Лабораторная работа «Интеграл Римана» (КТ, весна 2021)

Выполнил: Канафин Евгений, М3135

Вариант 75: $f(x) = \sin x, [0, 4\pi]$

1) Разобьем промежуток на n частей, в каждой части будем брать правую границу, т.е. $\Delta x_k = \frac{4\pi - 0}{n} = \frac{4\pi}{n}$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$, будем в качестве x_k брать правую точку промежутка, т.е. $x_k = k \cdot \frac{4\pi}{n}$:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k \cdot \frac{4\pi}{n} \cdot \frac{4\pi}{n} = \frac{4\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k}{n} \cdot 2\pi\right) =$$

= [$\sin x$ — периодична, период $T = 2\pi$] $= \frac{4\pi}{n} \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n} \cdot 2\pi =$

= [$\sin x$ — нечетна; $\sin(x) = -\sin(x + \pi)$, разделим промежуток $(0; 2\pi]$ на 2 части: $(0; \pi]$ и $(\pi; 2\pi]$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(2k \frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(2k \frac{2\pi}{n}\right) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \sin\left(2k \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

но $\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \sin\left(2k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) =$ [$t = k - \frac{n}{2}$, $k_0 = \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow t_0 = k_0 - \frac{n}{2} = 1$, $k_e = n$, $t_e = k_e - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$] =

$$= \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(2\left(t + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(2\pi + 2t \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = -\sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(2t \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \text{ т.е}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(2k \frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(2k \frac{2\pi}{n}\right) - \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} \sin\left(2t \cdot \frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(\sin\left(2k\frac{4\pi}{n}\right) - \sin\left(2k\cdot\frac{4\pi}{n}\right)\right) = 0 \Rightarrow \sigma_n = \frac{4\pi}{n}\cdot 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$$

Тогда $f(x) = \sin(x)$ явл-ся непрерывной, а значит, и интегрируемой

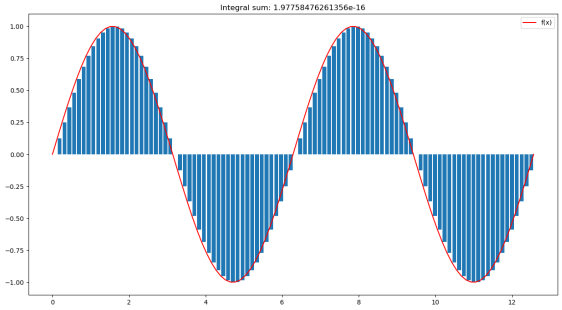
По ф. Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^{4\pi} f(x)\,dx = F(4\pi) - F(0) = \left[F - \text{первообр. для } f,\ f(x)=\sin x \Rightarrow F(x) = -\cos(x)\right] =$$

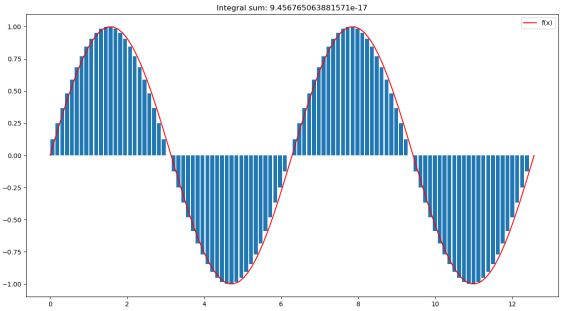
$$= -\cos(4\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

