Resolution proof system

Нам дали некоторую формулу Φ в КНФ, и мы хотим ее опровергнуть. Для этого нам понадобятся все клозы из этой формулы (их называют аксиомами) и два правила вывода:

1. The Resolution Rule: $\frac{E \vee x \quad F \vee \neg x}{E \vee F}$
2. The Weakening Rule: $\frac{E}{E \vee F}$

Здесь E, F - дизъюнкты, а x - переменная. Такими операциями мы хотим получить пустой клоз. Вообще говоря, второе правило излишне, но его добавляют для удобства.

Мы только что определили систему доказательств в резолюциях[1] (Resolution proof system[2]). У этой системы доказательств бывают разновидности, например, можно запретить переиспользовать выведенные клозы и получить систему доказательств tree-like Resolution (потому что вывод раньше был DAG, а теперь – дерево).

Определение 1. *Размером доказательства называется количество вершин в графе вывода. Обозначается $S(\pi)$ для general Resolution и $S_T(\pi)$ для tree-like Resolution.*

TL;DR. *На самом деле все затевается только ради следствий 1, 2 и 3. Можно читать только их, если не особо интересно что за формулы там внутри написаны.*

Определение 2. *Шириной клоза C называется количество литералов в нем. Шириной формулы называется максимальная ширина клоза в ней. Шириной резолюционного доказательства называется максимальная ширина клозов в нем. Обозначается $\omega(C)$, $\omega(\Phi)$ и $\omega(\pi)$ соответственно.*

Теорема 1. $\omega(\Phi \vdash 0) \leq \omega(\Phi) + \log S_T(\Phi)$

Теорема 2. $\omega(\Phi \vdash 0) \leq \omega(\Phi) + O(\sqrt{n \log S(\Phi)})$

Запоминать формулировки теорем выше не нужно, они призваны показать, что из того, что разность $\omega(\Phi \vdash 0) - \omega(\Phi)$ большая, следует экспоненциальная нижняя оценка на размер доказательства в резолюциях.

[1] Осторожно, все русские названия являются не особо интеллектуальной собственностью воспаленного сознания человека, писавшего этот файл.

[2] Но копипастить я умею.

Определение 3 (PHP_n^m)**.** *PHP_n^m - конъюнкция следущих клозов:*

- $P_i := \bigvee_{1 \leq j \leq n} x_{ij}, 1 \leq i \leq m$
- $H_{i,i'}^j := \neg x_{ij} \vee \neg x_{i'j}, 1 \leq i, i' \leq m, 1 \leq j \leq n$

Это обычный принцип Дирихле. Про него ничего доказать не получится, потому что он имеет широкие клозы P_i, а $\omega(PHP_n^m \vdash 0) \leq n$, поэтому мы модифицировали формулу двумя разными способами и для них все доказывали.

Определение 4 ($EPHP_n^m$)**.** *Заменим все P_i на EP_i*

$$EP_i = \neg y_{i0} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} (y_{ij-1} \vee x_{ij} \vee \neg y_{ij}) \wedge y_{in}$$

Теорема 3. *Если $m > n$, то $\omega(EPHP_n^m \vdash 0) \geq n/3$.*

Следствие 1. *Если $m > n$, то $S_T(EPHP_n^m \vdash 0) = 2^{\Omega(n)}$*

Это один из двух основных результатов.

Еще мы рассматривали другой способ модифицировать формулу. Можно брать не все условия, а только те, которые есть в некотором двудольном графе (Если взять $K_{m,n}$, получится обычный PHP_n^m). Это называется $G - PHP$, причем, здесь G - граф. Конечно, G будет экспандером.

Лемма 1. *Пусть G, G' - графы на одном и том же множестве вершин, причем $E(G) \subset E(G')$, где E - множество ребер графа. Тогда $S(G - PHP) \leq S(G' - PHP)$.*

Теорема 4. $\omega(G - PHP \vdash 0) \geq \frac{re}{2}$

Где r, e - параметры экспандера (если все еще не понятно, забудьте про эту теорему).

Следствие 2. $S(PHP_n^{n+1}) = 2^{\Omega(n)}$

Следствие 3. $S(PHP_n^m) = 2^{\Omega(\frac{n^2}{m \log m})}$

А это второй основной результат.