НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені Ігоря Сікорського»

«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

ЗВІТ

про виконання розрахунково-дослідницької роботи №1

з дисципліни «Ідентифікація складних систем»

Виконав:

Студент IV курсу

Групи КА-13

Приймак Є.О.

Перевірив:

Губарєв В.Ф.

Київ – 2025 рік

1. Завдання на роботу

Обираємо систему, що буде генерувати дані

1. Нехай n_{real} – кількість дійсних власних чисел, а n_{im} – кількість комплексно-спряжених власних чисел. Тоді розмірність n системи

$$n = n_{real} + 2n_{im}.$$

Взяти: $n_{real} = 2 \div 3$, $n_{im} = 2 \div 4$.

Взяти так, щоб $\underline{n \le 10}$.

2. Далі обираються наступні параметри (інваріанти) системи

- власні числа:

  всі n_{real} та n_{im}, $p = \overline{1, n_{real}}$, $p = \overline{1, n_{im}}$;

- інваріанти f_p^c та f_p^s.

Обчислювальні експерименти провести для двох систем (обидві мають розмірність n)

* перша має параметри, при яких система добре ідентифікується;

** друга має довільні (випадкові) параметри.

Вибір параметрів системи, яка добре ідентифікується

a) дійсні власні числа. Для них $\omega_p = 0$, $\rho_p = 0$, $\beta_p = 0$, $c_p^s = b_p^s = 0$, f_p^s, $f_p^c = c_p^c \cdot b_p^c$. Обираємо спостережувану жорданову реалізацію, тобто $c_p^c = 1$, $p = \overline{1, n_{\text{real}}}$. Тоді $b_p^c = f_p^c$, $p = \overline{1, n_{\text{real}}}$.

Для добре спостережуваної системи вважаємо $f_p^c = 1$, $p = \overline{1, n_{\text{real}}}$, $\rho_p = |\alpha_p| = 0.95 \div 0.98$, $p = \overline{1, n_{\text{real}}}$.

b) комплексно-спряжені власні числа. Значення ω_p, $p = \overline{1, n_{\text{im}}}$ обираємо рівномірно на інтервалі $\omega_p \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right]$, а значення ρ_p в інтервалі $\rho_p \in [0.95, 0.98]$. При спостережуваній реалізації покладемо $c_p^c = 1$, $c_p^s = 0$, $b_p^c = f_p^c$, $b_p^s = f_p^s$ $p = \overline{1, n_{\text{im}}}$.

Для випадку, що добре ідентифікується, беремо $f_p^c = f_p^s = 1$, $p = \overline{1, n_{\text{im}}}$. За обраними параметрами записується модель системи у жордановій формі в просторі станів. При цьому слід параметри α_p і β_p знайти за формулами $\alpha_p = \rho_p \cos(\omega_p)$, $\beta_p = \rho_p \sin(\omega_p)$.

Вибір параметрів моделі для довільної системи

Довільну систему тієї ж розмірності n обираємо за схемою, описаною вище. Все робиться аналогічно до попереднього випадку, але параметри ρ_p, ω_p, f_p^c, f_p^s є довільними, але випадковими. При цьому треба виконувати умови

$$\rho_p < 1,\ 0 < \omega_p < \frac{\pi}{2},\ \left|f_p^c\right| < 1,\ \left|f_p^s\right| < 1.$$

3. Для обраних таким чином двох систем у жордановій формі простору стану знайти еквівалентні їх представлення у нормальній спостережуваній формі та у формі регресії. Для цього використати рівняння

$$\overline{\Gamma} \cdot T = \Gamma$$

де $\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \overline{c}' \\ \overline{c}'\overline{A} \\ \vdots \\ \overline{c}'\overline{A}^{n-1} \end{pmatrix}$ – матриця спостереження для нормальної форми простору стану, $\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} c' \\ c'A \\ \vdots \\ c'A^{n-1} \end{pmatrix}$ – та ж сама матриця для жорданової форми рівнянь у просторі стану. Тоді $\overline{A} = TAT^{-1}$, $\overline{b} = Tb$, $\overline{c}' = c'T$. Формули для знаходження параметрів регресії наведені у розділі «Допоміжні матеріали».

