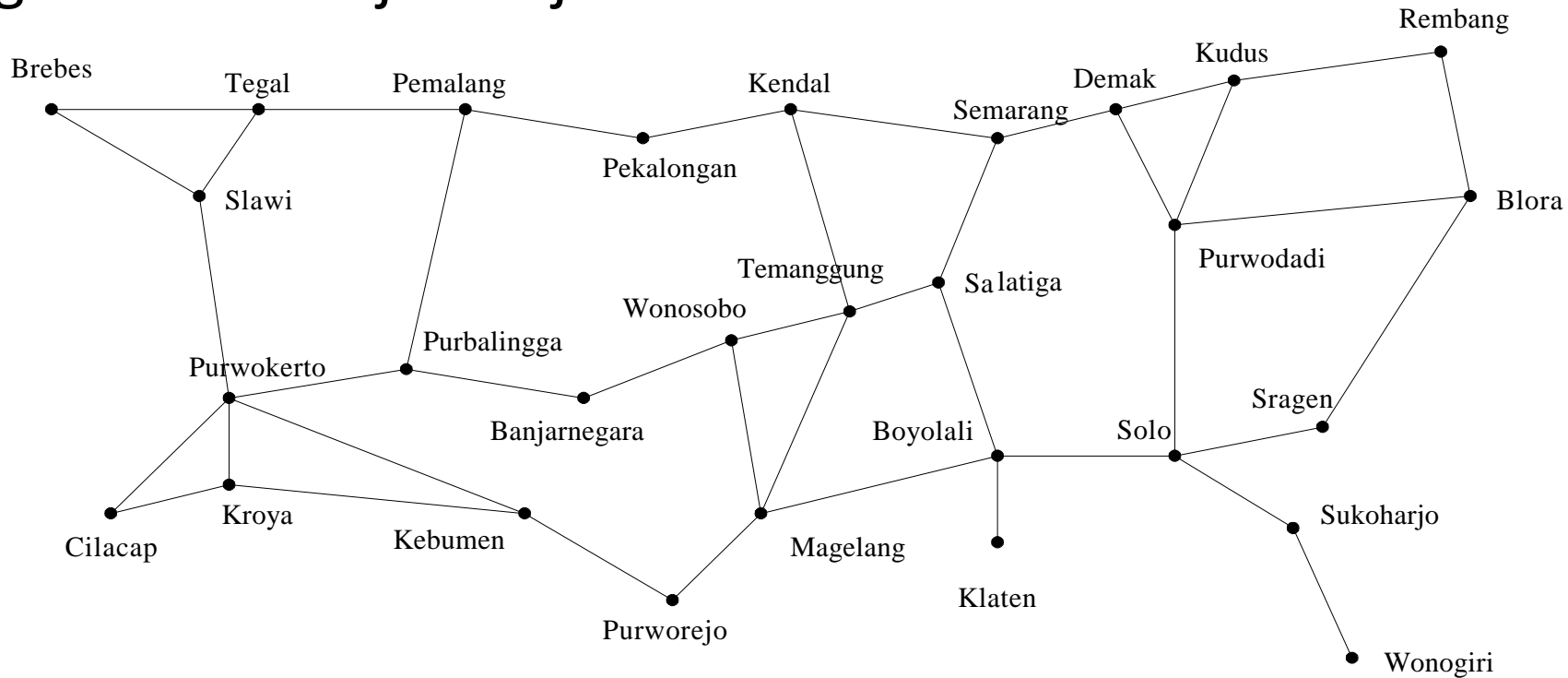


Graf

Matematika Diskrit

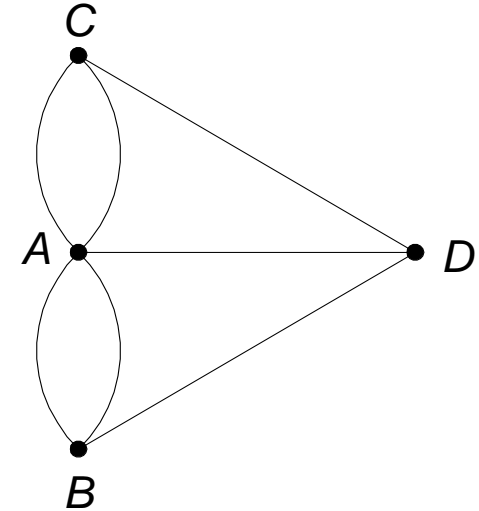
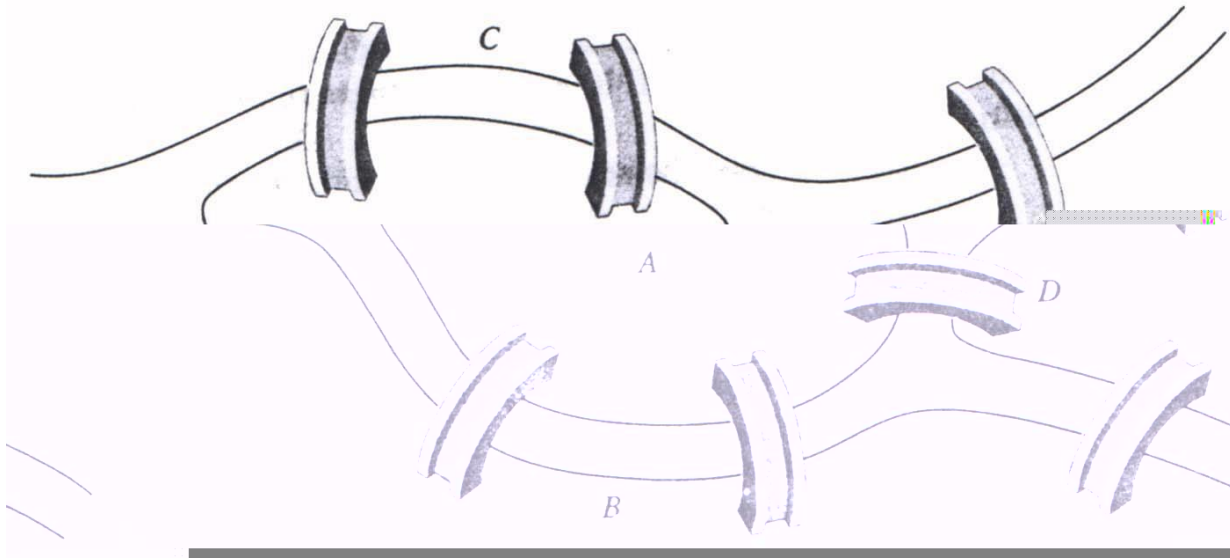
Pendahuluan

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.



Gambar sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.

- Sejarah graf: Persoalan jembatan Königsberg (tahun 1736)



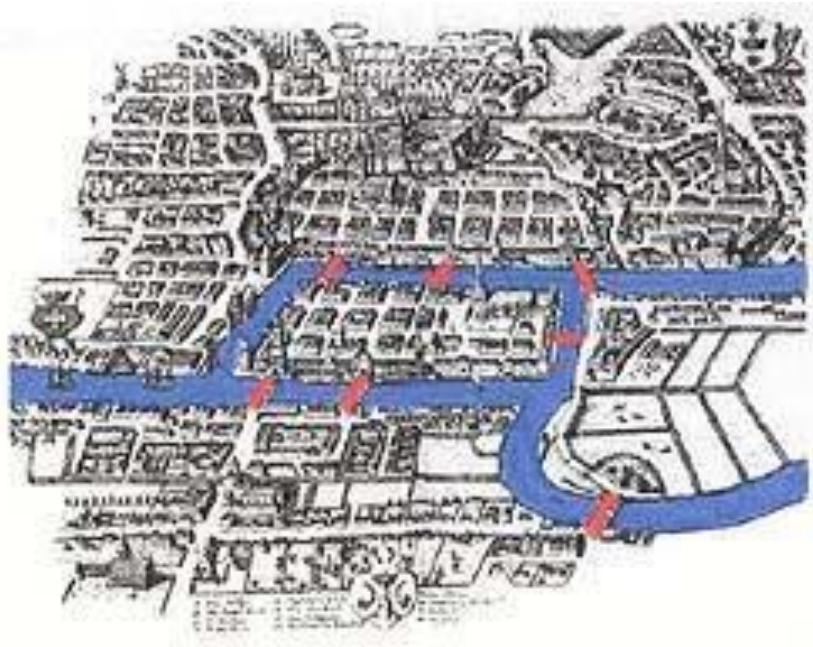
Gambar 2. Kiri: Masalah Jembatan Königsberg; Kanan: graf persoalan

- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:

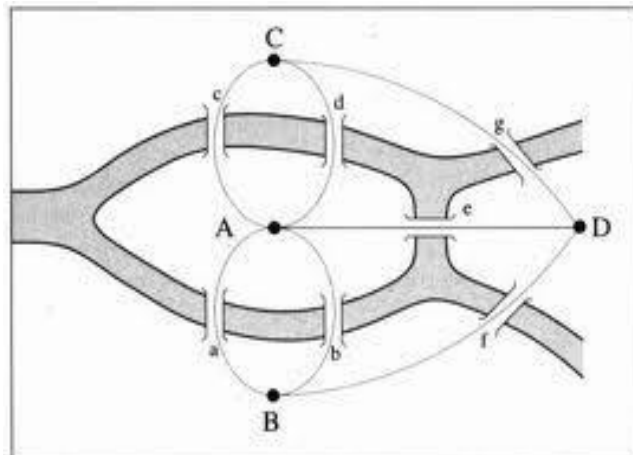
Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan

Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan

Persoalan: Bisakah orang melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?



Konigsberg Bridge Problem

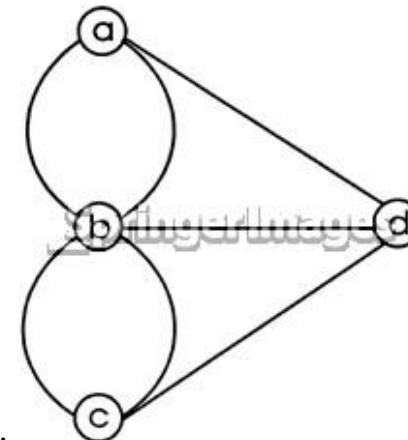


Rinaldi Munir/IF2120 Matematika Diskrit



Leonhard Euler

15 April 1707 – 18 September 1783

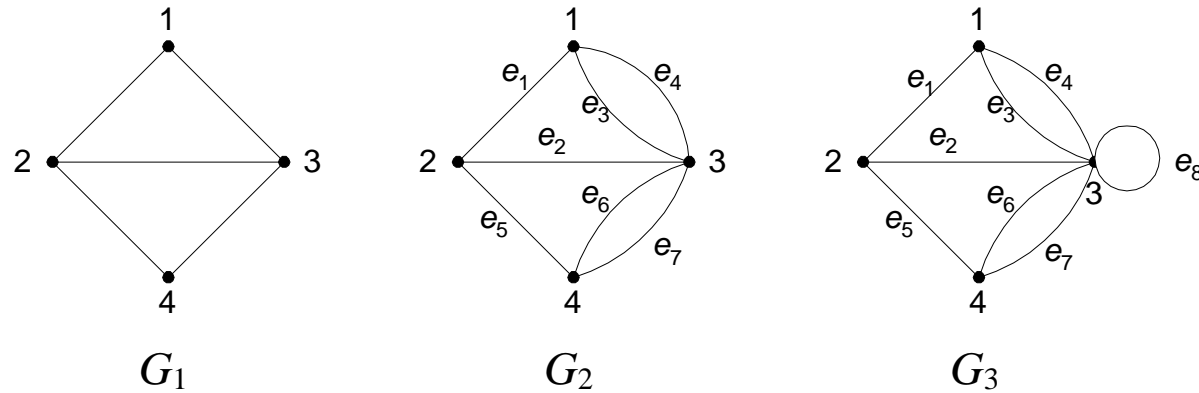


Definisi Graf

Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)
 $= \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul
 $= \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 1. Pada Gambar 2, G_1 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

