НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені Ігоря Сікорського»

«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

ЗВІТ

про виконання розрахунково-дослідницької роботи №2

з дисципліни «Ідентифікація складних систем»

Виконав:

Студент IV курсу

Групи КА-13

Приймак Є.О.

Перевірив:

Губарєв В.Ф.

Київ – 2025 рік

Хід роботи

З першої роботи маємо систему:

Обираємо n = m = 6 (два власних чисел дійсні, а всі інші комплексно-спряжені), тобто

$$\boldsymbol{n = 2P_{im} + P_{real} = 2 * 2 + 2 = 6}$$

$P_{im} = 2$, $P_{real} = 2$, p ∈ 1, 2 – дійсні, p ∈ 3,4 – комплексні.

Тоді маємо:

p = 1 :

$\omega_1 = 0, \alpha_1 = \lambda_1, \beta_1 = 0, \rho_1 = \lambda_1$

$p = 2$:

$\omega_2 = 0, \alpha_2 = \lambda_2, \beta_2 = 0, \rho_2 = \lambda_2$

$p = 3$:

$\omega_3 = \frac{\pi}{6}, \rho_3 = 0.97, \alpha_3 = \rho_3 * \cos \omega_3 = 0.84,\ \beta_3 = \rho_3 * \sin \omega_3 = 0.48$

$p = 4$:

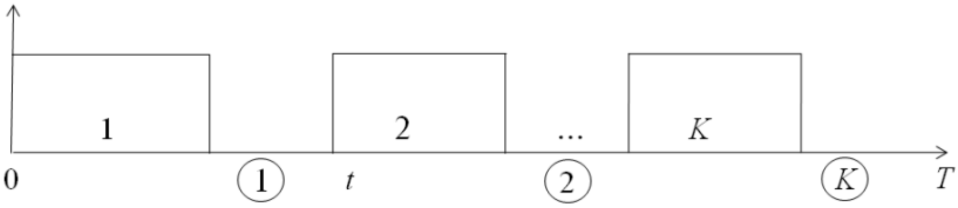
$\omega_4 = \frac{\pi}{3}, \rho_4 = 0.98, \alpha_4 = \rho_4 * \cos \omega_4 = 0.49,\ \beta_4 = \rho_4 * \sin \omega_4 = 0.85$

Матриця A має вигляд:

```
Matrix A:
 [[ 0.95   0.     0.     0.     0.     0.   ]
 [ 0.     0.96   0.     0.     0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.84  -0.485  0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.485  0.84   0.     0.   ]
 [ 0.     0.     0.     0.     0.49  -0.849]
 [ 0.     0.     0.     0.     0.849  0.49 ]]

 c:  [1 1 1 0 1 0]

 b:  [1 1 1 1 1 1]
```

Завдання 1

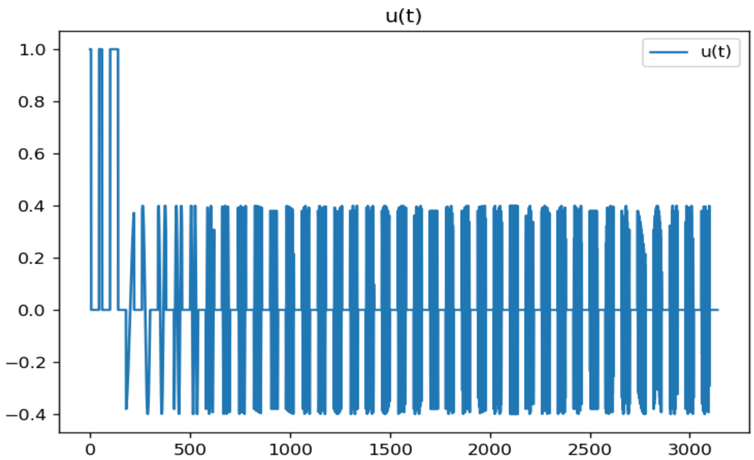
Обираємо варіант плану експериментів, в якому маємо один процес з чергуванням інтервалів збудження і релаксації (вільного руху). Він показаний на Рисунку 1.