4. Після знаходження всіх еквівалентних форм моделей системи провести обчислювальний експеримент по демонстрації їх еквівалентності. Для цього на вхід кожної з них подати одиничний прямокутний імпульс від

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1,\ t = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

5. У різних нормах показати, що вихід $y(t)$ у всіх однаковий.

6. Обчислити дані для ілюстрації результатів і оформити роботу у вигляді, що дає змогу її оцінити (дати оцінку).

7. Відправити роботу на E-mail v.f.gubarev@gmail.com

2. Хід роботи

а) Система яка добре ідентифікується

Обираємо n = m = 6 (два власних чисел дійсні, а всі інші комплексно-спряжені), тобто

$$\boldsymbol{n = 2P_{im} + P_{real} = 2 * 2 + 2 = 6}$$

$P_{im} = 2$, $P_{real} = 2$, p ∈ 1, 2 – дійсні, p ∈ 3,4 – комплексні.

Тоді маємо:

p = 1 :

$\omega_1 = 0, \alpha_1 = \lambda_1, \beta_1 = 0, \rho_1 = \lambda_1$

$p = 2$:

$\omega_2 = 0, \alpha_2 = \lambda_2, \beta_2 = 0, \rho_2 = \lambda_2$

$p = 3$:

$\omega_3 = \frac{\pi}{6}, \rho_3 = 0.97, \alpha_3 = \rho_3 * \cos\omega_3 = 0.84,\ \beta_3 = \rho_3 * \sin\omega_3 = 0.48$

$p = 4$:

$\omega_4 = \frac{\pi}{3}, \rho_4 = 0.98, \alpha_4 = \rho_4 * \cos\omega_4 = 0.49,\ \beta_4 = \rho_4 * \sin\omega_4 = 0.85$

Обираємо

$f_p^C = 1, f_p^S = 0, \quad p = 1, 2$

$f_p^C = f_p^S = 1, \quad p = 3, 4$

$f_p^C = c_p^C b_p^C + c_p^S b_p^S$

$f_p^S = c_p^S b_p^C - c_p^C b_p^S$

Обираємо спостережувану реалізацію:

$\rho_1 = \lambda_1 = 0.95$

$\rho_2 = \lambda_2 = 0.96$

Тоді система у просторі стану для жорданової реалізації має вигляд

$$x(t) = Ax(t-1) + bu(t-1),$$
$$y(t) = c'x(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & -\beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}, x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3^c \\ b_3^s \\ b_4^c \\ b_4^s \end{pmatrix}, c'^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3^c \\ c_3^s \\ c_4^c \\ c_4^s \end{pmatrix}.$$

Підставивши значення, маємо:

```
Matrix A:
 [[ 0.95   0.     0.     0.     0.     0.   ]
 [ 0.     0.96   0.     0.     0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.84  -0.485  0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.485  0.84   0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.     0.     0.49  -0.849]
 [ 0.     0.     0.     0.     0.849  0.49 ]]

 c:  [1 1 1 0 1 0]

 b:  [1 1 1 1 1 1]
```

Еквівалентна нормальна реалізація має наступні матрицю $\overline{A}$ та вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}'$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{a_6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{a_5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\overline{a_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\overline{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\overline{a_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\overline{a_1} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \overline{b_6} \\ \overline{b_5} \\ \overline{b_4} \\ \overline{b_3} \\ \overline{b_2} \\ \overline{b_1} \end{pmatrix}, \overline{c}' = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

Значення знаходяться за значеннями власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \pm \beta_3, \lambda_4 \pm \beta_4$. Характеристичне рівняння цієї системи тоді має вигляд:

$$\lambda^6 + \overline{a_1}\lambda^5 + \overline{a_2}\lambda^4 + \overline{a_3}\lambda^3 + \overline{a_4}\lambda^2 + \overline{a_5}\lambda + \overline{a_6} = 0$$

