// $DPLL$ знать не обязательно, но для понимания что делает $DPLL\oplus$ его осознать полезно

// что такое $DPLL$, SAT и КНФ можно прочитать на википедии

Algorithm 1 $DPLL$

$\boxed{DPLL(\Phi)}$ Φ - формула в КНФ.

if Φ пуста **then**
    return SAT
    SAT — обозначение для того, чтобы сказать, что формула выполнима (satisfiable)
if Φ содержит пустой дизъюнкт **then**
    return $UNSAT$
    $UNSAT$ — формула невыполнима
$x := A(\Phi)$
A - какая-то функция, вообще говоря, $DPLL$ параметризован функциями A и B. x - переменная из Φ.
$\alpha := B(\Phi, x)$
α - значение для переменной x, то есть 0 или 1.
if $DPLL(\Phi[x = \alpha]) = SAT$ **then**
    return SAT
return $DPLL(\Phi[x = 1 - \alpha])$

Определение 1. *$DPLL$ ($DPLL\oplus$) называется drunken, если эвристика B выбирает возвращаемое значение случайно и равновероятно.*

Algorithm 2 $DPLL\oplus$

$\boxed{DPLL\oplus(\Phi, F)}$ Φ - формула в КНФ, F - система линейных уравнений на переменные.

if F не имеет решений **then**
  return $UNSAT$
if F противоречит некоторому дизъюнкту $C \in \Phi$ **then**
  return $UNSAT$
if F имеет единственное решение τ и $\Phi[\tau] = 1$ **then**
  return SAT
Условия выше легко проверяются за полиномиальное время
$f := A(\Phi, F)$
В отличие от $DPLL$, алгоритм теперь выбирает не какую-то конкретную переменную, а линейное условие на переменные
$\alpha := B(\Phi, F, f)$
if $DPLL\oplus(\Phi, F \wedge (f = \alpha)) = SAT$ **then**
  return SAT
return $DPLL\oplus(\Phi, F \wedge (f = 1 - \alpha))$

Определение 2. PHP_n^m *(pigeonhole principle) - формула, записывающая принцип Дирихле, строится конъюнкцией двух видов дизъюнктов:*

// $p_{i,k}$ - условие, сидит ли голубь i в клетке k. Первый индекс принимает значения $\{1 \dots m\}$, второй $\{1 \dots n\}$.

- *короткие дизъюнкты $\neg p_{i,k} \vee \neg p_{j,k}$ $\forall i \neq j \, \forall k$ // записывает, что в каждом ящике не более одного голубя*
- *длинные дизъюнкты $\vee_k \, p_{i,k}$ $\forall i$ // записывает, что каждый голубь где-то сидит*

При $m > n$ формула очевидно невыполнима.

Теорема 1. *(основной результат) Существует такой класс выполнимых формул $\{\Psi_n\}$, что drunken $DPLL\oplus$ с вероятностью $1 - 2^{-\Omega(n)}$ работает хотя бы $2^{\Omega(n)}$ времени на формуле Ψ_n и при этом размер Ψ_n полиномиален по n.*

Ψ_n строится как записанная в КНФ формула $PHP_n^{n+1} \vee (\sigma)$, где σ - формула, кодирующая некоторую подстановку на всех переменных (σ имеет вид $x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \dots$). Несложно заметить, что размер такой формулы полиномиален по n и что она имеет единственный выполняющий набор σ.