UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

O TEOREMA DE STOKES

MARCELO DOS SANTOS

Ilhéus-Bahia
Novembro-2010

MARCELO DOS SANTOS

O TEOREMA DE STOKES

Trabalho de conclusão de curso elaborado junto ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), sob orientação do Prof. Darlan Ferreira de Oliveira, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Ilhéus-Bahia
2010

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial deste Trabalho de Conclusão de Curso por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: __________________________ **Local e Data**: _____________,_____ _____ _____

DEDICATÓRIA

A minha mãe Doralice Dos Santos

"Se não está em nosso poder o discernir as melhores opiniões, devemos seguir as mais prováveis".(René Descartes)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me dado a coragem necessária para enfrentar os momentos difíceis.

A minha amada família: minha mãe Doralice dos Santos, meu pai José Augusto dos Santos , meus irmãos João José e Rogério Augusto por sempre acreditarem em mim e pela força ao longo de todos estes anos de minha graduação.

Ao professor Darlan Ferreira de Oliveira, meu orientador, pelas conversas matemáticas, incentivos, ensinamentos, amizade escolha do tema e toda sua dedicação durante todo o período de elaboração deste trabalho.

Aos meus colegas de turma: Tábita Thalita e Robson Cajueiro pelas conversas, críticas construtivas e amizade.

A professora Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana pelas sugestões nas correções desse trabalho, pelo incentivo que me deu para estudar mais e por ser uma professora esclarecedora dos meus questionamentos.

Aos professores Nestor Felipe, Afonso Henriques, André Nagamine, José Reis Damaceno, Sérgio Álvarez, José Carlos Chagas, Erinalva Calasans, que contribuiram, de forma significativa, na minha formação acadêmica com conversas matemáticas e não-matemáticas.

Aos meus amigos da UESC, pelas várias conversas, especialmente Thiago Campos, Mayve Lima, Willian Monteiro e João Lúcio.

A todos que compõem o colegiado do curso de matemática em especial a nossa secretária Ana Carolina da Mata Virgem Lemos pela simpatia e atenção aos nossos pedidos.

Na tentativa de não omitir nenhum nome: a todos os amigos do Salobrinho, do colégio CEAMEV e da UESC, pelo apoio, compreensão e carinho, pelas piadas e pela força.

RESUMO

A Análise Vetorial clássica gira em torno dos chamados Teoremas Integrais, associados aos nomes ilustres de Green, Gauss e Stokes. Com o uso das formas diferenciais, especialmente da diferenciação exterior e do operador pull-back, todos esses teoremas se reduzem a um único, conhecido como Teorema de Stokes, o qual se exprime de maneira concisa e elegante sob a forma $\int_C dw = \int_{\partial C} w$. Explicar e demonstrar a igualdade acima, esclarecendo cada conceito nela envolvido e ilustrar sua utilidade na redemonstração dos Teoremas Integrais é o principal objetivo deste trabalho. O primeiro capítulo procura dar um tratamento elementar e conciso aos conceitos de formas diferenciais, produto exterior, diferencial exterior e operador pull-back. No capítulo dois inicia-se o estudo dos teoremas da análise vetorial do tipo Stokes, a saber: o teorema de Green, Gauss e Stokes. Antes de demonstrar tais teoremas, são introduzidos alguns conceitos tais como, curva suave, curva fechada, região simples, o operador (∇) e o (rot) de um campo vetorial. Por fim, finalizamos o capítulo com as demonstrações dos teoremas integrais. No capítulo três é definida a noção de cubos singulares, cadeias, faces e fronteira. É definido ainda, o conceito de integração em cadeias e o elemento de volume dV. Em seguida é apresentada a demonstração do teorema de Stokes em cadeias. O capítulo é finalizado redemonstrando os teoremas clássicos do cálculo utilizando o teorema de Stokes.

Palavras-chave: Formas Diferenciais; Teorema de Stokes; Teoremas clássicos da análise vetorial; operador diferencial; operador pull-back; n-cadeias.

Abstract

The Vector Analysis classic revolves around so-called Integral Theorems, associated with the illustrious names of Green, Gauss and Stokes. With the use of differential forms, especially the exterior differentiation operator and the pull-back, all these theorems are reduced to a single, known as Stokes' theorem, which is expressed in a concise and elegant form $\int_C dw = \int_{\partial C} w$. Explain and demonstrate the equality above, explaining each concept involved in it and illustrate its usefulness in redemonstração Theorems of Integral is the main objective of this work. The first chapter seeks to provide a concise treatment and elementary concepts of differential forms, exterior product, exterior differential operator and pull-back. In Chapter Two begins the study of the theorems of vector analysis of the Stokes type, namely the theorem of Green, Gauss and Stokes. Before demonstrating these theorems are introduced concepts such as gentle curve, closed curve, simple region, the operator del (∇) and *rot* of a vector field. Finally, we've closed the chapter with the full proofs of the theorems. In chapter three is defined the notion of natural hubs, chains, and boundary faces. It also defined the concept of integration in chains and volume element dV. Next is presented a demonstration of Stokes' theorem in chains. The chapter ends redemonstrando the theorems of calculation using Stokes' theorem.

