**TD 0 : Logique des propositions**

# Interprétations, conséquence logique

**Question 1**
Soit $F$ la formule $((p \leftrightarrow r) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

Donnez 2 interprétations $I_1$ et$I_2$ de l'ensemble des symboles propositionnels $\{p,\ q,\ r\}$ telles que

- $I_1$ soit un modèle de $F$ (c'est-à-dire $Val(F, I_1) =$ vrai)
- et $I_2$ soit un contre-modèle de $F$ (c'est-à-dire $Val(F, I_2) =$ faux).

**Question 2**
En utilisant les interprétations, indiquez pour chacune des formules suivantes si elle est insatisfiable, valide ou contingente :

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow q$
- $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg p$

**Question 3**
En utilisant les interprétations, vérifiez si :

- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ est équivalente à $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ est équivalente à $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

**Question 4**
En utilisant le formulaire des équivalences (c'est-à-dire en procédant par réécritures équivalentes) vérifiez que

- $A \leftrightarrow B$ est équivalente à $\neg A \leftrightarrow \neg B$
- $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$ est équivalente à $p \leftrightarrow q$

**Question 5**
Les conséquences logiques suivantes sont-elles vérifiées ?

- $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow s),\ (s \leftrightarrow p),\ (p \leftrightarrow q) \models q$
- $(p \leftrightarrow q),\ (p \leftrightarrow r) \models (r \leftrightarrow q)$

## Modélisation

**Question 6**
Modéliser les phrases suivantes :

1. Pour ouvrir cette porte, **il faut** une clé ou un couteau.
2. Si ta fille n'est pas vaccinée contre le tétanos,
   **il suffit** qu'elle se coupe pour qu'elle risque de l'attraper.
3. Il est **nécessaire** d'avoir 18 ans pour conduire, mais ça ne **suffit** pas.
4. Un vélo ne possède pas d'amortisseur à moins qu'il s'agisse d'un VTT.
5. Pour ce menu, vous pouvez prendre soit une entrée et un plat, soit un plat et un dessert.

**Question 7**
On juge un homme accusé de cambriolage.
Le procureur dit : "*s'il a commis ce vol, il avait forcément un complice*".
L'avocat de l'accusé répond : "*c'est complètement faux !*".
Pourquoi est-ce la pire chose que pouvait dire l'avocat à propos de son client ?

**Question 8**
Modéliser les raisonnements ci-dessous et déterminer s'ils correspondent à un raisonnement déductif correct.

1. Je ne vous paierai l'installation Internet que si elle marche,
   Or elle ne marche pas.
   Donc je ne vous paierai pas.
2. S'il ne lui dit pas, elle ne trouvera jamais.
   Si elle ne lui a pas posé la question, il ne le lui a pas dit.
   Or elle a trouvé.
   Donc elle lui a posé la question.
3. Il a dit que s'il faisait beau ce week-end, il irait à la plage.
   Or il ne fait pas beau.
   Il n'ira donc pas à la plage.

## Méthode de résolution

**Question 9**
Utiliser la méthode de résolution comme méthode alternative pour déterminer si les raisonnements de l'exercice précédent sont corrects.

**Question 10**
On va utiliser la méthode de résolution pour prouver que $(r \leftrightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow \neg s)$ est insatisfiable.
Obtenons d'abord une forme clausale.

1. Developper $(A \wedge B) \vee Z$
2. En déduire le développement de $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$
3. En déduire une réécriture sous forme d'une conjonction de $(r \wedge \neg s) \vee (s \wedge \neg r)$
4. Obtenir de même une réécriture sous forme d'une disjonction de $(r \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg r)$
5. Obtenir par réécriture à partir de $(r \leftrightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow \neg s)$ une formule sans $\leftrightarrow$ qui soit une conjonction de deux termes (chacun avec des $\rightarrow$)
6. Travailler ensuite le premier des deux termes :
   - Faire disparaître ces $\rightarrow$, de façon à ne plus obtenir que des disjonctions et des conjonctions de littéraux (faire disparaître le $\neg\neg$).
   - Utiliser alors la formule trouvée au (3) et éliminer les termes redondants.
7. Réécrire de même le deuxième terme.
8. En déduire les quatre clauses dans lesquelle se réécrivent $(r \leftrightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow \neg s)$

Finir par la résolution.

**Question 11** Prouver par résolution $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

## TD 1 : syntaxe et modélisation

On rappelle la définition inductive d'une fbf (formule bien formée) :

**base** les atomes (appelés aussi formules atomiques) sont des fbf

**règle** si $A$ et $B$ sont des fbf et si $x$ est une variable, alors :

— $\neg A$

— $A \circ B$ où $\circ$ est l'un des connecteurs binaires $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

— $\forall x\ A$ et $\exists x\ A$

sont des fbf.

**Question 1** (Syntaxe)

1. Dessiner l'arbre (l'arborescence) syntaxique des formules suivantes :
   **A** $= \forall x(p(x) \rightarrow \exists y q(x,y))$
   **B** $= (\forall x p(x) \rightarrow \exists y q(x,y))$
   **B'** $= (\forall z p(z) \rightarrow \exists y q(x,y))$
   **C** $= \forall x \exists y(q(x,y) \wedge \exists x \neg q(y,x))$
   **C'** $= \forall x \exists y(q(x,y) \wedge \exists z \neg q(y,z))$

2. Comment voit-on sur l'arborescence syntaxique si une occurrence de variable est libre ou liée ?
   Pour chacune des 3 formules ci-dessus :
   — Quelles sont les variables liées ? libres ? à la fois libres et liées ?
   — La formule est-elle fermée ?
3. Effectuer les renommages nécessaires pour avoir des formules "propres", c'est-à-dire dans lesquelles aucune variable n'est à la fois libre et liée, et toute variable liée est dans la portée d'exactement un quantificateur la concernant.