G_2 adalah graf dengan

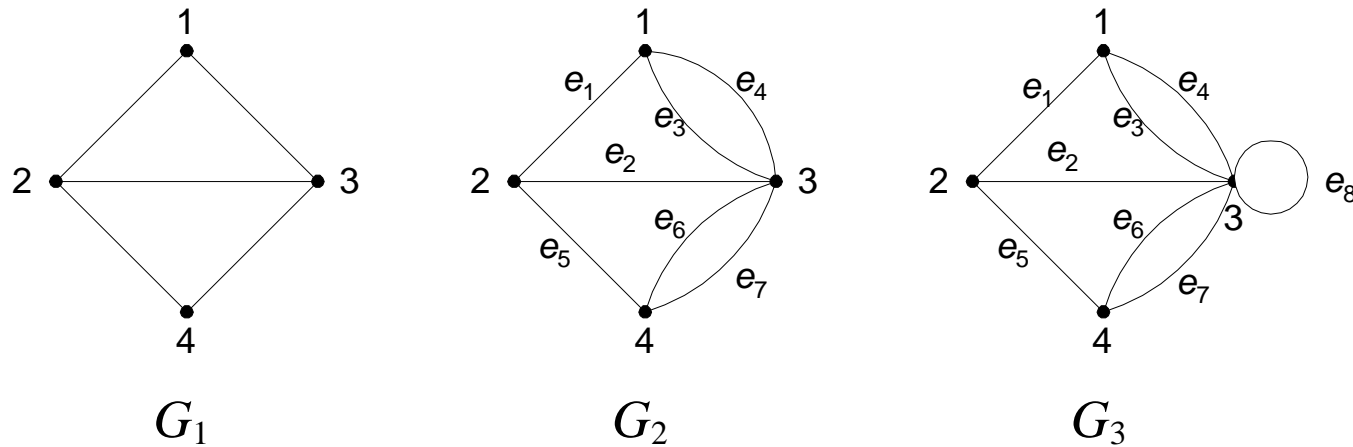
$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \} \\
 &= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}
 \end{aligned}$$

G_3 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \} \\
 &= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}
 \end{aligned}$$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

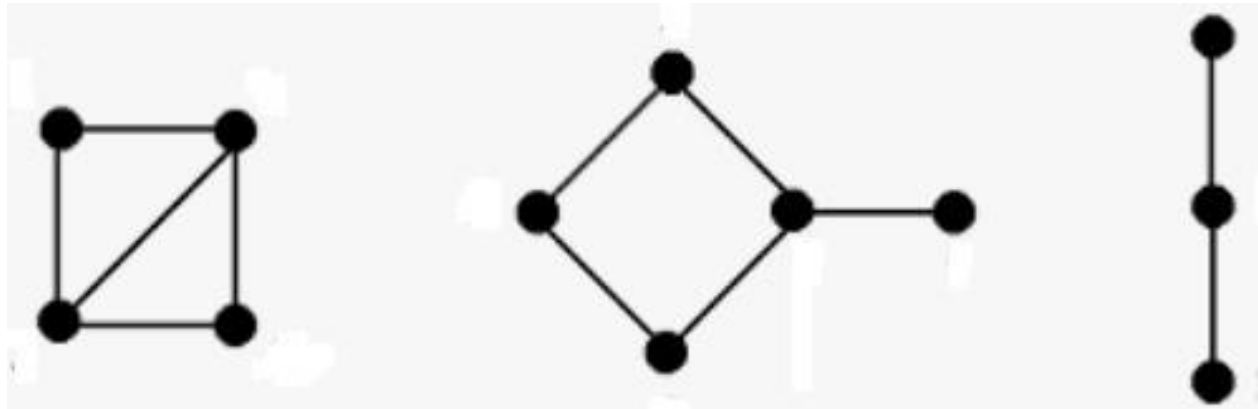
- Pada G_2 , sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.
- Pada G_3 , sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Jenis-jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

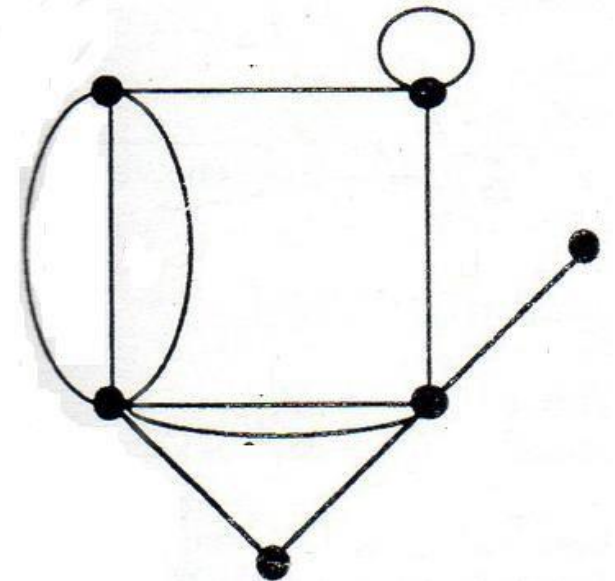
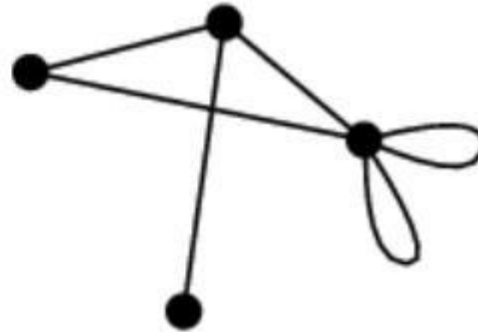
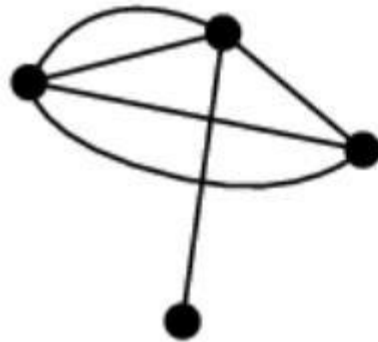
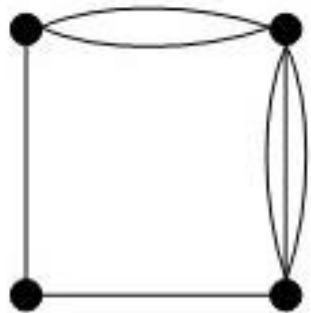
1. **Graf sederhana** (*simple graph*).

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana.



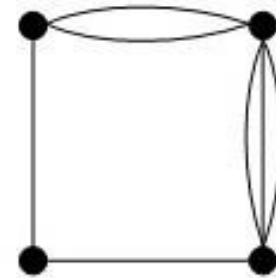
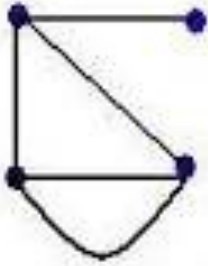
2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*).

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*).

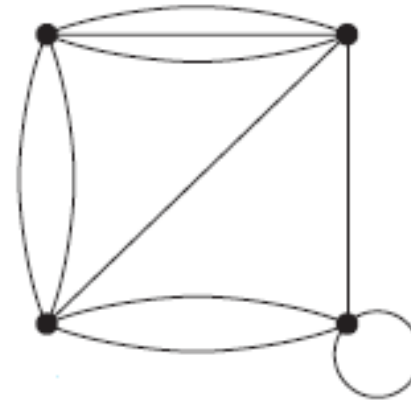
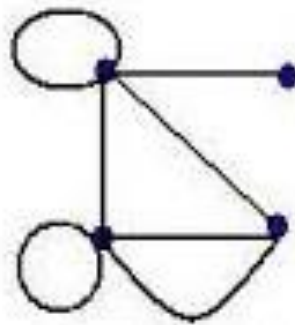
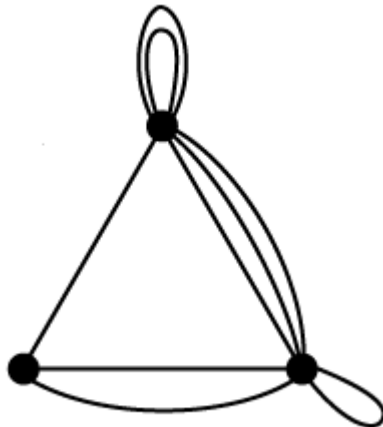


Graf tak-sederhana dibedakan lagi menjadi:

1. Graf ganda (*multi-graph*) → Graf mengandung sisi ganda

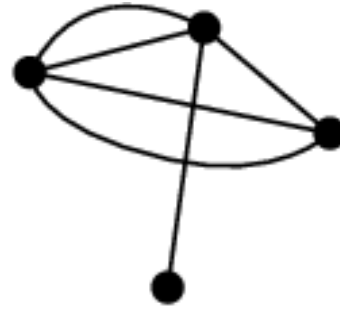


2. Graf semu (*pseudo-graph*) → Graf mengandung sisi gelang

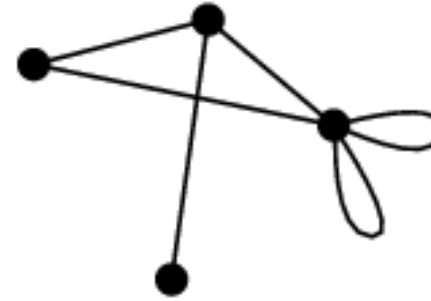




simple graph

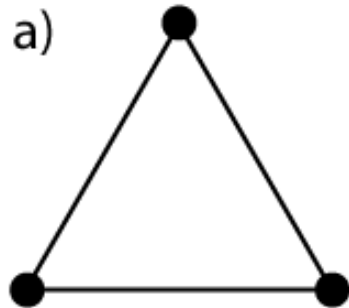


*nonsimple graph
with multiple edges*

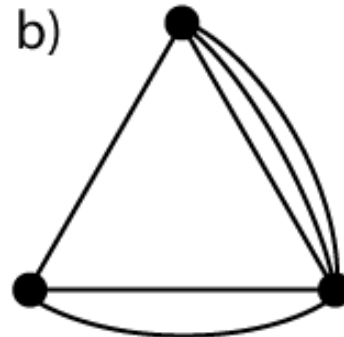


*nonsimple graph
with loops*

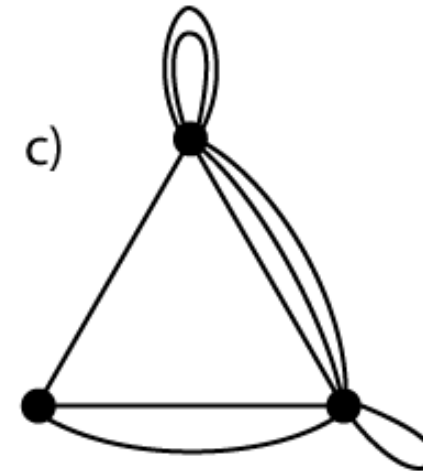
Sumber: Wolfram



Graf sederhana



Graf ganda

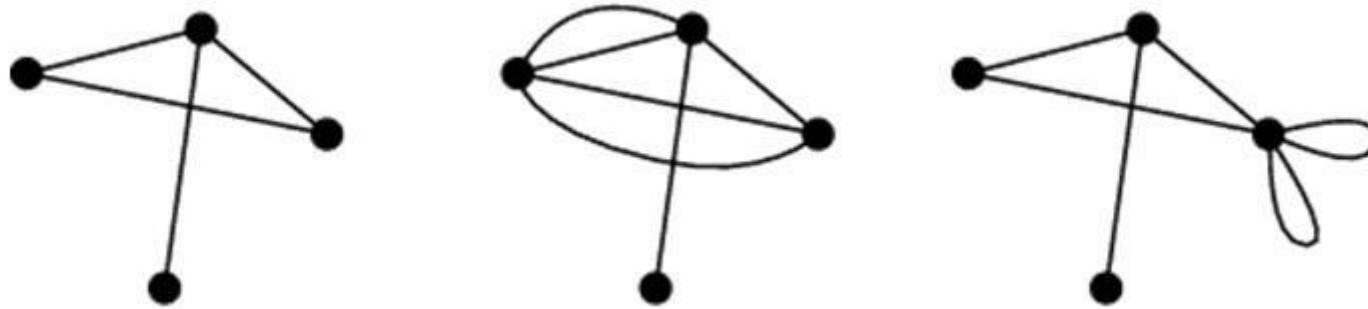


Graf semu

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dibedakan atas 2 jenis:

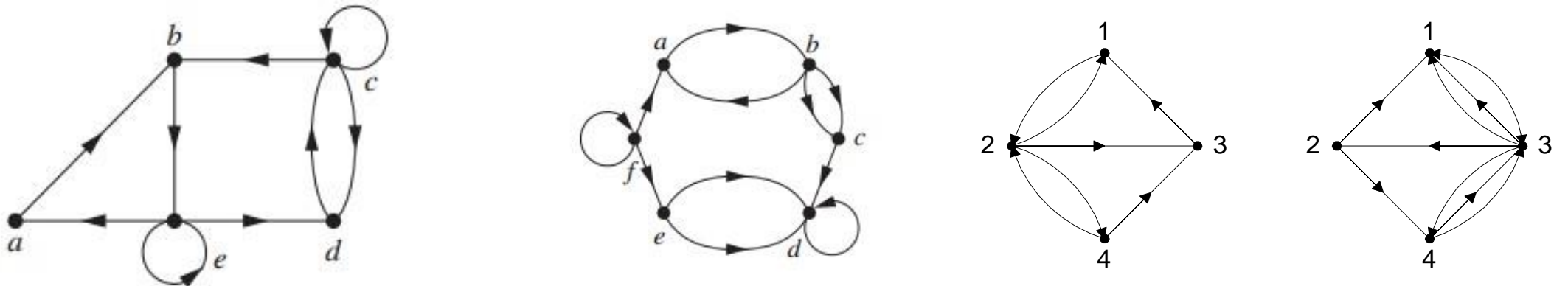
1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)

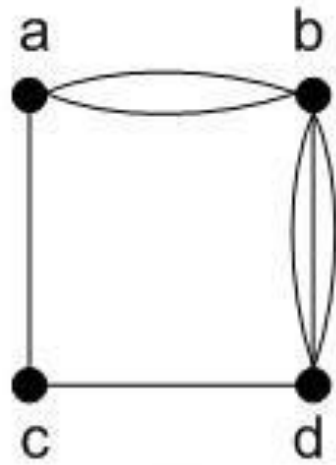
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.



