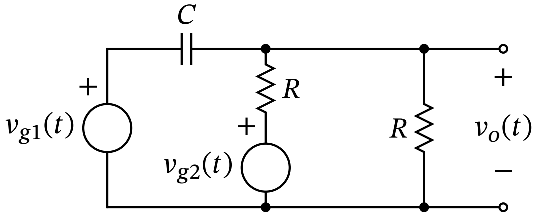


Figura 6: Circuit per al càlcul de la resposta temporal

Es demana:

a) Dibuixeu el circuit transformat de Laplace.

b) Determineu la transformada de la tensió de sortida, $V_o(s)$, en funció de les tensions $V_{g1}(s)$ i $V_{g2}(s)$.

Per $v_{g1}(t) = 10\sin(1{,}25\cdot 10^4\, t)\cdot u(t)$, $v_{g2}(t) = 12\cdot u(t)$, $C = 1\,\mu\text{F}$ i $R = 2\,\text{k}\Omega$,

c) Calculeu la resposta temporal, $v_o(t)$, per $t \geq 0$.

d) Raoneu quins components de la resposta anterior corresponen a la resposta lliure i quins a la forçada.

Solució:

a) El circuit transformat de Laplace és el que s'observa a la figura 7

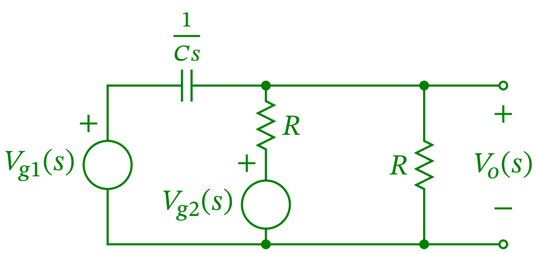
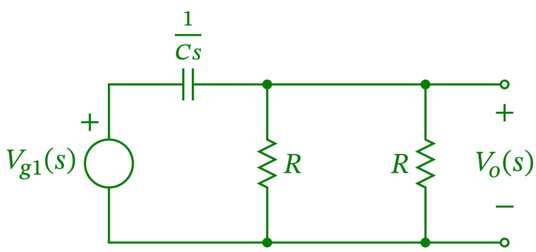
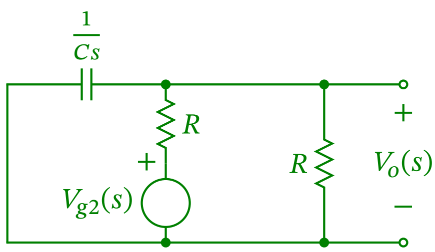


Figura 7: Circuit transformat de Laplace corresponent al circuit de l'enunciat

b) Aplicant superposició de fonts, per exemple, podem redibuixar els següents dos circuits per a cadascuna de les fonts:



(a) Cas 1: $V_{g1} \neq 0$, $V_{g2} = 0$



(b) Cas 2: $V_{g1} = 0$, $V_{g2} \neq 0$

Figura 8: Anàlisi per superposició

Llavors, observem que en els dos casos la resposta es pot trobar aplicant un senzill divisor de tensió amb les impedàncies involucrades.

Cas 1: En curtcircuitar el segon generador, els dos resistors queden en paral·lel, essent l'equivalent R/2 i, per tant:

$$V_{o1}(s) = \frac{R/2}{R/2 + Z_c} \cdot V_{g1}(s)$$

on $Z_c = \frac{1}{sC}$, i substituint queda:

$$V_{o1}(s) = \frac{R/2}{R/2 + \frac{1}{sC}} \cdot V_{g1}(s) = \frac{RCs}{sRC + 2} \cdot V_{g1}(s) \tag{10}$$

Cas 2: En curtcircuitar el primer generador, el capacitor C queda en paral·lel amb la resistència R de la sortida i en aquest cas:

$$V_{o2}(s) = \frac{Z_1}{R + Z_1} \cdot V_{g2}(s)$$

on Z_1 es el paral·lel entre R i la impedància del capacitor:

$$Z_1 = \frac{R \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{sRC + 1}$$

