

Introduction

Un exemple en logique des propositions

Un vol a été commis. A, B et C ont été appréhendés.
Les faits suivants sont affirmés par la police

Un exemple en logique des propositions

Un vol a été commis. A, B et C ont été appréhendés.
Les faits suivants sont affirmés par la police

- 1 Nul autre que A, B ou C ne peut être impliqué

Un exemple en logique des propositions

Un vol a été commis. A, B et C ont été appréhendés.
Les faits suivants sont affirmés par la police

- ① Nul autre que A, B ou C ne peut être impliqué
- ② A ne travaille jamais sans un complice

Un exemple en logique des propositions

Un vol a été commis. A, B et C ont été appréhendés.
Les faits suivants sont affirmés par la police

- ① Nul autre que A, B ou C ne peut être impliqué
- ② A ne travaille jamais sans un complice
- ③ C est innocent

Un exemple en logique des propositions

Un vol a été commis. A, B et C ont été appréhendés.
Les faits suivants sont affirmés par la police

- ① Nul autre que A, B ou C ne peut être impliqué
- ② A ne travaille jamais sans un complice
- ③ C est innocent

Que conclure ?

Premier problème d'expressivité



Premier problème d'expressivité



$A =_{def}$ Tout étudiant possède un bac



Premier problème d'expressivité

- $A =_{def}$ Tout étudiant possède un bac
- $B =_{def}$ Pierre est un étudiant

•

Premier problème d'expressivité

- - $A =_{def}$ Tout étudiant possède un bac
 - $B =_{def}$ Pierre est un étudiant
 - $C =_{def}$ Pierre possède un bac
-

Premier problème d'expressivité

- - $A =_{def}$ Tout étudiant possède un bac
 - $B =_{def}$ Pierre est un étudiant
 - $C =_{def}$ Pierre possède un bac
- Comment avoir $\{A, B\} \models C$

Premier problème d'expressivité

- - $A_{Pierre} =_{def}$ Si Pierre est un étudiant alors Pierre possède un bac
 - $B =_{def}$ Pierre est un étudiant
 - $C =_{def}$ Pierre possède un bac
- On a bien $\{A_{Pierre}, B\} \models C$

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile
- Emile est le pote à Denis

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile
- Emile est le pote à Denis
- Denis est le pote à Charles

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile
- Emile est le pote à Denis
- Denis est le pote à Charles
- Charles est le pote à Bernard
- Bernard est le pote à Albert

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile
- Emile est le pote à Denis
- Denis est le pote à Charles
- Charles est le pote à Bernard
- Bernard est le pote à Albert

$$pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$$

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis
- Denis est le pote à Charles
- Charles est le pote à Bernard
- Bernard est le pote à Albert
- $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles
- Charles est le pote à Bernard
- Bernard est le pote à Albert
- $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles $C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$
- Charles est le pote à Bernard
- Bernard est le pote à Albert
- $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles $C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$
- Charles est le pote à Bernard $B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$
- Bernard est le pote à Albert
- $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles $C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$
- Charles est le pote à Bernard $B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$
- Bernard est le pote à Albert $A_{coup} \wedge pote_{AB} \rightarrow B_{coup}$
 $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable $\neg F_{coup}$
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles $C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$
- Charles est le pote à Bernard $B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$
- Bernard est le pote à Albert $A_{coup} \wedge pote_{AB} \rightarrow B_{coup}$
 $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable $\neg F_{coup}$
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles $C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$
- Charles est le pote à Bernard $B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$
- Bernard est le pote à Albert $A_{coup} \wedge pote_{AB} \rightarrow B_{coup}$
 $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

$$\models \neg A_{coup}$$

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable $\neg F_{coup}$
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles $C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$
- Charles est le pote à Bernard $B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$
- Bernard est le pote à Albert $A_{coup} \wedge pote_{AB} \rightarrow B_{coup}$
 $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable

$\models \neg A_{coup}$ par résolution

Un dernier exemple

en logique des propositions.

- François n'est pas coupable $\neg F_{coup}$
- François est le pote à Emile $E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$
- Emile est le pote à Denis $D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$
- Denis est le pote à Charles $C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$
- Charles est le pote à Bernard $B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$
- Bernard est le pote à Albert $A_{coup} \wedge pote_{AB} \rightarrow B_{coup}$
 $pote_{FG} \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB}$
- le pote à un coupable est coupable
- Donc Albert n'est pas coupable $\models \neg A_{coup}$ par résolution

Un dernier exemple

modélisation paramétrée.

- François n'est pas coupable
- François est pote à Emile
- Emile est pote à Denis
- Denis est pote à Charles
- Charles est pote à Bernard
- Bernard est pote à Albert

Un dernier exemple

modélisation paramétrée.

- François n'est pas coupable
- François est pote à Emile
- Emile est pote à Denis
- Denis est pote à Charles
- Charles est pote à Bernard
- Bernard est pote à Albert

$$Pote(F, E) \wedge Pote(E, D) \wedge Pote(D, C) \wedge Pote(C, B) \wedge Pote(B, A)$$

Un dernier exemple

modélisation paramétrée.