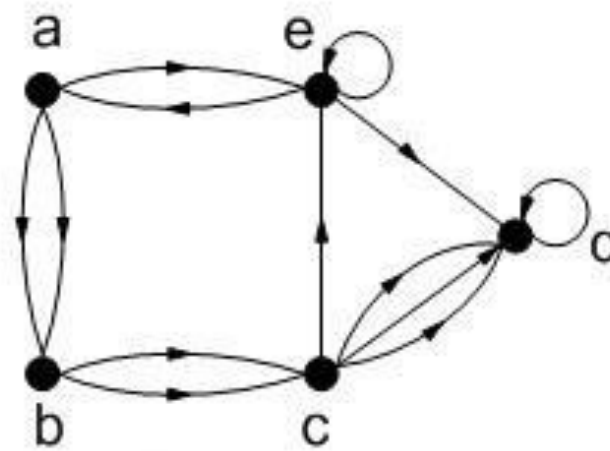
2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.



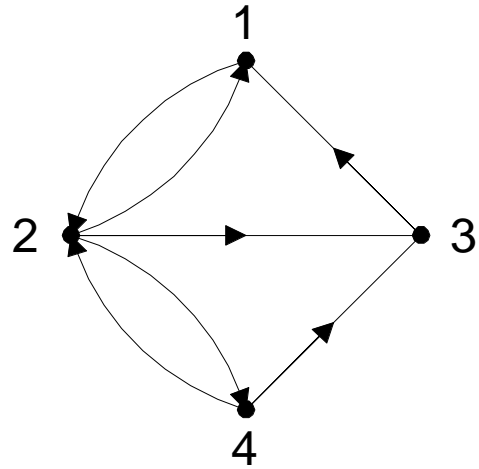


G1

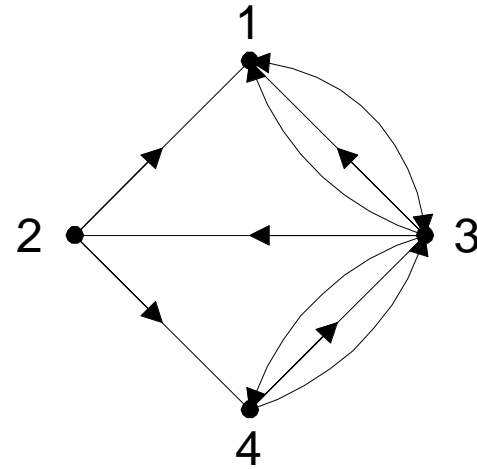


G2

G1 : graf tak-berarah; G2 : Graf berarah



(a) G_4



(b) G_5

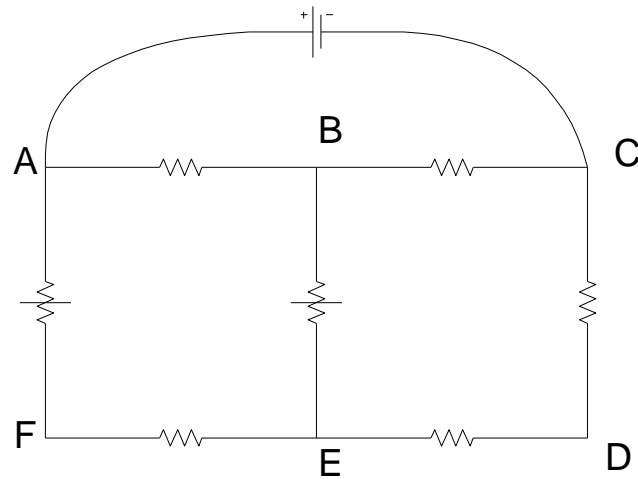
Gambar (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

Tabel 1 Jenis-jenis graf

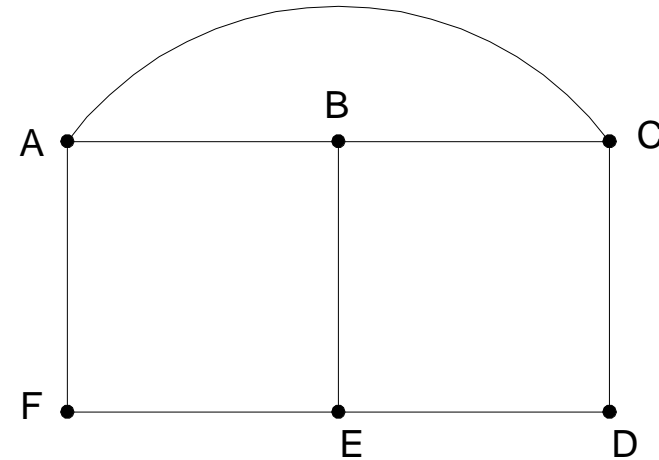
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Tidak	Ya
Graf berarah	Berarah	Ya	Ya
Graf-ganda berarah	Berarah		Ya

Contoh Penerapan Graf

1. *Rangkaian listrik.*



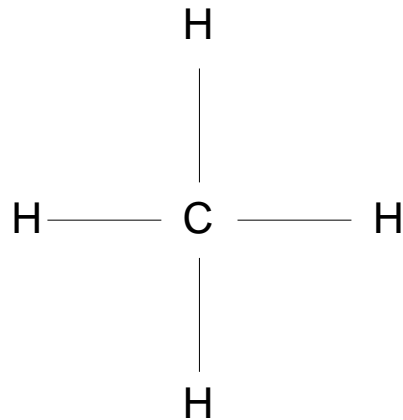
(a)



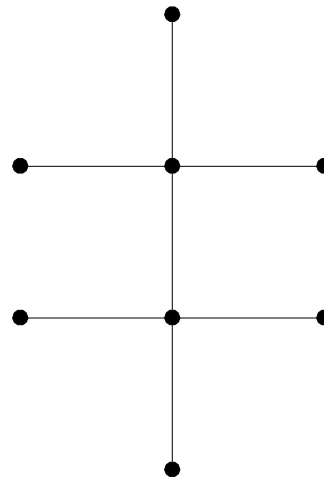
(b)

2. *Isomer senyawa kimia karbon*

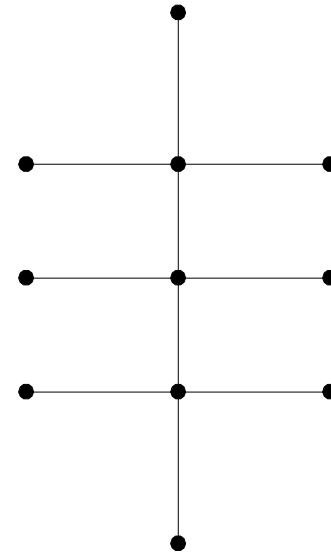
metana (CH_4)



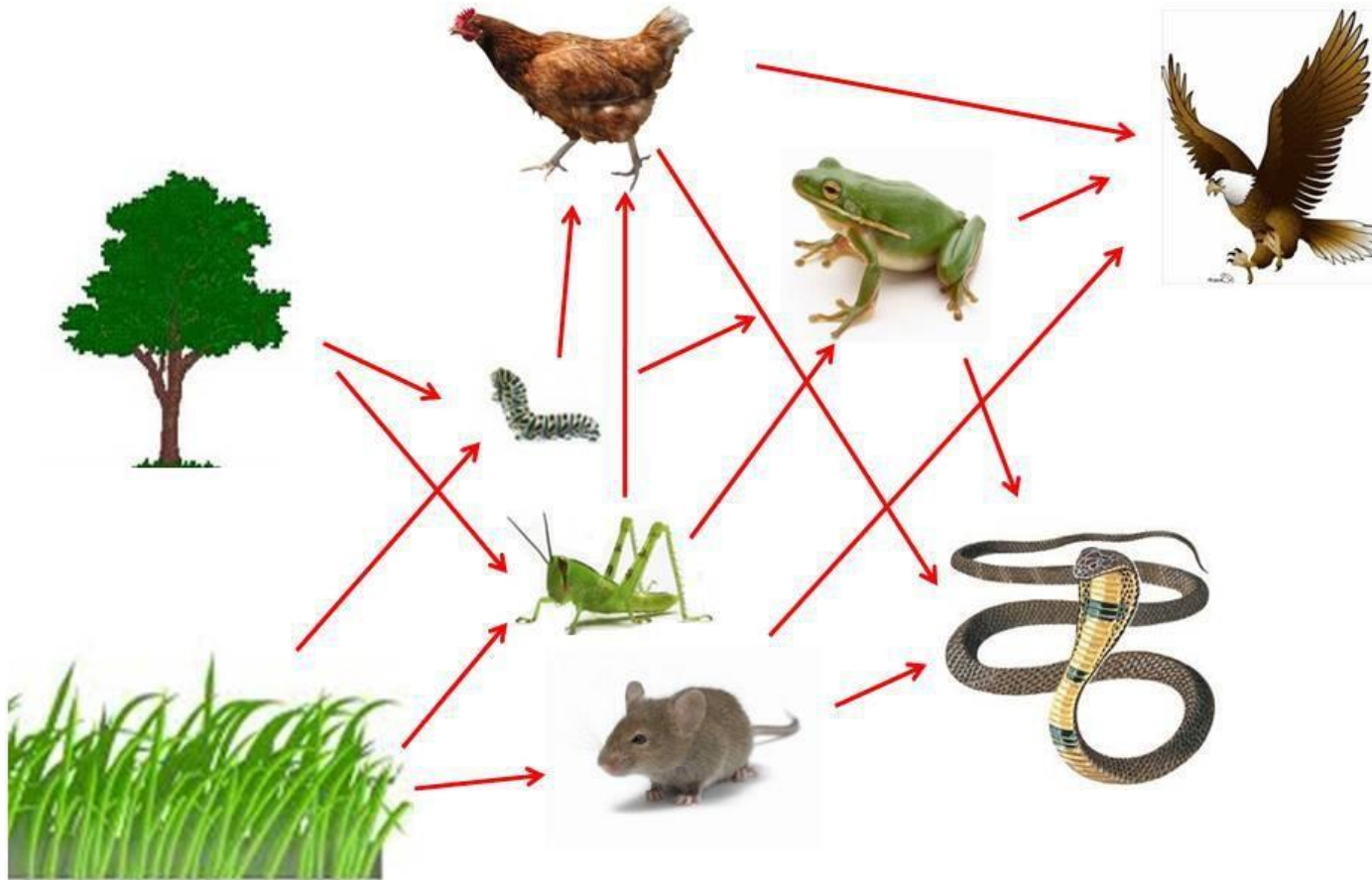
etana (C_2H_6)



propana (C_3H_8)

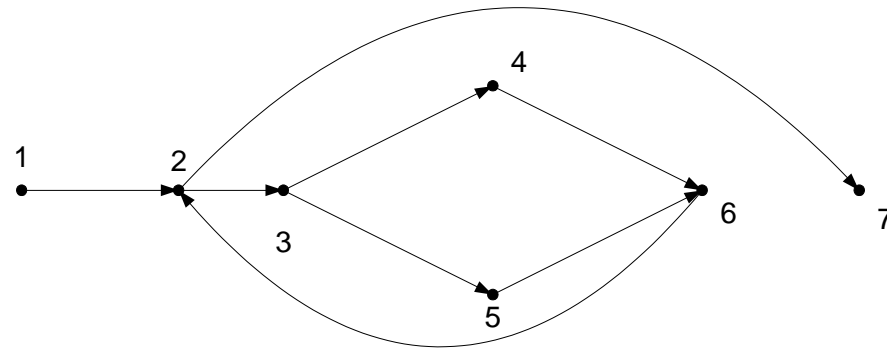


3. Jejaring makanan (Biologi)



4. Pengujian program

```
read(x);  
while x <> 9999 do  
  begin  
    if x < 0 then  
      writeln('Masukan tidak boleh negatif')  
    else  
      x:=x+10;  
      read(x);  
    end;  
    writeln(x);
```