Par la suite, on s'autorisera à ne mettre que les parenthèses indispensables :
par exemple, dans cet exercice, les parenthèses des formules **A** et **C** sont nécessaires ;
par contre, on peut supprimer les ( ) externes dans la formule **B**.

**Question 2** (syntaxe)
Utiliser la définition inductive d'une fbf pour définir la profondeur d'une fbf, qui est également celle de son arbre syntaxique.
(Variantes : calculer le nombre de connecteurs d'une fbf, de sous-formules, ...)

**Question 3** (modélisation)
En utilisant

- les constantes s pour Serge, t pour Tobby
- les symboles de relation
  - A(x,y) pour "x aime y",
  - C(x) pour "x est un chien",
  - D(x) pour "x est un animal domestique",
  - E(x) pour "x est un enfant",
  - O(x) pour "x est un oiseau"
  - et P(x,y) pour "x a peur de y",

formaliser les énoncés suivants :

1. Les chiens et les oiseaux sont des animaux domestiques
2. Tobby est un chien qui aime les enfants
3. Les oiseaux n'aiment pas les chiens
4. Serge aime tous les animaux domestiques sauf les chiens
5. Tous les enfants n'ont pas peur des chiens
6. Certains chiens aiment les enfants
7. Certains chiens aiment les enfants et réciproquement
8. Les enfants aiment certains chiens

**Question 4** (modélisation)
Formaliser la phrase
"il n'est pas nécessaire d'être un bon musicien pour être un bon danseur".

**Question 5** (modélisation)
Formaliser l'énoncé suivant :

"Si quelqu'un résoud ce problème, alors tout mathématicien le résoud.
Cabot est mathématicien et ne résoud pas ce problème."

D'après vous, peut-on en conclure que personne ne résoud ce problème ? Nous verrons plus tard comment formaliser le raisonnement associé.

## TD 2 : Sémantique

*On s'intéresse dans ce TD à l'*évaluation de formules de la logique du premier ordre *dans un certain "monde", c'est-à-dire selon une certaine interprétation du langage logique.*

**Question 1** On considère le langage logique $\mathcal{L} = (\{a\}, \{p\})$, c'est-à-dire ayant pour seule constante $a$ et pour seul prédicat $p$. $p$ est unaire.

1. Trouver différentes interprétations de ce langage telles que (et si possible) :
   — la formule $p(a)$ soit vraie et la formule $\exists x p(x)$ soit vraie
   — la formule $p(a)$ soit fausse et la formule $\exists x p(x)$ soit vraie
   — la formule $p(a)$ soit vraie et la formule $\exists x p(x)$ soit fausse
   — les deux formules soient fausses
2. Pour chacune de ces interprétations, quelle est la valeur de :
   — $\exists x p(x) \rightarrow p(a)$
   — $\forall x p(x)$

   Justifier votre réponse en « collant » à la définition de $V(F, I)$, (la valeur d'une formule $F$ pour une interprétation $I$.)
3. Que dire de la formule $p(a) \rightarrow \exists x p(x)$ ? Prouvez votre réponse.

**Question 2** On adopte les notations suivantes :

— $P(x)$ signifie que la personne désignée par $x$ a réussi son examen
— $Q(x, y)$ signifie que la personne désignée par $x$ a posé des questions à celle désignée par $y$ *(pendant ses révisions ...)*

1. Traduire en formules les énoncés suivants :
   — Quelqu'un a raté l'examen et n'a été questionné par personne
   — Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont posé des questions à quelqu'un
   — Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont été questionnés par quelqu'un
   — Personne n'a posé de question à tous ceux qui ont réussi à l'examen
   — Tous ceux qui ont posé des questions à quelqu'un, ont posé des questions à quelqu'un qui a réussi l'examen.

2. Soit l'interprétation ayant pour domaine {Anatole, Boris, Catarina, Diana}.
   Dans cette interprétation seuls Boris et Catarina ont réussi l'examen.
   Les garçons (Anatole et Boris) ont posé des questions aux filles (Catarina et Diana), Diana a posé des questions à Boris, Catarina à Diana et ce sont les seuls cas d'entraide.
   On demande de donner la valeur dans cette interprétation des formules construites à la question précédente.
   `Indication` :
   pour faciliter le calcul de la valeur des formules, on suggère de dessiner l'interprétation en entourant les éléments du domaine qui ont réussi leurs examens, et en mettant une flèche de $x$ vers $y$ si $x$ a posé des questions à $y$.

**Question 3**
On considère un langage logique $\mathcal{L}$ avec deux prédicats unaires $p$ et $q$,
et sur ce langage les formules

**A** $=_{def} \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$

**B** $=_{def} \forall x\ (p(x) \vee q(x))$

**C** $=_{def} \exists x\ (p(x) \wedge q(x))$

**D** $=_{def} \exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$

**E** $=_{def} \forall x\ (\ p(x) \rightarrow\ q(x))$

**F** $=_{def} \forall x\ p(x) \rightarrow \forall x q(x)$

1. Soit sur un domaine $\mathcal{D} = \{0,\ 1\}$ l'interprétation $I$ du langage $\mathcal{L}$

   $$I(p) = \{0\} \text{ et } I(q) = \{1\}.$$

   *0 et 1 désignent ici les éléments du domaine,*
   *et n'ont rien à voir avec "vrai" et "faux", on aurait aussi bien pu les appeler $d_1$ et $d_2$*

   Évaluer dans cette interprétation les formules **A** et **B** (resp. **C** et **D**) (resp. **E** et **F**).
2. Montrer que tout modèle de **A** (resp. **C**) (resp. **E**) est un modèle de **B** (resp. **D**) (resp. **F**).

