Современные методы в теоретической информатике
Конечные автоматы и разрешимость монадических теорий

Золотов Б.

Монадическая логика — это логика, расширяющая логику первого порядка, но являющаяся фрагментом логики второго порядка. В её формулах и предложениях разрешены кванторы по одноместным предикатам: уже не только по элементам, но ещё не по всем предикатам. Например, формула монадической логики в языке, содержащем предикат $\leq$ —

$$\exists X\ \exists x_0 \in X\ \forall y \in X\ x_0 \leq y.$$

Теорема: Глядя на конечный автомат, можно эффективно выяснить, принимает ли он хоть одно непустое слово.

Конечные цепи

Монадический язык одного потомка — язык первого порядка с предикатами $\subseteq$ и SUC:

$$\mathrm{SUC}(X, Y) = \exists x, y\ \ X = \{x\},\ Y = \{y\},\ y \text{ — следующий за } x \text{ элемент.}$$

Любое конечное вполне упорядоченное множество (ВУМ) естественным образом является моделью этого языка.

Пусть дано конечное ВУМ $C = \{1, \ldots, N\}$ и n его подмножеств $X_1, \ldots, X_n$. Построим по ним слово $\mathrm{Word}(C, X_1, \ldots, X_n)$ длины N над алфавитом $\Sigma_n = \{0, 1\}^n$:

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{matrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{matrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\\
\hline
 & 1 & 2 & 1,\text{ если } j \in C_i;\ \ 0 \text{ иначе} & N
\end{array}$$

Теорема: Есть алгоритм, который по Σ_n–автомату A строит формулу $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ монадического языка одного потомка, такую что для любой конечной цепи C и любых n её подмножеств $X_1, \ldots, X_n$

$$C \models \varphi(X_1, \ldots, X_n) \text{ если и только если } A \text{ принимает } \mathrm{Word}(C, X_1, \ldots, X_n).$$

Теорема: Есть алгоритм, который по формуле $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ строит автомат A над Σ_n, такой что

то же самое.

Теорема: Монадическая теория конечных цепей разрешима. Это потому, что по предложению (формуле без свободных переменных) строится автомат над $\Sigma_0 = \{\circ\}$, и предложение выполняется в какой-то из цепей, если автомат примет хотя бы одно слово.

Цепь $\mathbb{N}$

Очевидно, является моделью монадического языка одного потомка.

Нам потребуются NDFA, работающие на бесконечных строках: $A = (S, T, s_{\mathrm{in}}, F)$, где T — таблица переходов, а $F \subset 2^S$ — множество *финальных наборов* состояний. Запуск является принимающим, если

$$\{s \mid \text{автомат посещает } s \text{ беск. много раз}\} \in F.$$

Результаты этого раздела аналогичны результатам предыдущего, с тем лишь отличием, что вместо $\mathrm{Word}(C, X_1, \ldots, X_n)$ по тому же принципу строится $\mathrm{SEQ}(\mathbb{N}, X_1, \ldots, X_n)$.

Бесконечное двоичное дерево

В этом разделе я успел рассказать только определения.

Двоичное дерево — это $\{l, r\}^*$. Монадический язык двух потомков содержит предикаты $\subseteq$, Left и Right. Σ–оценка дерева — запихивание символов алфавита Σ в его узлы.

Древесный Σ–автомат — четвёрка $(S, T, T_{\mathrm{in}}, F)$.

$$\begin{aligned}
&T \subseteq S \times \{l, r\} \times \Sigma \times S \text{ — таблица переходов}\\
&T_{\mathrm{in}} \subseteq \Sigma \times S \text{ — таблица начальных состояний}\\
&F \subset 2^S \text{ — все финальные наборы состояний}
\end{aligned}$$

То, принимает ли автомат слово, выясняется по итогам *игры* между автоматом и «Сусаниным»: на нечётном ходу автомат выбирает состояние, а на чётном ходу «Сусанин» говорит, в какую сторону спускаться из текущего узла:

A chooses:	Pathfinder chooses:
s_0	
	d_1
s_1	
	d_2
s_2	
	d_3
s_3	
	$\ldots$

Here each $s_n \in S$ and each $d_n \in \{l, r\}$. The choices of A are restricted by the following conditions:

$$(V(e), s_0) \in T_{\mathrm{in}} \quad \text{and} \quad (s_n, d_{n+1}, V(d_1 \ldots d_{n+1}), s_{n+1}) \in T.$$

Автомат выигрывает, если $\{s \mid s \text{ выбиралось беск. много раз}\} \in F$, и принимает дерево с символами из Σ в узлах, если обладает выигрышной стратегией.

Наконец, last appearance record для позиции в дереве — строка из символов, находящихся в предках данной позиции, где каждый символ встречается ровно один раз — на месте своего самого нижнего появления в предках. То есть, строке *abacca* будет соответствовать *bca*.

Теорема: Монадическая теория двоичного дерева разрешима.

Теорема: По древесному автомату A можно эффективно построить автомат A', принимающий в точности деревья, отвергаемые автоматом A. *(«Теорема о дополнении»)*