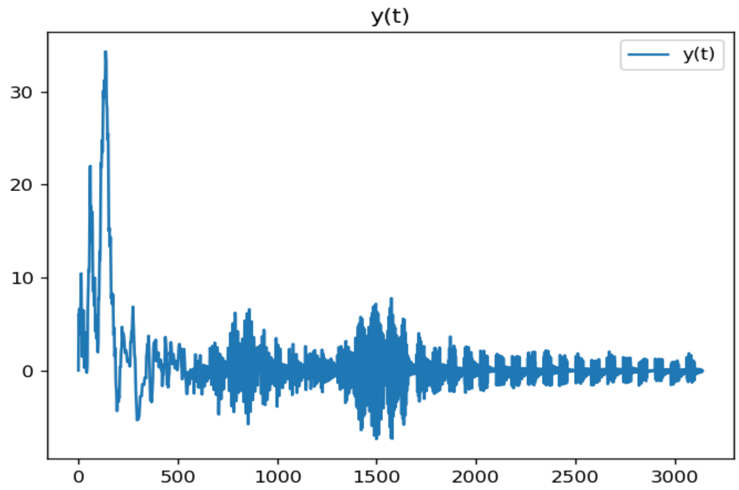


На Рисунку 1 маємо: 1, 2, 3, …, К -послідовність інтервалів збудження, зокрема, перший – 1, другий – 2, …, К-ий.

Всі інтервали релаксації ①,②,Ⓚ мають однакову довжину К= 40, тобто містять 40 точок. Перші три інтервали збудження 1, 2, 3 мають такі довжини; 1-й – 5 точок, 2-й – 15 точок, 3-й - 40 точок. Збуджуючий сигнал на них – це прямокутний одиничний імпульс $u(t)$ = 1 відповідної довжини. Всі наступні інтервали збудження, починаючи з 4 ого, містять 40 точок і збуджуються гармонічним сигналом uk (t) = u_0 * sin$(k-3)\delta t$, k = 4, 5, …,t = 1, 2, 3, …, 40, при цьому довжина інтервалу збудження гармонічним сигналом дорівнює 40 точкам. Значення $\delta = \pi/50$. Кількість інтервалів збудження К = 40, стільки ж буде інтервалів релаксації l = 40, і беремо $u0$ = 0.4

Тоді матимемо наступні графіки вхідних та вихідних даних моделі:





За алгоритмом описаним в теоретичному матеріалі та завданні до Розрахунково-дослідницької роботи № 2, обчислюємо вектори a і b, для обчислення вектора a буде використано дані на інтервалах релаксації, а для визначення вектора b дані на інтервалах збудження. Задамо розмірність n =8.

Задача ідентифікації в класі моделей регресії заданої розмірності Запишемо базове рівняння регресії, що повинно виконуватися для довільних t на інтервалі релаксації:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - \cdots - a_n y(t-n)$$

Можемо сформулювати в матричній формі:

$$Y \cdot a = y_a$$

МНК-розв'язок для вектора a можна знайти через SVD-розклад матриці Y у вигляді:

$$a = V \cdot \Sigma_n^{-1} \cdot U_n^T \cdot y_a$$

Щоб знайти вектор b будемо використовувати дані на інтервалах збудження. Зробимо це наступним чином:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \cdots + a_n y(t-n)$$
$$\tilde{y}(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \cdots + b_n u(t-n)$$
$$W \cdot b = \tilde{y}_b$$

