

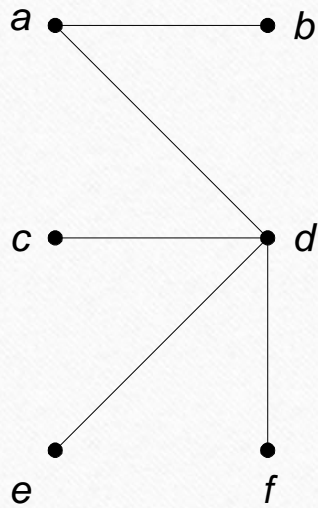
MATEMATIKA DISKRIT

Pohon

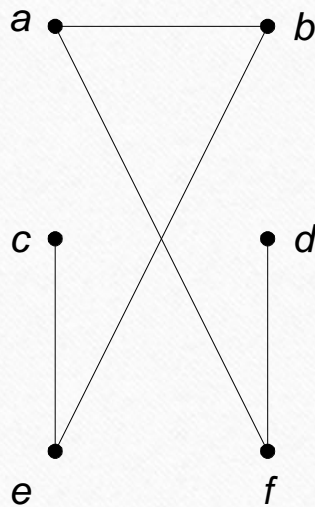
Program Studi Teknik Informatika

Definisi Pohon

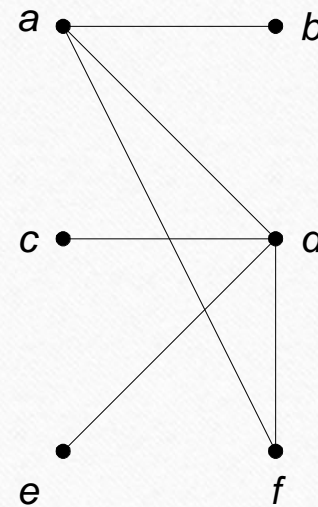
- **Pohon** adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit



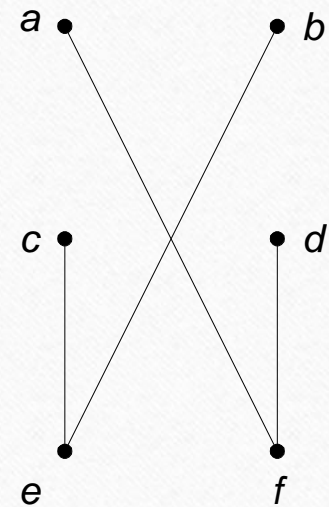
pohon



pohon



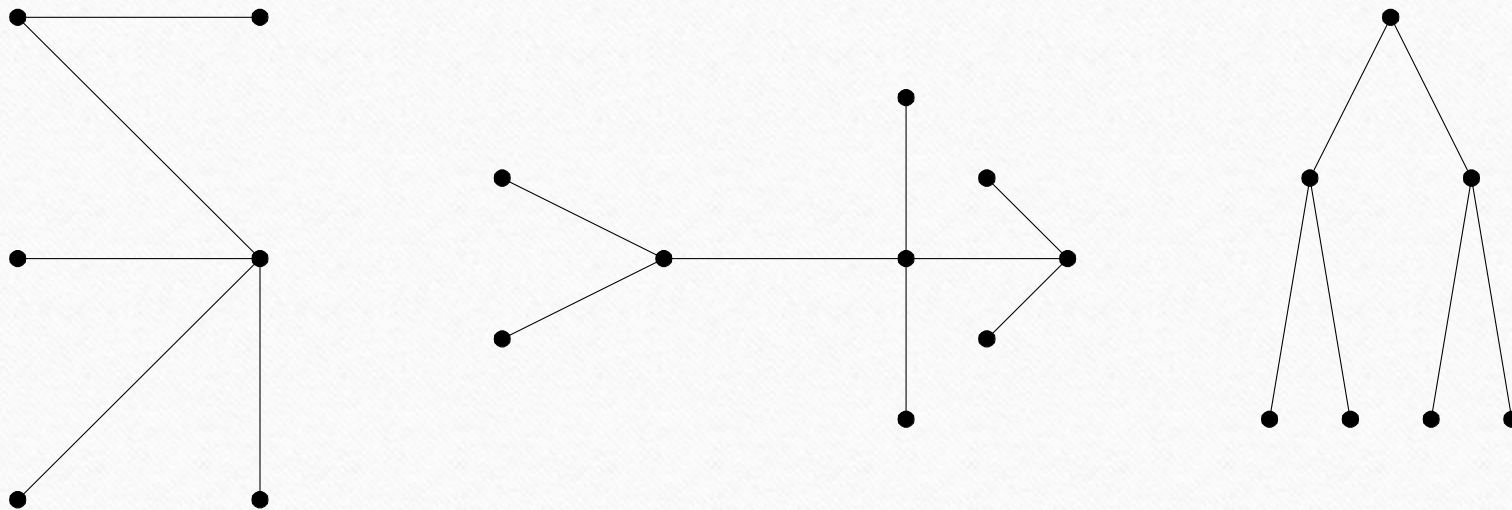
bukan pohon



bukan pohon

Hutan (*forest*) adalah

- kumpulan pohon yang saling lepas, atau
- graf tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graf terhubung tersebut adalah pohon.



Hutan yang terdiri dari tiga buah pohon



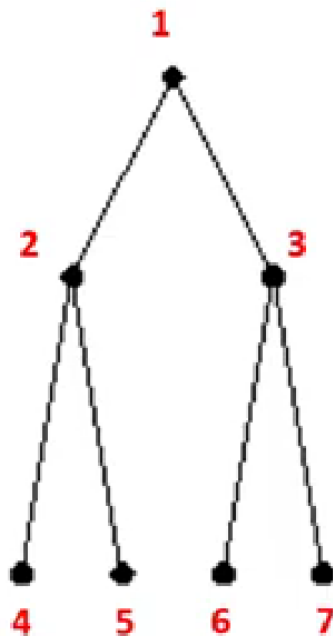
Hutan

Sifat-sifat (properti) pohon

Teorema. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n . Maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen:

1. G adalah pohon.
2. Setiap pasang simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal.
3. G terhubung dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
4. G tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
5. G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.
6. G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan.

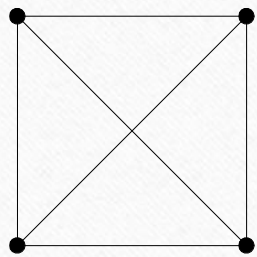
- Teorema di atas dapat dikatakan sebagai definisi lain dari pohon.



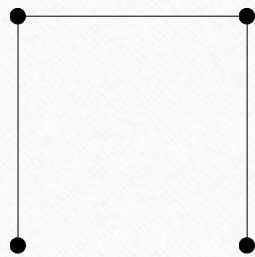
1. G adalah pohon. ($n = 7$)
2. Setiap pasang simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal. (lintasan $(1, 4)$ adalah $1, 2, 4$)
3. G terhubung dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi. ($m = 7 - 1 = 6$ buah sisi)
4. G tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
5. G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.
6. G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan.

Pohon Merentang (*spanning tree*)

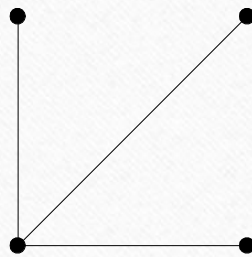
- Pohon merentang dari graf terhubung adalah upagraf merentang yang berupa pohon.
- Pohon merentang diperoleh dengan memutus sirkuit di dalam graf.