Substituint:

$$V_{o2}(s) = \frac{Z_1}{R + Z_1} \cdot V_{g2}(s) = \frac{1}{sRC + 2} \cdot V_{g2}(s) \tag{11}$$

Llavors, sumant les dues tensions $V_{o1}(s)$ i $V_{o2}(s)$ obtingudes a les equacions (10) i (11) respectivament, tenim la tensió total a la sortida:

$$\boxed{V_o(s) = \frac{sRC}{sRC + 2} \cdot V_{g1}(s) + \frac{1}{sRC + 2} \cdot V_{g2}(s)} \tag{12}$$

Un punt interessant a observar és que el factor $\frac{1}{sRC+2}$ correspon a un **pol introduït pel circuit** i apareix als dos sumands de l'equació independentment de les excitacions que hi posem.

NOTA:

En lloc de la superposició, també es podia haver aplicat un KCL al node de la sortida, que seria:

$$\big(V_o(s) - V_{g1}(s)\big) \cdot Cs + \big(V_o(s) - V_{g2}(s)\big) \cdot G + V_o(s) \cdot G = 0$$

i d'aqui aïllem la tensió a la sortida:

$$V_o(s) \cdot (Cs + 2G) - V_{g1}(s) \cdot Cs - V_{g2}(s) \cdot G = 0$$

$$V_o(s) = \frac{V_{g1}(s) \cdot Cs + V_{g2}(s) \cdot G}{Cs + 2G}$$

c) Primer escrivim les transformades dels dos senyals d'entrada:

$$v_{g1}(t) = 10 \cdot \sin(1{,}25{\cdot}10^4 t) \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_{g1}(s) = 10\frac{1{,}25{\cdot}10^4}{s^2 + (1{,}25{\cdot}10^4)^2}$$

$$v_{g2}(t) = 12 \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_{g2}(s) = \frac{12}{s}$$

(observem que l'excitació $V_{g1}(s)$ introdueix **dos pols imaginaris** situats a $\pm 1{,}25\mathrm{j}{\cdot}10^4$, mentre que $V_{g2}(s)$ introdueix un **pol a l'origen**).

I ara substituim a l'expressió de la tensió de sortida (equació 12):

$$V_o(s) = \frac{sRC}{sRC + 2} \cdot 10\frac{1{,}25{\cdot}10^4}{s^2 + (1{,}25{\cdot}10^4)^2} + \frac{1}{sRC + 2} \cdot \frac{12}{s}$$

Arribats a aquest punt, el millor és substituir els valors per simplificar una mica l'expressió:

$$V_o(s) = \frac{s}{s + 1000} \cdot 10\frac{1{,}25{\cdot}10^4}{s^2 + (1{,}25{\cdot}10^4)^2} + \frac{1}{2{\cdot}10^{-3}s + 2} \cdot \frac{12}{s}$$

Arreglant-ho una mica:

$$V_o(s) = \frac{1{,}25\cdot 10^5 s}{(s+1000)\cdot(s^2+(1{,}25\cdot 10^4)^2)} + \frac{1000}{s+1000}\cdot\frac{6}{s}$$

Per calcular la transformada inversa podríem agrupar les dues fraccions en una de sola, però la solució és una mica més simple si operem les fraccions per separat i sumem al final.

Per a la primera fracció tenim:

$$V_{o1}(s) = \frac{1{,}25\cdot 10^5 s}{(s+1000)\cdot(s^2+(1{,}25\cdot 10^4)^2)} = \frac{A}{s+1000} + \frac{B}{s-1{,}25\mathrm{j}\cdot 10^4} + \frac{B^*}{s+1{,}25\mathrm{j}\cdot 10^4}$$

$$A = \left.\frac{1{,}25\cdot 10^5 s}{s^2+(1{,}25\cdot 10^4)^2}\right|_{s=-1000} = -0{,}8$$

$$B = \left.\frac{1{,}25\cdot 10^5 s}{(s+1000)\cdot(s+1{,}25\mathrm{j}\cdot 10^4)}\right|_{s=1{,}25\mathrm{j}\cdot 10^4} = \frac{1{,}25\cdot 10^5}{2(1{,}25\mathrm{j}\cdot 10^4+1000)}$$

i d'aqui calculem:

$$|B| = 4{,}98 \quad ; \quad \angle B = -85{,}43°$$

Per tant, la resposta temporal d'aquesta senyal seria:

$$v_{o1}(t) = \left[-0{,}8\cdot e^{-1000\cdot t} + 9{,}96\cdot\cos(1{,}25\cdot 10^4 t - 85{,}43°)\right]u(t)$$