- François n'est pas coupable
 - François est pote à Emile
 - Emile est pote à Denis
 - Denis est pote à Charles
 - Charles est pote à Bernard
 - Bernard est pote à Albert
- $$Pote(F, E) \wedge Pote(E, D) \wedge Pote(D, C) \wedge Pote(C, B) \wedge Pote(B, A)$$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

modélisation paramétrée.

- François n'est pas coupable
- François est pote à Emile $Coup(E) \wedge Pote(E, F) \rightarrow Coup(F)$
- Emile est pote à Denis $Coup(D) \wedge Pote(D, E) \rightarrow Coup(E)$
- Denis est pote à Charles $Coup(C) \wedge Pote(C, D) \rightarrow Coup(D)$
- Charles est pote à Bernard $Coup(B) \wedge Pote(B, C) \rightarrow Coup(C)$
- Bernard est pote à Albert $Coup(A) \wedge Pote(A, B) \rightarrow Coup(B)$
 $Pote(F, E) \wedge Pote(E, D) \wedge Pote(D, C) \wedge Pote(C, B) \wedge Pote(B, A)$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

modélisation paramétrée.

- François n'est pas coupable $\neg \text{Coup}(F)$
- François est pote à Emile $\text{Coup}(E) \wedge \text{Pote}(E, F) \rightarrow \text{Coup}(F)$
- Emile est pote à Denis $\text{Coup}(D) \wedge \text{Pote}(D, E) \rightarrow \text{Coup}(E)$
- Denis est pote à Charles $\text{Coup}(C) \wedge \text{Pote}(C, D) \rightarrow \text{Coup}(D)$
- Charles est pote à Bernard $\text{Coup}(B) \wedge \text{Pote}(B, C) \rightarrow \text{Coup}(C)$
- Bernard est pote à Albert $\text{Coup}(A) \wedge \text{Pote}(A, B) \rightarrow \text{Coup}(B)$
 $\text{Pote}(F, E) \wedge \text{Pote}(E, D) \wedge \text{Pote}(D, C) \wedge \text{Pote}(C, B) \wedge \text{Pote}(B, A)$
- le pote à un coupable est coupable

Un dernier exemple

modélisation paramétrée.

- François n'est pas coupable $\neg \text{Coup}(F)$
- François est pote à Emile $\text{Coup}(E) \wedge \text{Pote}(E, F) \rightarrow \text{Coup}(F)$
- Emile est pote à Denis $\text{Coup}(D) \wedge \text{Pote}(D, E) \rightarrow \text{Coup}(E)$
- Denis est pote à Charles $\text{Coup}(C) \wedge \text{Pote}(C, D) \rightarrow \text{Coup}(D)$
- Charles est pote à Bernard $\text{Coup}(B) \wedge \text{Pote}(B, C) \rightarrow \text{Coup}(C)$
- Bernard est pote à Albert $\text{Coup}(A) \wedge \text{Pote}(A, B) \rightarrow \text{Coup}(B)$
 $\text{Pote}(F, E) \wedge \text{Pote}(E, D) \wedge \text{Pote}(D, C) \wedge \text{Pote}(C, B) \wedge \text{Pote}(B, A)$
- le pote à un coupable est coupable

$\models \neg \text{Coup}(A)$ par résolution

Un dernier exemple

modélisation paramétrée.

- François n'est pas coupable $\neg \text{Coup}(F)$
- François est pote à Emile $\text{Coup}(E) \wedge \text{Pote}(E, F) \rightarrow \text{Coup}(F)$
- Emile est pote à Denis $\text{Coup}(D) \wedge \text{Pote}(D, E) \rightarrow \text{Coup}(E)$
- Denis est pote à Charles $\text{Coup}(C) \wedge \text{Pote}(C, D) \rightarrow \text{Coup}(D)$
- Charles est pote à Bernard $\text{Coup}(B) \wedge \text{Pote}(B, C) \rightarrow \text{Coup}(C)$
- Bernard est pote à Albert $\text{Coup}(A) \wedge \text{Pote}(A, B) \rightarrow \text{Coup}(B)$
 $\text{Pote}(F, E) \wedge \text{Pote}(E, D) \wedge \text{Pote}(D, C) \wedge \text{Pote}(C, B) \wedge \text{Pote}(B, A)$
- le pote à un coupable est coupable
- Donc Albert n'est pas coupable $\models \neg \text{Coup}(A)$ par résolution

Un dernier exemple

comparaison des deux modélisations.

