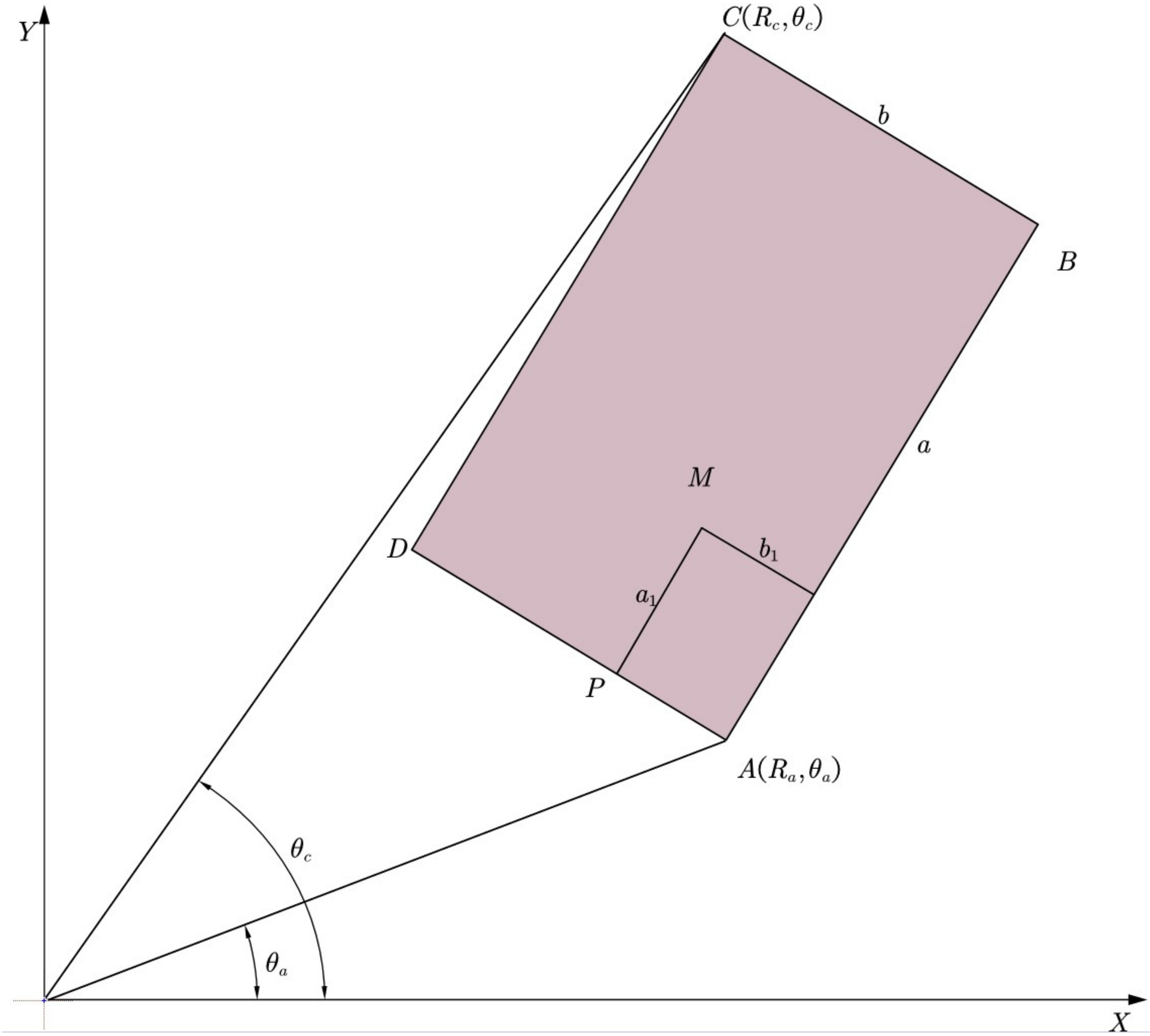

已知$ABCD$为位于第一象限的长方形,AB边长为a, BC边长为b. A点极坐标(R_a, θ_a), C点极坐标(R_c, θ_c). 长方形内一点M距离AD边为a_1, 距离AB边为b_1, $a_1 = \dfrac{a}{m}, b_1 = \dfrac{b}{n}$, 求$M$点极坐标.

过M点做垂直于AD的直线MP交AD于P点，设P点坐标为(x_p, y_p)，m点坐标为(x_m, y_m). AC与水平轴(负轴方向，后同)的夹角为α，AC与AP的夹角为θ，AP与水平轴的夹角为β，则有$\beta = \alpha - \theta$.

先把极坐标转换成直角坐标：

$$x_a = R_a \cdot \cos\theta_a$$
$$y_a = R_a \cdot \sin\theta_a$$
$$x_c = R_c \cdot \cos\theta_c$$
$$y_c = R_c \cdot \sin\theta_c$$

最终要求的 M 点坐标可以表示为：

$$x_m = x_p + a_1 \cdot \sin\beta \qquad y_m = y_p + a_1 \cdot \cos\beta$$

P 点坐标可以表示为：

$$x_p = x_a - b_1 \cdot \cos\beta \qquad y_p = y_a + b_1 \cdot \sin\beta$$

AP 与水平轴的夹角 β:

$$\sin\beta = \sin(\alpha - \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\theta$$

已知 AC 与水平轴(负轴方向，后同)的夹角 α：

$$\sin\alpha = \frac{y_c - y_a}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{x_a - x_c}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}}$$

已知 AC 与 AP 的夹角为 θ：

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

带入计算 AP 与水平轴的夹角的 β:

$$\sin\beta = \left(\frac{y_c - y_a}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}}\right)\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\cdot\left(\frac{x_a - x_c}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}}\right)$$

$$\cos\beta = \left(\frac{x_a - x_c}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}}\right)\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \left(\frac{y_c - y_a}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

化减一下：

$$\sin\beta = \frac{(y_c - y_a)\cdot b - (x_a - x_c)\cdot a}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cos\beta = \frac{(y_c - y_a)\cdot a + (x_a - x_c)\cdot b}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}}$$

计算 M 点坐标:

$$x_m = x_p + a_1\cdot\sin\beta = x_a - b_1\cdot\cos\beta + a_1\cdot\sin\beta$$
$$y_m = y_p + a_1\cdot\cos\beta = y_a + b_1\cdot\sin\beta + a_1\cdot\cos\beta$$

带入已知量:

$$x_m = x_a - \frac{b\cdot\cos\beta}{n} + \frac{a\cdot\sin\beta}{m} \qquad y_m = y_a + \frac{b\cdot\sin\beta}{n} + \frac{a\cdot\cos\beta}{m}$$

最终求得 M 点直角坐标系的坐标如下：

$$x_m = x_a - \frac{(y_c - y_a)\cdot a\cdot b + (x_a - x_c)\cdot b^2}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}\cdot n} + \frac{(y_c - y_a)\cdot a\cdot b - (x_a - x_c)\cdot a^2}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}\cdot m}$$

$$y_m = y_a + \frac{(y_c - y_a)\cdot b^2 - (x_a - x_c)\cdot a\cdot b}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}\cdot n} + \frac{(y_c - y_a)\cdot a^2 + (x_a - x_c)\cdot a\cdot b}{\sqrt{(y_a - y_c)^2 + (x_a - x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}\cdot m}$$

根据下面公式可以得到 M 点的极坐标：

$$R_m = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \quad \theta_m = arctan(\frac{y_m}{x_m})$$(注:x_m、y_m均在第一象限)