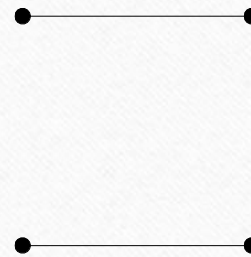
G



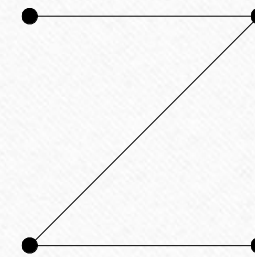
T_1



T_2



T_3

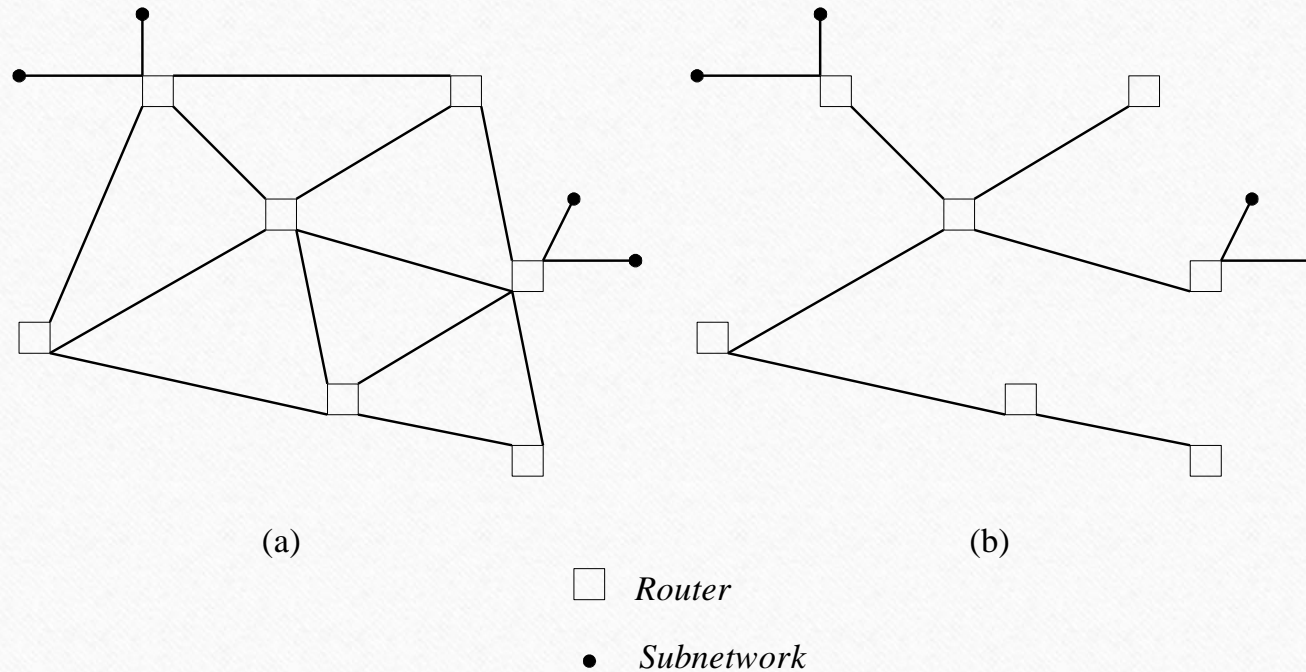


T_4

- Setiap graf terhubung mempunyai paling sedikit satu buah pohon merentang.
- Graf tak-terhubung dengan k komponen mempunyai k buah hutan merentang yang disebut hutan merentang (*spanning forest*).

