

УДК 599.537

## ХВОСТОВАЯ ЛОПАСТЬ ДЕЛЬФИНА: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖЕСТКОГО КРЫЛА

© 2015 г. Е. В. Романенко<sup>1</sup>, С. Г. Пушков<sup>2</sup>, В. Н. Лопатин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН  
119071 Москва, Ленинский просп., 33

<sup>2</sup>Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова  
140180 Московская обл., г. Жуковский, ул. Гарнаева, 2А  
e-mail: evromanenko33@mail.ru

Поступила в редакцию 23.03.2015 г.

Оценки гидродинамических сил и мощности, развиваемых хвостовой лопастью дельфина, выполнены с помощью нового аналитического метода. Лопасть математически моделируется плоским жестким крылом прямоугольной формы, которое совершает колебания достаточно большой амплитуды при произвольном положении оси вращения и произвольном фазовом сдвиге между линейными и угловыми колебаниями. Используются кинематические параметры, характерные для хвостовой лопасти дельфина, полученные в экспериментах с животными.

Попытки оценить тягу и мощность, развиваемые хвостовой лопастью дельфина, предпринимались неоднократно (Webb, 1975; Yates, 1983; Fish, 1993; Зайцев, Федотов, 1986; Шеховцов, 1999). Однако в первых трех работах допущены грубые ошибки, что привело к завышенным почти на порядок оценкам тяги и мощности. В работе А.А. Зайцева и А.А. Федотова допущены неточности: авторы предположили, что угол атаки хвостовой лопасти дельфина изменяется по гармоническому закону с амплитудой  $10^\circ$ , что не соответствует реальной ситуации. При движении хвостовой лопасти дельфина *Tursiops truncatus* по гармоническому закону изменяется угол наклона лопасти к горизонтальной оси, а угол атаки изменяется по закону, более сложному, чем гармонический, и имеет значение около  $3^\circ$  в фазе создания максимального мгновенного значения тяги (Романенко, 2001; Романенко, 2002). В работе А.В. Шеховцова (1999) кинематические параметры хвостовой лопасти выбраны вполне корректно, но решается плоская задача (бесконечное крыло). Во всех работах использован численный метод определения пульсированных характеристик крыла.

В настоящей работе получены оценки коэффициентов тяги, мощности, индуктивного сопротивления и полезного действия хвостовой лопасти дельфина. Для этой цели использован разработанный авторами аналитический метод (Пушков, Романенко, 2000; Романенко, 2001; Романенко, 2002), в основу которого положены модели разделения гидродинамических сил на циркуляционные и инерционные составляющие, а также линейные выражения для гидродинамических

характеристик крыла, моделирующего лопасть, с применением коэффициентов аэродинамических (вращательных) производных (Белоцерковский, 1958). Наилучшей проверкой разработанного метода был бы корректно поставленный биологический эксперимент на дельфинах, который, к сожалению, никем до сих пор не проведен.

### ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Объектом исследования служит хвостовая лопасть дельфина, которая математически моделируется жестким прямоугольным крылом. На рис. 1 представлена фотография хвостовой лопасти дельфина, использованного в эксперименте (Романенко, 2001; Романенко, 2002). Показан контур моделирующего жесткого крыла прямоугольной формы ABCD. Моделирующее крыло равно по площади и размаху реальной хвостовой лопасти дельфина.

При моделировании лопасти прямоугольным крылом его хорда принята равной 0.126 м. При таком допущении относительная амплитуда колебаний моделирующего крыла оказывается равной  $\frac{y_0}{b}$  (где  $y_0$  и  $b$  суть амплитуда колебаний крыла и его хорда соответственно), что дает 2.135 при движении с постоянной скоростью. При движении дельфина с ускорением эта величина возрастает до  $\frac{y_0}{b} = 3.175$ . Присоединенная масса такого прямоугольного крыла равна  $\lambda_{22} = 5$  кг (Белоцерковский и др., 1971), площадь крыла  $S = 0.063$  м<sup>2</sup>.

В таблице приведены основные кинематические параметры дельфина и его хвостовой лопасти при плавании с постоянной скоростью и с ускорением.

# МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Поскольку задача состояла в том, чтобы оценить гидродинамические силы и мощность, развиваемые хвостовой лопастью дельфина, не прибегая к помощи численных методов, основанных на применении специальных компьютерных программ, нами разработан аналитический метод, сводящийся в итоге к набору относительно простых расчетных формул, которые можно использовать без привлечения сложных компьютерных программ. Формулы получены для кинематического закона колебаний лопасти дельфина, заключающегося в гармонических линейных колебаниях с частотой ( $f, c^{-1}$ ) и гармонических изменениях угла наклона лопасти к горизонтальной оси. Суть метода вкратце состоит в следующем.

Рассмотрим решение плоской (двумерной) малоамплитудной задачи о неустановившемся движении тонкого профиля, которое было изложено, например, в работах А.И. Некрасова (1947) и Л.И. Седова (1966). В случае малых колебаний профиля относительно некоторого основного движения были получены выражения для гидродинамических сил, допускающие простое физическое толкование.