Скриншоты

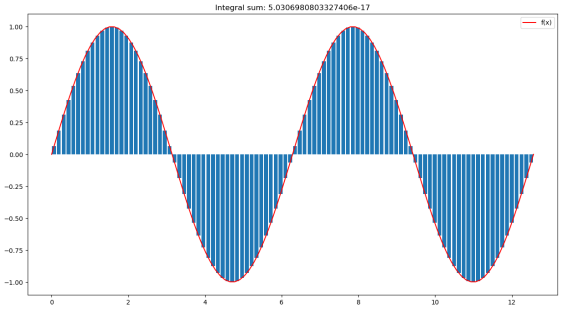
Количество точек n == 100



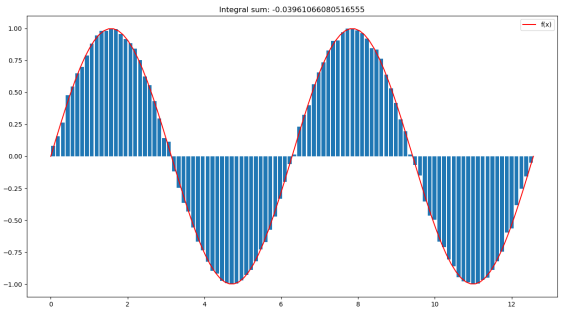
Тип оснащения == левые точки



Тип оснащения == правые точки

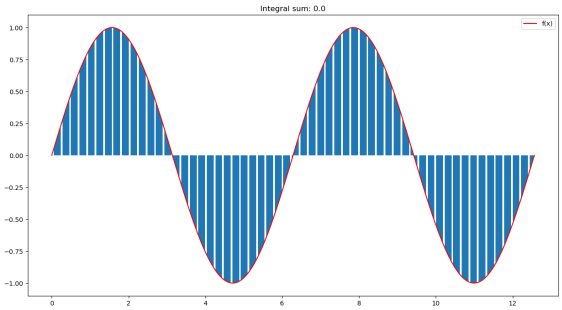


Тип оснащения == центральные точки

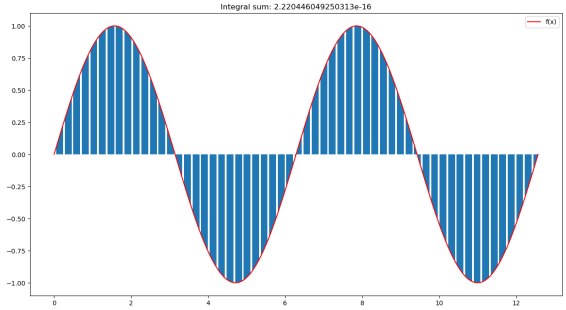


Тип оснащения == случайные точки

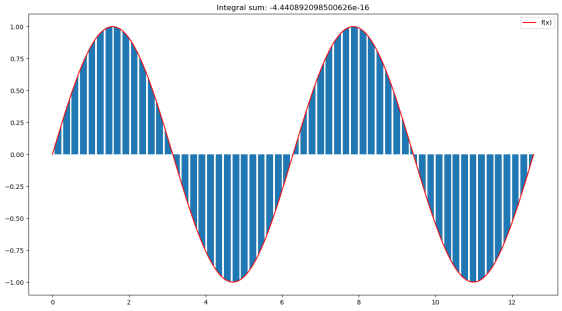
Количество точек n == 1000



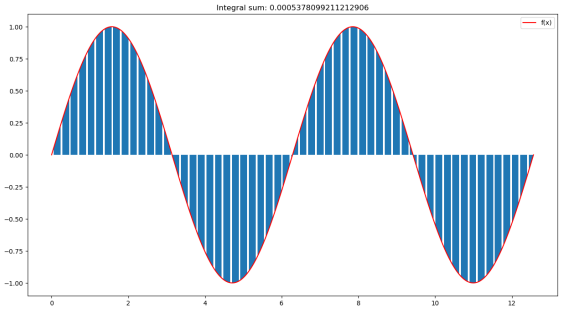
Тип оснащения == левые точки



Тип оснащения == правые точки



Тип оснащения == центральные точки



Тип оснащения == случайные точки

Примечание: из-за особенностей рендеринга в matplotlib на больших n изображение отображается странно. Для разглядывания деталей рекомендую запустить программу локально

Программа

Текст программы, а также инструкции могут быть найдены по адресу https://github.com/evjeny/matan_integration

Примечание

Для корректной работы программы должен быть установлен Python >= 3.6, а также библиотеки matplotlib и numpy. Для создания окружения я рекомендую использовать Anaconda (https://docs.anaconda.com/anaconda/install/), создать окружение можно следующей командой:

```
conda create -n integrator python=3.8 matplotlib numpy
```

```
import argparse
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def left_choicer(a, b):
    return a


def right_choicer(a, b):
    return b


def mid_choicer(a, b):
    return (a + b) / 2


def random_choicer(a, b):
    return np.random.uniform(a, b)


def integrate(f, x_left, x_right, n_points, choicer, save_to=None):
    borders = np.linspace(x_left, x_right, n_points + 1)
    # segments in format [(begin_1, end_1), ..., (begin_n, end_n)]
    segments = np.hstack([
        borders[:-1].reshape(-1, 1),
        borders[1:].reshape(-1, 1)
    ])
    # choosed points in format [x_1, ... x_n]
    dots = np.apply_along_axis(lambda row: choicer(row[0], row[1]), 1, segments)
    # [f(x) for x in dots]
    ys = f(dots)

    # sum of y_i * dx_i
    integral_sum = np.sum(ys * (segments[:, 1] - segments[:, 0]))

    fig, ax = plt.subplots(1, figsize=(15, 8))
    ax.bar(segments.mean(axis=1), ys, width=10/n_points)
    ax.set_title(f"Integral sum: {integral_sum}")

    if save_to:
        plt.savefig(save_to)
    else:
        plt.show()


def main():
    parser = argparse.ArgumentParser(description="Integrator by evjeny. Integrates f(x)=sin(x) on [0, 4Pi]")
    parser.add_argument("-n", type=int, default=100, help="Number of points to split the interval")
    parser.add_argument("-e", type=str, default="mid", help="Type of equipment, must be one of: left, right, mid, random")
    parser.add_argument("--save_to", type=str, default=None, help="Path to save the plot")
    args = parser.parse_args()

    if args.n <= 0:
        print("n must be greater than 0!")
        return

    if args.e not in ["left", "right", "mid", "random"]:
        print("e must be one of: left, right, mid, random !")
        return

    choicers = {
        "left": left_choicer,
        "right": right_choicer,
        "mid": mid_choicer,
        "random": random_choicer
    }

    integrate(np.sin, 0, 4 * np.pi, args.n, choicers.get(args.e), args.save_to)


if __name__ == "__main__":
    main()
```