Aplikasi Pohon Merentang

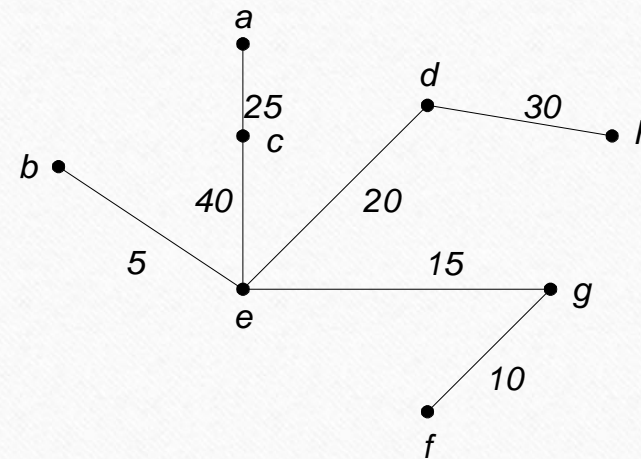
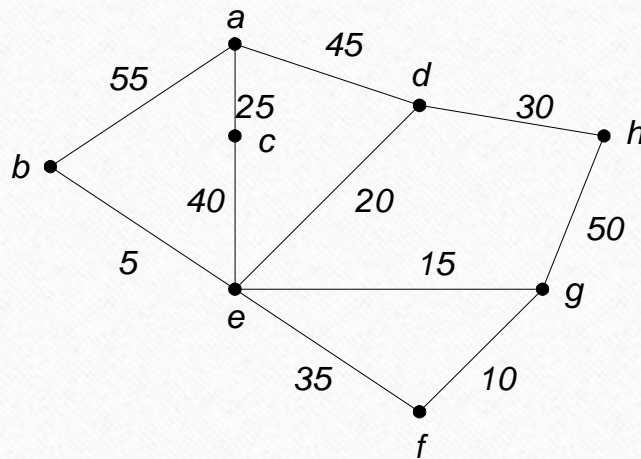
1. Jumlah ruas jalan semimumimum mungkin yang menghubungkan semua kota sehingga setiap kota tetap terhubung satu sama lain.
2. Perutean (*routing*) pesan pada jaringan komputer.



(a) Jaringan komputer, (b) Pohon merentang *multicast*

Pohon Merentang Minimum

- Graf terhubung-berbobot mungkin mempunyai lebih dari 1 pohon merentang.
- Pohon merentang yang berbobot minimum –dinamakan **pohon merentang minimum** (*minimum spanning tree*).



Algoritma Prim

Langkah 1: ambil sisi dari graf G yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T .

Langkah 2: pilih sisi (u, v) yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di T , tetapi (u, v) tidak membentuk sirkuit di T . Masukkan (u, v) ke dalam T .

Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak $n - 2$ kali.

```
procedure Prim(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf
terhubung- berbobot G.
```

```
Masukan: graf-berbobot terhubung  $G = (V, E)$ , dengan  $|V| = n$ 
Keluaran: pohon rentang minimum  $T = (V, E')$ 
}
```

Deklarasi

```
i, p, q, u, v : integer
```

Algoritma

```
Cari sisi (p,q) dari E yang berbobot terkecil
```

```
T ← {(p,q)}
```

