1 Exo 6 TD2

On considère un langage du premier ordre contenant trois prédicats unaires P, Q et R.

Caractériser les modèles des formules

A' $\forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$
A" $\exists x(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$
B' $\forall x((P(x) \to Q(x)) \to R(x))$
B" $\exists x((P(x) \to Q(x)) \to R(x))$

Solution

A' $\mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(Q) \subseteq \mathcal{I}(R)$
A" $\mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(Q) = \emptyset$ ou $\mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(Q) \cap \mathcal{I}(R) \neq \emptyset$
B' $\Big(I(P) \cap \mathcal{D} \setminus I(Q)\Big) \cup I(R) = \mathcal{D}$
B" $\mathcal{I}(Q) \not\subseteq \mathcal{I}(P)$ ou $\mathcal{I}(R) \neq \emptyset$

Correction Soit I un modèle de la formule

A' pour toute assignation σ de x (resp. **A"** il existe une assignation σ telle que)

$$\begin{aligned}
Val(\Big(P(x) \to (Q(x) \to R(x))\Big), I, \sigma) &= Val(P(x), I, \sigma) \text{ donc } \Big(Val(Q(x), I, \sigma) \text{ donc } Val(R(x), I, \sigma) \\
&= \sigma(x) \in I(P) \text{ donc } \Big(\sigma(x) \in I(Q) \text{ donc } \sigma(x) \in I(R)\Big) \\
&= \Big(\sigma(x) \in I(P) \text{ et } \sigma(x) \in I(Q)\Big) \text{ donc } \sigma(x) \in I(R) \\
&= \sigma(x) \in I(P) \cap \mathcal{I}(Q) \text{ donc } \sigma(x) \in I(R)
\end{aligned}$$

B' pour toute assignation σ (resp. **B"** il existe une assignation σ telle que)

$$\begin{aligned}
Val(\Big((P(x) \to (Q(x)) \to R(x)\Big), I, \sigma) &= \Big(Val(P(x), I, \sigma) \text{ donc } Val(Q(x), I, \sigma)\Big) \text{ donc } Val(R(x), I, \\
&= \Big(\sigma(x) \in I(P) \text{ donc } \sigma(x) \in I(Q)\Big) \text{ donc } \sigma(x) \in I(R) \\
&= \Big(\sigma(x) \in I(P) \text{ et } \sigma(x) \notin I(Q)\Big) \text{ ou } \sigma(x) \in I(R) \\
&= \sigma(x) \in I(P) \cap \mathcal{D} \setminus I(Q) \text{ ou } \sigma(x) \in I(R) \\
&= \sigma(x) \in \Big(I(P) \cap \mathcal{D} \setminus I(Q)\Big) \cup I(R)
\end{aligned}$$

2 Exo 4 TD3

— $\mathcal{F}_1$: $(\forall x\ P(x) \to (\forall x\ Q(x) \to \exists x\ R(x)))$

— $\mathcal{F}_2$: $((\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)) \to \exists x\ R(x))$

— $\mathcal{G}_1$: $\exists y\ \exists z\ \exists t\ (P(y) \to (Q(z) \to R(t)))$

— $\mathcal{G}_2$: $\forall y\ \exists z\ \exists t\ ((P(y) \to Q(z)) \to R(t))$

Chacune des deux formules $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est logiquement équivalente à une formule $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$. Laquelle ? Justifier.

Solution $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{G}_1$ et $\mathcal{F}_2 \equiv \mathcal{G}_2$