**Question 4** On considère un langage du premier ordre contenant deux prédicats unaires $p$ et $q$, et deux formules **A** et **B** définies sur ce langage :

**A** $=_{def} (\forall x\ p(x)) \rightarrow (\forall x\ q(x))$

**B** $=_{def} \forall x\ (p(x) \rightarrow q(x))$

On se propose de caractériser les interprétations dans lesquelles ces formules sont vraies autrement dit les modèles de ces formules.
Soit $I$ une interprétation de domaine $D$.

1. Un exemple :
   si $D = \{1, 2, 3\}$ et $I(P) = \{1, 2\}$, quelles valeurs peut prendre $I(Q)$ pour que I soit un modèle de **A** ? Même question pour **B**.

2. On considère maintenant que $D$ est quelconque
   (mais non vide car un domaine ne peut pas être vide).
   Quelle condition doivent vérifier $I(P)$ et $I(Q)$ pour que $I$ soit un modèle de **A** ?
   Même question pour **B**.
3. Mêmes questions pour les formules

   **A'** $=_{def} (\exists x\ p(x)) \rightarrow (\exists x\ q(x))$

   **B'** $=_{def} \exists x\ (p(x) \rightarrow q(x))$
4. Mêmes questions pour les formules

   **A"** $=_{def} (\exists x\ p(x)) \rightarrow (\forall x\ q(x))$

   **B"** $=_{def} (\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists x\ q(x))$

**Question 5**
On considère un langage du premier ordre contenant deux prédicats unaires $p$ et $q$.

Trouver une formule logique $\mathcal{F}$ telle qu'une interprétation $\mathcal{I}$ sur un domaine $\mathcal{D}$ soit un modèle de $\mathcal{F}$ si et seulement si $\mathcal{I}$ vérifie

1. $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{D}$ et $\mathcal{I}_1(q) \neq \emptyset$
2. $\mathcal{I}_2(p) \cap \mathcal{I}_2(q) = \emptyset$ et $\mathcal{I}_2(p) \cup \mathcal{I}_2(q) = \mathcal{D}$
3. $\mathcal{I}_3(p) \cap \mathcal{I}_3(q) = \emptyset$
4. $\mathcal{I}_4(p) \subseteq \mathcal{I}_4(q)$

.

**Question 6**
On considère un langage du premier ordre contenant trois prédicats unaires $p,\ q$ et $r$.

Caractériser les modèles des formules

**A** $\forall x(p(x) \to (q(x) \to r(x)))$
**B** $\forall x((p(x) \to q(x)) \to r(x))$
**C** $\exists x(p(x) \to (q(x) \to r(x)))$
**D** $\exists x((p(x) \to q(x)) \to r(x))$

**Question 7**
On considère un langage du premier ordre contenant trois prédicats unaires $p,\ q$ et $r$.

Trouver une formule logique $\mathcal{F}$ telle qu'une interprétation $\mathcal{I}$ sur un domaine $\mathcal{D}$ soit un modèle de $\mathcal{F}$ si et seulement si $\mathcal{I}$ vérifie $\mathcal{I}(p) \neq \mathcal{D}$ ou $\mathcal{I}(q) \neq \mathcal{D}$ ou $\mathcal{I}(r) = \mathcal{D}$

## TD 3 : Conséquence logique et équivalence logique

**Question 1 Questions de cours**

1. Soit $A$ une fbf. Compléter les phrases ci-dessous par une propriété sur $\neg A$ :
   - $A$ est **satisfiable** si et seulement si $\neg A$ est (ou n'est pas) ...
   - $A$ est **contigente** si et seulement si $\neg A$ ...
   - $A$ est **valide** si et seulement si $\neg A$ ...
   - $A$ est **insatisfiable** si et seulement si $\neg A$ ...
2. On considère le raisonnement suivant : "*de* $H_1, \ldots$*et* $H_n$*, je conclus* $C$", où les $H_i$ et $C$ sont des fbf.
   Donner différentes façons de montrer que ce raisonnement est correct ou est incorrect, en utilisant la notion d'interprétation (et de modèle).

**Question 2** Montrez que le raisonnement suivant est incorrect
(autrement dit que la conclusion n'est pas conséquence logique des hypothèses) :

*Hypothèses*

1. $\exists x P(x)$
2. $\exists x Q(x)$
3. $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow R(x))$

*Conclusion*

$\exists x R(x)$

**Question 3** Montrer que les paires de formules suivantes ne sont pas logiquement équivalentes. L'une d'elle est-elle conséquence logique de l'autre ? Laquelle ? Justifier.

1. $\exists x P(x)$ et $\forall x P(x)$
2. $\exists x \forall y P(x,y)$ et $\forall y \exists x P(x,y)$

**Question 4** Soients les formules

- $\mathcal{F}_1$ : $(\forall x\ P(x) \rightarrow (\forall x\ Q(x) \rightarrow \exists x\ R(x)))$
- $\mathcal{F}_2$ : $((\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \exists x\ R(x))$
- $\mathcal{G}_1$ : $\exists y\ \exists z\ \exists t\ (P(y) \rightarrow (Q(z) \rightarrow R(t)))$
- $\mathcal{G}_2$ : $\forall y\ \exists z\ \exists t\ ((P(y) \rightarrow Q(z)) \rightarrow R(t))$

Chacune des deux formules $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est logiquement équivalente à une formule $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$. Laquelle ? Justifier.