Пусть имеется тонкое крыло, движущееся в безграничном объеме невязкой жидкости, покоящейся на бесконечности, и движение крыла можно представить в виде основного движения со скоростью  $U_0$  и наложенного на него добавочного движения с малыми перемещениями и скоростями. При рассмотрении движения крыла в подвижной системе координат  $OXYZ$ , движущейся со скоростью  $U_0$ , полагалось, что при колебаниях с задней кромки профиля сходится линия разрыва скоростей, или вихревая пелена, и на задней кромке выполняется условие Чаплыгина – Жуковского о конечности скорости. При этом были получены следующие интегральные уравнения для подъемной силы  $Y_0$ , нормальной к линии профиля, и подсасывающей силы  $X_0$ , направленной вдоль линии профиля:

$$Y_0 = -\lambda_{22} \frac{dv_n}{dt} - \rho \pi b U_0 (v_n - b \omega_z / 4) - \rho \frac{b}{2} U_0 \int_{b/2}^{\infty} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (b/2)^2}},$$

$$X_0 = \rho \pi b \left( v_n - (1/2\pi) \int_{b/2}^{\infty} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (b/2)^2}} \right)^2.$$

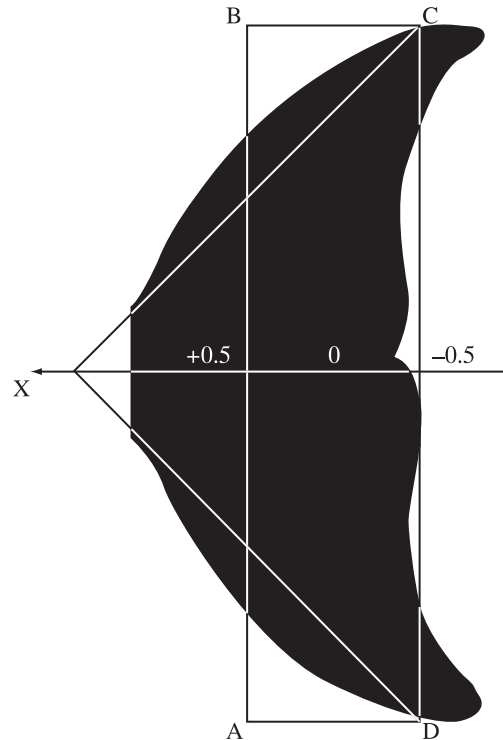


Рис. 1. Фотография хвостовой лопасти дельфина с нанесенным контуром моделирующего крыла. Пояснения в тексте.

Здесь  $\lambda_{22} = \rho \pi (b/2)^2$  – присоединенная масса профиля,  $\rho$  – плотность жидкости,  $b/2$  – половина хорды,  $v_n$  – нормальная скорость в центре профиля,  $\omega_z = 2\pi f = d\vartheta/dt$  – угловая скорость,  $f$  – частота,  $\vartheta(t)$  – угол наклона крыла к горизонтальной оси,  $\gamma(\xi, t)$  – вихревая интенсивность в следе на расстоянии  $\xi$  от центра крыла.

Несложными преобразованиями выражения (1) можно представить в виде:

$$Y_0 = -\lambda_{22} \frac{dv_n}{dt} - \rho U_0 \Gamma, \quad (2)$$

$$X_0 = \lambda_{22} v_n w_z + \rho v_n \Gamma - \rho \pi b u_* (v_n - u_*).$$

Здесь величину  $\Gamma = \pi b \left( v_n - \frac{b \omega_z}{4} - u_* \right)$  можно рассматривать как присоединенную циркуляцию,

а  $u_* = -\frac{1}{2\pi} \int_{b/2}^{\infty} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (b/2)^2}}$  как некоторую эффек-

Кинематические параметры дельфина и его хвостовой лопасти при плавании с постоянной скоростью и ускорением

$U_0, \text{ мс}^{-1}$	$a, \text{ мс}^{-2}$	$y_0/L$	$f, \text{ с}^{-1}$	$\vartheta_0, \text{ рад}$	$C$
4.3	0	0.12	2.22	0.665	0.02
1.5	2.6	0.18	1.46	0.766	0.02

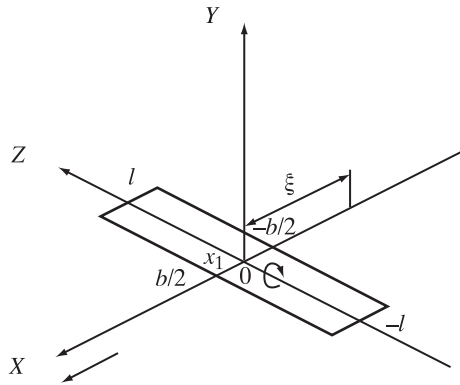


Рис. 2. Схема, поясняющая постановку задачи.

тивную вызванную скорость, обусловленную наличием за крылом вихревой пелены.

Далее рассмотрим задачу о неустановившемся движении крыла конечного размаха (рис. 2) в постановке, аналогичной постановке плоской задачи. При этом пусть форма крыла в плане будет симметрична относительно центральной линии OZ. Будем полагать, что в случае неустановившегося движения крыла конечного размаха влияние следа на гидродинамические характеристики крыла можно так же, как в плоской задаче, учесть введением некоторой эффективной индуцируемой скорости. При этом будем считать применимым метод плоских сечений и допускать справедливость соотношений, аналогичных (1):

$$Y_0 = -\lambda_{22} \frac{dv_n}{dt} - \rho U_0 \int_{-l}^l \Gamma(z) dz, \quad (3)$$

$$X_0 = -\lambda_{22} v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i,$$

где  $\lambda_{22}$  — присоединенная масса ограниченного крыла,  $X_i = \rho \pi \int_{-l}^l b(z) f_*(z) (v_n - f_*(z)) dz$  — индуктивное «сопротивление»,  $f_*$  — некоторая эффективная скорость, индуцируемая вихревой пеленой, остающейся в следе,  $v_n$  — нормальная скорость крыла в точках оси симметрии крыла OZ,  $b(z)$  — хорда крыла в сечении  $z = \text{const}$ ,  $l$  — полуразмах крыла.

Так как  $v_n$  не зависит от  $z$ , для  $X_i$  справедлива оценка сверху:

$$X_i \leq \rho \pi S \frac{v_n^2}{4}, \quad (4)$$

где  $S$  — площадь одной стороны крыла.

До сих пор мы рассматривали случай малоамплитудных колебаний бесконечного крыла и крыла конечного размаха. Теперь перейдем к случаю больших амплитуд колебаний крыла.

