В докладе рассмариваются схемы, содержащие parity gates(XOR) и threshold gates.

Определение. threshold gate с m входами определяется m весами $(w_1, \ldots, w_m)$ и порогом T. На входах $(y_1, \ldots, y_m)$ threshold gate с такими параметрами возвращает 1, если $\sum w_i y_i \geqslant T$, и 0 иначе.

Определение. Пусть $r_{n,m} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} 2^i x_{ij}$. Тогда $U_{n,m} = sign(2r_{n,m} + 1)$

Основным результатом доклада будет следующая теорема:

Теорема 1. *Любой threshold gate может быть заменен на threshold схему полиномального размера глубины 2, где любой threshold gate имеет единичные веса.*

Схема доказательства:

Будем считатать, что все переменные лежат в $\{-1, 1\}$, а не в $\{0, 1\}$.

Сначала доказывается, что любой threshold gate может быть заменен на threshold gate $U_{n,m}$ общего вида, где n и m не сильно больше числа входов у изначального threshold gate.

После этого можно зафиксировать параметр s, который мы выберем в самом конце, и рассмотреть следующую функцию:

$$
\begin{aligned}
M_l(y) = \sum_{i=-2b}^{2b} & sign(y - i \cdot 2^{l+s\log a} - 2^l + a^{-s}2^l) \\
& - sign(y - i \cdot 2^{l+s\log a} - 2^{l+1} - a^{-s}2^l) \\
& + sign(y - i \cdot 2^{l+s\log a} + 2^l - a^{-s}2^l) \\
& - sign(y - i \cdot 2^{l+s\log a} + 2^{l+1} + a^{-s}2^l)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Далее рассматривается следующая функция: $N_l(x) = M_l(\Sigma_{ls}(x))$, где $\Sigma_{ls}(x) = \Sigma_{max(l+s\log a - \log b, 0)}^{min(l+s\log a, a-1)}(x)$, где $\Sigma_{t1}^{t2} = \sum_{i=t1}^{t2} \sum_{j=0}^{b-1} 2^i x_{ij}$.

Утвержадается, что если рассмотреть теперь функцию $N_{a,b} = \sum_{l=0}^{a+\log b} N_l(x)$, то она будет считаться схемой глубины 2. В то же самое время она равна $U_{a,b}(x)$ для почти всех x.

Далее вероятностными методами доказывается, что существует такая схема при $s = 2$, считающая ровно $U_{n,m}$, получающаяся подстановкой в схему, считающую $N_{a,b}$, где a и b не сильно больше n и m.