**Question 5**
Soient les cinq expressions logiques suivantes :

- $E_1 = \forall x \; P(x,x)$
- $E_2 = \forall x \forall y \; [P(x,y) \rightarrow P(y,x)]$
- $E_3 = \forall x \forall y \forall z \; [\{P(x,y) \wedge P(y,z)\} \rightarrow P(x,z)]$
- $E_4 = \forall x \forall y \; [P(x,y) \vee P(y,x)]$
- $E_5 = \forall x \exists y \; P(x,y)$

1. trouver deux énoncés différents $E_a$ et $E_b$ parmi ces cinq tels que $E_a \models E_b$
2. trouver deux énoncés $E_c$ et $E_d$ parmi ces cinq tels que $E_c,\ E_d \models$ chacun des énoncés.
3. Montrer que $E_2$ n'est pas conséquence logique de $\{E_1,\ E_3,\ E_4,\ E_5\}$
4. Montrer que $E_4$ n'est pas conséquence logique de $\{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_5\}$
5. Montrer que $E_3$ n'est pas conséquence logique de $\{E_1,\ E_2,\ E_5\}$

**Question 6**
"*Si quelqu'un résout ce problème, alors tout mathématicien le résout.*
*Cabot est mathématicien et ne résout pas ce problème.*"
Peut-on en conclure que personne ne résout ce problème ?
Prouvez votre réponse.

## TD 4 : Manipulation syntaxique

En utilisant le théorème des tautologies, et le théorème sur la relation entre $\leftrightarrow$ et $\equiv$, prouver la validité des formules suivantes

1. $[(\forall x\ P(x) \rightarrow \forall y\ Q(y,y)) \vee R(z,t)] \leftrightarrow [R(z,t) \vee \neg\forall x\ P(x) \vee \forall y\ Q(y,y)]$

2. $[(\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(y) \rightarrow R(x,y)))) \rightarrow (\exists z\ (Q(z) \rightarrow S(r,y,z)) \vee \neg\exists z\ Q(z))]$

$$\leftrightarrow$$
$$\{[(\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(y) \rightarrow R(x,y)))) \rightarrow \exists z\ (Q(z) \rightarrow S(r,y,z))]$$
$$\vee$$
$$[(\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(y) \rightarrow R(x,y))) \rightarrow \neg\exists z\ Q(z))]\}$$

Trouver des formules logiquement équivalentes aux formules suivantes, mais où les quantificateurs sont en tête de la formule (on appelle de telles formules des formules *prenexes*).

3. $A \rightarrow \exists x\ P(x)$

4. $A \rightarrow \forall x\ P(x)$

5. $(\forall x\ P(x)) \rightarrow \forall x\ Q(x)$

6. $(\exists x\ P(x)) \rightarrow \exists x\ Q(x)$

7. $(\forall x\ P(x)) \rightarrow \exists x\ Q(x)$

8. $(\exists x\ P(x)) \rightarrow \forall x\ Q(x)$

9. $\forall x\ (P(x) \rightarrow \forall y\ Q(x,y))$

10. $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y))$

11. $\exists x\ (P(x) \rightarrow \forall y\ Q(x,y))$

12. $\exists x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y))$

## TD 5 : Les fonctions

### Exercice 1 (syntaxe des termes)

Rappelons la définition inductive des termes. Soit un langage L = (C, P, F), où C est l'ensemble des constantes, P est l'ensemble des prédicats, et F est l'ensemble des symboles de fonction d'arité non nulle (les constantes sont les fonctions d'arité 0).
L'ensemble des termes constructibles sur L, noté *termes(L)* est défini par induction de la façon suivante :
*(base)* les constantes de C et les variables appartiennent à *termes(L)*
*(règle)* si f est une fonction de F d'arité k ≥ 1, et $e_1$ … $e_k$ appartiennent à *termes(L)*
alors f(e1, …, ek) appartient à *termes(L)*.

**a -** Donner tous les parenthésages possibles du terme *fgxhay* où :

- *x* et *y* sont des variables
- *a* est une constante
- *g* et *h* sont des fonctions d'arité ≥ 1.

Dans chaque cas, dessiner l'arborescence syntaxique et donner l'arité des fonctions obtenues.

*Une façon de faire :* voir les cas possibles si *f* est unaire, binaire, ternaire, …, puis dans chacun de ces cas, les possibilités pour *g*, puis pour *h*.

**b-** Utiliser la définition ci-dessus pour définir :
(a) la *profondeur* d'un terme, qui est également celle de son arborescence syntaxique.
(b) l'*ensemble des variables* apparaissant dans un terme (on s'intéresse donc aux noms de variables, et non pas à leurs occurrences).