Correction

1. $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{G}_1$
   On rend propre $\mathcal{F}_1$ (manipulation syntaxique) :
   $$\mathcal{F}_1 \equiv (\forall y\ P(y) \to (\forall z\ Q(z) \to \exists t\ R(t)))$$
   On a une chaîne d'implication, donc il est plus facile de regarder la négation :
   $$\neg F_1 \equiv \forall y\ P(y) \wedge \forall z\ Q(z) \wedge \neg\exists t\ R(t)$$
   z et t (resp. t et y) (resp. y et z) n'ont aucune occurence dans $P(y)$ (resp. $Q(z)$) (resp. $R(t)$) donc on peut mettre les quantificateurs dans n'importe quel ordre pour obtenir
   $$\neg F_1 \equiv \forall y \forall z \forall t (P(y) \wedge Q(z) \wedge \neg R(t))$$
   et en repassant à la négation
   $$\mathcal{F}_1 \equiv \exists y \exists z \exists t (\neg(P(y) \wedge P(z)) \vee R(t)) \equiv \exists y \exists z \exists t ((P(y) \wedge P(z)) \to R(t))$$
2. $\mathcal{F}_2 \equiv \mathcal{G}_2$
   On rend propre $\mathcal{F}_2$ (manipulation syntaxique) :
   $$\mathcal{F}_2 \equiv ((\forall y\ P(y) \to \forall z\ Q(z)) \to \exists t\ R(t))$$
   puis en se débarassant successivement des $\to$
   $$\mathcal{F}_2 \equiv ((\neg(\forall y\ P(y) \to \forall z Q(z))) \vee \exists t\ R(t)) \equiv ((\forall y\ P(y) \wedge \neg\forall z\ Q(z)) \vee \exists t\ R(t))$$
   Soit en niant le quantificateur universel puis en déplaçant les quantificateurs
   $$\mathcal{F}_2 \equiv \forall y \exists z \exists t ((P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee R(t))$$
   puis en remarquant que
   $$P(y) \wedge \neg Q(z) \equiv \neg(P(y) \to Q(z)) \text{ on obtient}$$
   $$((P(y) \wedge \neg Q(z)) \vee R(t)) \equiv (\neg(P(y) \to Q(z)) \vee R(t)) \equiv ((P(y) \to Q(z)) \to R(t))$$

3 TD 3 Exo 5

Soient les cinq expressions logiques suivantes :

— $E_1 = \forall x\ P(x,x)$
— $E_2 = \forall x \forall y\ [P(x,y) \to P(y,x)]$
— $E_3 = \forall x \forall y \forall z\ [\{P(x,y) \wedge P(y,z)\} \to P(x,z)]$
— $E_4 = \forall x \forall y\ [P(x,y) \vee P(y,x)]$
— $E_5 = \forall x \exists y\ P(x,y)$

1. trouver deux énoncés différents E_a et E_b parmi ces cinq tels que $E_a \models E_b$
2. trouver deux énoncés E_c et E_d parmi ces cinq tels que $E_c,\ E_d \models$ chacun des énoncés.
3. Montrer que E_2 n'est pas conséquence logique de $\{E_1,\ E_3,\ E_4,\ E_5\}$
4. Montrer que E_4 n'est pas conséquence logique de $\{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_5\}$
5. Montrer que E_3 n'est pas conséquence logique de $\{E_1,\ E_2,\ E_5\}$

Solution

1. $E_1 \models E_5$
2. $E_4,\ E_2 \models \{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5\}$
3. $D = \{a,\ b\},\ I(P) = \{(a,a),\ (b,b),\ (a,b)\}$ modélise $E_1,\ E_3,\ E_4,\ E_5$ et pas E_2
4. $D = \{a,\ b\},\ I(P) = \{(a,a),\ (b,b)\}$ modélise $E_1,\ E_2,\ ,E_3\ E_5$ et pas E_4
5. $D = \{a,\ b,\ c\}\ I(P) = \{(a,a),\ (b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ modélise $E_1,\ E_2,\ E_5$ et pas E_3