Per al segon senyal:

$$V_{o2}(s) = \frac{1000}{s+1000}\cdot\frac{6}{s} = \frac{A}{s+1000} + \frac{B}{s}$$

$$A = \left.\frac{6000}{s}\right|_{s=-1000} = -6$$

$$B = \left.\frac{6000}{s+1000}\right|_{s=0} = 6$$

Per tant, la transformada inversa ens porta a:

$$v_{o2}(t) = 6\left(1-e^{-1000\cdot t}\right)\cdot u(t)$$

Sumant les dues sortides tenim la resposta temporal total:

$$\boxed{v_o(t) = \left[6 - 6{,}8\cdot e^{-1000\cdot t} + 9{,}96\cdot\cos(1{,}25\cdot 10^4 t - 85{,}43°)\right]u(t)}$$

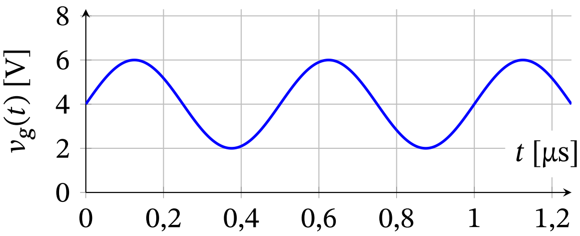
d) Del resultat clarament la resposta lliure és la que correspon al pol introduit pel circuit, i que desapareix quant $t \to \infty$ perquè el circuit és estable:

$$\left.v_o(t)\right|_{\text{lliure}} = -6{,}8\cdot e^{-1000\cdot t}u(t)$$

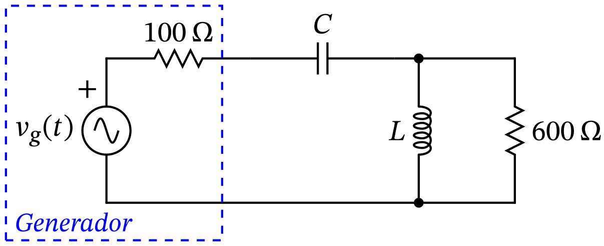
i la resposta forçada és la que introdueixen les dues excitacions del circuit a través dels seus pols (un d'ells a l'origen i dos altres complexes conjugats sense part real). Pel tipus de pols que té, aquesta resposta no tendeix a zero quan $t \to \infty$:

$$\left.v_o(t)\right|_{\text{forçada}} = \left[6 + 9{,}96\cdot\cos(1{,}25\cdot 10^4 t - 85{,}43°)\right]u(t)$$

P5. (2 punts) Un generador proporciona el senyal $v_g(t)$ que es mostra a la figura 9a. Aquest generador es connecta a una càrrega de 600 Ω mitjançant una xarxa d'adaptació, tal com es mostra a la figura 9b.



(a) Senyal $v_g(t)$.



(b) Connexió de generador i càrrega amb xarxa adaptadora.

Figura 9

Es demana:

a) Dibuixeu l'espectre d'amplitud del senyal d'entrada, $v_g(t)$.

b) Sabent que la xarxa està dissenyada per aconseguir adaptació a la freqüència de 2 MHz, calculeu quina és la potència total que arriba a la càrrega.

c) Calculeu els valors de L i C de la xarxa adaptadora.

d) Considerant com a sortida la tensió en terminals de la càrrega de 600 Ω, $v_o(t)$, dibuixeu el seu espectre d'amplitud justificant clarament com s'han obtingut els valors de cada component freqüencial.

e) Definint $H(j\omega) = \frac{\overline{\mathbf{V}}_o}{\overline{\mathbf{V}}_g}$, esbosseu la corba d'amplificació $|H(j\omega)|$, calculant prèviament els valors d'amplificació a $f = 0$, $f = 2\,\text{MHz}$ i $f = \infty$.