Рассмотрим движение крыла конечного размаха в неограниченном объеме невязкой жидкости. Пусть форма крыла в плане является симметричной относительно оси OZ в системе координат OXYZ, движущейся с постоянной скоростью  $U_0$  в направлении OX. Движение крыла задается законом колебаний  $y = y(t)$ ,  $\alpha = \alpha(t)$  и  $\vartheta = \vartheta(t)$  (рис. 2), где  $y$  — линейные колебания крыла,  $\vartheta$  — угол наклона крыла к плоскости OXY,  $\alpha$  — угол атаки. Будем допускать, что при больших амплитудах поперечных и угловых колебаний мгновенные значения угла атаки малы и характер обтекания крыла является безотрывным.

Тогда, исходя из физических закономерностей, для компонент гидродинамических сил в рассматриваемом случае справедливы соотношения, аналогичные (1):

$$Y_0 = -\lambda_{22} \frac{dv_n}{dt} - \rho U \cos \alpha \int_{-l}^l \Gamma(z) dz, \quad (5)$$

$$X_0 = \lambda_{22} v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i.$$

Подъемная сила  $Y_0$ , нормальная к плоскости крыла, включает составляющую, обусловленную влиянием инерционности среды, и циркуляционную составляющую. Вектор подсосывающей силы  $X_0$  в плоскости крыла перпендикулярен оси OZ. Величина  $X_0$  определяется значениями инерционного члена  $\lambda_{22} v_n \omega_z$ , циркуляционного

$\rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz$  и индуктивного сопротивления  $X_i$ .

Циркуляционные составляющие в соотношениях для подъемной и подсосывающей сил являются соответствующими проекциями силы Жуковского  $\rho U \int_{-l}^l \Gamma(z) dz$ , нормальной к вектору мгновенной скорости движения крыла.

В выражениях (5):  $U$  — мгновенная скорость движения крыла (относительно неподвижной жидкости);  $v_n$  — нормальная к плоскости крыла составляющая скорости  $U$ ;  $\Gamma(z)$  — циркуляция в сечении крыла  $z$ .

Величина  $v_n$  определена в точках оси симметрии крыла OZ:

$$v_n = V_y \cos \vartheta - U_0 \sin \vartheta = U \sin \alpha, \quad (6)$$

где  $V_y = dy/dt$ ,  $U_0$  – скорость подвижной системы координат  $XOY$  в жидкости.

### Тяга крыла

Проекция гидродинамических сил на ось  $OX$  (сила тяги), имеет вид

$$F_x = X_0 \cos \vartheta - Y_0 \sin \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \cos \vartheta, \quad (7)$$

где  $C$  – коэффициент сопротивления крыла. На основании (5) и (7) выражение для силы тяги  $F_x$  можно представить в виде

$$F_x = \lambda_{22} \frac{d(v_n \sin \vartheta)}{dt} + \rho V_y \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i \cos \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \cos \vartheta. \quad (8)$$

Из последнего соотношения следует, что при периодическом законе колебаний, среднее за период колебания крыла значение тяги  $\bar{F}_x$  определяется в основном циркуляционным членом и индуктивным сопротивлением.

В линейном приближении для подъемной силы  $Y_0$  справедлива следующая оценка (Белоцерковский и др., 1971):

$$Y_0 = -\lambda_{22} \frac{dv_n}{dt} \rho U \cos \alpha \int_{-l}^l \Gamma(z) dz = \frac{\rho U^2}{2} S \left( -C_y^\alpha \frac{v_n}{U} - C_y^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{v}_n b}{U^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z}{U} + C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U^2} \right). \quad (9)$$

Здесь  $C_y^\alpha$ ,  $C_y^{\dot{\alpha}}$ ,  $C_y^{\omega_z}$ ,  $C_y^{\dot{\omega}_z}$  – коэффициенты аэродинамических (вращательных) производных (точка над буквами  $\alpha$  и  $\omega$  во втором и четвертом коэффициентах и далее обозначает производную по времени),  $b$  и  $S$  – хорда и площадь крыла соответственно. При оценках  $Y_0$  принимаем, что коэффициенты аэродинамических производных постоянны в течение периода колебаний и зависят от числа *Струхала*, которое имеет вид

$$Sh_0 = \frac{\omega b}{U_0}. \quad (10)$$

Из выражения (9) получаем

$$\int_{-l}^l \Gamma(z) dz = -\frac{\lambda_{22} \dot{v}_n}{\rho U \cos \alpha} + \frac{US}{2 \cos \alpha} \times \left( C_y^\alpha \frac{v_n}{U} + C_y^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{v}_n b}{U^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{U} - C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U^2} \right). \quad (11)$$

С учетом выражения (11) после несложных преобразований формула для силы тяги принимает следующий вид

$$F_x = \left[ \lambda_{22} \frac{d(v_n \sin \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2 \cos \alpha} \left( C_y^\alpha v_n V_y + b \left( C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b} \right) \dot{v}_n \sin \theta - C_y^{\omega_z} b \omega_z V_y - C_y^{\dot{\omega}_z} b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta \right) - X_i \cos \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \cos \vartheta \right], \quad (12)$$

где  $\theta = \alpha + \vartheta$  – угол наклона траектории движения крыла.

Соотношение (12) получено в предположении, что кинематические параметры крыла заданы относительно его центра. Однако более интересен общий случай, когда кинематические параметры заданы относительно любой точки продольной оси крыла. Это особенно важно применительно к плаванию дельфинов и рыб с полулунным хвостовым плавником. Существует предположение, что ось вращения хвостовой лопасти дельфина расположена вблизи ее задней кромки. Это подтверждают оценки, сделанные в наших работах (Романенко, 2001; Romanenko, 2002) на основе кинематических параметров, полученных экспериментально.