Correction

1. pour toute assignation σ de x à un objet d, soit σ' l'assignation de y au même objet : pour toute interprétation I
   $Val(P(x,y), I, \sigma + \sigma') = (\sigma(x), \sigma'(y)) \in I(P) = (\sigma(x), \sigma(x)) \in I(P)$
   donc si I est un modèle de E_1, c'est aussi un modèle de E_5
2. le plus simple est de remarquer que $E_4,\ E_2 \models \forall x \forall y P(x,y) = \mathcal{F}_0$:
   D'après le théorème fondamental :
   $E_4,\ E_2 \models \mathcal{F}_0$ si et seulement si $\mathcal{F}_1 = E_4 \wedge E_2 \wedge \neg \mathcal{F}_0$ est insatisfiable.
   Les modèles de $\mathcal{F}_0$, sont évidement des contre modèles de $\mathcal{F}_1$ les contre modèles de E_4 aussi.
   Pour prouver que $\mathcal{F}_1$ est insatisfiable, il suffit de prouver que si I est un contre modèle de $\mathcal{F}_0$ et un modèle de E_4 alors il est un contre modèle de E_2.
   Dire que I est un contre modèle de F_0 veut dire qu'il existe une assignation σ_0 telle que $(\sigma_0(x), \sigma_0(y)) \notin I(P)$.
   Mais puisque I est un modèle de E_4, $(\sigma_0(y), \sigma_0(x)) \in I(P)$
   Donc $Val(P(x,y) \to P(y,x), I, \sigma_0)$ =faux ce qui veut bien dire que I est un contre modèle de E_2.

   Montrer que $\mathcal{F}_0$ a pour conséquence logique $\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_5$ est évident.

4 Exo supplémentaire

Enoncé

Soient les formules

A' $\forall x \exists y P(x, y)$

A" $\exists z \forall t P(t, z)$

Montrer que **A"** $\models$ **A'** mais que l'inverse est faux.

Corrigé En utilisant le théorème fondamental, il faut prouver que **A"** $\rightarrow$ **A'** est valide mais que **A'** $\rightarrow$ **A"** ne l'est pas

Le plus facile il suffit d'un contre modèle.

La raison est qu'une interprétation peut satisfaire **A'** si à deux assignations différentes de x correspondent deux assignations différentes de y.

Soit $\mathcal{D} = \{o_1, o_2\}$ et $I(P) = \{(o_1, o_2), (o_2, o_1)\}$

— Val(**A'**,I)$=$vrai ssi Val($\exists y P(x, y)$,I,σ)$=$vrai pour les deux assignations $\sigma_1 \ : \ x \rightarrow o_1$ et $\sigma_2 \ : \ x \rightarrow o_2$.
Si on considère l'assignation "complémentaire" σ' qui assigne à y l'objet qui n'est pas assigné à x, on a
— Val($P(x, y)$,I,$\sigma_1 + \sigma'_1$)$=$vrai donc Val($\exists y P(x, y)$,I,σ_1)$=$vrai
— et Val($P(x, y)$,I,$\sigma_2 + \sigma'_2$)$=$vrai donc Val($\exists y P(x, y)$,I,σ_2)$=$vrai
Donc Val(**A'**,I)$=$vrai

— Val(**A"**,I)$=$vrai ssi Val($\forall t P(t, z)$,I,σ)$=$vrai pour au moins une des deux assignations $\sigma_1 \ : \ z \rightarrow o_1$ et $\sigma_2 \ : \ z \rightarrow o_2$.
Si on considère l'assignation "identique" σ' qui assigne à t l'objet qui est assigné à z, on a
— Val($P(t, z)$,I,$\sigma_1 + \sigma'_1$)$=$faux donc Val($\forall t P(t, z)$,I,σ_1)$=$faux
— et Val($P(t, z)$,I,$\sigma_2 + \sigma'_2$)$=$faux donc Val($\forall t P(t, z)$,I,σ_2)$=$faux
Donc Val(**A"**,I)$=$faux

Plus compliqué

Soit I un modèle de **A"**. Par définition de ce qu'est un modèle, il existe un objet o_0 du domaine $\mathcal{D}$ (et ce quel que soit ce domaine) tel que Val($\forall t P(t, z), I, \{z \leftarrow o_0\}$)$=$vrai, c'est à dire que pour tout objet o du domaine $(o, o_0) \in I(P)$.

Mais alors pour toute assignation σ de x à un objet o du domaine considérons l'assignation σ_0 de y à o_0 :

Val($P(x, y), I, \sigma + \sigma_0$)$=$$(o, o_0) \in I(P)$$=$vrai.

Donc pour toute assignation σ de x Val($\exists y P(x, y), I, \sigma$)$=$vrai.

Donc Val(A',I)$=$vrai.