### Exercice 2 (évaluer une formule dans une interprétation)

Soient les formules :
1. ∃x P(f(x))
2. ∀x Q(x,f(x))
3. ∀x ∃y Q(f(x),y)
4. ∀x ∀y (Q(x,y) → Q(f(x),f(y)))
5. ∀x (P(x) → ∃y Q(f(y),x))

Soit I l'interprétation de domaine D = {0,1,2}, et le sens suivant pour les prédicats P et Q, et la fonction f :

- I(P) = {1,2}
- (x,y) appartient à I(Q) si et seulement si x < y. Autrement dit, I(Q) = {(0,1), (0,2), (1,2)}
- I(f) : I(f)(0) = 1, I(f)(1) = 2, I(f)(2) = 0. Autrement dit, I(f) = {(0,1), (1,2), (2,0)}

*Remarque : ne pas confondre l'interprétation d'un prédicat* binaire *(comme Q) qui est une* relation quelconque*, et l'interprétation d'une fonction* unaire *(comme f) qui est une* application *associant à tout élément de D un élément de D.*

Donner la valeur de chaque formule pour l'interprétation I. Pour les quatre premières formules, donner juste le résultat. Pour la dernière, détailler les calculs.

### Exercice 3 (trouver un modèle d'une formule)

$\forall x\ (P(x) \leftrightarrow P(f(x)) \wedge \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg P(x)$

Trouver un modèle pour cette formule ayant le plus petit domaine possible.

### Exercice 4 (évaluer une formule dans une interprétation)

On définit le langage suivant : $L = (C,P,F)$ où :
$C = \{a,b\}$
$P = \{p\}$, et $p$ est un prédicat d'arité 2
$F = \{f\}$, et $f$ est une fonction d'arité 2

Soient les interprétations suivantes :
**$I_1$ :**
$D_1$ est l'ensemble des entiers naturels IN
$p$ s'interprète par $\leq$, $f$ par la multiplication, $a$ par 1 et $b$ par 2.

**$I_2$ :**
$D_2$ est l'ensemble des parties de IN
$p$ s'interprète par l'inclusion (inclusion non stricte), $f$ par l'union, $a$ par IN et $b$ par $\varnothing$.

Indiquer si les formules suivantes sont vraies dans $I_1$ et $I_2$ :
$A = p(f(a, b), b)$
$B = \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow \neg\, p(y, x))$
$C = \forall x \forall y \forall z\ ((p(x, y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(f(x,y),z))$

### Exercice 5 (conséquence logique)

Soit $F1 = \forall x\ \exists y\ p(x,y)$
Soit $F2 = \forall x\ p(x,f(x))$
F1 et F2 sont-elles équivalentes ? L'une est-elle conséquence de l'autre ?
Prouvez vos réponses.

## TD 6 : Mise sous forme prenexe

Mettre les formules suivantes sous forme prenexe, avec uniquement des $\wedge$ de $\vee$ appliqués à des litéraux (donner toutes les solutions possibles).

**Question 1** $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

**Question 2** $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$

**Question 3** $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

**Question 4** $(P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow (\exists x R(x) \rightarrow \forall x S(x)\ )$

**Question 5** $\exists x \forall y (\exists z P(x, y, z) \wedge Q(x, y)) \rightarrow \exists y (\forall x P(x, y, z) \wedge \exists x Q(x, y))$

**Question 6** $(\exists x P(x) \rightarrow (\exists x R(x) \vee \forall x P(x))) \wedge \forall x \exists y (R(y) \rightarrow P(x))$

**Question 7**
$\forall x \forall y \forall z ((\exists t (T(t, x) \wedge R(t, y)) \wedge \exists t (R(t, y) \wedge R(t, z))) \rightarrow (\exists t \forall u (R(u, t) \rightarrow R(u, x) \wedge r(u, z))))$

**TD 7 : Forme clausale et skolémisation**

### Exercice 1

Soit A = $(\exists x\ \forall y\ p(x,y)) \rightarrow (\forall y\ \exists x\ p(x,y))$.
(a) Mettre A sous forme prénexe
(b) Mettre A sous forme de Skolem.

On rappelle que la forme de Skolem d'une formule est une forme clausale obtenue de la façon suivante : après avoir mis la formule sous forme prénexe, on remplace les quantificateurs existentiels par des fonctions de Skolem (nouvelles constantes ou nouvelles fonctions d'arité non nulle) en procédant de la gauche vers la droite.

### Exercice 2

(a) Mettre sous forme prénexe, puis sous forme de Skolem, la formule fermée suivante :
A = $\forall x\ \mathbf{(}\ \mathbf{(}\ q(x) \vee \exists y\ p(x,h(y))\ \mathbf{)} \longrightarrow \exists x\ \mathbf{(}p(x,x) \wedge \neg q(a)\mathbf{)}\ \mathbf{)}$, où a est une constante.

(b) Donner la liste des clauses obtenues. Utiliser les clauses obtenues pour montrer que A est satisfiable.

### Exercice 3

(a) Mettre sous forme prénexe, puis sous forme de Skolem, la formule fermée suivante :
A = $\mathbf{(}\forall x\ p(x) \wedge \exists y\ q(y)\mathbf{)} \rightarrow \mathbf{(}p(f(c)\mathbf{)} \wedge \exists z\ q(z))$, où c est une constante.

(b) Soit A' la formule obtenue à la question (a).
D'après le théorème de Skolem, A est satisfiable ssi A' est satisfiable.
Mais les deux formules ne sont pas équivalentes, comme on peut le constater ici :
- se convaincre que A est valide (l'argumentation sur les interprétations qui satisfont A est très simple).
- montrer que A' est satisfiable mais non valide (donc contingente).

(c) Trouver la forme clausale de $\neg$A et se persuader que cette forme n'est pas contingente.

## TD 8 : Résolution : unification de termes

**Conventions générales**

a, b, c … désignent des constantes
x, y, z, t, u ,v, w … des variables
f, g, h … des fonctions

**Rappel** : une substitution s'applique à des **variables** et uniquement des variables.

### Exercice 1 (unification)

On considère les atomes p(f(x),g(y)) et p(f(f(a)), g(z)).
Ces atomes sont unifiables, prouvez-le.