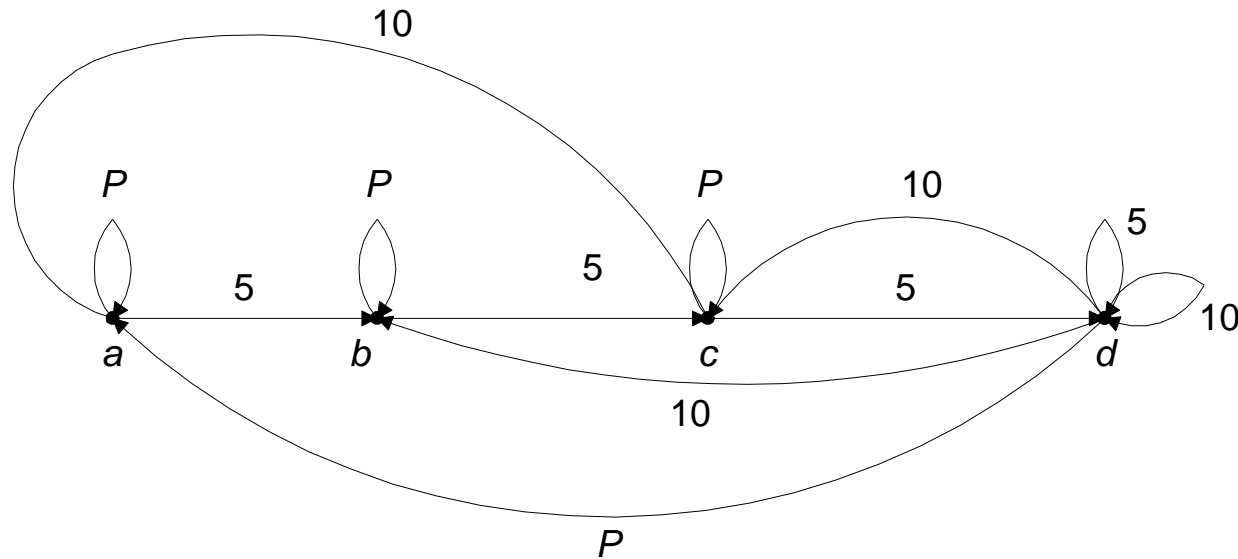
Keterangan:

1 : read(x)	5 : x := x + 10
2 : x <> 9999	6 : read(x)
3 : x < 0	7 : writeln(x)
4 : writeln('Masukan tidak boleh negatif');	

5. Pemodelan Mesin Jaja (*vending Machine*)



Graf kelakuan mesin jaja: (misal mesin jaja yang menjual coklat 15 sen)



Keterangan:

a : 0 sen dimasukkan

b : 5 sen dimasukkan

c : 10 sen dimasukkan

d : 15 sen atau lebih
dimasukkan

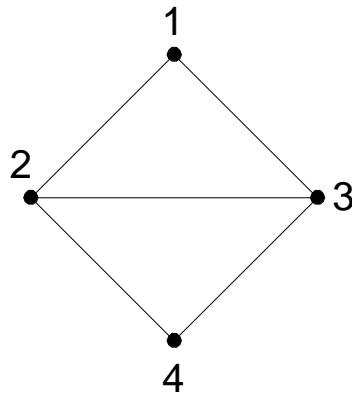
Latihan

- Gambarkan graf yang menggambarkan sistem pertandingan sistem $\frac{1}{2}$ kompetisi (*round-robin tournaments*) yang diikuti oleh 5 tim.

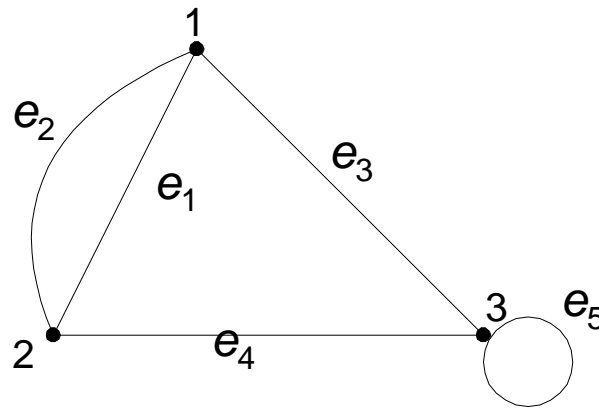
Terminologi Graf

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

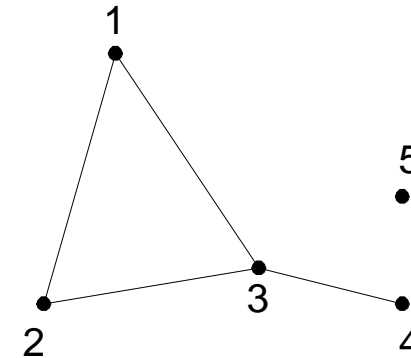
Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.
Tinjau graf G_1 : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



G_1



G_2



G_3

2. Bersisian (*Incidency*)

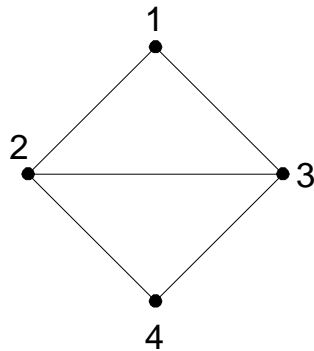
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

e bersisian dengan simpul v_j , atau

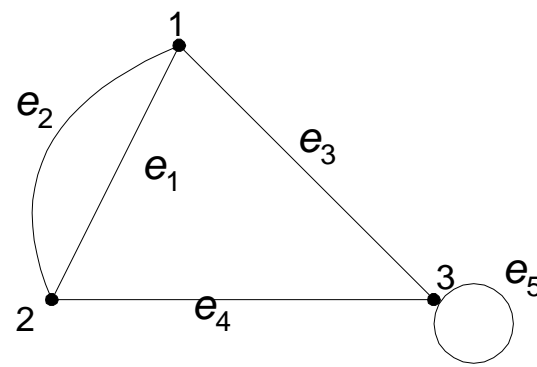
e bersisian dengan simpul v_k

Tinjau graf G_1 : sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, tetapi sisi (1,2) tidak bersisian dengan simpul 4

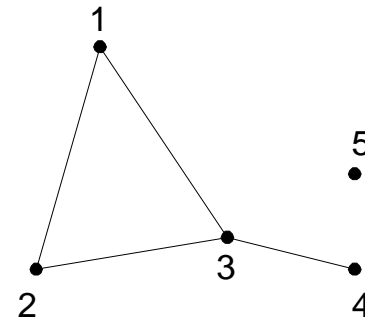
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4, tetapi sisi (1,3) tidak bersisian dengan simpul 4



G_1



G_2

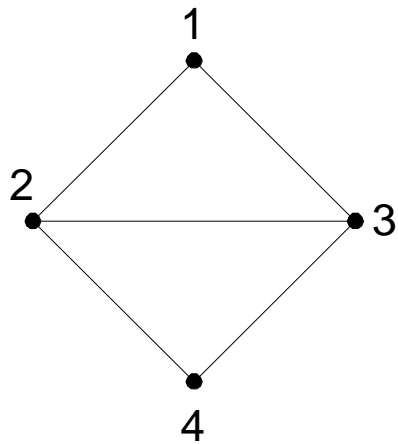


G_3

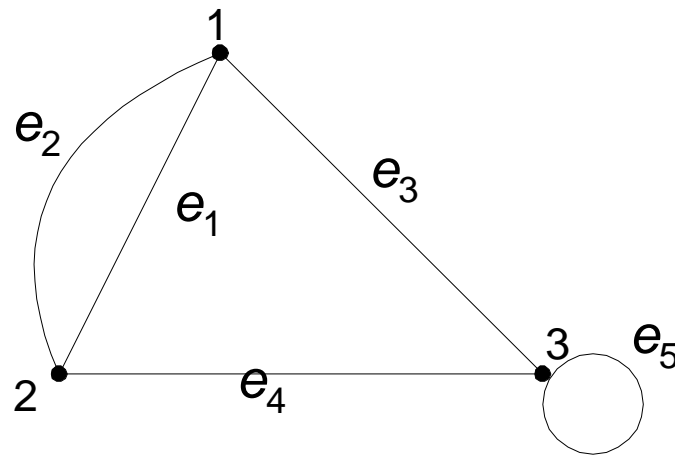
3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

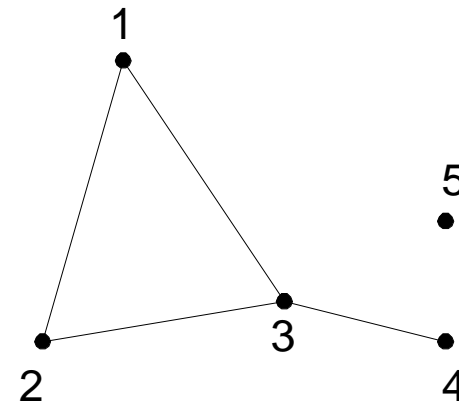
Tinjau graf G_3 : simpul 5 adalah simpul terpencil.



G_1



G_2

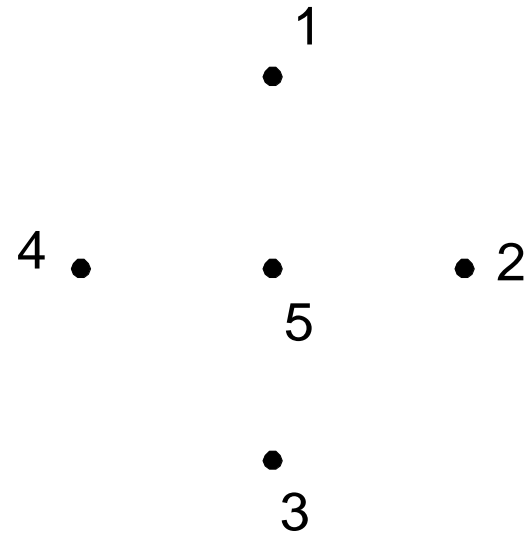


G_3

4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).

Graf N_5 :



5. Derajat (*Degree*)

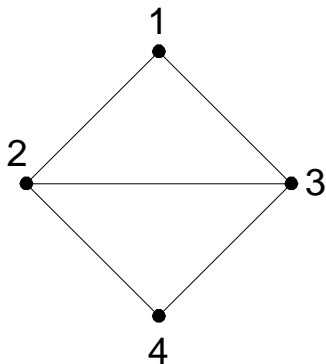
Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$

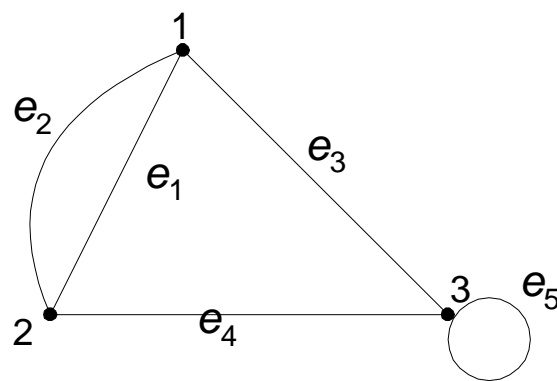
Tinjau graf G_1 : $d(1) = d(4) = 2$
 $d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf G_3 : $d(5) = 0 \rightarrow$ simpul terpencil
 $d(4) = 1 \rightarrow$ simpul anting-anting (*pendant vertex*)

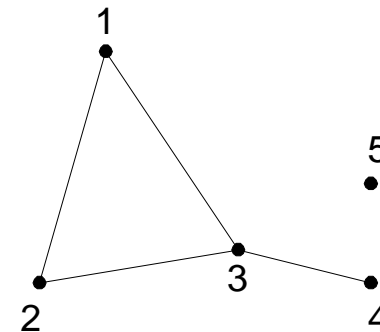
Tinjau graf G_2 : $d(1) = 3 \rightarrow$ bersisian dengan sisi ganda
 $d(3) = 4 \rightarrow$ bersisian dengan sisi gelang (*loop*)