Сформуємо рівняння

$$Y \cdot a = y_a.$$

Та знайдемо a методом МНК:

```
Y :
 [[ 8.134  6.449  5.554 ...  3.899  4.272  6.663]
 [ 9.91   8.134  6.449 ...  4.534  3.899  4.272]
 [10.45   9.91   8.134 ...  5.124  4.534  3.899]
 ...
 [-0.178 -0.2   -0.086 ...  0.091 -0.033 -0.091]
 [-0.055 -0.178 -0.2   ...  0.152  0.091 -0.033]
 [ 0.048 -0.055 -0.178 ...  0.076  0.152  0.091]]

y_a :
 [ 9.91  10.45   8.97  ... -0.055  0.048  0.049]

alpha:
 [ 1.563 -0.502 -0.663  0.244  0.591 -0.158 -0.743  0.597]
```

Аналогічно, маємо

$$W \cdot b = \widetilde{y_b}\,.$$

знайдемо b методом МНК:

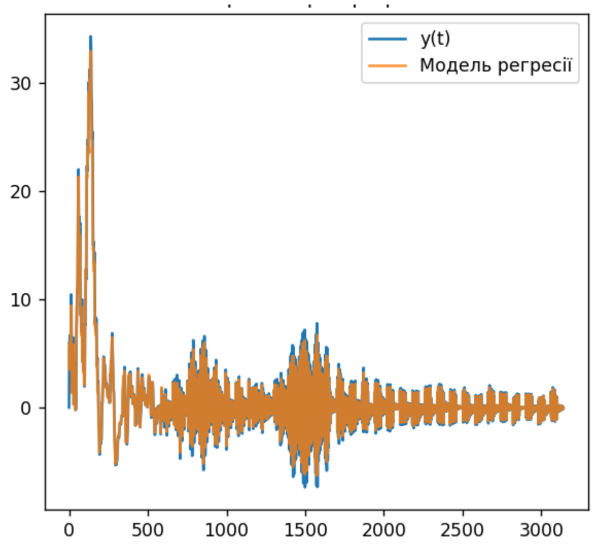
```
W :
 [[ 1.     1.     1.    ...  1.     1.     1.   ]
 [ 1.     1.     1.    ...  1.     1.     1.   ]
 [ 1.     1.     1.    ...  1.     1.     1.   ]
 ...
 [-0.05   0.324 -0.393 ... -0.351  0.38  -0.17 ]
 [-0.255 -0.05   0.324 ...  0.099 -0.351  0.38 ]
 [ 0.399 -0.255 -0.05  ...  0.214  0.099 -0.351]]

y_b :
 [ 1.     1.     1.    ... -0.255  0.399 -0.292]

beta:
 [ 1.283 -1.581  1.898 -1.792  1.65  -1.159  0.804 -0.307]
```

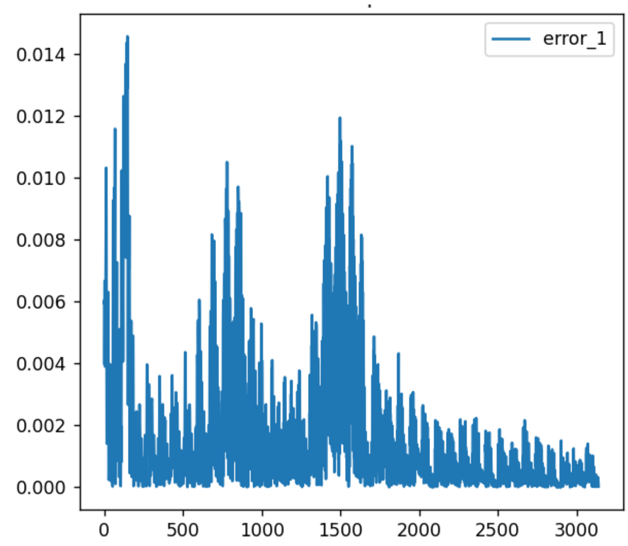
Проведемо порівняльний аналіз отриманих результатів, тобто оцінимо остаточну похибку обчислень відтвореної регресії на точних даних у нормах $\|*\|_2$, $\|*\|_\infty$:

```
--- Порівняльний аналіз похибок для точних даних ---
Похибка для вектора a :
  ||a_real - a_calc||_2 = 0.000010
  ||a_real - a_calc||_∞ = 0.000005
Похибка для вектора b :
  ||b_real - b_calc||_2 = 0.000063
  ||b_real - b_calc||_∞ = 0.000037
```