Keywords: Differential Forms; Stokes'theorem; classical theorems of vector analysis, differential operator, operator pull-back, n-chains.

Sumário

Introdução

Este trabalho trata do Teorema de Stokes em cadeias. George Stokes, matemático e físico britânico nascido em Skreen, Sligo, Irlanda, 13 de agosto de 1819, faleceu em Cambridge, Inglaterra, 1º de fevereiro de 1903.

No capítulo 1, estão as noções preliminares, que envolve os conceitos de formas diferenciais, campos vetoriais, diferencial exterior e operador pull-back. Enquanto no capítulo 2 apresentamos o Teorema de Stokes na versão do Cálculo Vetorial , ao lado dos inseparáveis companheiros, o Teorema de Green e o da Divergência. No capítulo 3, apresentaremos o tema central de nosso trabalho que é o Teorema de Stokes em cadeias, abrindo uma breve introdução sobre $k-$cubos, cadeias, integração em cadeias e o elemento de volume. A história desse resultado, o Teorema de Stokes, tem aspectos curiosos, e o próprio teorema tem passado por metamorfoses que impressionam.

Foi ele mencionado pela primeira vez em 2 de julho de 1850, num adendo a uma carta de Sir Willian Thomson (Lord Kelvin) a Stokes. Ele se torna de domínio público como a questão número 8 do Smith's Prize Examination, ano de 1854. Esse exame era parte de uma competição anual a qual concorriam os melhores alunos da Universidade de Cambridge. Stokes organizou-a de 1849 a 1882 e, na ocasião de seu falecimento, esse resultado já era conhecido por toda a comunidade como "O Teorema de Stokes"'.

Capítulo 1

Formas Diferenciais

Este capítulo visa dar uma noção de alguns dos principais conceitos e resultados da Geometria Diferencial, necessários para compreensão dos resultados que pretendemos demonstrar.

1.1 Formas Diferenciais em $\mathbb{R}^n$

A noção de formas diferenciais engloba idéias tais como elementos de área e de volume de uma superfície, o trabalho exercido por uma força, o fluxo de um fluido, a curvatura de uma superfície no espaço, etc. Uma importante operação sobre formas diferenciais é a derivação exterior, a qual generaliza os operadores divergente, gradiente e rotacional do cálculo vetorial. O estudo de formas diferenciais, o qual foi iniciado por E. Cartan por volta do ano 1900, é as vezes denominado de Cálculo diferencial exterior.

Um estudo matematicamente rigoroso de formas diferenciais requer o conhecimento das ferramentas de álgebra multilinear. Felizmente, é perfeitamente possível adquirir um conhecimento sólido de formas diferenciais, sem entrar neste formalismo. Esse é o objetivo deste capítulo.

Para fixarmos ideias, vamos inicialmente introduzir as definições em $\mathbb{R}^3$.

Seja p um ponto do $\mathbb{R}^3$. O conjunto de vetores aplicados em p, chama-se espaço tangente de $\mathbb{R}^3$ em p, e será denotado por $T_p\mathbb{R}^3$. Com as operações usuais $T_p\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial.

Definição 1.1.1 *Um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $v : \mathbb{R}^3 \to T_p\mathbb{R}^3$ que a cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ associa $v(p) \in T_p\mathbb{R}^3$ onde $v(p)$ pode ser escrito na forma*

$$v(p) = a_1(p)e_1 + a_2(p)e_2 + a_3(p)e_3,$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. O campo de vetores v diz-se diferenciável quando as funções $a_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq 3$, são diferenciáveis.

Para cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^3$, consideremos o espaço dual $(T_p\mathbb{R}^3)^*$, que é o conjunto dos funcionais lineares $f : T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Uma base para $(T_p\mathbb{R}^3)^*$, é obtida tomando $dx_i(p)$, $1 \leq i \leq 3$, onde $x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a projeção na i-ésima coordenada. De fato, o conjunto $dx_i(p)$, $1 \leq i \leq 3$, forma uma base, pois $dx_i(p) \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$, e

$$dx_i(p)(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \begin{cases} 0, & se \quad i \neq j \\ 1, & se \quad i = j \end{cases}$$

isto é, $\{dx_1(p), dx_2(p), dx_3(p)\}$ é a base de $(T_p\mathbb{R}^3)^*$ dual da base $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ de $T_p\mathbb{R}^3$.