### Exercice 2 (comparaison d'unificateurs)

Soient les atomes p(g(y),f(x,h(x),y)) et p(x,f(g(z),w,z))

(1) Vérifier que la substitution suivante est un unificateur de ces deux atomes (autrement dit, de leurs listes de termes). Quel est le résultat de l'unification ?

$$\sigma 1 = \{ (x,g(f(a)), (y,f(a)), (w,h(g(f(a))), (z,f(a)) \}.$$

(2) Même question avec : $\sigma 2 = \{ (x,g(z)), (w,h(g(z)), (y,z) \}$

(3) L'un des unificateurs est strictement plus général que l'autre. Lequel ? Le prouver, c'est-à-dire montrer que l'on peut obtenir le plus spécifique en composant le plus général avec une substitution qui ne fait pas *que* renommer des variables.

### Exercice 3 (unification et upg)

Soit deux termes f(x,y,z) et f(x,a,x). Soient les substitutions suivantes :
$u_1$={(x,b),(y,a),(z,b)}
$u_2$={(y,a),(z,x)}
$u_3$ ={(x,y),(y,a),(z,y)}
$u_4$={(x,z),(y,a),(z,x)}

(1) Quels $u_i$ sont des unificateurs des deux termes ?
(2) Lesquels sont des upg (« unificateurs les plus généraux ») des deux termes ?
(3) Appliquer l'algorithme de Robinson, et vérifier votre réponse à (2) : puisque l'algorithme produit un upg, tout autre upg s'obtient à partir de celui-ci par simple renommage de variables.

**Exercice 4 (upg)**

Trouver, s'il en existe, un upg et le terme unifié obtenu pour les ensembles de termes suivants :
a) { f(a,x,h(x)), f(a,y,y) }
b) { g(x,g(y,z)), g(g(a,b),x), g(x,g(a,z)) }
c) { g(y,h(h(x)), g(h(a),y) }
d) { f(x,y,w), f(h(g(v,y)),g(v,w),h(a)), f(h(z),y,h(v)) }

**Exercice 5 (upg)**

Une substitution $\sigma = \{(x1,t1), \dots,(xn,tn)\}$ est idempotente si $\sigma = \sigma \circ \sigma$ (c'est-à-dire : appliquer $\sigma$ une fois ou deux fois donne le même résultat, quelle que soit l'expression à laquelle on l'applique). Soit V l'ensemble des variables apparaissant dans t1 …tn.

(1) Montrer que $\sigma$ est idempotente si et seulement si $V \cap \{x1 \dots xn\} = \emptyset$.
(2) Montrer que l'upg produit par l'algorithme de Robinson est idempotent.

## Unification de termes

Pour cette question x, y, z désignent des variables, a une constante et f, g, h sont trois symboles de fonction.

1. Les 2 termes f(x,y) et f(g(y),h(x)) sont-ils unifiables ? Si oui donnez un unificateur le plus général.
2. Mêmes questions pour les temes f(x,f(y,z)) et f(f(y,y),f(a,x))

## TD 9 : Méthode de résolution

### Exercice 1

Soient les deux fbf suivantes

$A = \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x))$

$B = \exists x\, p(x) \rightarrow \exists x\, q(x)$

Prouver A |= B par la méthode de résolution.

### Exercice 2

1. Modélisez en logique du premier ordre le raisonnement suivant :

*Certains étudiants aiment les films de Kubrick*
*Aucun étudiant n'aime les navets*
*Donc aucun film de Kubrick n'est un navet*

2. Ce raisonnement est-il correct ? Prouvez-le par la méthode de résolution.

### Exercice 3

Démontrer par la méthode de résolution et en spécifiant bien toutes les étapes de calcul que la formule ci-dessous est valide :

$$\forall y\, \exists x\, \exists z\, [\, (\, p(x) \wedge (p(y) \rightarrow r(y)) \wedge q(x)\,) \rightarrow (\, (r(z) \wedge \neg s(z)) \vee (q(z) \wedge s(z))\,)\,]$$

**Question 1**
Soient les formules :

$$F1 = \forall x \exists y (p(x) \rightarrow q(x, y))$$
$$F2 = \forall y (p(y) \rightarrow \exists u q(y, u))$$

Montrez que ces deux formules sont équivalentes **en utilisant la méthode de résolution**[1].

Précisez bien ce que vous cherchez à montrer avant d'appliquer la méthode de résolution.

**Question 2**
Décrivez le comportement de l'algorithme d'unification de Robinson sur les deux termes fonctionnels suivants $t_1$ et $t_2$, où les $x_i$ sont des variables :
$t_1 = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $t_2 = f(g(x0, x0), g(x_1, x_1), ...g(x_{n-1}, x_{n-1}))$ En particulier :

1. quel est le nombre d'itérations de l'algorithme ?
2. quelle est la profondeur maximale d'un terme construit par l'algorithme ?
3. quelle est la taille maximale d'un terme construit par l'algorithme ?

1. Il y a des façons plus simples de constater que ces formules sont équivalentes, mais on vous demande dans cet exercice d'utiliser "brutalement" la méthode de résolution.