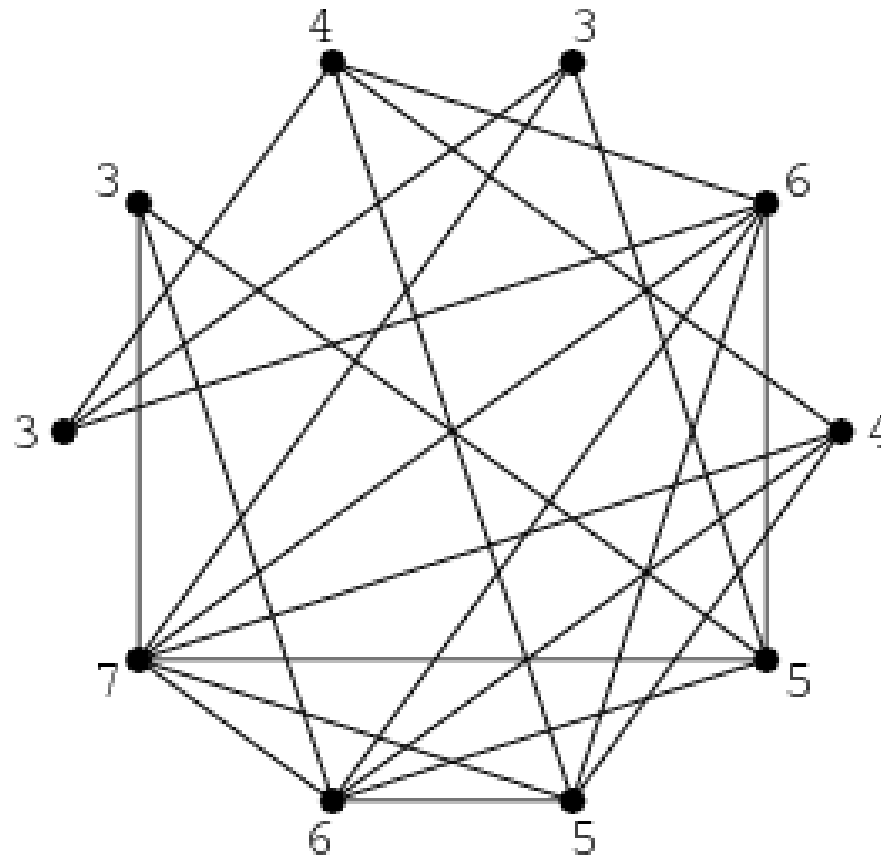
G_1



G_2

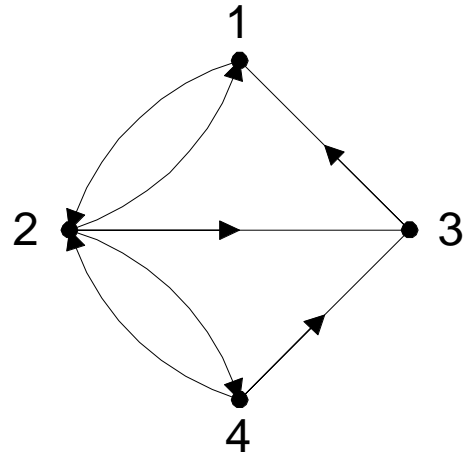


G_3

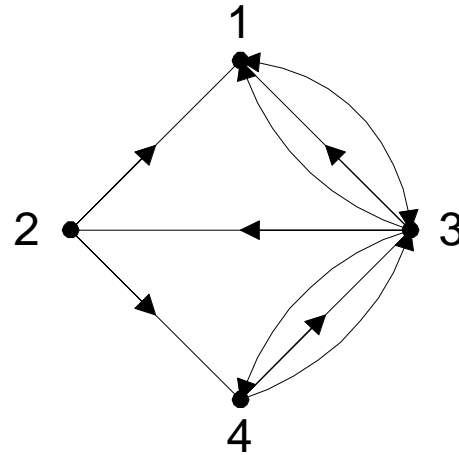


Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul

Pada graf beraarah, derajat simpul dibedakan lagi menjadi derajat masuk (in-degree) dan derajat keluar (out-degree)



G_4



G_5

Tinjau graf G_4 :

$$\begin{aligned}d_{\text{in}}(1) &= 2; d_{\text{out}}(1) = 1 \\d_{\text{in}}(2) &= 2; d_{\text{out}}(2) = 3 \\d_{\text{in}}(3) &= 2; d_{\text{out}}(3) = 1 \\d_{\text{in}}(4) &= 1; d_{\text{out}}(4) = 2\end{aligned}$$

Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

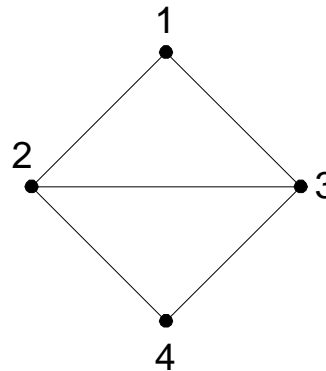
Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$



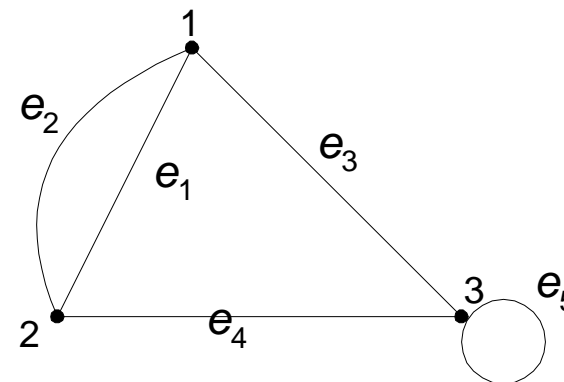
Tinjau graf G_1 : $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

Tinjau graf G_2 : $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

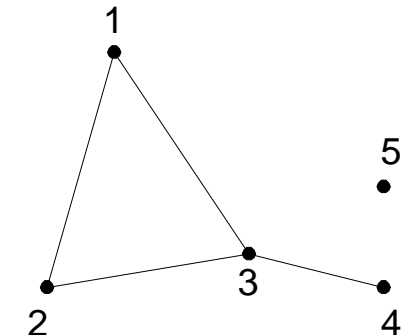
Tinjau graf G_3 : $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) = 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4$



G_1



G_2



G_3

- Akibat dari *lemma (corollary)*:

Teorema: Untuk sembarang graf G , banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

- Jadi, menurut teorema ini, tidak mungkin sebuah graf memiliki simpul berderajat ganjil sejumlah ganjil

Contoh 2. Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

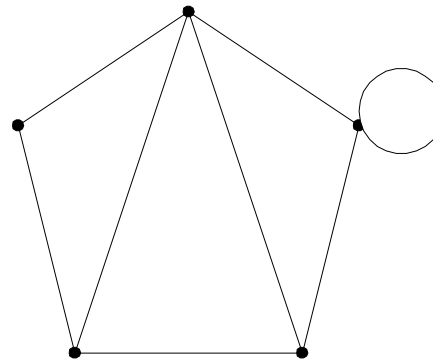
(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil
($2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9$).

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap
($2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16$).



Latihan

- Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 5, 2, 3, 2, 4

(b) 4, 4, 3, 2, 3

(c) 3, 3, 2, 3, 2

(d) 4, 4, 1, 3, 2

Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Jawaban:

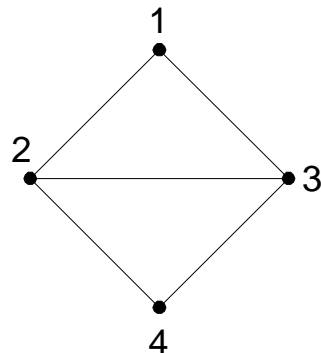
- (a) 5, 2, 3, 2, 4: Tidak mungkin, karena ada simpul berderajat 5
- (b) 4, 4, 3, 2, 3: Mungkin [contoh banyak]
- (c) 3, 3, 2, 3, 2: Tidak mungkin, karena jumlah simpul berderajat ganjil ada 3 buah (alasan lain, karena jumlah derajat ganjil)
- (d) 4, 4, 1, 3, 2: Tidak mungkin, karena simpul-1 dan simpul-2 harus bertetangga dengan simpul sisanya, berarti simpul-3 minimal berderajat 2 (kontradiksi dengan simpul-3 berderajat 1)

6. Lintasan (*Path*)

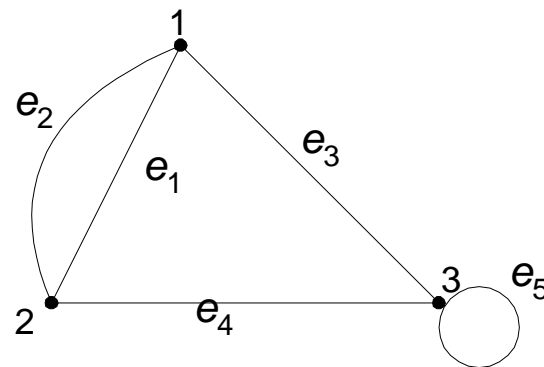
Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, \dots , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

Tinjau graf G_1 : lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,3)$.

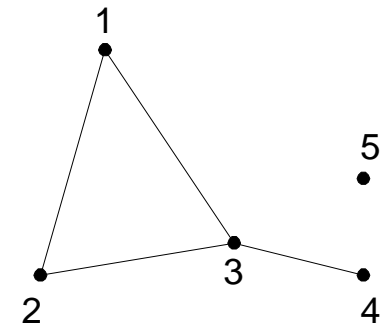
Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.



G_1



G_2



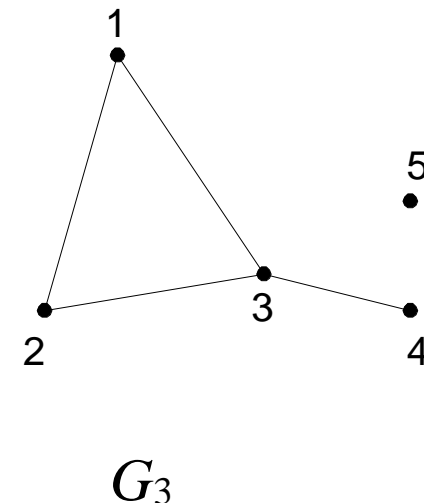
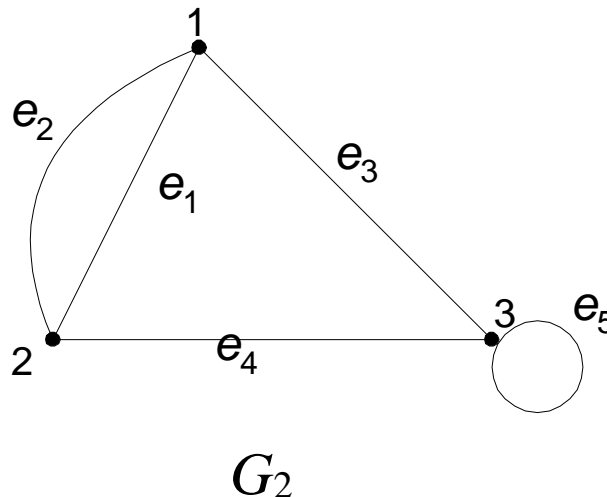
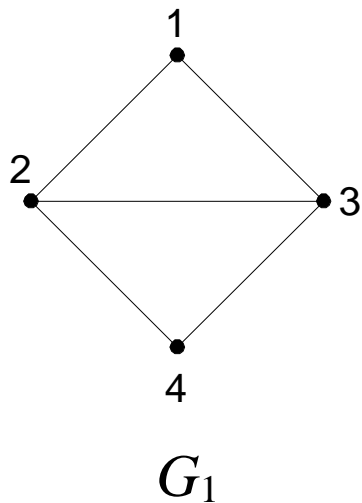
G_3

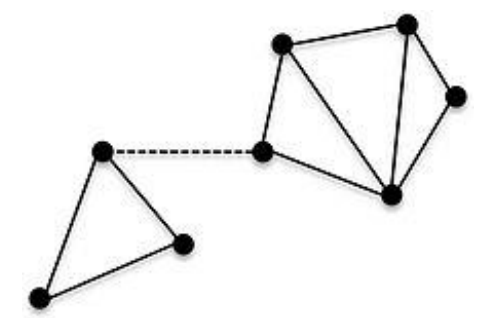
7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf G_1 : 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.



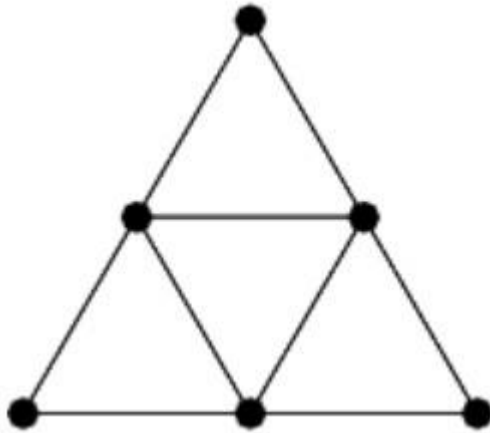


8. Kerterhubungan (*Connected*)

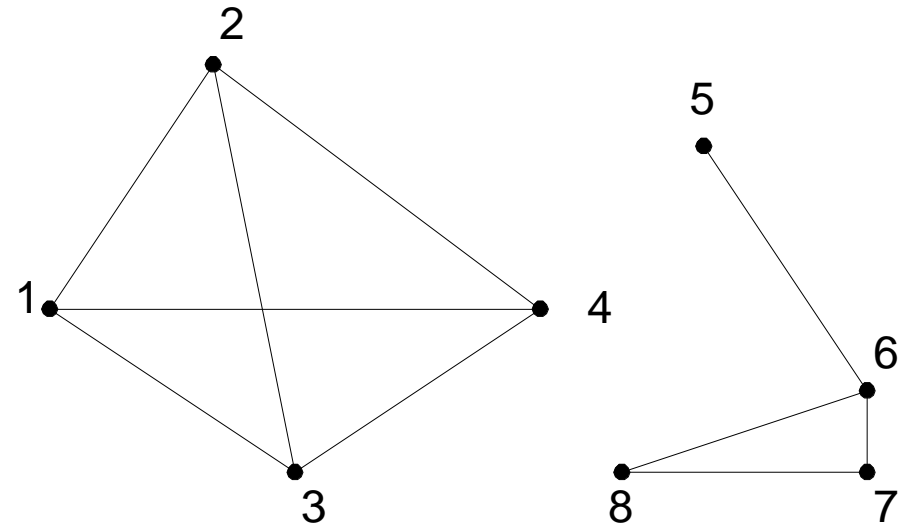
Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 .