де вектор $\overline{a_n}$:

```
_
a:
[4.570089283341812, 9.540558028857834, 11.737915294688412, 8.982294476027596, 4.038456537521985, 0.82412000832]
```

Таким чином маємо:

- матриця $\bar{A}$ має такий вигляд:

```
_
A:
[[  0.      0.      0.      0.      0.     -0.824]
 [  1.      0.      0.      0.      0.     -4.038]
 [  0.      1.      0.      0.      0.     -8.982]
 [  0.      0.      1.      0.      0.    -11.738]
 [  0.      0.      0.      1.      0.     -9.541]
 [  0.      0.      0.      0.      1.     -4.57 ]]
```

Для жорданової реалізації A та еквівалентної нормальної реалізації $\bar{A}$, маємо вектори $\overline{a_n}$, і з них власні значення для характеристичних рівняннь цих систем:

```
a_(Jordan):
 [0.49+0.849j 0.49-0.849j 0.84+0.485j 0.84-0.485j 0.95+0.j    0.96+0.j   ]

a_(norm):
 [0.49+0.849j 0.49-0.849j 0.84+0.485j 0.84-0.485j 0.95+0.j    0.96+0.j   ]
```

Як бачимо, обидві реалізації співпадають.

Отже ми вже маємо матриці A та $\bar{A}$, вектори c’ , $\bar{c}'$ і b. Для того повністю визначити нормальну реалізацію – необхідно знайти вектор $\bar{b}$. Для цього є матричне рівняння для знаходження неособливого перетворення T з наступного співвідношення:

$$\overline{\Gamma} \cdot T = \Gamma$$

де $\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \overline{c}' \\ \overline{c}'\overline{A} \\ \vdots \\ \overline{c}'\overline{A}^{n-1} \end{pmatrix}$. Маємо

Матриця $\overline{\Gamma}$:

```
 _
 Г:
 [[  0.       0.       0.       0.       0.       1.    ]
  [  0.       0.       0.       0.      -1.       4.57 ]
  [  0.       0.       0.       1.      -4.57    11.345]
  [  0.       0.      -1.       4.57   -11.345   19.985]
  [  0.       1.      -4.57    11.345 -19.985   27.756]
  [ -1.       4.57   -11.345   19.985 -27.756   32.334]]
```

Матриця Г:

```
Г:  [[ 1.      1.      1.      0.      1.      0.    ]
 [ 0.95   0.96   0.84  -0.485  0.49  -0.849]
 [ 0.902  0.922  0.47  -0.815 -0.48  -0.832]
 [ 0.857  0.885  0.    -0.913 -0.941 -0.    ]
 [ 0.815  0.849 -0.443 -0.767 -0.461  0.799]
 [ 0.774  0.815 -0.744 -0.429  0.452  0.783]]
```

Звідси матриця Т:

```
T:  [[0.867 0.858 0.736 0.425 0.42  0.728]
 [3.338 3.312 3.168 1.323 2.489 2.826]
 [5.942 5.906 5.873 1.816 5.81  4.296]
 [6.101 6.075 6.172 1.402 6.821 3.047]
 [3.62  3.61  3.73  0.485 4.08  0.849]
 [1.    1.    1.    0.    1.    0.   ]]
```

Далі, використовуючи співвідношення $\overline{A} = TAT^{-1}$, $\overline{c}' = c'T^{-1}$, $\overline{b} = Tb$ маємо

```
 _
 b:
 [ 4.035 16.456 29.643 29.618 16.374  4.   ]
```