**TD 10 : Révisions**

# 1 Forme de Skolem

On note A la formule $\forall y((s(y) \land \exists x(l(x) \land p(y,x))) \to \forall x(s(x) \to v(x,y)))$,

1. En prenant pour les prédicats s, l, p et v la sémantique suivante :
   - s(x) : x est un singe
   - l(x) : l est un livre
   - p(x,y) : x possède y
   - v(x,y) : x vénère y

   traduisez la formule A par une phrase simple en français.
2. Donnez une formule B qui est une forme de Skolem de la formule A.
3. Les formules A et B sont-elles équivalentes ? Justifiez votre réponse.
4. Si le singe Aristide possède tous les livres alors tous les singes possèdent au moins un livre.
   En utilisant les mêmes prédicats et la constante a pour désigner Aristide, modélisez cette phrase par une formule.
   Donnez-en une forme de Skolem.

# 2

Dans cet exercice, on ne vous demande pas de justifier vos réponses à la première question . Vous devez par contre justifier vos réponses aux autres questions.
On considère un langage logique L comportant un prédicat binaire p, ainsi que deux interprétations de L, que l'on note $I_1$ et $I_2$. $I_1 : D_1 = \{1, 2\}$, $I_1(\mathrm{p}) = \{(1, 2), (2, 1)\}$ $I_2 : D_2 = \{1, 2\}$, $I_2(\mathrm{p}) = \{(1, 2), (2, 2)\}$

- Donnez la valeur des formules suivantes, pour chacune des interprétations $I_1$ et $I_2$ : $A = \forall x \exists y p(x, y)$ $B = \exists y \forall x p(x, y)$
- La formule A est-elle valide ?
- La formule $(A \to B)$ est-elle valide ?
- On ajoute au langage L une constante a et une fonction unaire f. Pour chacune des deux formules suivantes C et D, et chacune des interprétations $I_1$ et $I_2$ : peut-on compléter l'interprétation en définissant le sens de f et de a de façon à ce que la formule soit vraie pour cette interprétation ? (4 cas à traiter : C avec $I_1$, C avec $I_2$, D avec $I_1$ et D avec $I_2$) $C = \forall x p(x, f(x))$ $D = \forall x p(x, a)$
- Quelles relations sémantiques (en termes d'équivalence, conséquence ou non-conséquence) y-a-t-il entre les formules suivantes :
  - $A \land C$
  - $B \land D$
  - $C \land D$

## 3

1. Modélisez en logique du premier ordre les phrases suivantes :
   - Une baleine est heureuse si tous ses enfants savent chanter
   - Tous les enfants des baleines bleues savent chanter.
2. Comment exprimer en logique du premier ordre le raisonnement suivant : "des affirmations 1 et 2, on peut déduire que les baleines bleues sont heureuses" ?
3. Montrez que ce raisonnement est correct en utilisant la méthode de résolution. Détaillez toutes les étapes de calcul.
4. Peut-on déduire des phrases 1 et 2 que "les baleines sans enfant sont heureuses" ? Prouvez votre réponse.

## 4

En utilisant la notion d'interprétation, déterminez si les formules suivantes sont contingentes , valides ou insatisfiables :

$$A = (\neg p(a) \vee \exists x p(x)) \wedge (\forall x \neg p(x) \vee p(a))$$

$$B = \forall x\ p(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$C = \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \forall x p(x, f(x))$$

Justifiez vos réponses, sans toutefois développer les calculs, et essayez de produire les arguments les plus simples possibles.

## 5

1. On considère l'atome p(x) et les formules $A = \exists x p(x)$ et $B = \forall x p(x)$.
   Soit $s = \{(x, t)\}$ une substitution, où t est un terme quelconque (et, par définition d'une substitution, t est différent de x). On note s(p(x)) l'atome obtenu en appliquant s à p(x). Soit A' la formule fermée obtenue à partir de s(p(x)) en quantifiant existentiellement ses variables. Soit B' la formule fermée obtenue à partir de s(p(x)) en quantifiant universellement ses variables. Si s(p(x)) ne contient pas de variable, A' = B' = s(p(x)). A-t-on : (Prouvez vos réponses)
   (a) $A \models A'$
   (b) $B \models B'$
2. On considère la formule fermée $C = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x p(L_1 \vee L_2 \vee ...)$, où les $L_i$ sont des littéraux.
   Montrez que : pour toute substitution s, $C \models s(C)$, où s(C) est la formule obtenue à partir de $s(L_1 \vee L_2 \vee ...)$ en quantifiant universellement ses variables.

# TD supplémentaires

**Question 1**
Soit le domaine $\mathcal{D}$ composé des entiers de 1 à 15, les prédicats $\mathcal{P}$ et $\Pi$ d'arité 1 et $Suc$ d'arité 2 et l' interprétation $I$ suivante :

— $I(P) = \{n;\ n$ est un entier **pair** compris entre 1 et 15$\}$

— $I(\Pi) = \{n;\ n$ est un entier **premier** compris entre 1 et 15$\}$

— $I(Suc) = \{(p+1, p); p$ est un entier compris entre 1 et 14 $\}$

Construire une formule $\mathcal{F}$ (utilisant les deux seules variables $x$ et $y$) telle qu'une modélisation de "*tout successeur d'un nombre pair entre 1 et 15 est premier*" soit "$\forall x\ \forall y\ \mathcal{F}$".

**Question 2**
En utilisant les symboles de prédicats $Vis$, $Sus$, $Cou$ modéliser les deux phrases

1. *tous les visiteurs coupables sont suspects*
2. *si tous les visiteurs coupables sont suspects, alors au moins un visiteur qui n'est pas coupable est suspect*

Vous définirez vous même les symboles de prédicats que vous utiliserez et leur interprétation. On vous demande d'utiliser un minimum de symboles de prédicats.