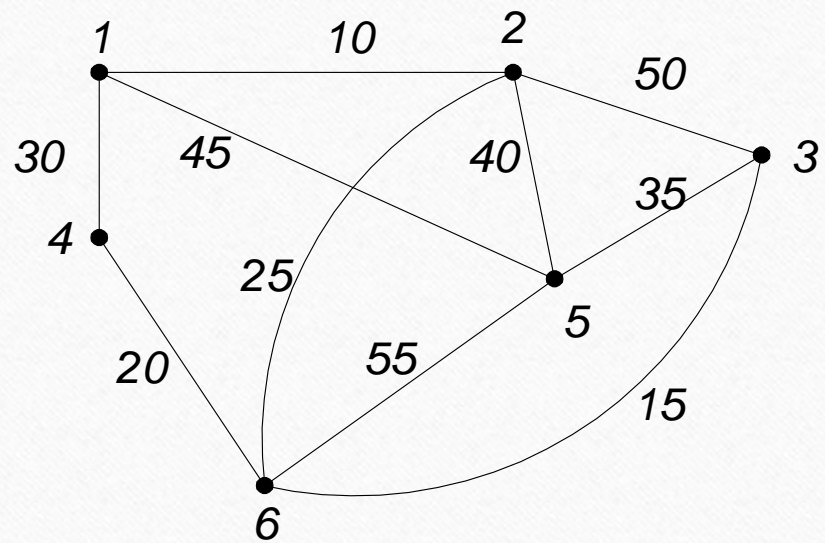
```
for i←1 to n-2 do
```

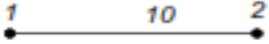
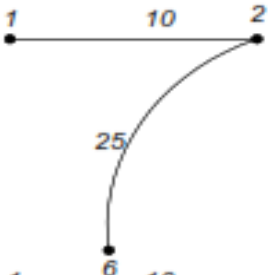
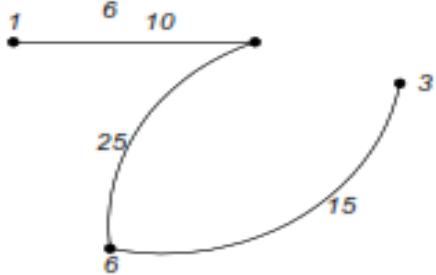
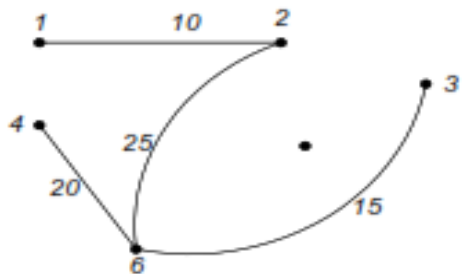
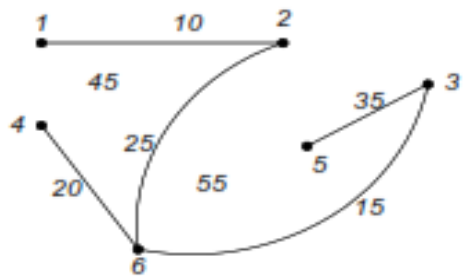
```
    Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil
    namun bersisian dengan simpul di T
```

```
    T ← T ∪ {(u,v)}
```

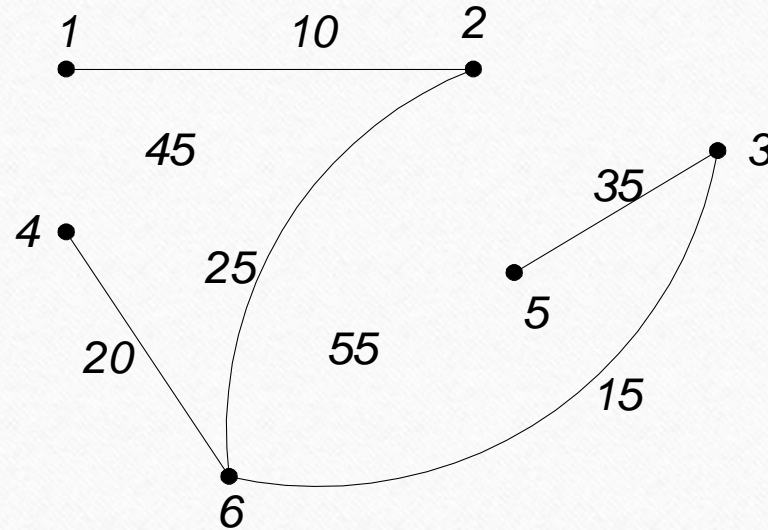
```
endfor
```


Contoh:



Langkah	Sisi	Bobot	Pohon rentang
1	(1, 2)	10	
2	(2, 6)	25	
3	(3, 6)	15	
4	(4, 6)	20	
5	(3, 5)	35	

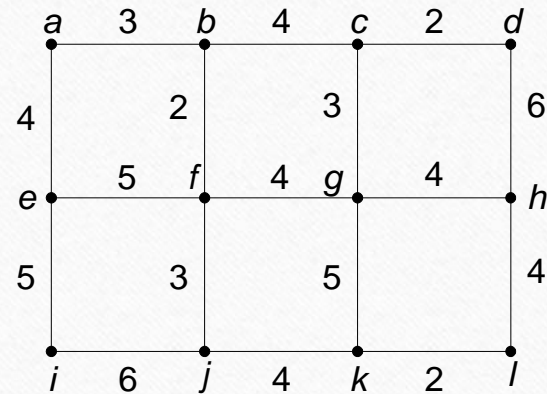
Pohon merentang minimum yang dihasilkan:



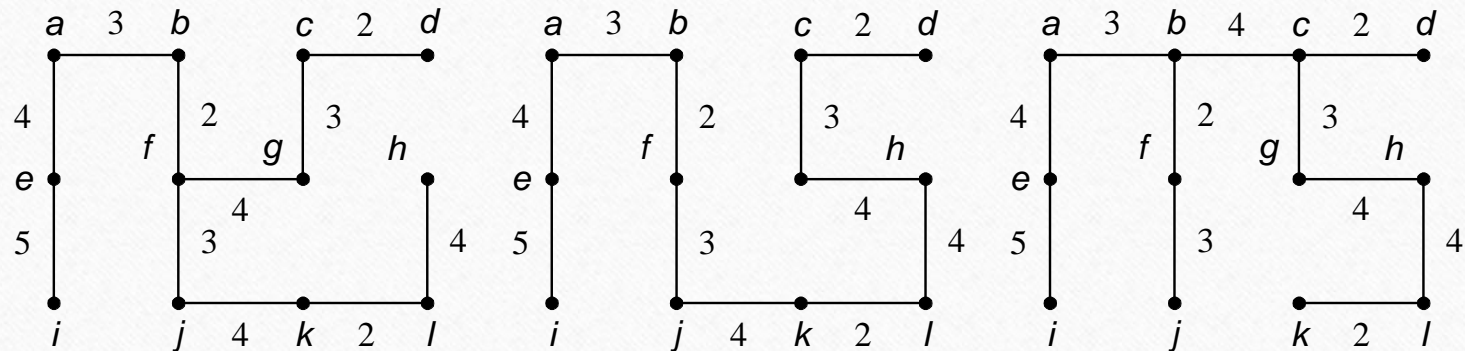
$$\text{Bobot} = 10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$$

- Pohon merentang yang dihasilkan tidak selalu unik meskipun bobotnya tetap sama.
- Hal ini terjadi jika ada beberapa sisi yang akan dipilih berbobot sama.

Contoh:



Tiga buah pohon merentang minimumnya:



Bobotnya sama yaitu = 36

Algoritma Kruskal

(Langkah 0: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik berdasarkan bobotnya – dari bobot kecil ke bobot besar)

Langkah 1: T masih kosong

Langkah 2: pilih sisi (u, v) dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di T . Tambahkan (u, v) ke dalam T .

Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak $n - 1$ kali.


```
procedure Kruskal(input G : graf, output T : pohon)
{ Membentuk pohon merentang minimum T dari graf terhubung -
berbobot G.
```

Masukan: graf-berbobot terhubung $G = (V, E)$, dengan $|V| = n$

Keluaran: pohon rentang minimum $T = (V, E')$

```
}
```

Deklarasi

```
  i, p, q, u, v : integer
```

Algoritma

```
  ( Asumsi: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik
    berdasarkan bobotnya - dari bobot kecil ke bobot
    besar)
```

```
  T ← {}
```

```
  while jumlah sisi T < n-1 do
```

```
    Pilih sisi (u,v) dari E yang bobotnya terkecil
```

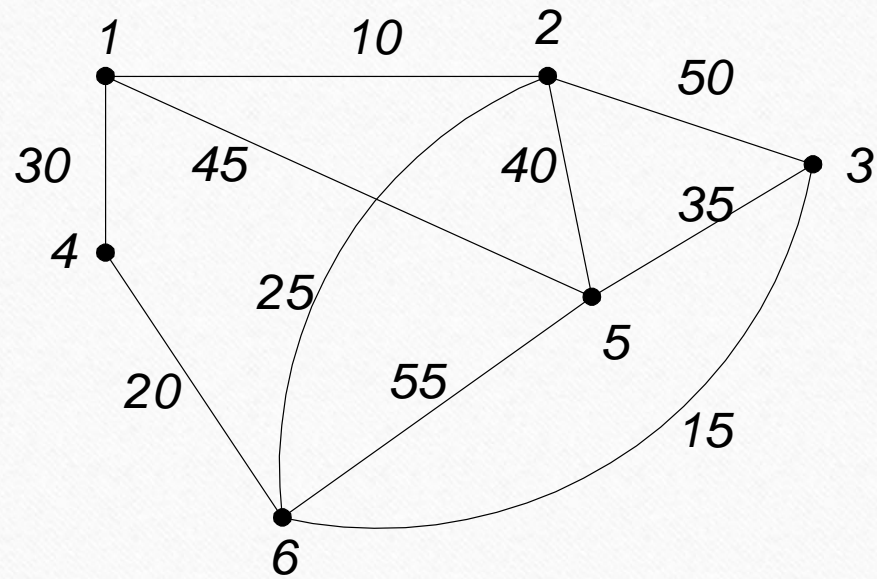
```
    if (u,v) tidak membentuk siklus di T then
```

```
      T ← T ∪ {(u,v)}
```

```
    endif
```