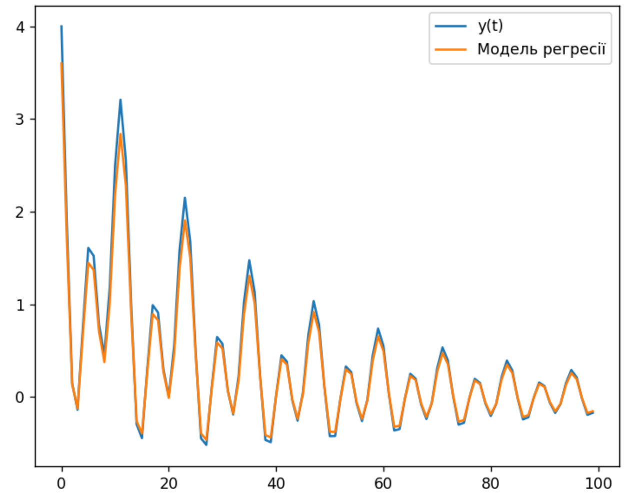
Отримали наступні графіки для точних значень та відповідних похибок:

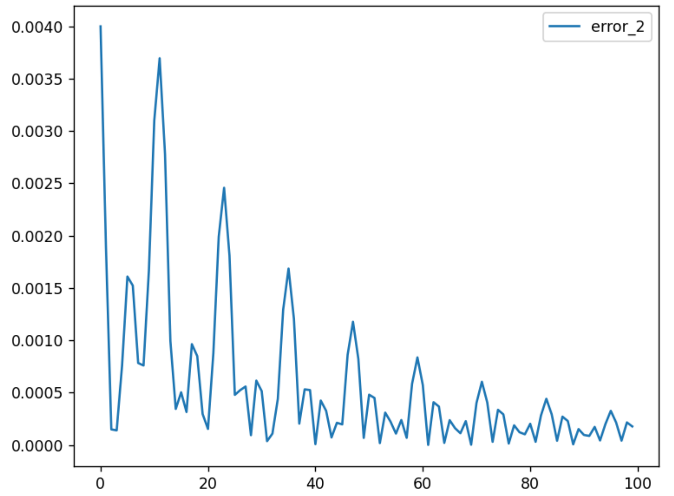
- Загальна модель





- Імпульс





Можемо помітити, що оригінальні значення моделі та відновлені регресією в обох випадках досить близькі, з незначними похибками, отже можна переходити до експериментів відтворення з моделлю на зашумлених даних.

Завдання 2

Додамо до нашого сигналу $y(t)$ деяку похибку:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \xi_y(t)$$

де $y(t)$ – точні значення вихідної змінної, а $\bar{y}(t)$ за наявності похибок вимірювань, $\xi(t)$ – випадковий шум, що додається до точного значення. Шум буде випадковим типу білого шуму,але обмежений умовою

