Exemplo 01

Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

através da superfície de uma esfera de raio a utilize coordenadas esférica para representar a superfície (parametrizando em coordenadas esféricas)

Sol

Por definição a integral de fluxo

$$\Phi_S = \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

onde

$$d\vec{\sigma} = \mathbf{n}\,dudv$$

com

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$$

e

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Uma outra alternativa a essa abordagem é utilizar o Jacobiano

$$\mathbf{n} = \frac{\partial\,(y, z)}{\partial\,(u, v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\,(z, x)}{\partial\,(u, v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(u, v)}\,\mathbf{k}$$

sendo que x, y, z são as coordenadas do vetor $\mathbf{r}$ que é a parametrização da superfície por onde o campo vai fluir, que para o caso da esfera, em coordenadas esféricas, é

$$\mathbf{r}(u, v) = a\,\sin v\,\cos u\,\mathbf{i} + a\,\sin v\,\sin u\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} =& \left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right] \mathbf{k} \\
=& \left[(a \sin v \cos u)\,(-a \sin v) - (0)\,(a \cos v \sin u)\right] \mathbf{i} + \\
& \left[(0)\,(a \cos v) - (-a \sin v \sin u)\,(-a \sin v)\right] \mathbf{j} + \\
& \left[(-a \sin v \sin u)\,(a \cos v \sin u) - (a \sin v \cos u)\,(a \cos v \cos u)\right] \mathbf{k} \\
=& -\left(a^2 \sin^2 v \cos u\right) \mathbf{i} - \left(a^2 \sin^2 v \sin u\right) \mathbf{j} - \\
& \left(a^2 \sin v \cos v \sin^2 u + a \sin v \cos v \cos^2 u\right) \mathbf{k} \\
=& -\left(a^2 \sin^2 v \cos u\right) \mathbf{i} - \left(a^2 \sin^2 v \sin u\right) \mathbf{j} - \\
& a^2 \sin v \cos v \left(\sin^2 u + \cos^2 u\right) \mathbf{k} \\
=& -\left(a^2 \sin^2 v \cos u\right) \mathbf{i} - \left(a^2 \sin^2 v \sin u\right) \mathbf{j} - a^2 \sin v \cos v\, \mathbf{k} \\
=& -a \sin v \left[a \, \sin v \, \cos u\, \mathbf{i} + a \, \sin v \, \sin u\, \mathbf{j} + a \cos v\, \mathbf{k}\right] \\
=& -a \sin v\, \mathbf{r}
\end{aligned}
$$

Note que o vetor $\mathbf{n}$ aponta para dentro da esfera já que $\sin v \geq 0$ no intervalo $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ o qual representa o hemisfério superior, e $\sin v \leq 0$ no intervalo $\frac{\pi}{2} < v \leq \pi$, o qual representa o hemisfério inferior. Devido a que desejamos trabalhar com a orientação positiva redefinimos nosso vetor normal para

$$\mathbf{n} = a \sin v\, \mathbf{r}$$

Escrevendo o campo $\mathbf{F}$ em termos de (u, v):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(u, v) =& a \, \sin v \, \cos u\, \mathbf{i} + a \, \sin v \, \sin u\, \mathbf{j} + a \cos v\, \mathbf{k} \\
=& \mathbf{r}
\end{aligned}
$$

de onde o elemento de fluxo está dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} =& (a \sin v\, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \\
=& a \sin v
\end{aligned}
$$

dessa forma a integral de superfície do campo vetorial será

$$
\begin{aligned}
\Phi_S =& \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} \\
=& \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a \sin v \, du \, dv \\
=& 2\pi a \int_0^{\pi} \sin v \, dv \\
=& -2\pi a \left(\cos \pi - \cos 0\right) \\
=& 4\pi a
\end{aligned}
$$

Exemplo 05

Calcule o fluxo do campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

e S é a superfície externa da região sólida E delimitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$

Sol

A interseção do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$ está dado por

$$\begin{aligned} 1 - x^2 - y^2 &= z \\ 1 - x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

uma circunferência de raio 1. Por tanto a nossa superfície é formada na realidade por duas superfícies, o paraboloide acima de z=0 e o círculo de raio 1 no plano xy, isto é

$$\Phi = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

Em ambos casos podemos pensar as superfícies definidas de forma implícita. Analisemos primeiramente a superfície o fluxo através da superfície S_1:

$$\begin{aligned} f =& x^2 + y^2 + z - 1 \\ \vec{\nabla} f =& 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \vec{\nabla} f \cdot \mathbf{k} =& 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 =& \pm \frac{\vec{\nabla} f}{\vec{\nabla} f \cdot \mathbf{k}} \\ =& 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

onde foi escolhido o sinal positivo já que o fluxo será calculado saindo da superfície. Escrevendo o campo em termos de x, y

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y) =& y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \left(1 - x^2 - y^2\right)\,\mathbf{k} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} =& 2xy + 2xy + 1 - x^2 - y^2 \\ =& 1 + 4xy - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Levando em consideração que a superfícies está projetada no plano xy numa região definida por $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, temos que o fluxo está dado por

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} \\ &= \iint_{0 \leq x^2+y^2 \leq 1} \left(1 + 4xy - x^2 - y^2\right) dx\, dy\end{aligned}$$

passando para coordenadas polares e considerando

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 + 4r^2 \cos\theta \sin\theta - r^2\right) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos\theta \sin\theta - \frac{1}{4}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \int \sin 2\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Para o caso da superfície S_2 temos

$$\begin{aligned}f_2 &= x^2 + y^2 \\ \vec{\nabla} f_2 &= 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

onde, o campo escrito em termos de x, y

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) &= y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= 2xy + 2xy \\ &= 4xy\end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(4r^2 \cos\theta \sin\theta\right) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos\theta \sin\theta)\, d\theta \\ &= \int \sin 2\theta\, d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

dessa forma

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 05

Calcule o fluxo de $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{j}$ através da superfície S definida por $y = 1 + x^2 + z^2$ para $1 \leq y \leq 5$ com S orientada apontando na direção negativa de y.

Sol

Obviamente esta superfície é uma superfície definida de forma explicita, por tanto o vetor normal está dado pela seguinte equação

$$\mathbf{n}_1 = -\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

onde

$$y = F(x, z) = 1 + x^2 + z^2$$

de forma que

$$\mathbf{n}_1 = -2x\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

Observe que este vetor é o vetor que aponta na direção positiva de $\mathbf{j}$, de forma que o vetor norma que devemos utilizar é

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= -\,\mathbf{n}_1 \\ &= 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Como o campo já está escrito em termos da variável adequada passamos a calcular o produto escalar

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -x^2$$

A região de integração está dada por

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & y & \leq & 5 \\ 1 & \leq & 1 + x^2 + z^2 & \leq & 5 \\ 0 & \leq & x^2 + z^2 & \leq & 4 \end{array}$$

de forma que

$$\Phi = \iint_{0 \leq x^2 + z^2 \leq 4} x^2\,dx\,dy$$

escrevendo em coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
\Phi &= -\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,\cos^2\theta\, r\, dr\, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos^2\theta\, dr\, d\theta \\
&= -\frac{2^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta \\
&= -4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

utilizando

$$2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$$

temos

$$
\begin{aligned}
\Phi &= -2\int_0^{2\pi} d\theta + 2\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta \\
&= -4\pi
\end{aligned}
$$

sdsadasad

$$\mathbf{r}(t)\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}$$