Секущие плоскости

Используем пропозициональные переменные $\bar{p}$ с интерпретацией $0 = false$ и $1 = true$. Строка доказательства - это

$$\sum_k c_k p_k \geq C,$$

где c_k и C - целые.

Аксиомы: $p_k \geq 0$ и $-p_k \geq -1$ (т.е. $0 \leq p_k \leq 1$) для каждой пропозициональной переменной p_k.

Парвила:

1. Сложение. Из $\sum\limits_k c_k p_k \geq C$ и $\sum\limits_k d_k p_k \geq D$ получаем $\sum\limits_k (c_k + d_k) p_k \geq C + D$;

2. Деление. Из $\sum\limits_k c_k p_k \geq C$ получаем $\sum\limits_k \dfrac{c_k}{d} p_k \geq \left\lceil \dfrac{C}{d} \right\rceil$, $d > 0$ - целое, которое делит каждое c_k;

3. Умножение. Из $\sum\limits_k c_k p_k \geq C$ получаем $\sum\limits_k d c_k p_k \geq dC$, где d - произвольное положительное целое.

Для опровержения множества неравенств надо получить противоречие $0 \geq 1$.

Statement. *По невыполнимой формуле в КНФ можно построить доказательство в секущих плоскостях.*

Statement. *Секущие плоскости моделируют резолюцию.*

Нижняя оценка

Идея: Извлечь из доказательства монотонную булеву схему и применить оценку (теорему Разборова) на монотонную схемную сложность.

Theorem 0.1. (Пудлак) *Если формула $A(x, y)$ такая, что все вхождения x положительны (т.е. без отрицания), или формула $B(x, y)$ такая, что все вхождения x отрицательны, то по доказательству $A(x, y) \wedge B(x, y)$ в секущих плоскостях размера s можно построить вещественную монотонную схему C размера $\leq s$ такую, что $C(x) = 1 \quad \forall x \in U$ и $C(x) = 0 \quad \forall x \in V$, где $U = \{x \mid \exists y : A(x, y) = 1\}$, $V = \{x \mid \exists z : A(x, z) = 1\}$.*

Theorem 0.2. (Разборов) *Пусть C - монотонная вещественная схема, принимающая на вход векторы из 0 и 1 длины $\binom{n}{2}$, кодирующие граф на n вершинах. Пусть C выдает 1, если граф содержит клику размера m, и выдает 0, если вершины графа можно раскрасить в $m - 1$ цвет, где $m = \left\lfloor \frac{1}{8} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{\frac{2}{3}} \right\rfloor$. Тогда размер схемы хотя бы $2^{\Omega((\frac{n}{\log n})^{\frac{1}{3}})}$.*

Запишем формулой, что граф одновременно имеет клику размера m и правильным образом красится в $m-1$ цвет. Причем сделаем это так, чтобы попасть в условие теоремы Пудлака (это можно сделать). Тогда из двух предыдущих теорем получим нажнюю оценку.

Theorem 0.3. *При* $m = \left\lfloor \frac{1}{8}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{2}{3}} \right\rfloor$ *размер доказательства в секущих плоскостях формулы* $Clique \wedge Coloring$ *есть* $2^{\Omega((\frac{n}{\log n})^{\frac{1}{3}})}$.