

// $DPLL$ знать не обязательно, но для понимания что делает $DPLL \oplus$
его осознать полезно
// что такое $DPLL$, SAT и КНФ можно прочесть на википедии

Algorithm 1 $DPLL$

$DPLL(\Phi)$ Φ - формула в КНФ.

```

if  $\Phi$  пуста then
    return  $SAT$ 
if  $\Phi$  содержит пустой дизъюнкт then
    return  $UNSAT$ 
 $x := A(\Phi)$ 
 $\alpha := B(\Phi, x)$ 
if  $DPLL(\Phi[x = \alpha]) = SAT$  then
    return  $SAT$ 
return  $DPLL(\Phi[x = 1 - \alpha])$ 

```

Algorithm 2 $DPLL \oplus$

$DPLL \oplus (\Phi, F)$ Φ - формула в КНФ, F - система линейных уравнений на переменные.

```

if  $F$  не имеет решений then
    return  $UNSAT$ 
if  $F$  противоречит некоторому дизъюнкту  $C \in \Phi$  then
    return  $UNSAT$ 
if  $F$  имеет единственное решение  $\tau$  и  $\Phi[\tau] = 1$  then
    return  $SAT$ 

```

Условия выше легко проверяются за полиномиальное время

$f := A(\Phi, F)$

В отличие от $DPLL$, алгоритм теперь выбирает не какую-то конкретную переменную, а линейное условие на переменные

$\alpha := B(\Phi, F, f)$

if $DPLL \oplus (\Phi, F \wedge (f = \alpha)) = SAT$ **then**

return SAT

return $DPLL \oplus (\Phi, F \wedge (f = 1 - \alpha))$

Определение 1. $DPLL \oplus$ называется *drunken*, если эвристика B выбирает возвращаемое значение случайно и равновероятно.

Определение 2. RHP_n^m (pigeonhole principle) - формула, записывающая принцип Дирихле, строится конъюнкцией двух видов дизъюнктов:

- короткие дизъюнкты $\neg p_{i,k} \vee \neg p_{j,k} \forall i \neq j \forall k$ // записывает, что в каждом ящике не более одного голубя
- длинные дизъюнкты $\vee_k p_{i,k} \forall i$ // записывает, что каждый голубь где-то сидит

При $m > n$ формула очевидно невыполнима.

Теорема 1. (основной результат) Существует такой класс выполнимых формул Ψ_n , что drunken DPLL \oplus с вероятностью $1 - 2^{-\Omega(n)}$ работает хотя бы $2^{\Omega(n)}$ времени на формуле Ψ_n и при этом размер Ψ_n полиномиален по n .

Ψ_n строится как записанная в КНФ формула $RHP_n^{n+1} \vee (\sigma)$, где σ - формула, кодирующая некоторую подстановку на всех переменных (σ имеет вид $x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \dots$). Несложно заметить, что размер такой формулы полиномиален по n и что она имеет единственный выполняющий набор σ .