

# Материалы для подготовки к коллоквиуму по дискретной математике

ПМИ 2016

Орлов Никита, Рубачев Иван

5 декабря 2016 г.

## 3

Пусть есть система линейных уравнений, записанная в расширенном матричном виде  $(A|B)$ . Приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kn} & b_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{k+1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Если  $b_{k+1} \neq 0$ , то система несовместна и решений нет. В противном случае приведем ее к улучшенному ступенчатому виду:

(Здесь и далее в блоке покажем на примере матриц определенного размера)

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

В этом случае у матрицы бесконечное число решений. Переменные  $x_1, x_2, x_4$  - главные,  $x_3$  выражается через них.

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

В таком случае у системы есть единственное решение.

## 4

Пусть у нас есть 2 матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $B \in \text{Mat}_{n \times k}$ . Произведением матриц  $A \times B$  будет называться матрица  $C \in \text{Mat}_{m \times k}$ , с элементами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

**Теорема.** *Произведение матриц дистрибутивно относительно сложения.*

*Доказательство.* Докажем для правой дистрибутивности.

Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $B, C \in \text{Mat}_{n \times k}$ . Матрицы  $A(B + C)$  и  $AB + AC$  имеют одинаковый размер  $m \times k$ . Обозначим их за  $D, E$  соответственно.

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} = e_{ij}$$

Левая дистрибутивность доказывается аналогично. □

---