已知$ABCD$为位于第一象限的长方形，$AD$长度为$a$，$AB$长度为$b$. $A$点极坐标$(R_a,\theta_a)$，$C$点极坐标$(R_c,\theta_c)$. 长方形内一点$M$距离$AD$边为$a_1$，距离$AB$边为$b_1$，$a_1=\dfrac{a}{m}$，$b_1=\dfrac{b}{n}$，求$M$点极坐标.

---

过$M$点做垂直于$AD$的直线$MP$交$AD$于$P$点，设$P$点坐标为$(x_p,y_p)$，$m$点坐标为$(x_m,y_m)$. $AC$与水平轴(负轴方向，后同)的夹角为$\alpha$，$AC$与$AP$的夹角为$\theta$，$AP$与水平轴的夹角为$\beta$，则有$\beta=\alpha-\theta$.

先把极坐标转换成直角坐标：

$$x_a = R_a \cdot \cos\theta_a$$
$$y_a = R_a \cdot \sin\theta_a$$
$$x_c = R_c \cdot \cos\theta_c$$
$$y_c = R_c \cdot \sin\theta_c$$

最终要求的 M 点坐标可以表示为：

$$x_m = x_p + a_1 \cdot \sin\beta \qquad y_m = y_p + a_1 \cdot \cos\beta$$

P 点坐标可以表示为：

$$x_p = x_a - b_1 \cdot \cos\beta \qquad y_p = y_a + b_1 \cdot \sin\beta$$

AP 与水平轴的夹角 β:

$$\sin\beta = \sin(\alpha-\theta) = \sin\alpha\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \cos(\alpha-\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta + \sin\alpha\cdot\sin\theta$$

已知 AC 与水平轴(负轴方向，后同)的夹角 α：

$$\sin\alpha = \frac{y_c - y_a}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{x_a - x_c}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}}$$

已知 AC 与 AP 的夹角为 θ：

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

带入计算 AP 与水平轴的夹角的 β:

$$\sin\beta = \left(\frac{y_c-y_a}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}}\right)\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\left(\frac{x_a-x_c}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}}\right)$$

$$\cos\beta = \left(\frac{x_a-x_c}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}}\right)\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+\left(\frac{y_c-y_a}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

化减一下：

$$\sin\beta = \frac{(y_c-y_a)\cdot b-(x_a-x_c)\cdot a}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\beta = \frac{(y_c-y_a)\cdot a+(x_a-x_c)\cdot b}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

计算 M 点坐标:

$$x_m = x_p + a_1\cdot\sin\beta = x_a - b_1\cdot\cos\beta + a_1\cdot\sin\beta$$
$$y_m = y_p + a_1\cdot\cos\beta = y_a + b_1\cdot\sin\beta + a_1\cdot\cos\beta$$

带入已知量:

$$x_m = x_a - \frac{b\cdot\cos\beta}{n} + \frac{a\cdot\sin\beta}{m} \qquad y_m = y_a + \frac{b\cdot\sin\beta}{n} + \frac{a\cdot\cos\beta}{m}$$

最终求得 M 点直角坐标系的坐标如下：

$$x_m = x_a - \frac{(y_c-y_a)\cdot a\cdot b+(x_a-x_c)\cdot b^2}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot n} + \frac{(y_c-y_a)\cdot a\cdot b-(x_a-x_c)\cdot a^2}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot m}$$

$$y_m = y_a + \frac{(y_c-y_a)\cdot b^2-(x_a-x_c)\cdot a\cdot b}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot n} + \frac{(y_c-y_a)\cdot a^2+(x_a-x_c)\cdot a\cdot b}{\sqrt{(y_a-y_c)^2+(x_a-x_c)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot m}$$

根据公式把得到极坐标的结果：

$$R_m = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \quad \theta_m = arctan(\frac{y_m}{x_m})(\text{注:}x_m\text{、}y_m\text{均在第一象限})$$