$$\left|\xi(t)\right| \le \varepsilon, \tag{12}$$

де ε – мала величина, тобто $\xi(t)$ належить інтервалу

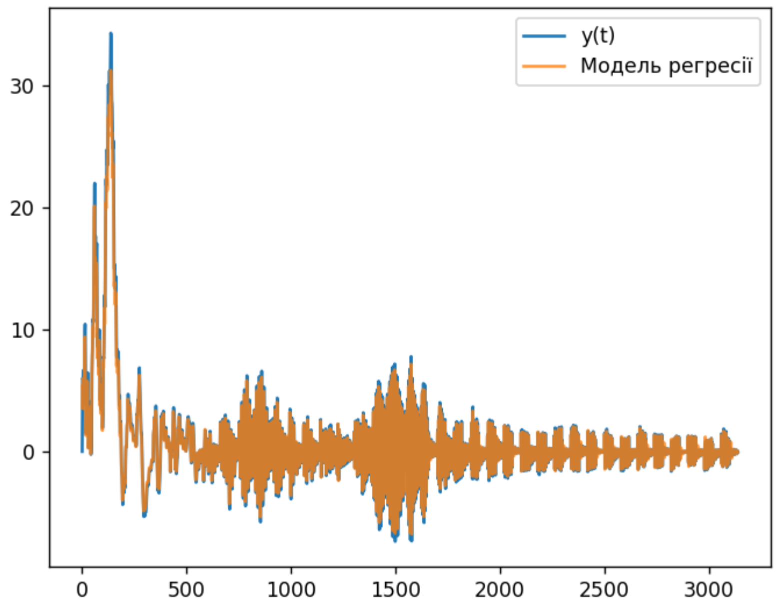
$$-\varepsilon \le \xi(t) \le \varepsilon.$$

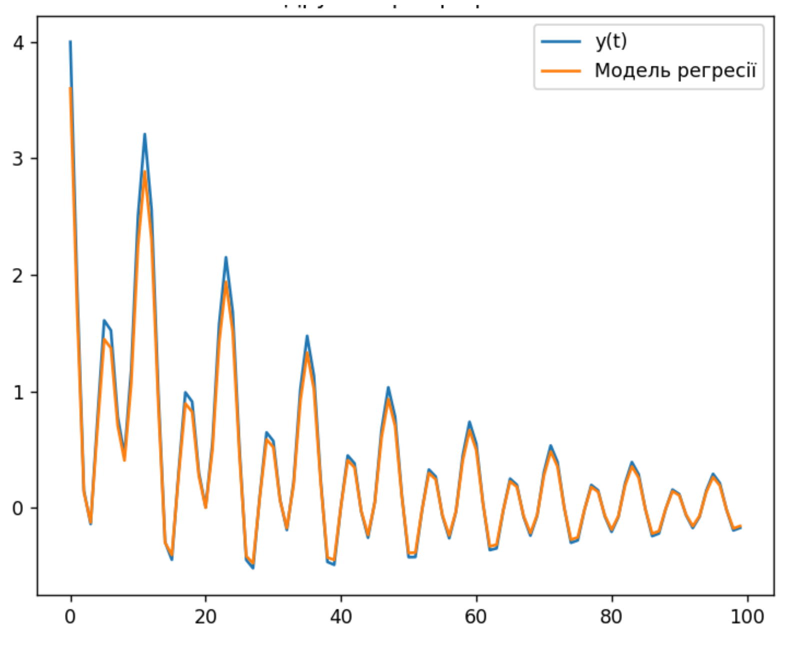
В якості шуму беремо рівномірно розподілені на інтервалі [−ε, ε] випадкові числа.

Значення для похибок будемо розглядати на інтервалі

$$\varepsilon \in \left[10^{-9}, 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\right].$$

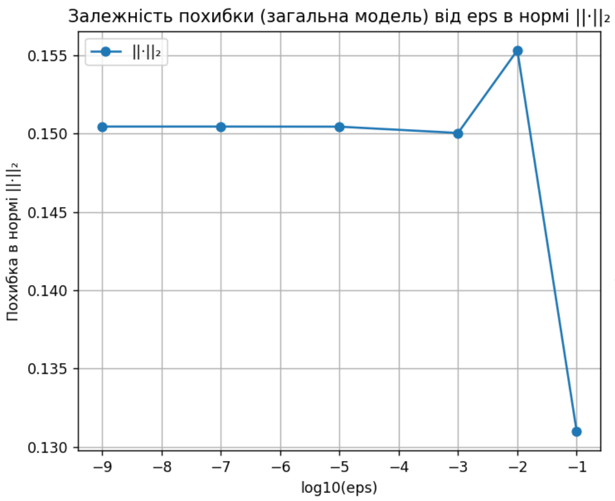
Застосовуємо регресію на зашумлених даних по інтервалу ε (6 разів)