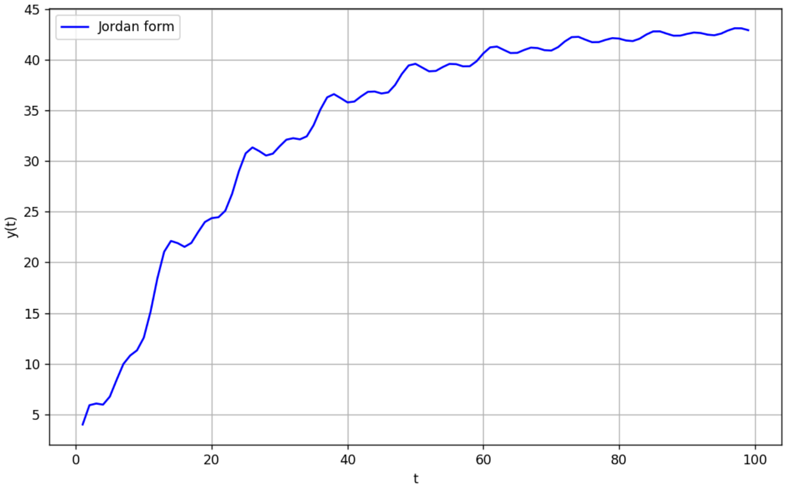
3. Обчислювальний експеримент:

Подамо на вхід кожної системи одиничний прямокутний імпульс:

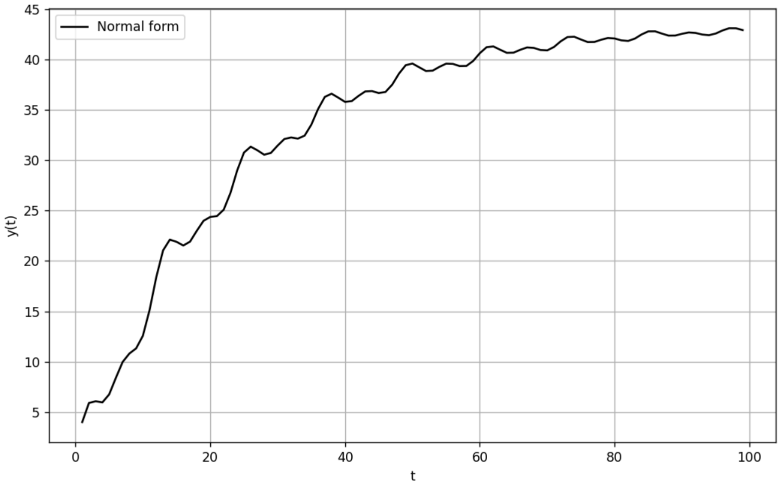
$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, \ t = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

та покажемо, що вихід y(t) для різних форм однаковий.

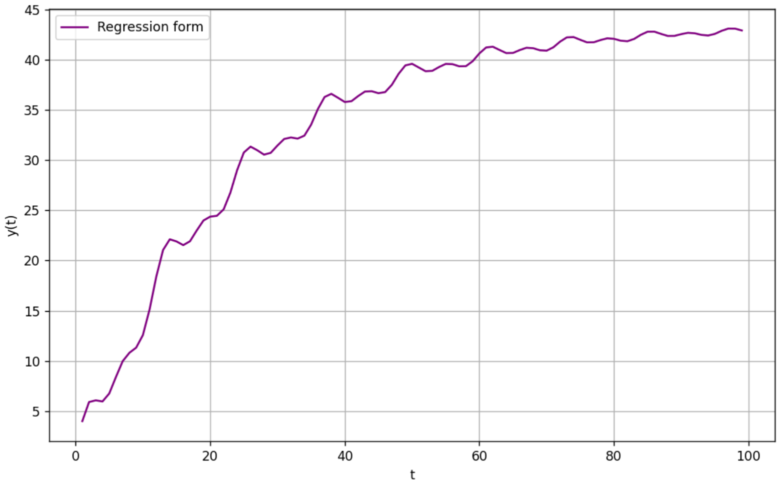
- Система в жордановій формі:



- Система в нормальній формі:

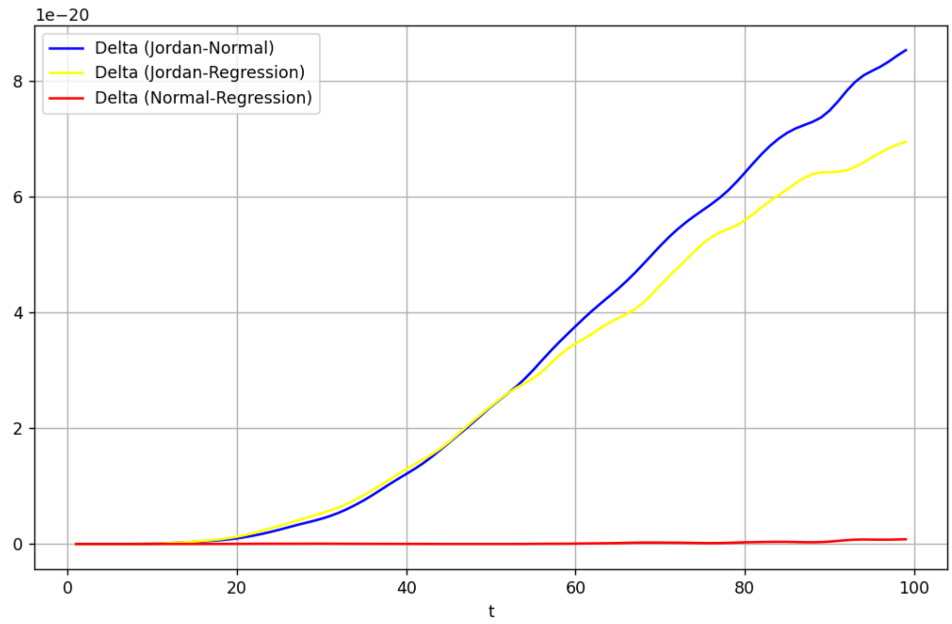


- Система у формі регресії:



Як бачимо, вихід y(t) для різних форм однаковий, отже маємо 3 еквівалентні системи.

- **Порівняння різниць похибкок обчислень:**



b) Модель довільної системи

Аналогічним чином до попереднього випадку, задамо вхідні параметри з врахуванням умов довільної системи (згідно завдання). Так само,

система у просторі стану для жорданової реалізації має вигляд

$$x(t) = Ax(t-1) + bu(t-1),$$

$$y(t) = c'x(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & -\beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}, x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3^c \\ b_3^s \\ b_4^c \\ b_4^s \end{pmatrix}, c'^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3^c \\ c_3^s \\ c_4^c \\ c_4^s \end{pmatrix}.$$

Підставивши задані значення, для довільної системи маємо:

```
Matrix A:
 [[ 0.95    0.     0.     0.     0.     0.   ]
 [ 0.     0.355  0.     0.     0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.803 -0.476  0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.476  0.803  0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.     0.     0.113 -0.83 ]
 [ 0.     0.     0.     0.     0.83   0.113]]

 c:  [1 1 1 0 1 0]

 b:  [-0.881 -0.504  1.     0.018 -0.821  0.57 ]
```

Еквівалентна нормальна реалізація має наступні матрицю $\overline{A}$ та вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}'$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{a_6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{a_5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\overline{a_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\overline{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\overline{a_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\overline{a_1} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \overline{b_6} \\ \overline{b_5} \\ \overline{b_4} \\ \overline{b_3} \\ \overline{b_2} \\ \overline{b_1} \end{pmatrix}, \overline{c}' = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

Значення знаходяться за значеннями власних чисел λ_1, λ_2, $\lambda_3 \pm \beta_3$, $\lambda_4 \pm \beta_4$. Характеристичне рівняння цієї системи тоді має вигляд:

$$\lambda^6 + \overline{a_1}\lambda^5 + \overline{a_2}\lambda^4 + \overline{a_3}\lambda^3 + \overline{a_4}\lambda^2 + \overline{a_5}\lambda + \overline{a_6} = 0$$

де вектор $\overline{a_n}$:

```
_
a:
[3.6100892833418117, 6.07487231684969б, 5.906037870512702, 3.3124981203354014, 0.8584583419999999]
```

Таким чином маємо:

- матриця $\bar{A}$ має такий вигляд:

```
_
A:
[[ 0.     0.     0.     0.     0.    -0.206]
 [ 1.     0.     0.     0.     0.    -1.244]
 [ 0.     1.     0.     0.     0.    -2.99 ]
 [ 0.     0.     1.     0.     0.    -4.467]
 [ 0.     0.     0.     1.     0.    -4.663]
 [ 0.     0.     0.     0.     1.    -3.137]]
```

Для жорданової реалізації A та еквівалентної нормальної реалізації $\bar{A}$, маємо вектори $\overline{a_n}$, і з них власні значення для характеристичних рівняннь цих систем:

```
a_(Jordan):
 [0.113+0.83j  0.113-0.83j  0.803+0.476j 0.803-0.476j 0.95 +0.j
 0.355+0.j   ]

a_(norm):
 [0.113+0.83j  0.113-0.83j  0.355+0.j    0.803+0.476j 0.803-0.476j
 0.95 +0.j   ]
```

Як бачимо, обидві реалізації співпадають.

Отже ми вже маємо матриці A та $\bar{A}$, вектори c' , $\bar{c}'$ і b. Для того повністю визначити нормальну реалізацію – необхідно знайти вектор $\bar{b}$. Для цього є матричне рівняння для знаходження неособливого перетворення T з наступного співвідношення:

$$\overline{\Gamma} \cdot T = \Gamma$$

де $\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \overline{c}' \\ \overline{c}'\overline{A} \\ \vdots \\ \overline{c}'\overline{A}^{n-1} \end{pmatrix}$. Маємо

Матриця $\overline{\Gamma}$:

```
_
Г:
[[ 0.     0.     0.     0.     0.     1.   ]
 [ 0.     0.     0.     0.    -1.     3.137]
 [ 0.     0.     0.     1.    -3.137  5.175]
 [ 0.     0.    -1.     3.137 -5.175  6.073]
 [ 0.     1.    -3.137  5.175 -6.073  5.936]
 [-1.     3.137 -5.175  6.073 -5.936  5.282]]
```

Матриця Г:

```
Г:  [[ 1.     1.     1.     0.     1.     0.   ]
 [ 0.95   0.355  0.803 -0.476  0.113 -0.83 ]
 [ 0.902  0.126  0.417 -0.764 -0.676 -0.188]
 [ 0.857  0.045 -0.029 -0.812 -0.232  0.54 ]
 [ 0.815  0.016 -0.41  -0.638  0.422  0.254]
 [ 0.774  0.006 -0.632 -0.317  0.258 -0.321]]
```

Звідси матриця T:

```
T:  [[0.217 0.58  0.19  0.113 0.033 0.244]
 [1.081 1.867 1.033 0.472 0.484 1.393]
 [2.01  3.161 2.063 0.635 2.052 2.741]
 [2.586 3.674 2.563 0.729 3.633 2.415]
 [2.187 2.781 2.334 0.476 3.024 0.83 ]
 [1.    1.    1.    0.    1.    0.   ]]
```

Далі, використовуючи співвідношення $\overline{A} = TAT^{-1}$, $\overline{c}' = c'T^{-1}$, $\overline{b} = Tb$ маємо

```
_
b:
[-0.179 -0.454 -1.41  -3.157 -2.993 -1.206]
```