G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j .

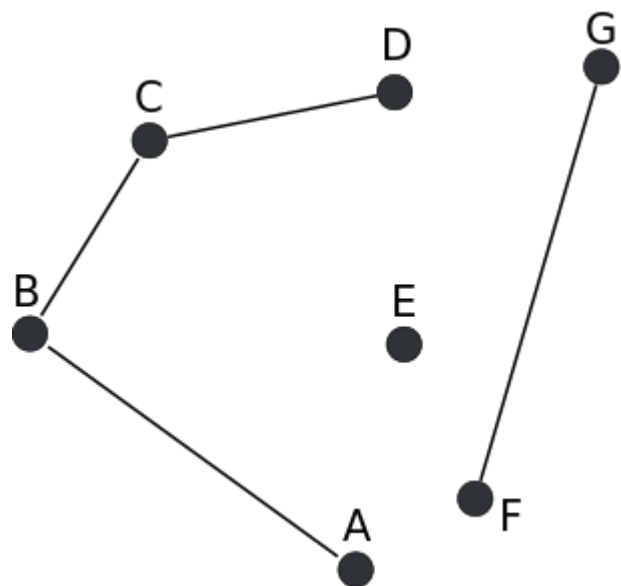
Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).



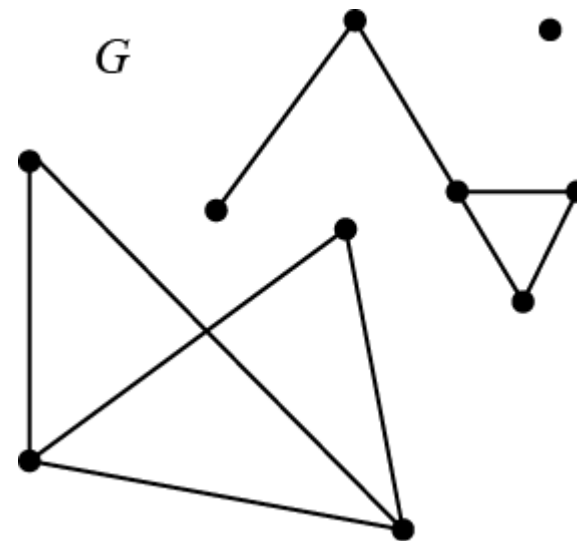
Contoh graf terhubung:



Contoh graf tak-terhubung:

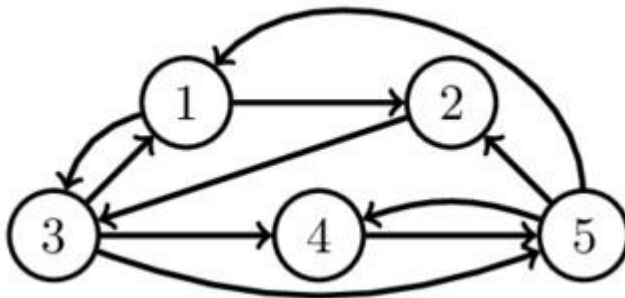


Graf tak-terhubung



Graf tak-terhubung

- Graf berarah G dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari G diperoleh dengan menghilangkan arahnya).
- Dua simpul, u dan v , pada graf berarah G disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u .
- Jika u dan v tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan **terhubung lemah** (*weakly connected*).

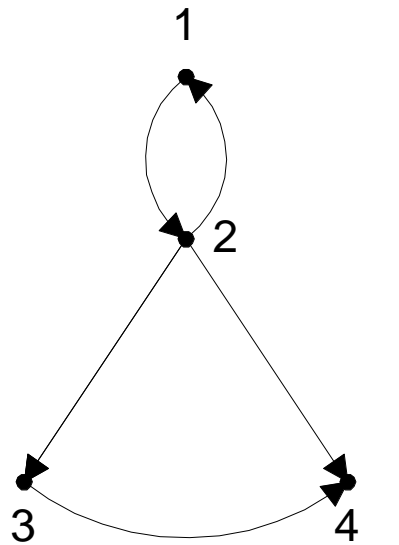


- Simpul 1 dan 4 terhubung kuat, karena ada lintasan dari 1 ke 4 dan lintasan dari 4 ke 1:

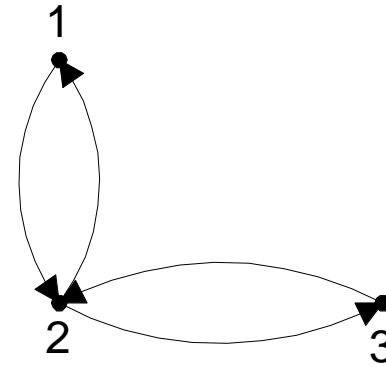
Lintasan dari 1 ke 4: 1, 2, 3, 4

Lintasan dari 4 ke 1: 4, 5, 1

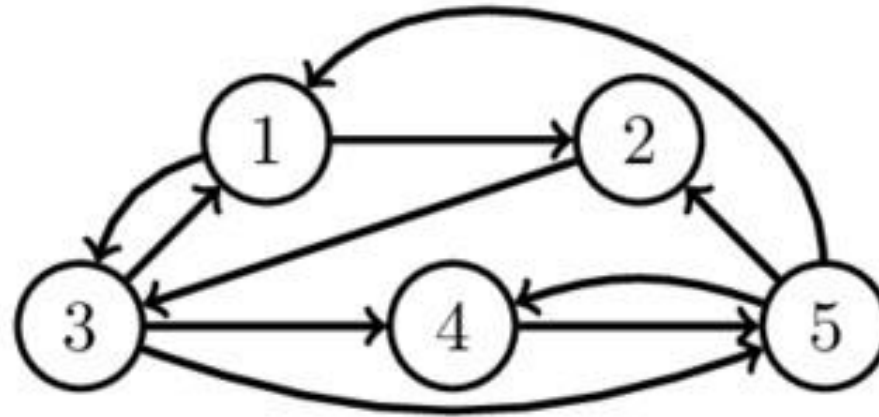
- Graf berarah G disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G , terhubung kuat. Kalau tidak, G disebut **graf terhubung lemah**.



Graf berarah
terhubung lemah



Graf berarah
terhubung kuat



Graf berarah terhubung kuat: selalu ada lintasan dari sepasang simpul manapun.
Periksa!

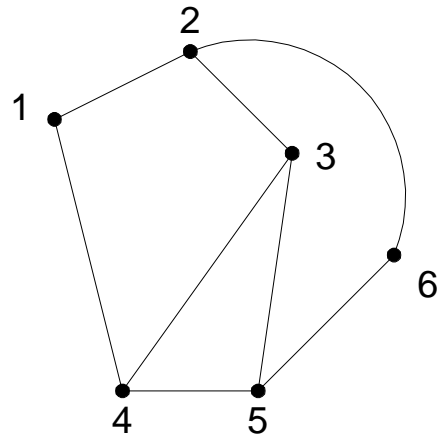
8. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen

Upagraf

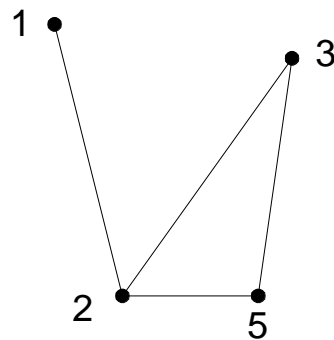
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$

dan $E_1 \subseteq E$.

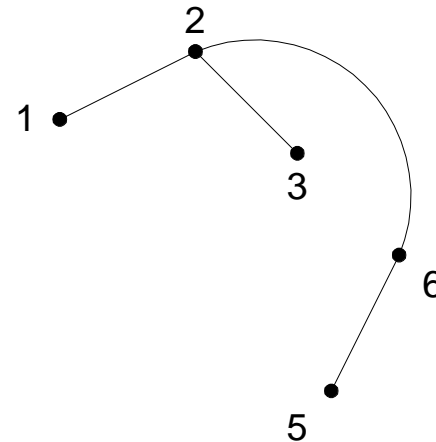
Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggotanya bersisian dengannya.



(a) Graf G_1

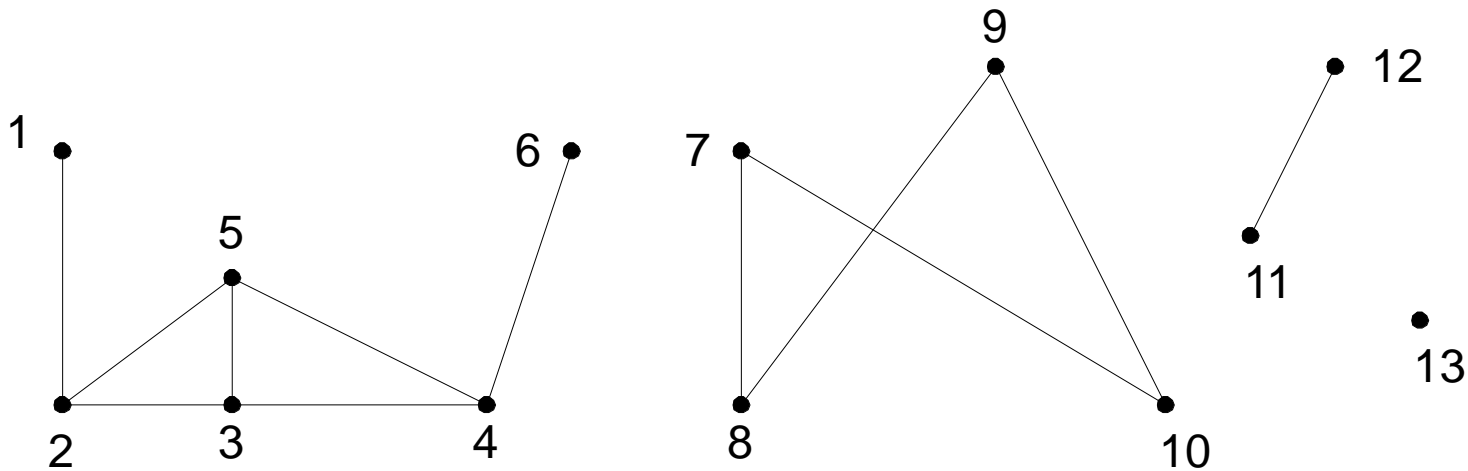


(b) Sebuah upagraf



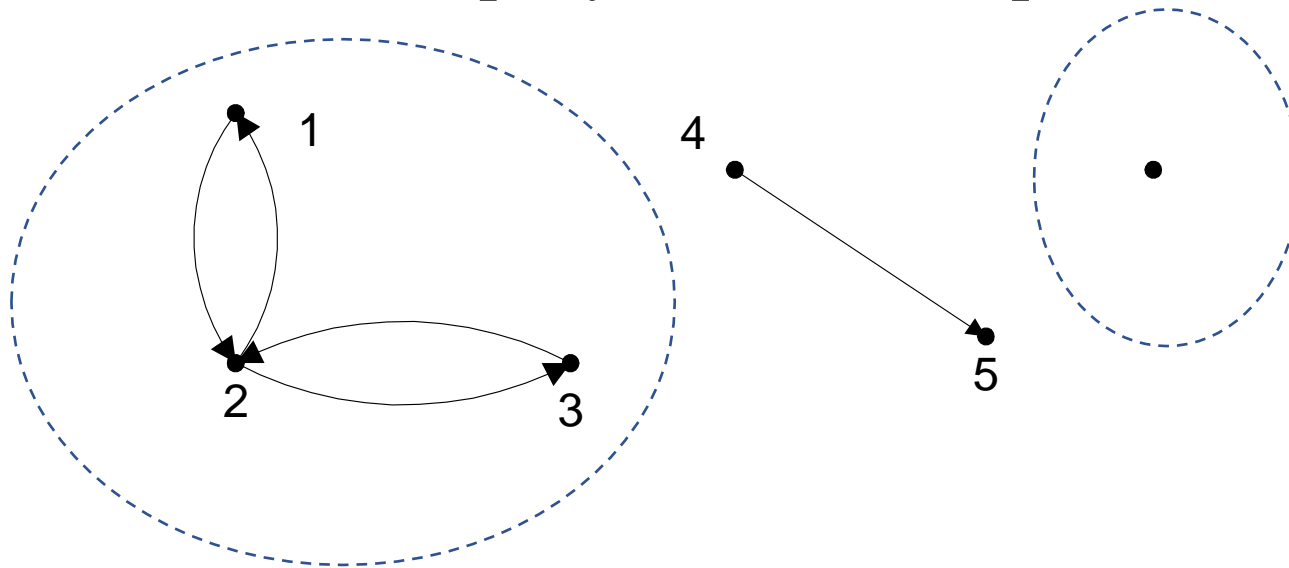
(c) komplemen dari upagraf (b)

