1) Для заданного λ-выражения E найти связанные BV(E) и свободные FV(E) переменные

$E = \lambda\ z\ y\ .\ y\ x$

$BV(E) =_{\text{по опр.}} BV(\lambda\ z\ .\ (\lambda\ y\ .\ y\ x)) =_4 BV(\lambda\ y\ .\ y\ x) \cup \{z\} =_4$
$BV(y\ x) \cup \{y\} \cup \{z\} =_3 BV(y) \cup BV(x) \cup \{y\} \cup \{z\} =_1 \{y, z\}$

$FV(E) =_{\text{по опр.}} FV(\lambda\ z\ .\ (\lambda\ y\ .\ y\ x)) =_4 FV(\lambda\ y\ .\ y\ x) \setminus \{z\} =_4$
$(FV(y\ x) \setminus \{y\}) \setminus \{z\} =_3 (((FV(y) \cup FV(x)) \setminus \{y\}) \setminus \{z\} =_1 \{x\}$

Выполнить подстановку

$(\lambda\ x\ z.\ x\ y)\ [y := z] =_{\text{по опр.}} (\lambda\ x.\ (\lambda z\ .\ x\ y))\ [y := z] =_6$

$\lambda\ x.\ ((\lambda z\ .\ x\ y)\ [y := z]) =_7 \lambda\ x.\ (\lambda u\ .\ (x\ y)\ [z := u]\ [y := z]) =_4$

$\lambda\ x.\ (\lambda\ u.\ x[z := u]\ [y := z]\ y[z := u]\ [y := z]) =_2$

$\lambda\ x.\ (\lambda\ u.\ x\ y[y := z]) =_1 \lambda\ x.\ (\lambda\ u\ .\ x\ z) = \lambda\ x\ u\ .\ x\ z$

2) Доказать равенство λ-выражений $E_1 = E_2$

$E_1 = \lambda\, y\, .\, x\, y \quad E_2 = (\lambda\, z\, .\, x)\, y$

$E_1 \rightarrow_\eta x \Rightarrow_1 E_1 = x$

$E_2 \rightarrow_\beta x \Rightarrow_1 E_2 = x \Rightarrow_3 x = E_2$

$\Rightarrow_4 E_1 = E_2$

3) Используя различные редукционные стратегии привести к нормальной форме следующее выражение:

$(\lambda\, z\, .\, y\, z)\, (\lambda\, x\, .\, z\, x)$

Норм. стр.: $(\lambda\, z\, .\, y\, z)\, (\lambda\, x\, .\, z\, x) \rightarrow_{\beta} y\, (\lambda\, x\, .\, z\, x) \rightarrow_{\eta} y\, z$

$(\lambda\, z\, .\, y\, z)\, (\lambda\, x\, .\, z\, x) \rightarrow_{\eta} (\lambda\, z\, .\, y\, z)\, z \rightarrow_{\eta} y\, z$

4) Используя свойства комбинаторов редуцировать выражение

S (K I) (K S) K

$S\ (K\ I)\ (K\ S)\ K \rightarrow_{\text{по св-ву } S} ((K\ I)\ K)\ ((K\ S)\ K) \rightarrow_{\text{по св-ву } K} I\ S \rightarrow_{\text{по св-ву } I} S$

5) Вычислить следующее λ-выражение:

fst (false 1)

fst (false 1) $=_{\text{по опр. fst}}$ (λ p. p true) (false 1) $\rightarrow_\beta$

(false 1) true $=_{\text{по опр. false}}$ (λ x y. y) 1 true $\rightarrow_\beta$ true

6) Вычислить следующее λ-выражение:

$(2, 1)\ \text{true}$

$(2, 1)\ \text{true} =_{\text{по опр. пары}} (\lambda\, f.\ f\ 2\ 1)\ \text{true} \to_{\beta} \text{true}\ 2\ 1 \to_{\text{по опр. true}}$

$(\lambda\, x\ y.\ x)\ 2\ 1 \to_{\beta} 2$

7) Используя свойства комбинатора неподвижной точки вычислить следующее λ-выражение:

$$Y\ 0\ 1$$

$$Y\ 0\ 1 =_{\text{по св-су } Y} 0\ (Y\ 0)\ 1 =_{\text{по опр. } 0} (\lambda\ f\ x.\ x)\ (Y\ 0)\ 1 \rightarrow_{\beta} 1$$

8) Используя let-нотацию представить в последовательном и параллельном стиле выражение $(\lambda\, x\, y\, .\, x / y)\ 1\ 2$

$$
\begin{aligned}
(\lambda\, x\, y\, .\, x / y)\ 1\ 2 = {} & \text{let } x = 1 \\
& \text{in let } y = 2 \\
& \quad \text{in } x / y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda\, x\, y\, .\, x / y)\ 1\ 2 = {} & \text{let } x = 1 \\
& \quad\ \ y = 2 \\
& \text{in } x / y
\end{aligned}
$$