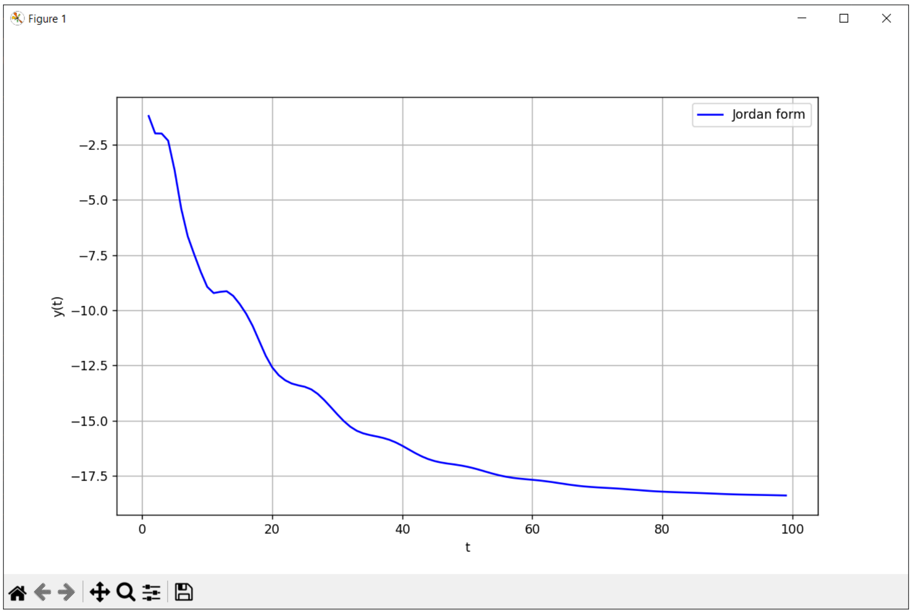
Обчислювальний експеримент:

Подамо на вхід кожної системи одиничний прямокутний імпульс:

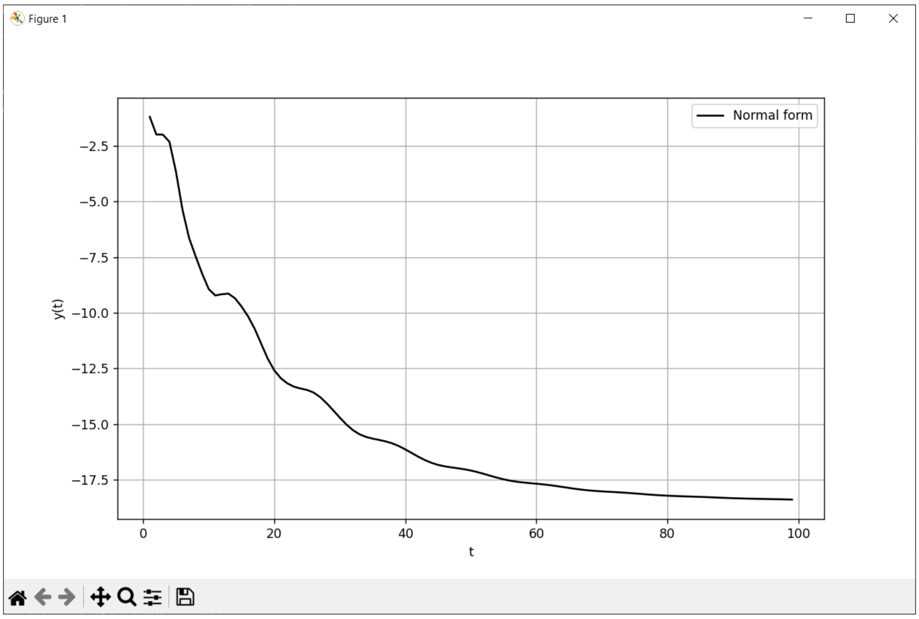
$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, \ t = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

та покажемо, що вихід y(t) для різних форм однаковий.