**Question 3**
On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers. Modéliser par une formule logique la phrase
*Tout $x \in \mathbb{N}$ a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à $x$.*

**Question 4** *La somme de deux entiers est un entier.*

**Question 5** *Il est de bon mariage, il n'en est point de délicieux*[2].

**Question 6** *Zéro est l'élément neutre de l'addition.*

**Question 7** *Tous les oiseaux volent, sauf les autruches.*

**Question 8** *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers.*

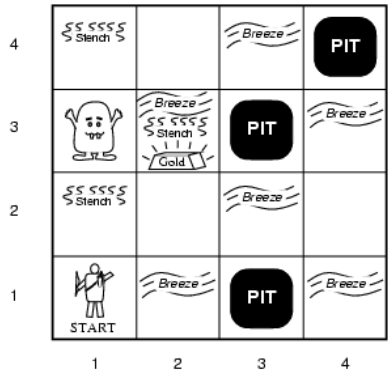
**Question 9**
*Un nombre est premier si et seulement si ses seuls diviseurs sont un et lui même.*

**Question 10** *Les femmes sont insuportables, sauf Catherine (mon épouse).*

**Question 11** *Le numéro deux se réjouit d'être impair*[3].

2. La Rochefoucauld
3. Numero deus impare gaudet : le numero impair plait au Dieu (Virgile)

# Modélisation : le monde du wumpus




Le monde du wumpus est une grotte constituée de salles connectées entre elles (on les représente sur une grille de taille 4 x 4). Quelque part rôde un monstre, le wumpus, qui mange tout ce qui passe à sa portée. Il y a aussi des trous profonds et un tas d'or. Le but de l'agent est de rester en vie tout en essayant de trouver le tas (il peut d'ailleurs découvrir que sa quête n'est pas possible si le tas d'or est au fond d'un gouffre, et dans ce cas il devrait choisir de rentrer chez lui). Il est armé d'un arc avec une seule flèche, cette flèche étant capable de tuer le wumpus si celui-ci est en face de l'agent. Il peut faire un certain nombre d'actions (tourner à gauche ou à droite, avancer, tirer une flèche et ramasser l'or). Il a certaines perceptions, à chaque fois qu'il entre dans une salle : il détecte une brise, une puanteur, quelque chose qui brille, et peut entendre un hurlement.

L'agent connaît les règles générales de ce monde :

1) Lorsqu'une salle contient un trou, on perçoit une brise dans les cases adjacentes (deux cases sont adjacentes si elles ont un côté en commun)
2) Lorsqu'une salle contient le wumpus, on perçoit une puanteur dans les cases adjacentes
3) Lorsqu'une salle contient l'or, on perçoit un éclat brillant lorsque l'on est dans cette salle
4) Lorsque le wumpus meurt (atteint par la flèche), on perçoit un hurlement partout dans le monde
5) Il y a un et un seul wumpus dans le monde.

Au départ, l'agent entre en position [1,1] et ne connaît rien de la configuration précise du monde, c'est-à-dire de l'emplacement des trous, du wumpus et de l'or. Il lui faut raisonner à partir de ce qu'il perçoit et de règles générales sur le monde, c'est-à-dire effectuer des inférences pour enrichir sa base de connaissances, et de la qualité des inférences qu'il fait dépend la qualité des décisions qu'il prendra.

**Question 1.** On va simplifier grandement le problème en supposant que l'agent gère sa position en dehors du système logique (sinon, il faudrait aussi gérer le temps, puisque l'agent ne peut être à deux positions différentes à un instant donné).

D'autre part, on va supposer que l'agent connaît la carte des salles (il sait qu'il y a 16 salles et il connaît la relation d'adjacence entre elles).
Le langage logique que vous définirez contiendra au moins :

- 16 constantes représentant les salles : 1-1, 1-2, 2-1, …
- un prédicat binaire *Adjacente* représentant les adjacences entre salles (Adjacence(x,y) signifie que x est adjacente à y)
- les prédicats unaires Brise, Puanteur, Brille, Hurlement rendant compte des perceptions de l'agent lorsqu'il est dans une certaine salle
  (Brise(x) signifie que l'agent perçoit une brise dans la salle x)

La base de faits contient au départ les informations d'ajacence :
Adjacente(1-1, 1-2), Adjacente(1-1, 2-1), Adjacente(1-2, 1-3), …

Lorsque l'agent arrive dans une case [i,j], ses perceptions sont ajoutées à la base de faits. Par exemple : {Brise(1-1), ¬Puanteur(1-1), ¬Brille(1-1), ¬Hurlement(1-1)} si en [1-1] l'agent perçoit une brise et rien d'autre.

Compléter le langage logique puis modéliser les connaissances générales sur le monde (phrases 1 à 5).

**Question 2.** Vérifier que votre modélisation permet de faire les déductions attendues dans les deux cas de figure suivants :

a) l'agent est en 1-1 et il perçoit une brise (et rien d'autre) : il y a donc un trou en 1-2 ou en 2-1
b)
   - l'agent est en 1-1 et il ne perçoit rien de spécial : il n'y a donc pas de danger en [1-2], ni en [2-1]
   - il se déplace ensuite en [2-1], où il détecte (seulement) une brise : il y a donc un trou en [2-2] ou [3-1]
   - il se déplace ensuite en [1-2] (en repassant par la salle [1-1]) et détecte une puanteur : en déduire la position du wumpus.
   - votre modélisation permet-elle d'en déduire qu'il n'y a plus de wumpus ailleurs ?