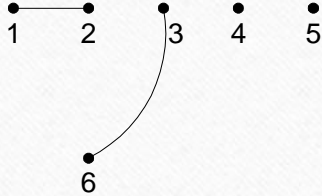
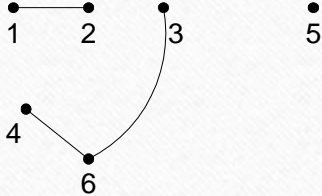
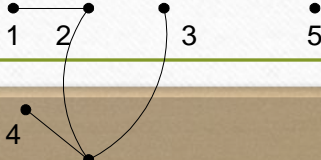
```
  endfor
```

Contoh:



Sisi-sisi diurut
menaik:

Sisi	(1,2)	(3,6)	(4,6)	(2,6)	(1,4)	(3,5)	(2,5)	(1,5)	(2,3)	(5,6)
Bobot	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

Langkah	Sisi	Bobot	Hutan merentang
0			
1	(1, 2)	10	
2	(3, 6)	15	
3	(4, 6)	20	
4	(2, 6)	25	

Sisi	(1,2)	(3,6)	(4,6)	(2,6)	(1,4)	(3,5)	(2,5)	(1,5)	(2,3)	(5,6)
Bobot	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

5

(1, 4)

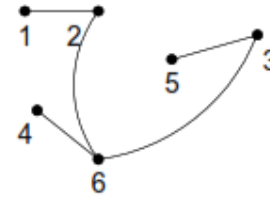
30

ditolak

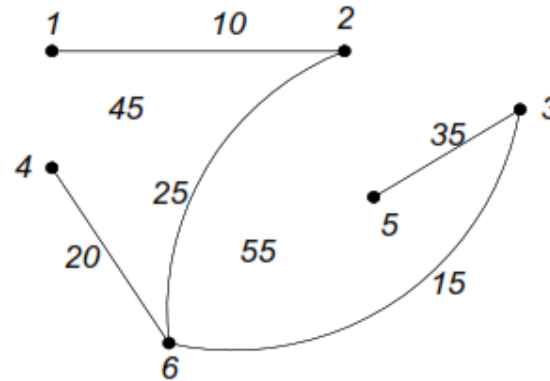
6

(3, 5)