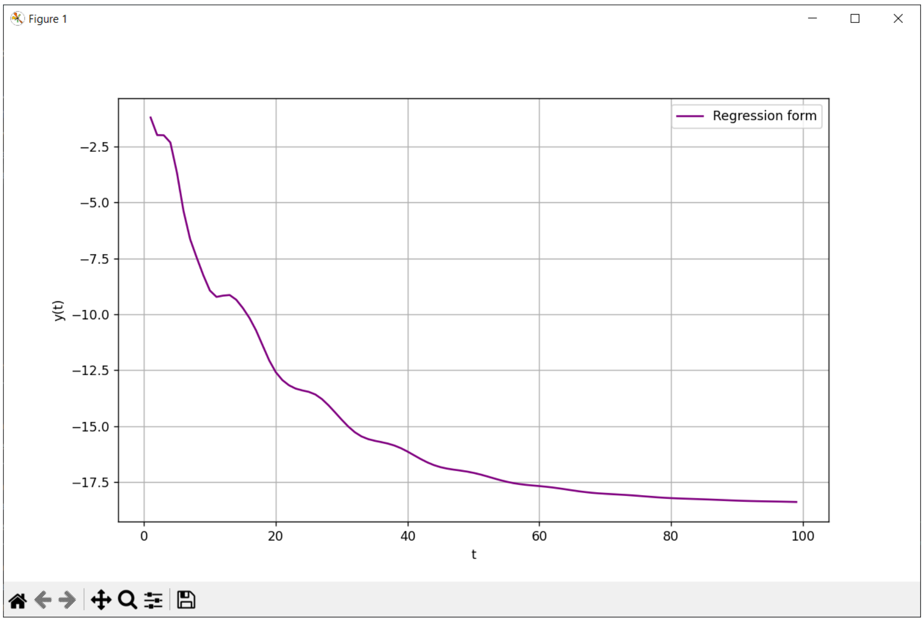
- Система в жордановій формі:



- Система в нормальній формі:

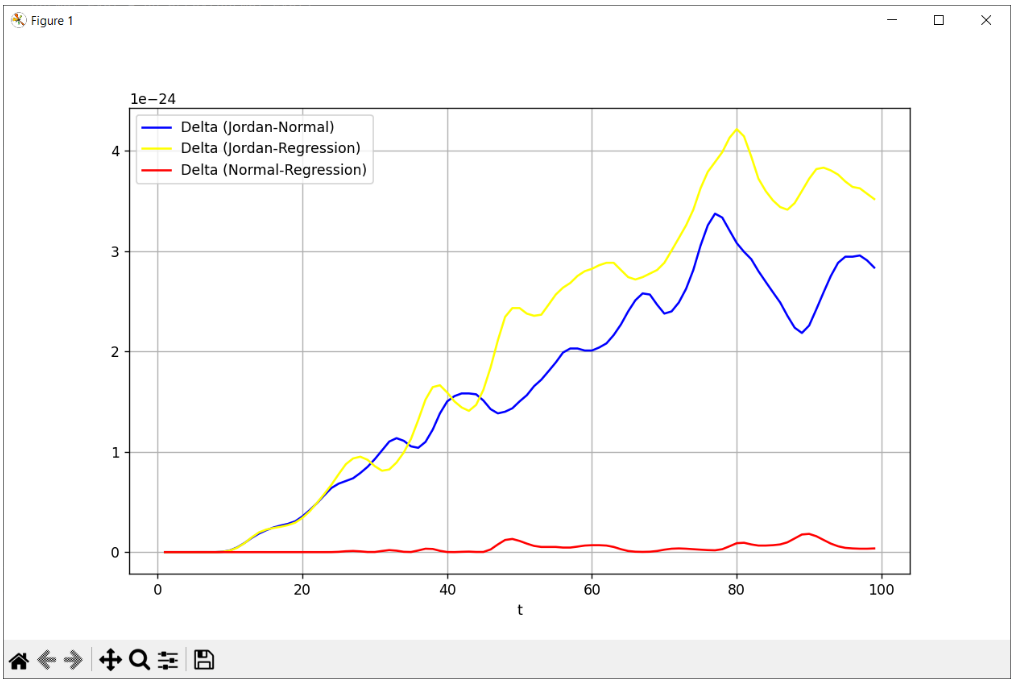


- Система у формі регресії:



Як бачимо, вихід y(t) для різних форм однаковий, отже маємо 3 еквівалентні системи.

- **Порівняння різниць похибок обчислень:**



Висновок: Таким чином, в ході виконання розрахунково-дослідницької роботи №1 було продемонстровано, що всі три форми представлення систем еквівалентні, як з параметрами для довільного випадку, так і при добре спостережуваному варіанті.

Безумовно є похибки, однак вони є настільки малими, що ними можна знехтувати при використанні будь-якої з наших систем. Їх наявність здебільшого пов’язана з похибкою чисельних розрахунків програми.