Пусть в системе координат  $oXYZ$ , движущейся в направлении оси  $oX$  с постоянной скоростью  $U_0$ , движение крыла задано гармоническим законом колебаний точки  $x_1$  (рис. 2). Для оценки гидродинамических сил, развиваемых крылом в этом случае, можно воспользоваться выражением (12), однако все необходимые соотношения, описывающие движение крыла, должны быть записаны относительно его центра. Закон движения рассматриваемого крыла относительно центра определяется проекциями скоростей центра крыла относительно неподвижной жидкости:

$$V_{xc} = V_0 - \omega_z x \sin \vartheta, \quad (13)$$

$$V_{yc} = V_{y1} + \omega_z x \cos \vartheta, \quad (14)$$

где  $V_{y1} = \dot{y}(t)$ ,  $\omega_z = \dot{\vartheta}(t)$ ,  $y(t)$  – вертикальные колебания крыла,  $x$  – расстояние от центра крыла до точки  $x_1$ .

Для случая, когда кинематические параметры движения крыла заданы относительно точки  $x_1$  и

пересчитаны к центру крыла, формула (12) имеет вид:

$$F_{xc} = \left[ \lambda_{22} \frac{d(v_{nc} \sin \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2 \cos \alpha_c} \left( C_{yc}^{\alpha} v_{nc} V_{yc} + b \left( C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b} \right) \times \right. \right. \\ \left. \times \dot{v}_{nc} \sin \theta_c - C_{yc}^{\omega_z} b \omega_z V_{yc} - C_{yc}^{\dot{\omega}_z} b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta_c \right) - \\ \left. - X_i \cos \vartheta - \frac{\rho S U_c^2}{2} C \cos \vartheta \right] \quad (15)$$

Здесь и далее  $F_{xc}$  – сила тяги,  $v_{nc}$  – нормальная скорость,  $\theta_c$  – угол между набегающим на крыло потоком и горизонтальной осью,  $U_c$  – мгновенная скорость потока, набегающего на крыло,  $X_i$  – индуктивное сопротивление крыла,  $C_{yc}^{\alpha}$ ,  $C_{yc}^{\dot{\alpha}}$ ,  $C_{yc}^{\omega_z}$ ,  $C_{yc}^{\dot{\omega}_z}$  – коэффициенты аэродинамических (вращательных) производных (Белоцерковский, 1958; Белоцерковский и др., 1971). Формула (15) отличается от формулы (12) наличием индекса «с» у тех величин, которые пересчитаны к центру крыла. Аналогичные соотношениям (13)–(14) выражения для других величин принимают следующий вид

$$v_{nc} = V_{y1} \cos \vartheta - U_0 \sin \vartheta + \omega_z x = U_c \sin \alpha_c, \quad (16)$$

$$\theta_c = \alpha_c + \vartheta = \arctg(V_{yc}/V_{xc}), \quad (17)$$

$$U_c^2 = V_{yc}^2 + V_{xc}^2, \quad (18)$$

где  $\alpha_c$  – угол атаки, пересчитанный к центру крыла.

Угол наклона крыла не имеет индекса «с», так как он одинаков во всех точках крыла, в том числе и в точке  $x_1$ . Поэтому он определяется кинематическими параметрами именно этой точки (мгновенным углом набегающего потока  $\theta_1$  и углом атаки  $\alpha_1$  в точке  $x_1$ ).

### Коэффициент полезного действия

Коэффициент полезного действия (КПД) крыла определяется как отношение полезной энергии к затрачиваемой

$$\eta = \frac{\bar{A}_c}{\bar{P}_c}, \quad (19)$$

где

$$\bar{A}_c = \overline{F_{yc} U_0} \quad (20)$$

и

$$\bar{P}_c = -\overline{F_{yc} V_{yc}} - \overline{M_{zc} \omega_z}. \quad (21)$$

Здесь черта над буквой означает осреднение по периоду колебаний, черта над произведением в формулах (20) и (21) означает осреднение произведения по периоду колебаний,  $F_{xc}$  и  $F_{yc}$  – горизонтальная и вертикальная силы, действующие

на крыло, соответственно,  $V_{yc}$  – вертикальная скорость крыла,  $M_{zc}$  – момент сил относительно оси вращения крыла, который имеет вид

$$+ m_z^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U_c^2} M_{zc} = \frac{\rho S b U_c^2}{2} \left[ -m_z^{\alpha} \frac{v_n}{U_c} - m_z^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{v}_n b}{U_c^2} + \right. \\ \left. + m_z^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{U_c} + m_z^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U_c^2} \right]. \quad (22)$$

Величины  $m_z^{\alpha}$ ,  $m_z^{\dot{\alpha}}$ ,  $m_z^{\omega_z}$ ,  $m_z^{\dot{\omega}_z}$  в скобках формулы (22) – это коэффициенты вращательных производных момента (Белоцерковский, 1958; Белоцерковский и др., 1971), также пересчитанные к центру крыла.

Проекция гидродинамических сил на ось  $OY$  имеет вид (кинематические параметры определены в центре крыла):

$$F_y = X_0 \sin \vartheta + Y_0 \cos \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \sin \vartheta. \quad (23)$$

Это выражение с учетом соотношения (11) после несложных преобразований можно записать в виде

$$F_y = \left\{ -\lambda_{22} \frac{d(v_n \cos \vartheta)}{dt} + \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \frac{\rho S}{2} \left[ -C_y^{\alpha} v_n V - b \left( C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b} \right) \dot{v}_n + \right. \right. \\ \left. \left. + C_y^{\omega_z} \omega_z b U + C_y^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z b^2 \right] - \right. \\ \left. - X_i \sin \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \sin \vartheta \right\} \quad (24)$$

В формуле (24) все кинематические параметры и производные берутся в центре крыла. Если кинематические параметры определены в произвольной точке крыла, а коэффициенты аэродинамических производных – в центре давления крыла (Белоцерковский, 1958), то выражение (24) принимает вид

$$F_{yc} = \left\{ -\lambda_{22} \frac{d(v_{nc} \cos \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2} \left[ -C_{yc}^{\alpha} v_{nc} V_{xc} - \left( C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b} \right) \times \right. \right. \\ \left. \times b \dot{v}_{nc} \cos \theta_c + C_{yc}^{\omega_z} \omega_z b V_{xc} + C_{yc}^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z b^2 \cos \theta_c \right] - \\ \left. - X_{ic} \sin \vartheta - \frac{\rho S U_c^2}{2} C \sin \vartheta \right\}. \quad (25)$$

Индекс «с», как и раньше, означает, что все параметры пересчитаны к центру крыла.