Komponen graf (*connected component*) adalah maksimum jumlah upagraf terhubung dalam graf G .
Graf G di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



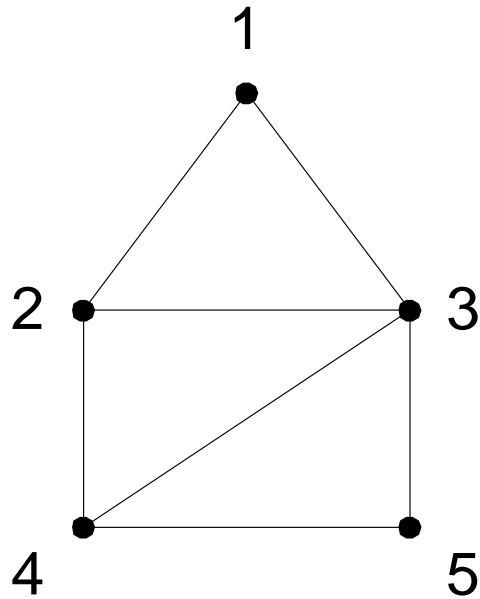
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:

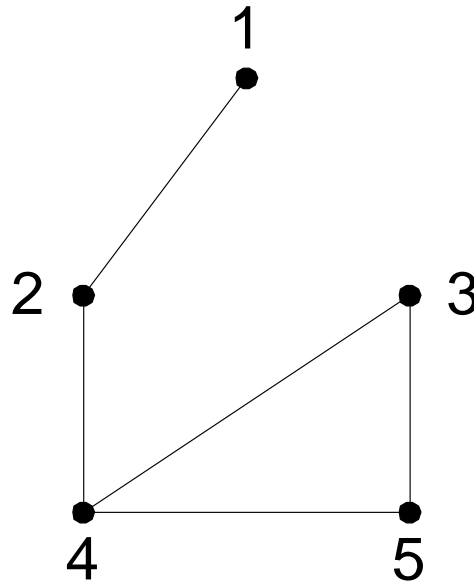


9. Upagraf Merentang (*Spanning Subgraph*)

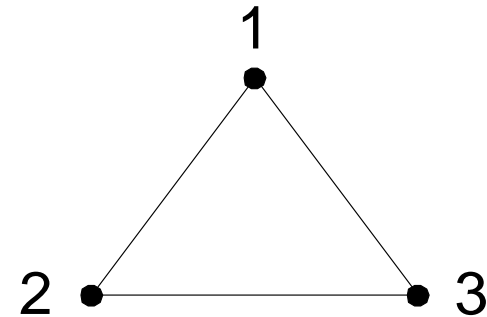
Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).



(a) graf G ,



(b) upagraf merentang dari G ,



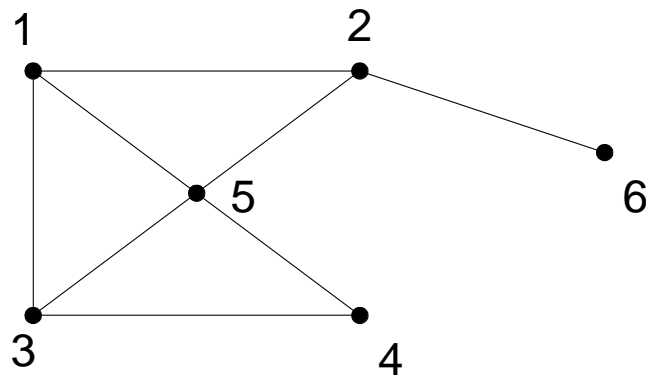
(c) bukan upagraf merentang dari G

10. Cut-Set

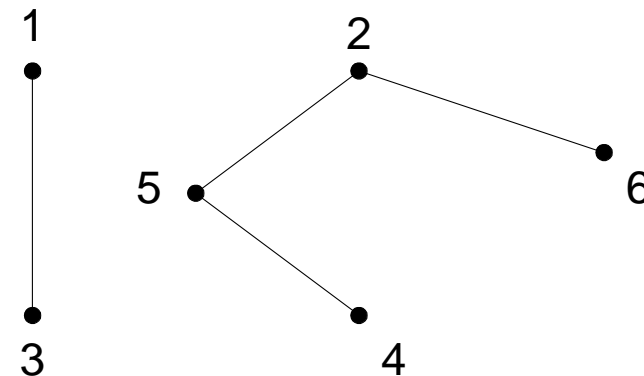
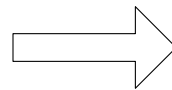
Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, $\{(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)\}$ adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan $\{(1,2), (2,5)\}$ juga adalah *cut-set*, $\{(1,3), (1,5), (1,2)\}$ adalah *cut-set*, $\{(2,6)\}$ juga *cut-set*, tetapi $\{(1,2), (2,5), (4,5)\}$ bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, $\{(1,2), (2,5)\}$ adalah *cut-set*.



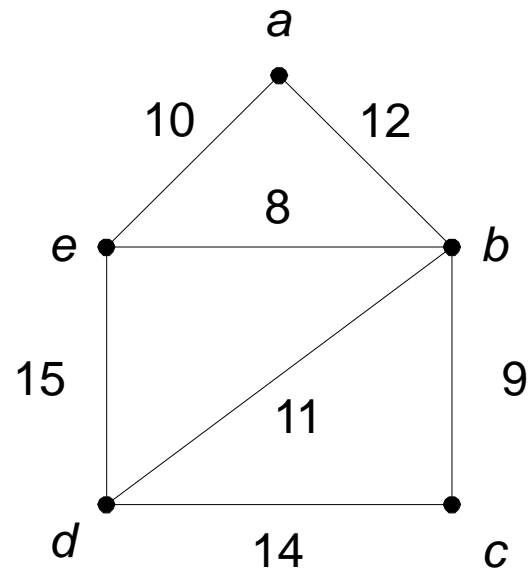
(a)



(b)

11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Beberapa Graf Khusus

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

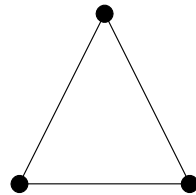
Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n - 1)/2$.



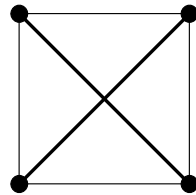
K_1



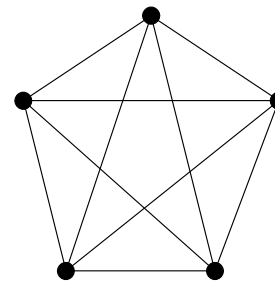
K_2



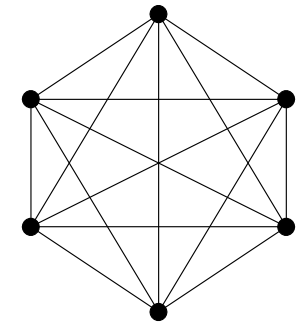
K_3



K_4



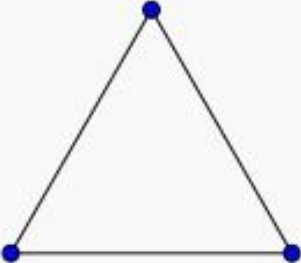
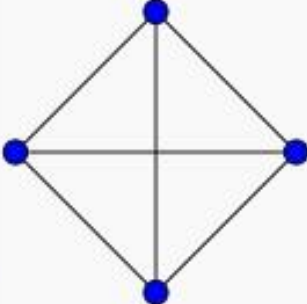
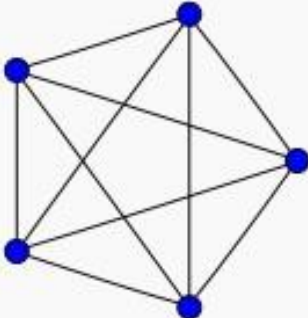
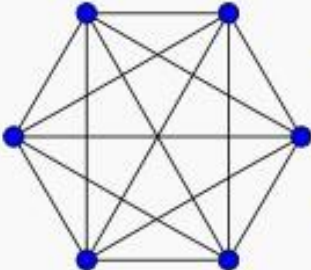
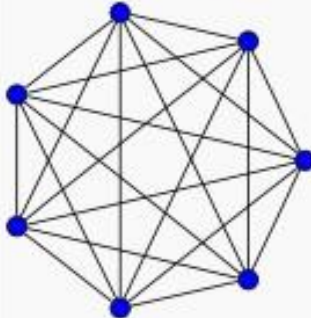
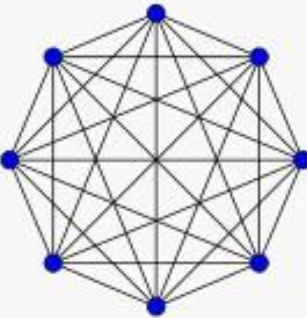

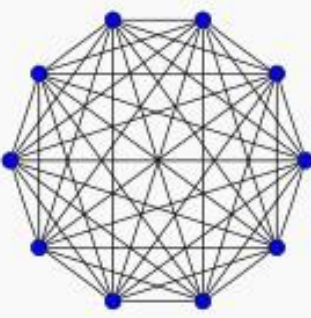
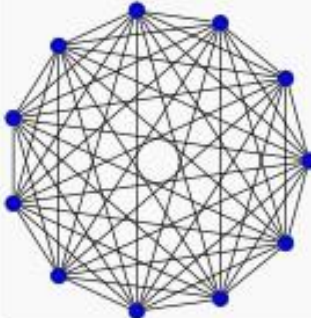
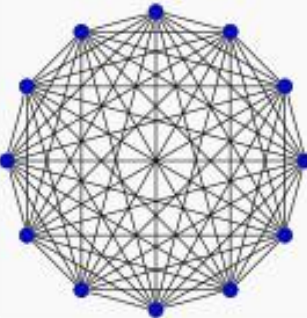


K_5



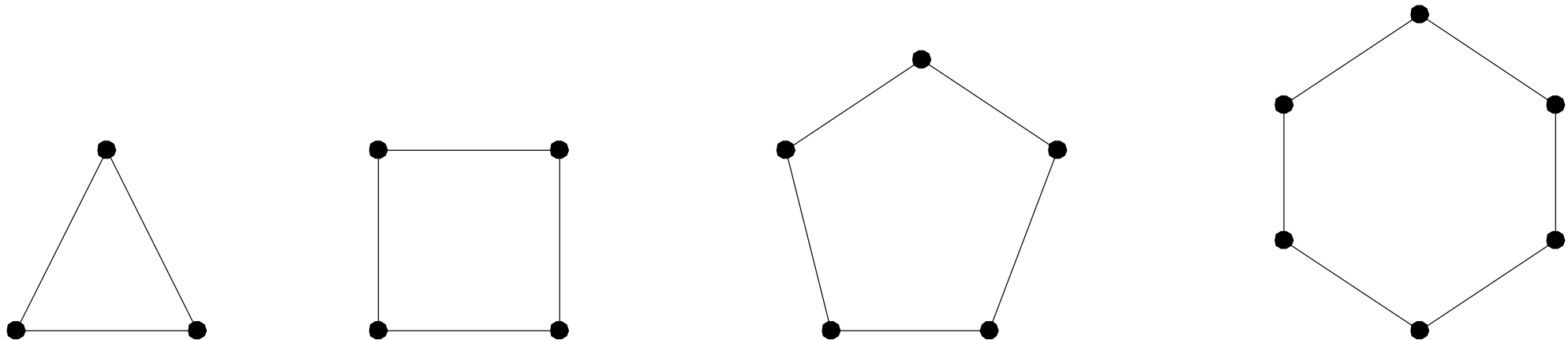
K_6

Jumlah sisi di dalam graf lengkap

$K_1: 0$	$K_2: 1$	$K_3: 3$	$K_4: 6$
			
$K_5: 10$	$K_6: 15$	$K_7: 21$	$K_8: 28$
			
$K_9: 36$	$K_{10}: 45$	$K_{11}: 55$	$K_{12}: 66$
			

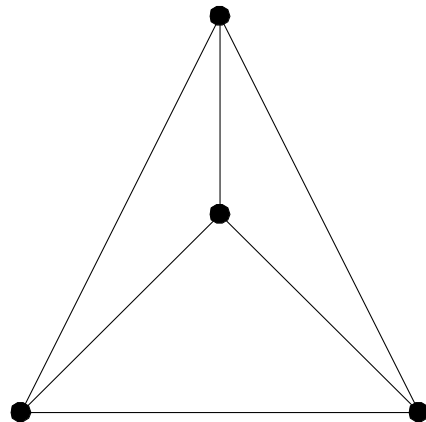
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n .