Definição 1.1.2 *Um campo de formas lineares ou forma exterior de grau 1 em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação w que a cada $p \in \mathbb{R}^3$ associa $w(p) \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$. w pode ser escrita na forma*

$$w(p) = a_1(p)dx_1(p) + a_2(p)dx_2(p) + a_3(p)dx_3(p),$$

onde a_i são funções definidas em $\mathbb{R}^3$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. w chama-se forma exterior continua quando as funções a_i são continuas. Se as funções a_i forem diferenciáveis, w passa a ser chamada de forma diferencial de grau 1.

Seja $\wedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineares (isto é, linear em cada variável) e alternadas (isto é, $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$). Com as definições usuais de soma e produto por escalar $\wedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ se torna um espaço vetorial.

Definição 1.1.3 *Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$ funcionais lineares. Podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \wedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ definindo*

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

Como o determinante de uma matriz $2x2$ é uma função bilinear de suas linhas e colunas, ou seja,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1 + u, v_2) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1 + u) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1 + u) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix} \\ &= \varphi_1(v_1 + u)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1 + u) \\ &= \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) + \varphi_1(u)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(u) \\ &= \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) + \varphi_1(u)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(u) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix} \\ &= \varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) + \varphi_1 \wedge \varphi_2(u, v_2) \end{aligned}$$

Analogamente, $\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2 + u) = \varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) + \varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, u)$

e

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, \lambda v_2) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(\lambda v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(\lambda v_2) \end{vmatrix} \\ &= \varphi_1(v_1)\varphi_2(\lambda v_2) - \varphi_1(\lambda v_2)\varphi_2(v_1) \\ &= \lambda\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \lambda\varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) \\ &= \lambda(\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1)) \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix} = \lambda\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $v_1, v_2, u \in T_p\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. E alternada,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) &= \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) \\ &= -(\varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) - \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)) \\ &= -\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_2, v_1), \end{aligned}$$

segue-se que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \wedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$.

Segue da definição acima que:

$$dx_i(p) \wedge dx_j(p) = -dx_j(p) \wedge dx_i(p)$$

e

$$dx_i(p) \wedge dx_i(p) = 0.$$

Mostraremos na proposição **??**, de uma maneira mais geral, que o conjunto $\{dx_i(p) \wedge dx_j(p), i < j\}$ forma uma base para o espaço $\wedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$.

Definição 1.1.4 *Um campo de formas bilineares alternadas ou forma exterior de grau* 2 *em* $\mathbb{R}^3$ *é uma aplicação* w *que a cada* $p \in \mathbb{R}^3$ *associa* $w(p) \in \wedge^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$; w *pode ser escrito na forma*

$$w(p) = a_{12}(p)dx_1(p) \wedge dx_2(p) + a_{13}(p)dx_1(p) \wedge dx_3(p) + a_{23}(p)dx_2(p) \wedge dx_3(p).$$

As funções $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cujos valores em cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas do funcional $w(p)$. Se as funções coordenadas a_{ij} forem diferenciáveis, w é chamada uma forma diferencial de grau 2 .

Passamos agora a generalizar a noção de formas diferenciais a $\mathbb{R}^n$. Sejam $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n$ o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p, $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o seu espaço dual. Com as operações usuais $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ é um espaço vetorial.

Definição 1.1.5 *Seja* $\wedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ *o conjunto das aplicaçõe* $\varphi : \underbrace{T_p\mathbb{R}^n \times \cdots \times T_p\mathbb{R}^n}_{k-vezes} \to \mathbb{R}$ *k-lineares, isto é, seus valores* $\varphi(v_1, \cdots, v_k)$ *dependem linearmente de cada uma das variáveis* $(v_1, \cdots, v_k) \in T_p\mathbb{R}^n$*, ou seja,*

$$\varphi(v_1, v_2 \cdots, v_i + u_i, \cdots, v_k) = \varphi(v_1, v_2 \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \varphi(v_1, v_2 \cdots, u_i, \cdots, v_k)$$

e

$$\varphi(v_1, v_2 \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_k) = \lambda\varphi(v_1, v_2 \cdots, v_i, \cdots, v_k)$$

quaisquer que sejam $(v_1, \cdots, v_k) \in T_p\mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

As operações usuais de soma de aplicações e produto de um aplicação por uma escalar fazem do conjunto $\wedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ um espaço vetorial. Diremos que uma aplicação $\varphi \in \wedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ é alternada se $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_k) = 0$ sempre que a sequência $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ possuir repetições, ou seja, se existirem $i \neq j$ com $v_i = v_j$ e diremos que é anti-simétrica se

$$\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = -\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$$

para quaisquer $(v_1, v_2, \cdots, v_k) \in T_p\mathbb{R}^n$.