### Расчетные формулы

Соотношения (15), (22) и (25) имеют общий вид и справедливы при всех допустимых значениях кинематических параметров и формах крыла. Их можно использовать для оценки коэффициентов тяги и КПД крыла прямыми методами вычислительной математики (например, программа Фортран и др.). Однако эти соотношения могут быть преобразованы в относительно простые расчетные формулы путем усреднения за период колебаний в случае гармонических колебаний крыла для конкретного закона линейных и угловых колебаний. Такие преобразования были проведены и получены расчетные формулы для случая, когда крыло движется по закону:  $y = y_0 \sin \omega t$  и  $\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi$  – смещение по фазе между линейными и угловыми колебаниями.

Коэффициенты тяги и мощности после усреднения по времени за период колебания можно записать в виде

$$C_T = \frac{2\bar{F}_{xc}}{\rho S U_0^2} = C_{T1} + C_{T2} + C_{T3} + C_{T4} + C_{T5} + C_{T6}, \quad (26)$$

$$C_P = -\frac{2\bar{F}_{yc}\bar{V}_{yc}}{\rho S U_0^3} - \frac{2\bar{M}_{zc}\omega_z}{\rho S U_0^3} = \left( C_{P1} + C_{P2} + C_{P3} + C_{P4} + C_{P5} + C_{P6} + C_{P7} + C_{P8} + C_{P9} + C_{P10} + C_{P11} \right). \quad (27)$$

Согласно (19) выражение для коэффициента полезного действия имеет вид

$$\eta = \frac{C_T}{C_P}.$$

Члены в правой части формулы (26) неравноценны по величине. Предварительные оценки показывают, что наиболее значимы первый (коэффициент тяги), пятый (индуктивное сопротивление) и шестой (коэффициент, учитывающий сопротивление трения и формы). Сумма второго, третьего и четвертого членов весьма мала по сравнению с остальными, и в первом приближении ею можно пренебречь (при этом допускается погрешность не более 5–10%). Остальные члены имеют вид

$$C_{T1} = C_y^a \left\{ \frac{1}{2\lambda_p^2} [1 - 0.125\vartheta_0^2(2 - \cos 2\varphi)] - \frac{\vartheta_0 \sin \varphi}{2\lambda_p} (1 - 0.125\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)\vartheta_0 X_b \cos \varphi}{2\lambda_p} (2 - 0.25\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X_b^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \right\}, \quad (28)$$

$$C_{T5} = -\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda_p^2} [0.5 - 0.1875\vartheta_0^2(2 - \cos 2\varphi) + 0.0469\vartheta_0^4(1 + 4\sin^2 \varphi)] - \frac{\vartheta}{\lambda_p} \sin \varphi (1 - 0.875\vartheta_0^2 + 0.125\vartheta_0^4) + \vartheta_0^2 (0.5 - 0.3125\vartheta_0^2 + 0.0608\vartheta_0^4) + \frac{2(Sh_0)\vartheta_0 X_b}{\lambda_p} \cos \varphi (0.5 - 0.125\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X_b^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \right\}, \quad (29)$$

$$C_{T6} = -C \left\{ (1 - 0.25\vartheta_0^2) + \frac{1}{2\lambda_p^2} [1 - 0.125\vartheta_0^2(2 - \cos 2\varphi)] + 2 \frac{(Sh_0)\vartheta_0 X_b}{\lambda_p} \cos \varphi (0.5 - 0.125\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X_b^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \right\}. \quad (30)$$

Здесь и далее  $X_b = \frac{x}{b}$ ,  $\lambda_p = U_0/(\omega y_0)$ .

В правой части формулы (27) члены также неравноценны: член  $C_{P11}$  мал по сравнению с остальными и им можно пренебречь. Остальные имеют вид

$$C_{P1} = \frac{2\lambda_{22}}{\rho Sb} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{(Sh_0)\vartheta_0}{2\lambda_P} \cos \varphi (1 - 0.5\vartheta_0^2) - \\ & -\frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X_b}{2} (1 - 0.625\vartheta_0^2 + 0.104\vartheta_0^4) - \\ & -\frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2}{4\lambda_P^2} \sin \varphi \cos \varphi (1 - 0.3333\vartheta_0^2) - \\ & -\frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^3 X_b}{8\lambda_P} \sin \varphi (3 - 1.25\vartheta_0^2 + 0.3333\vartheta_0^2 \sin^2 2\varphi) + \\ & + \frac{0.3333(Sh_0)\vartheta_0^4}{4\lambda_P^2} \sin \varphi \cos \varphi + \\ & + \frac{(Sh_0)^3 \vartheta_0^6 X_b^2}{8} \sin \varphi \cos^5 \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

$$C_{P2} = C_{yc}^a \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\lambda_P^2} [1 - 0.125\vartheta_0^2 (1 - 2\sin^2 \varphi)] - \frac{\vartheta_0}{2\lambda_P} \sin \varphi (1 - 0.125\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)\vartheta_0 X_b}{\lambda_P} \cos \varphi + \\ & + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X_b^2}{2} \left[ 1 + 0.125\vartheta_0^2 - 0.104\vartheta_0^4 \right] \left[ \begin{aligned} & \cos^6 \varphi + 4\sin \varphi \cos^5 \varphi + \\ & + 11\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \\ & + 20\sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \\ & + 3\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^6 \varphi \end{aligned} \right] - \\ & - \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^3 X_b^2}{4\lambda_P} \sin \varphi (1 - 0.3333\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)^3 \vartheta_0^6 X_b^3}{8} \sin \varphi \cos^5 \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