35



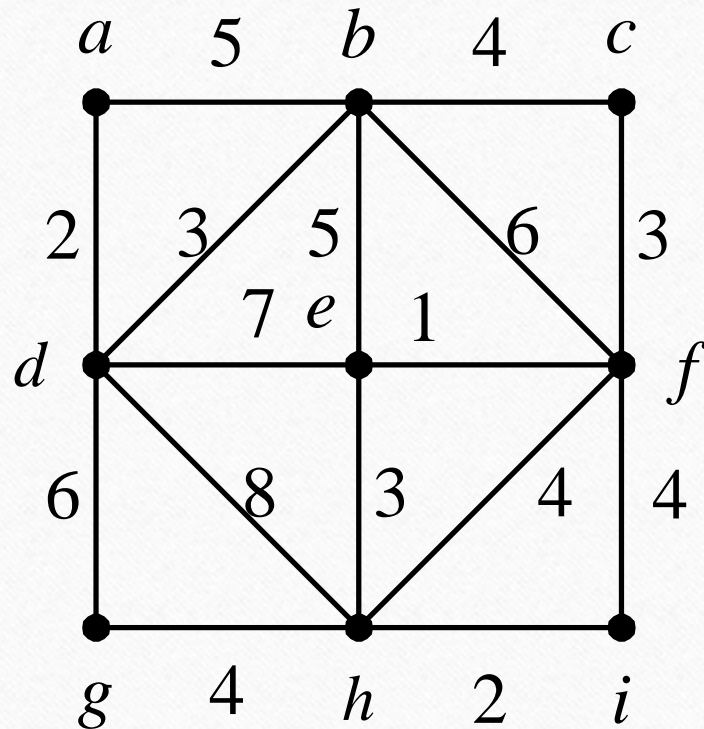
Pohon merentang minimum yang dihasilkan:



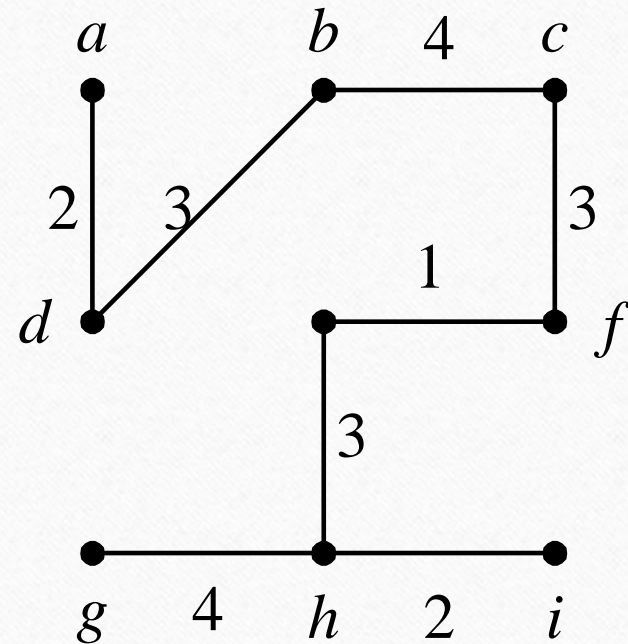
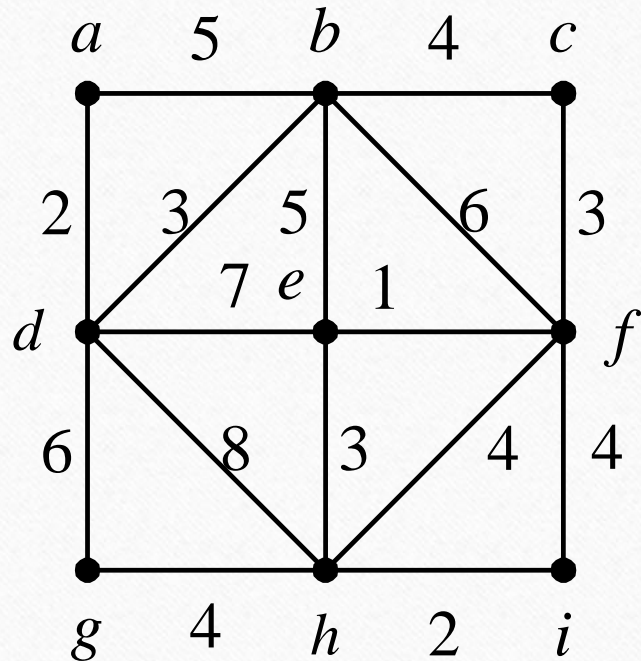
$$\text{Bobot} = 10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$$

Latihan

Tentukan dan gambarkan pohon merentang minimum dari graf di bawah ini (tahapan pembentukannya tidak perlu ditulis).



Jawaban:



Bobot pohon merentang minimum: $1 + 3 + 3 + 2 + 4 + 4 + 3 + 2 = 22$