Solució:

a) El senyal $v_g(t)$ conté un component DC de 4 V i un component AC de freqüència 2 MHz i 2 V d'amplitud. L'espectre demanat es mostra a la figura 10.

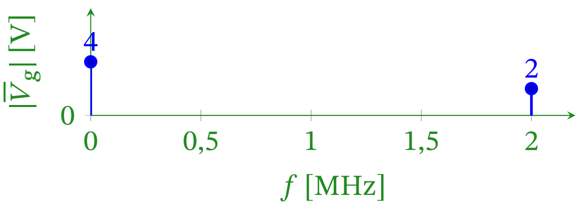


Figura 10: Espectre d'amplitud del senyal $v_g(t)$

b) Per calcular la potència total a la càrrega, haurem de sumar la potència dissipada per la càrrega per a cada una de les freqüències del senyal d'entrada.

- En règim permanent de contínua el condensador es comporta com un circuit obert i l'inductor com un curtcircuit: l'amplitud del component DC a la sortida és 0. Per tant, la seva contribució a la potència total és 0.
- No sabem quina és l'amplitud del component AC a la sortida, però sabem que el circuit està dissenyat per adaptar a 2 MHz. Per tant, la potència dissipada per la càrrega a aquesta freqüència serà la potència disponible: $P_{\text{disp}} = \frac{V_{g,\text{pic}}^2}{8R_g} = \frac{4}{8 \cdot 100} = 5\,\text{mW}$, essent el valor de $V_{g,\text{pic}}$ és el valor de pic (o amplitud) del component de 2 MHz.

Per tant: $P_{R_L} = 5\,\text{mW}$.

c) Pel càlcul de X_s i X_p utilitzem les expressions pel disseny de la xarxa d'adaptació quan $R_g < R_L$:

$$X_s = \pm\sqrt{R_g(R_L - R_g)} = \pm 223{,}61 \qquad X_p = \mp R_L\sqrt{\frac{R_g}{R_L - R_g}} = \mp 268{,}33$$

Ens demanen el valor de L i C:

$$jX_s = -j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 223{,}61} = 356\,\text{pF} \qquad jX_p = j\omega L \Rightarrow L = \frac{268{,}33}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6} = 21{,}3\,\mu\text{H}$$

d) L'amplitud del component DC a la sortida és 0.

Per a calcular l'amplitud del component de 2 MHz a la sortida utilitzem que $P_{R_L} = \frac{V_{o,\text{pic}}^2}{2R_L} = 5\,\text{mW}$. Per tant, $V_{o,\text{pic}} = 2{,}45\,\text{V}$.

L'espectre demanat es mostra a la figura 11.

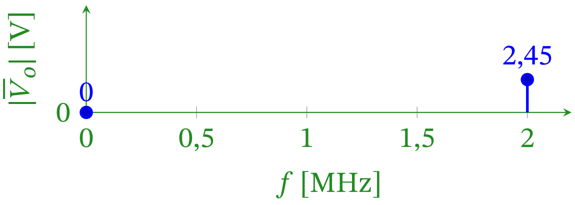


Figura 11: Espectre d'amplitud del senyal $v_o(t)$

e)
- ➢ A $f = 0$, el condensador es comporta com un circuit obert i l'inductor com un curtcircuit. El component continu a la sortida és 0. Per tant, per a $f = 0$, $|H| = 0$.
- ➢ Calculem l'amplificació a $f = 2\,\text{MHz}$ dividint l'amplitud a la sortida d'aquest component freqüencial (2,45 V) pel seu valor a l'entrada (2 V). Llavors, $|H| = 1{,}225$.
- ➢ A altes freqüències, el condensador es comporta com un curtcircuit i l'inductor com un circuit obert. Llavors, $|H| = \frac{R_g + R_L}{R_L} = \frac{6}{7} = 0{,}85$.

La corba d'amplificació és la d'un filtre passa-altes amb un pic de ressonància de 1,225 a $f = 2\,\text{MHz}$.