$$C_{P3} = \left( C_{yc}^{\omega_z} - \frac{2\lambda_{22}}{\rho Sb} \right) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{(Sh_0)\vartheta_0}{2\lambda_P} \cos \varphi (1 - 0.25\vartheta_0^2) - \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X_b}{2} (1 - 1.125\vartheta_0^2 + 0.625\vartheta_0^4) - \\ & -\frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^3 X_b}{8\lambda_P} \sin \varphi (1 - 0.917\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)\vartheta_0^4}{2} \sin^3 \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

$$C_{P4} = -C_{yc}^{\omega_z} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(Sh_0)\vartheta_0}{2\lambda_P} \cos \varphi + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X_b}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) - \\ & -\frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^3 X_b}{4\lambda_P} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 - 0.0833\vartheta_0^2) + \\ & + \frac{(Sh_0)\vartheta_0^3 X_b}{8\lambda_P} \cos 2\varphi (1 - 0.0833\vartheta_0^2) + \frac{(Sh_0)^3 \vartheta_0^6 X_b^2}{8} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (34)$$

$$C_{P5} = C_{yc}^{\omega_z} \left[ \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \right], \quad (35)$$

$$C_{P6} = \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3\vartheta_0}{8\lambda_p^3} [1 - 0.9722\vartheta_0^2(1 - 0.4\cos^2\varphi)] - \\ & - \frac{\vartheta_0^2}{84\lambda_p^2} [1 + 2\sin^2\varphi - 0.417\vartheta_0^2(1 + 4\sin^2\varphi)] + \\ & + \frac{3\vartheta_0^3}{8\lambda_p} \sin\varphi(1 - 0.417\vartheta_0^2) + \\ & + \frac{3(Sh_0)\vartheta_0^2 X_b}{8\lambda_p^2} \sin 2\varphi [1 - 0.2778\cos 2\varphi - 0.2222\vartheta_0^2] + \\ & + \frac{(Sh_0)\vartheta_0^3 X_b}{2\lambda_p} \sin^2\varphi \cos\varphi - \\ & - \frac{(Sh_0)\vartheta_0^3 X_b}{4\lambda_p} \cos\varphi [1 + 3\sin^2\varphi - 0.6667\vartheta_0^2(1 + 2\sin^4\varphi)] + \\ & + \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0^3 X_b^2}{4\lambda_p} \sin\varphi [1 - 0.5834\vartheta_0^2(\cos^2 2\varphi - 2\sin^2\varphi \cos^2\varphi)] - \\ & - \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0^4 X_b^2}{4} + 0.375(Sh_0)^3\vartheta_0^4 X_b^3 \sin^3\varphi \cos^3\varphi \end{aligned} \right\}, \quad (36)$$

$$C_{P7} = C \left\{ \begin{aligned} & \frac{\vartheta_0(2\lambda_p^2 + 1)}{4\lambda_p^3} \sin\varphi \left[ 1 + \frac{0.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} - 0.125\vartheta_0^2 \left( 1 + \frac{0.6667}{(2\lambda_p^2 + 1)} \sin^2\varphi \right) \right] + \\ & + \frac{(Sh_0)\vartheta_0^2 X_b}{8\lambda_p^2} \sin 2\varphi (1 - 0.0833\vartheta_0^2) \end{aligned} \right\}, \quad (37)$$

$$C_{P8} = m_{zc}^a \left\{ \begin{aligned} & \frac{(Sh_0)\vartheta_0 \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}{2\sqrt{2}\lambda_p^2} \cos\varphi \left[ 1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} - 0.125\vartheta_0^2 \left( 1 + \left( 2 + \frac{1}{(2\lambda_p^2 + 1)} \right) \sin^2\varphi \right) \right] + \\ & + \frac{(Sh_0)\vartheta_0^3 \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}{8\sqrt{2}\lambda_p^2} \sin^2\varphi \cos\varphi - \frac{(Sh_0)\vartheta_0^2}{4\sqrt{2}\lambda_p \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}} \sin\varphi \cos\varphi + \\ & + \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0^2 X_b \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}{2\sqrt{2}\lambda_p} \left( 1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} \cos 2\varphi \right) \end{aligned} \right\}, \quad (38)$$

$$C_{P9} = m_{zc}^{\omega_z} \left[ \begin{aligned} & \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0}{2\lambda_p} \sin\varphi (1 - 0.125\vartheta_0^2) - \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0^3}{8\lambda_p} \sin\varphi - \\ & - \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \end{aligned} \right], \quad (39)$$

$$C_{P10} = -m_{zc}^{\omega_z} \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0^2 \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}{2\sqrt{2}\lambda_p} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{0.125}{(2\lambda_p^2 + 1)} \cos 2\varphi \right]. \quad (40)$$



## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

С использованием полученных формул проведены оценки коэффициентов тяги, индуктивного сопротивления и КПД прямоугольного крыла, моделирующего хвостовую лопасть дельфина. При этом использованы кинематические параметры хвостовой лопасти, полученные в экспериментах с дельфинами (Романенко, 2001; Romanenko, 2002). Особое внимание уделялось значениям фазового угла, при которых КПД достигал максимума при различных положениях оси вращения. Оказалось, что в режиме движения с постоянной скоростью и с ускорением КПД достигает максимума при фазовом угле близком к  $90^\circ$ . Такой результат согласуется с общепринятыми представлениями относительно условий эффективной работы крыльцевого движителя (Некрасов, 1947, 1949; Зайцев, Федотов, 1986; Шеховцов, 1999).