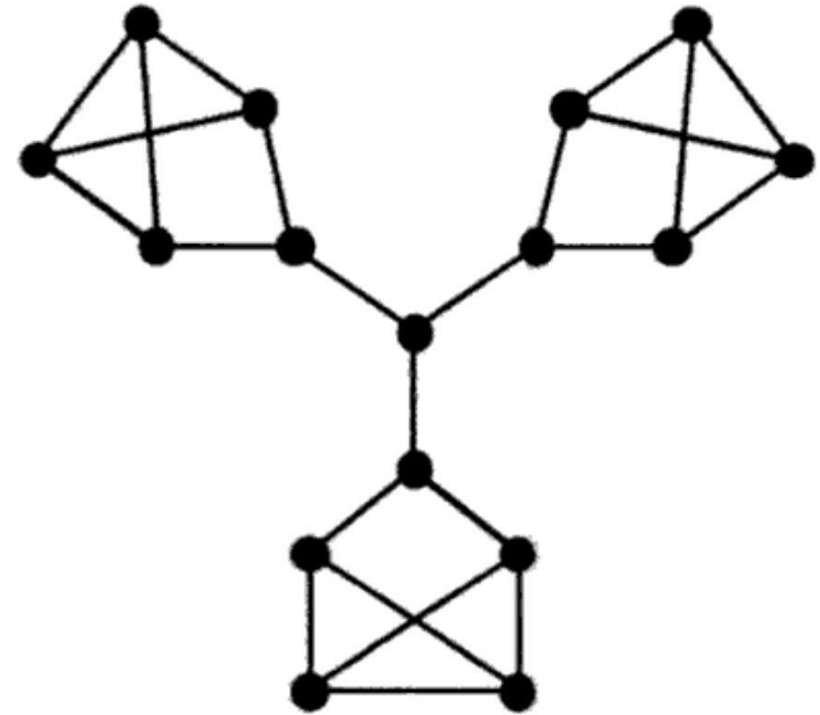
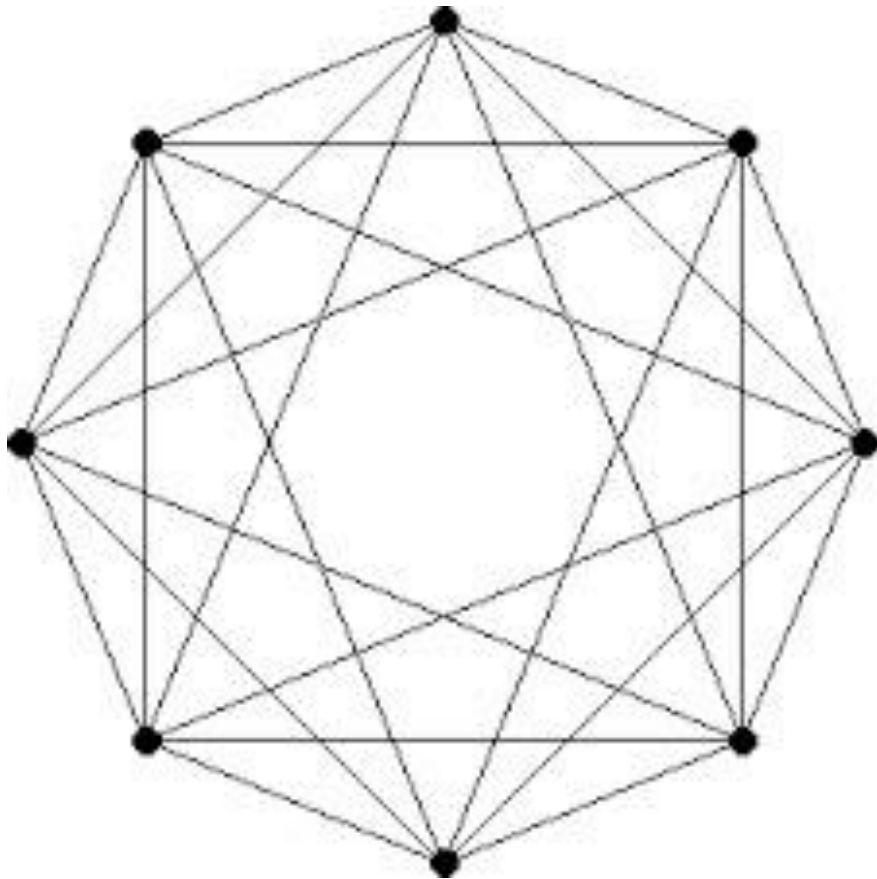


c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r . Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$.



Contoh-fontoh graf teratur lainnya:



Latihan

- Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat ≥ 4 ?

Jawaban: Tiap simpul berderajat sama \rightarrow graf teratur.

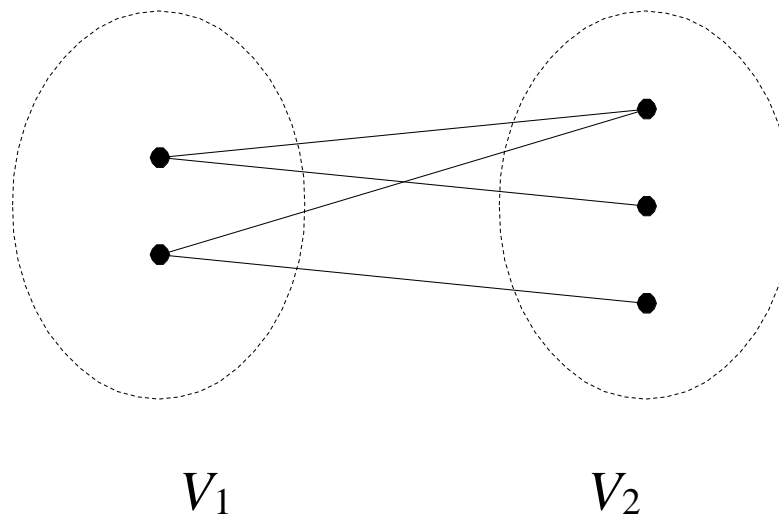
- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah $e = nr/2$.

Jadi, $n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r$.

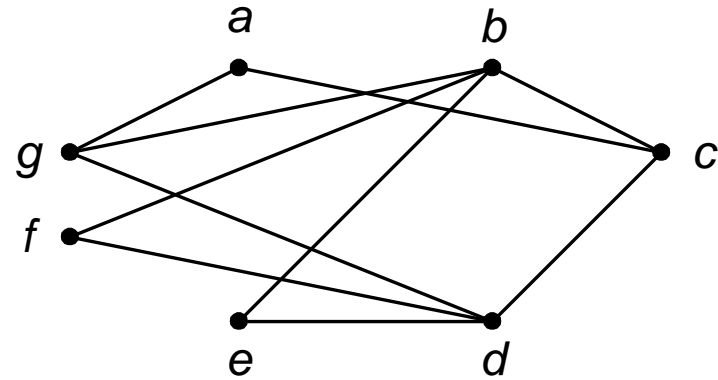
- Untuk $r = 4$, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu $n = 32/4 = 8$.
- Untuk r yang lain ($r > 4$ dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):
 - $r = 8 \rightarrow n = 32/8 = 4 \rightarrow$ tidak mungkin membuat graf sederhana.
 - $r = 16 \rightarrow n = 32/16 = 2 \rightarrow$ tidak mungkin membuat graf sederhana.
- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

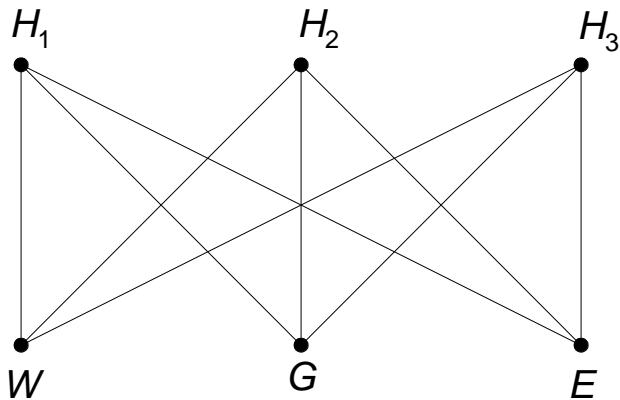
Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.



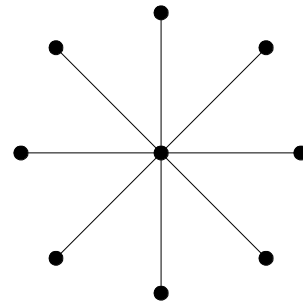
- Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$



- Contoh graf bipartit lainnya:

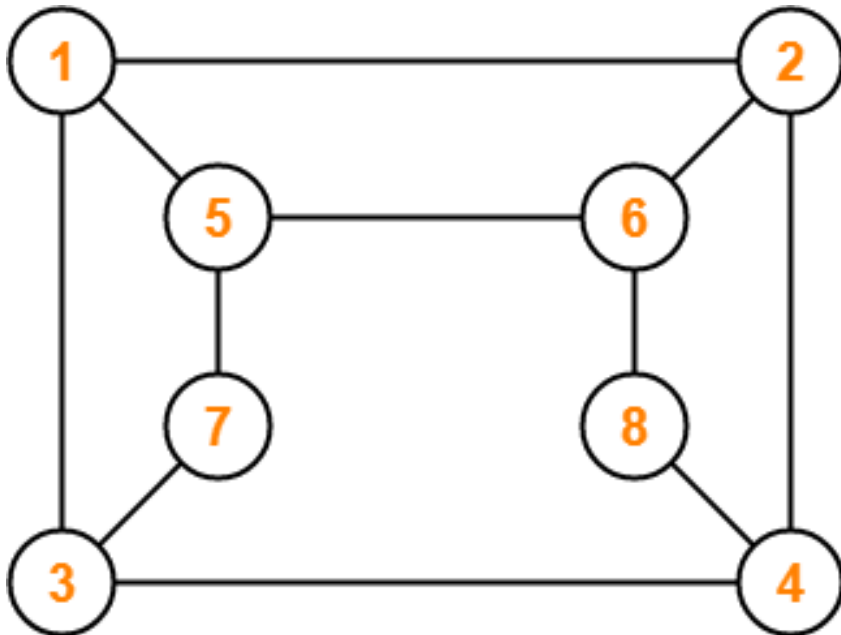


$V_1 = \{H_1, H_2, H_3\}$ dan $V_2 = \{W, G, E\}$

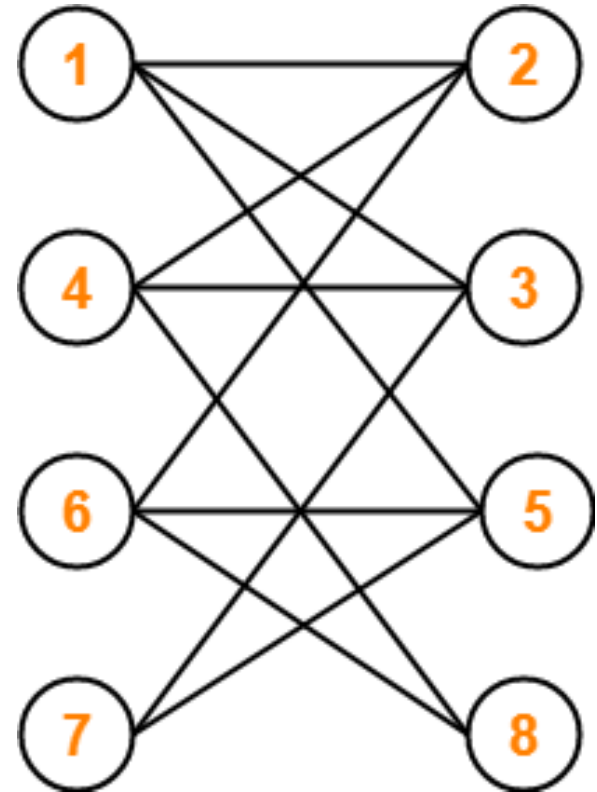


$V_1 = \{\text{simpul di tengah}\}$ dan $V_2 = \{\text{simpul2 lainnya}\}$

Apakah ini graf bipartit?



Ya, dapat digambar
ulang menjadi



$V_1 = \{1, 4, 6, 7\}$ dan $V_2 = \{2, 3, 5, 8\}$