$$\neg C_F$$

$$pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB} \\ \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE}$$

$$A_{coup} \wedge pote_{AB} \rightarrow B_{coup}$$

$$B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$$

$$C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$$

$$D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$$

$$E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$$

$$\models \neg A_{coup}$$

$$\neg Coup(F)$$

$$Pote(D, C) \wedge Pote(C, B) \wedge Pote(B, A) \\ \wedge Pote(E, D) \wedge Pote(F, E)$$

$$Coup(A) \wedge Pote(A, B) \rightarrow Coup(B)$$

$$Coup(B) \wedge Pote(B, C) \rightarrow Coup(C)$$

$$Coup(C) \wedge Pote(C, D) \rightarrow Coup(D)$$

$$Coup(D) \wedge Pote(D, E) \rightarrow Coup(E)$$

$$Coup(E) \wedge Pote(E, F) \rightarrow Coup(F)$$

$$\models \neg Coup(A)$$

Un dernier exemple

comparaison des deux modélisations.

$$\neg C_F$$

$$pote_{CD} \wedge pote_{BC} \wedge pote_{AB} \\ \wedge pote_{EF} \wedge pote_{DE} \wedge pote_{FG}$$

$$A_{coup} \wedge pote_{AB} \rightarrow B_{coup}$$

$$B_{coup} \wedge pote_{BC} \rightarrow C_{coup}$$

$$C_{coup} \wedge pote_{CD} \rightarrow D_{coup}$$

$$D_{coup} \wedge pote_{DE} \rightarrow E_{coup}$$

$$E_{coup} \wedge pote_{EF} \rightarrow F_{coup}$$

$$\models \neg A_{coup}$$

$$\neg Coup(F)$$

$$Pote(D, C) \wedge Pote(C, B) \wedge Pote(B, A) \\ \wedge Pote(E, D) \wedge Pote(F, E) \wedge Pote(G, F)$$

$$Coup(A) \wedge Pote(A, B) \rightarrow Coup(B)$$

$$Coup(B) \wedge Pote(B, C) \rightarrow Coup(C)$$

$$Coup(C) \wedge Pote(C, D) \rightarrow Coup(D)$$

$$Coup(D) \wedge Pote(D, E) \rightarrow Coup(E)$$

$$Coup(E) \wedge Pote(E, F) \rightarrow Coup(F)$$

$$\models \neg Coup(A)$$

R. Smullyan “le livre qui rend fou”

R. Smullyan “le livre qui rend fou”

*100 hommes politiques se réunissent pour constituer un nouveau parti.
Sachant que*

① *parmi eux il y a au moins un homme honnête*

②

chacun d’eux est soit un homme honnête, soit une franche canaille

③ *chaque fois qu’on prend un couple de ces hommes,
un au moins est malhonnête*

combien d’entre eux sont honnêtes et combien sont des canailles ?

R. Smullyan “le livre qui rend fou”

*100 hommes politiques se réunissent pour constituer un nouveau parti.
Sachant que*

① *parmi eux il y a au moins un homme honnête*

②

chacun d'eux est soit un homme honnête, soit une franche canaille

③ *chaque fois qu'on prend un couple de ces hommes,
un au moins est malhonnête*

combien d'entre eux sont honnêtes et combien sont des canailles ?

H_i sera la proposition : l'homme politique numéro i est honnête

R. Smullyan “le livre qui rend fou”

*100 hommes politiques se réunissent pour constituer un nouveau parti.
Sachant que*

① *parmi eux il y a au moins un homme honnête*

②

chacun d'eux est soit un homme honnête, soit une franche canaille

③ *chaque fois qu'on prend un couple de ces hommes,
un au moins est malhonnête*

combien d'entre eux sont honnêtes et combien sont des canailles ?

H_i sera la proposition : l'homme politique numéro i est honnête
On va s'intéresser à ce problème avec seulement 3 hommes politiques.

R. Smullyan “le livre qui rend fou”

*100 hommes politiques se réunissent pour constituer un nouveau parti.
Sachant que*

- ① *parmi eux il y a au moins un homme honnête*
- ② *chacun d'eux est soit un homme honnête, soit une franche canaille*
- ③ *chaque fois qu'on prend un couple de ces hommes,
un au moins est malhonnête*

combien d'entre eux sont honnêtes et combien sont des canailles ?

H_i sera la proposition : l'homme politique numéro i est honnête
On va s'intéresser à ce problème avec seulement 3 hommes politiques.
Nos atomes sont alors H_1 , H_2 et H_3

R. Smullyan “le livre qui rend fou”

*100 hommes politiques se réunissent pour constituer un nouveau parti.
Sachant que*

- ❶ *parmi eux il y a au moins un homme honnête*
- ❷ *chacun d'eux est soit un homme honnête, soit une franche canaille*
- ❸ *chaque fois qu'on prend un couple de ces hommes,
un au moins est malhonnête*

combien d'entre eux sont honnêtes et combien sont des canailles ?

H_i sera la proposition : l'homme politique numéro i est honnête

On va s'intéresser à ce problème avec seulement 3 hommes politiques.

Nos atomes sont alors H_1 , H_2 et H_3 et nos hypothèses :

- $\mathcal{H}_a : H_1 \vee H_2 \vee H_3$
- $\mathcal{H}_b : \neg H_1 \vee \neg H_2$
- $\mathcal{H}_c : \neg H_1 \vee \neg H_3$
- $\mathcal{H}_d : \neg H_2 \vee \neg H_3$