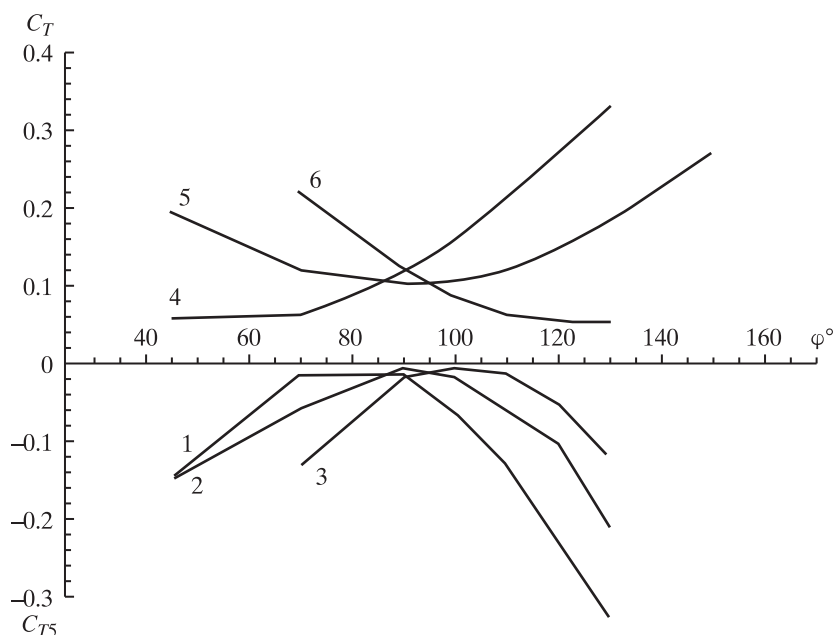
Оценки КПД прямоугольного крыла, моделирующего хвостовую лопасть, показали, что с погрешностью не хуже  $\pm 4\%$  он не зависит от положения оси вращения в пределах хорды крыла и составляет величину около 70%.

На рис. 3 приведены значения коэффициентов индуктивного сопротивления (1–3) и тяги (4–6) прямоугольного крыла, моделирующего хвостовую лопасть, в зависимости от фазового угла и положения оси вращения (1 и 4 при  $X_b = -0.5$ ; 2 и 5 при  $X_b = 0$ ; 3 и 6 при  $X_b = 0.5$ ). Скорость набегающего потока постоянна и составляет 4.3 м/с.

и характер кривых коэффициента тяги зависят от положения оси вращения крыла.

На рис. 4 приведены аналогичные результаты для режима разгона. Строго говоря, эти результаты носят скорее ориентировочный нежели строгий характер, так как формулы получены при условии постоянства скорости набегающего потока. Тем не менее общий характер кривых позволяет выявить тенденции изменения пропульсивных сил крыла при переходе к ускоренному режиму набегающего потока. Видно, что характер кривых в режиме разгона похож на характер аналогичных кривых при постоянной скорости потока. Однако абсолютные величины заметно различаются: в режиме разгона эти величины на порядок больше. Максимальные значения КПД в режиме разгона меньше, чем при постоянной скорости, и составляют около 60%.

Следует отметить, что оценки КПД крыльев конечного удлинения (в данном случае удлинение равно 4 и равно удлинению хвостовой лопасти дельфина) дают меньшие значения, чем в случае бесконечных крыльев (Романенко и др., 2009). Кроме того, в приведенных оценках не учитывается деформация крыла, которая наблюдается у хвостовой лопасти дельфина. Работ по гибким крыльям довольно много (Грунтфест, Дерезина, 1981; Prempraneerach et al., 2003; Heathcote, Gursul, 2007, и др.), однако во всех этих работах рассматривается случай пассивного изгибания



**Рис. 3.** Значения коэффициентов индуктивного сопротивления (1–3) и тяги (4–6) прямоугольного крыла, моделирующего хвостовую лопасть, в зависимости от фазового угла и положения оси вращения (1 и 4 при  $X_b = -0.5$ ; 2 и 5 при  $X_b = 0$ ; 3 и 6 при  $X_b = 0.5$ ). Скорость набегающего потока постоянна и составляет 4.3 м/с.

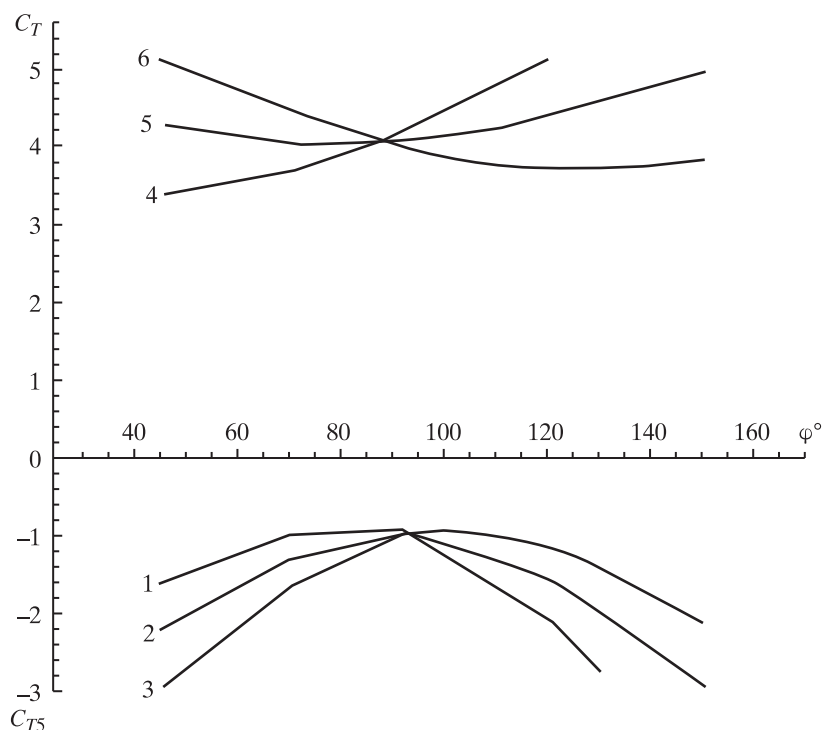


Рис. 4. Коэффициенты индуктивного сопротивления (1–3) и тяги (4–6) прямоугольного крыла в режиме разгона (1 и 4 при  $X_b = -0.5$ ; 2 и 5 при  $X_b = 0$ ; 3 и 6 при  $X_b = 0.5$ ).

