

Пусть X -граф на вершинах x_1, \dots, x_n .

Обозначим за X_i - граф, который мы получили из графа удалением всех рёбер, инцидентных x_i и добавлением всех нерёбер, инцидентных x_i .

Пусть у нас есть имеется множество непомеченных графов X_1, \dots, X_n (Под непомеченными графами имеется ввиду, что мы знаем их с точностью до изоморфизма).

Мы хотим узнать, при каких n мы всегда можем однозначно восстановить X по этому множеству.

При $n = 4$ это неверно.

Основной результат:

Теорема 1. Пусть $n \neq 0 \pmod{4}$. Тогда если X и X' - графы на вершинах x_1, \dots, x_n , причём при $1 \leq i \leq n$ $X_i \cong X'_i$, то $X \cong X'$.

С помощью чего мы это всё доказываем?

Пусть $f : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{R}$, тогда её преобразование Фурье - это $\hat{f} : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{R}$, определённое как

$$\hat{f}(X) = \sum_Y (-1)^{XY} f(Y)$$

Также при $\Gamma \subset \mathbb{Z}_2^k$ определим $\bar{f} : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$\bar{f}(Y) = \sum_{X \in Y + \Gamma} f(X)$$

Лемма 1. Линейное преобразование $f \mapsto \bar{f}$ обратимо тогда и только тогда, когда $\hat{\chi}_\Gamma(X) \neq 0$ при всех $X \in \mathbb{Z}_2^k$. (χ_Γ - это характеристическая функция множества Γ)

Теперь пусть V_n - это множество всех формальных линейных комбинаций $\sum_X a_X X$, $a_X \in \mathbb{R}$, где X пробегает множество всех графов на вершинах x_1, \dots, x_n .

Пусть $\phi : V_n \rightarrow V_n$ - это линейное преобразование, определённое как

$$\phi(X) = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_i - помеченные графы, определённые выше.

Лемма 2. ϕ обратимо тогда и только тогда, когда $n \neq 0 \pmod{4}$

Открытые вопросы:

Верно ли это при $n = 0 \pmod{4}$ и $x \geq 8$?

Есть ли доказательство нашего основного результата, которое явно строит X ?

Похожая гипотеза:

Верно ли тоже то же самое для графов X_1, \dots, X_n , которые мы получаем удалением вершин x_1, \dots, x_n соответственно из графа X ?