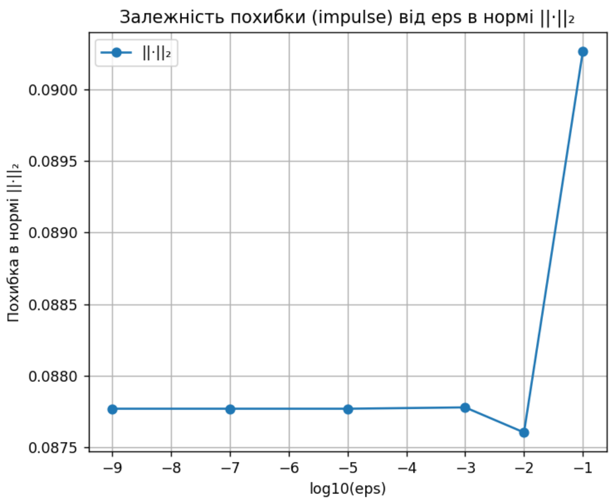


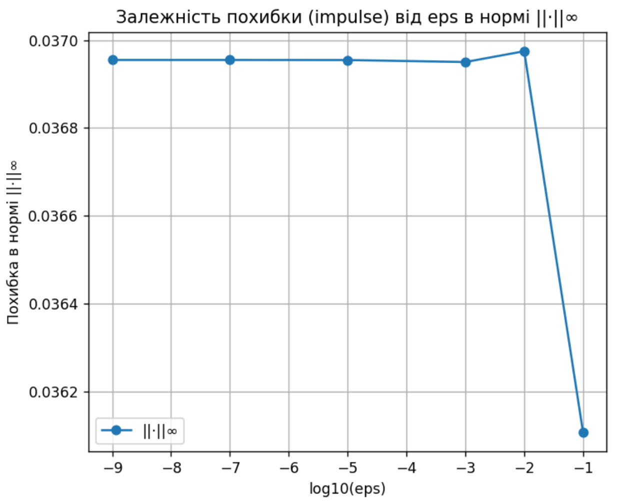


...

Якість оцінювання покажемо у нормах $\|*\|_2$, $\|*\|_\infty$ на графіках та аналітично:







Аналітичні результати вимірювання похибок на інтервалі ε:

```
Результати для загальної моделі:
eps = 1.0e-09: ||·||₂ = 0.1504, ||·||∞ = 0.1098
eps = 1.0e-07: ||·||₂ = 0.1504, ||·||∞ = 0.1098
eps = 1.0e-05: ||·||₂ = 0.1504, ||·||∞ = 0.1098
eps = 1.0e-03: ||·||₂ = 0.1500, ||·||∞ = 0.1095
eps = 1.0e-02: ||·||₂ = 0.1553, ||·||∞ = 0.1008
eps = 1.0e-01: ||·||₂ = 0.1310, ||·||∞ = 0.0902

Результати для impulse:
eps = 1.0e-09: ||·||₂ = 0.0878, ||·||∞ = 0.0370
eps = 1.0e-07: ||·||₂ = 0.0878, ||·||∞ = 0.0370
eps = 1.0e-05: ||·||₂ = 0.0878, ||·||∞ = 0.0370
eps = 1.0e-03: ||·||₂ = 0.0878, ||·||∞ = 0.0370
eps = 1.0e-02: ||·||₂ = 0.0876, ||·||∞ = 0.0370
eps = 1.0e-01: ||·||₂ = 0.0903, ||·||∞ = 0.0361
```

Висновок: Отримана модель в класі регресій має доволі непогану точність. При більш якісному підборі параметрів δ, u , чи збільшенні розмірності n (наприклад n=9) класу регресій точність можна суттєво підвищити.

Можемо помітити, що моделі навіть з деякими похибками дають дуже задовільний результат на імпульсах при відтворенні регресією. Для випадкової моделі б) з першої роботи, динаміка проведених експериментів дає аналогічний результат до моделі точних значень а), продемонстрованій тут.