колеблющегося крыла под действием окружающей водной среды. При этом для математического описания гибкого крыла необходимо знать такие его свойства, как изгибная жесткость и поверхностная плотность материала, соответствующие экспериментальные данные о которых отсутствуют. Мы предполагаем изучить случай активной деформации жесткого крыла, когда характер деформации задается условиями задачи. Учет деформации может дать заметно большие значения КПД крыльев, моделирующих хвостовую лопасть.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью нового аналитического метода даны оценки гидродинамических сил и мощности, развиваемых хвостовой лопастью дельфина, которая математически моделируется плоским жестким крылом конечного удлинения. Модельное крыло совершает колебания в невязкой бесконечной среде; амплитуды колебаний достаточно велики; положение оси вращения и фазовый сдвиг между линейными и угловыми колебаниями произвольны. Показано, что КПД такого крыла практически (с погрешностью не хуже  $\pm 4\%$ ) не зависит от положения оси вращения в пределах хорды и близок к 70%. Оказалось, что в режиме движения с постоянной скоростью и с ускорением КПД

достигает максимума при фазовом угле, близком к  $90^\circ$ . Можно считать, что кинематика хвостовой лопасти дельфина близка к оптимальной. Показано также, что значение максимума коэффициента индуктивного сопротивления и характер кривых коэффициента тяги зависят от положения оси вращения крыла.

Получены аналогичные ориентировочные данные для режима разгона. Общий характер кривых позволяет выявить тенденции изменения пропульсивных сил крыла при переходе к ускоренному режиму набегающего потока, заключающиеся прежде всего в значительном увеличении коэффициента тяги.

Остается малоизученным вопрос о математическом моделировании гибкого крыла, каковым является лопасть дельфина. Имеющиеся в литературе данные (Prempraneerach et al., 2003) позволяют считать, что продольная (по хорде) гибкость хвостовой лопасти приводит к значительному увеличению коэффициента тяги и мощности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-04-00234а и 14-04-00042а).

Авторы выражают искреннюю благодарность Р.И. Герасимовой и Т.Н. Сидоровой за помощь в подготовке рукописи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Белоцерковский С.М., 1958. О коэффициентах вращательных производных // Тр. ЦАГИ. Вып. 725. С. 5–29.
- Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г., 1971. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука. 767 с.
- Грунтфест Р.А., Дерезина Н.П., 1981. Колебание упругой ласты в потоке жидкости // Бионика. Вып. 15. С. 29–39.
- Зайцев А.А., Федотов А.А., 1986. Обтекание идеальной несжимаемой жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой // Изв. АН СССР. МЖГ. № 5. С. 75–82.
- Некрасов А.И., 1947. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР. 258 с.
- Пушков С.Г., Романенко Е.В., 2000. Гидродинамические силы, действующие на жесткое крыло при его движении с большими амплитудами поперечных и угловых колебаний // Успехи соврем. биологии. Т. 120. № 2. С. 207–216.
- Романенко Е.В., 2001. Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: Т-во науч. изд. КМК. 412 с.
- Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н., 2009. Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси его вращения. Тяга, мощность и КПД при гармоническом законе угловых колебаний // Успехи соврем. биологии. Т. 129. № 5. С. 469–480.
- Седов Л.И., 1966. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука. 445 с.
- Шеховцов А.В., 1999. Нелинейная математическая модель работы хвостового плавника дельфина // Прикладна гідромеханіка. Т. 1(73). № 2. С. 71–88.
- Fish F.E., 1993. Power output and propulsive efficiency of swimming bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) // J. Exp. Biol. V. 185. P. 179–193.
- Heathcote S., Gursul I., 2007. Flexible Flapping Airfoil Propulsion at Low Reynolds Number // AIAA J. V. 45. № 5. P. 1066–1079.
- Prempraneerach P., Hover F.S., Triantafyllou M.S., 2003. The effect of chordwise flexibility on the thrust and efficiency of a flapping foil // 13<sup>th</sup> Int. Symp. Unmanned Untethered Submersible Techn., Autonomous Undersea Systems Institute, Lee, Durham, NH. Aug. 24–27. P. 1–10.
- Romanenko E.V., 2002. Fish and Dolphin Swimming. Sofia; M.: Pensoft. 430 p.
- Webb P.W., 1975. Hydrodynamics and energetics of fish propulsion // Bull. Fish. Res. Bd. Can. V. 190. P. 1–159.
- Yates G.T., 1983. Hydrodynamics of body and caudal fin propulsion // Fish Biomechanics / Eds Webb P.W., Weihs D. N.Y.: Praeger. P. 177–213.

## Dolphin's flukes: A mathematical model of rigid wing

E. V. Romanenko<sup>1</sup>, S. G. Pushkov<sup>2</sup>, V. N. Lopatin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>A.N. Severtsov Institute of Ecology and Evolution, RAS  
119071 Moscow, Leninskii Pr., 33  
e-mail: evromanenko33@mail.ru

<sup>2</sup>M.M. Gromov Flight Research Institute  
140180 Moscow Region, Zhukovsky, Garnayeva, 2A

New analytical method is used to estimate hydrodynamic forces produced by dolphin's flukes. A mathematical model is proposed that describes dolphin's flukes as a flat rigid rectangular wing whose pitch axis location varies, heaving and pitching amplitudes are sufficiently large, and the phase angle shift for the combined oscillations can change arbitrarily. The dolphin's flukes kinematic parameters are obtained and used to estimate hydrodynamic forces.