Se $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ são funcionais lineares, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \wedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ definido por:

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, \cdots, v_k) = det(\varphi_i(v_j)).$$

Decorre das propriedades de determinantes que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ é de fato k-linear e alternada.

Em particular,

$$dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p) \in \wedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*.$$

Proposição 1.1.6 *O conjunto* $\{dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p)\}$, $i_1 < ... < i_k$, *onde* $i_j \in \{1, \cdots, n\}$, *forma uma base para* $(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Demonstração . Mostremos que os elementos do conjunto são LI e geram $(T_p\mathbb{R}^n)^*$. De fato, se

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0, i_j \in \{1, \cdots, n\}$$

então aplicando a $(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}), j_1 < \cdots < j_k$ e $j_l \in \{1, ..., n\}$ obteremos:

$$\begin{aligned} a_{j_1 \cdots j_k} &= \sum a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) \\ &= \sum a_{i_1 \cdots i_k} \underbrace{det(dx_{i_k}(e_{j_n}))}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

para todo $j_1, \cdots, j_k$. Logo os coeficientes $a_{j_1 \cdots j_k}$ são nulos e $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\}$ são LI.

Vamos agora mostrar que se $f \in \wedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$, então f é uma combinação linear da forma

$$f = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Tomemos

$$g = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

um elemento de $\wedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$ temos, $g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ para todo $i_1, \cdots, i_k$ segue que $f = g$. Com efeito, provemos por indução sobre k, sejam $f, g : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funcionais lineares.

Dado $u \in T_p\mathbb{R}^n$ arbitrário, logo podemos escrever $u = \sum a_{i_k} e_{i_k}$. Então $f(u) = \sum a_{i_k} f(e_{i_k}) = \sum a_{i_k} g(e_{i_k}) = g(u)$, portanto $f = g$.

Supondo agora que a igualdade seja válida para aplicações $k-$lineares , e provemos que vale para aplicações $(k+1)-$lineares. Sejam $f, g \in \wedge^{k+1} (T_p\mathbb{R}^n)^*$, tais que

$$g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_{k+1}}) = f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_{k+1}})$$

Para cada $u \in T_p\mathbb{R}^n$, definamos as aplicações $k-$lineares $f_u, g_u \in \wedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$ pondo

$$f_u(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}, u)$$

e

$$g_u(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}, u).$$

Então, para todo $\in G$ (onde G é o conjunto de geradores de $T_p\mathbb{R}^n$), temos $f_u = g_u$. Obsevando que $u \longmapsto f_u, u \longmapsto g_u$ são funcionais lineares de $T_p\mathbb{R}^n$ em $\wedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$, pela primeira parte temos $f = g$.

Fazendo $f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k}$ obtemos,

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = f.$$

Portanto o conjunto $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\}$ forma uma base para $(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Definição 1.1.7 *Uma k-forma exterior em $\mathbb{R}^n, (k \geq 1)$ é uma aplicação w que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa $w(p) \in \wedge^k (T_p\mathbb{R}^n)^*$. Assim w pode ser escrito como:*

$$w(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k}(p) dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p), \quad i_j \in \{1, \cdots, n\}.$$

$a_{i_1 \cdots i_k}$ são aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Se as funções $a_{i_1 \cdots i_k}$ forem diferenciáveis, w é chamada uma k-forma diferencial.

Indiquemos por I a k-upla $(i_1, \cdots, i_k), i_1 < \cdots < i_k,\ i_j \in \{1, \cdots, n\}$ e tomemos para w a notaçao

$$w = \sum_I a_I dx_I$$

$$\Rightarrow w(p) = \sum_I a_I(p) dx_I(p).$$

Convencionaremos que uma 0-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.8 *Em $\mathbb{R}^4$ temos os seguintes tipos de formas diferenciais, onde a_i são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^4$.*

$1 - formas : a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_4dx_4;$

$2 - formas : a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{14}dx_1 \wedge dx_4 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3 + a_{24}dx_2 \wedge dx_4 + a_{34}dx_3 \wedge dx_4;$

$3 - formas : a_{123}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + a_{124}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + a_{134}dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + a_{234}dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4;$

$4 - formas : a_{1234}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4;$

De agora em diante só trataremos de formas diferenciais.

Se w e φ são duas k-formas:

$$w = \sum_I a_I dx_I \ , \varphi = \sum_I b_I dx_I \quad I = (i_1, ..., i_k), i_1 < ... < i_k$$

podemos definir a soma

$$\begin{aligned} w + \varphi &= \sum_I a_I dx_I + \sum_I b_I dx_I \\ &= \sum_I (a_I + b_I) dx_I. \end{aligned}$$

Na definição **??** vimos o produto de funcionais em $(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Agora vamos definir o que seja o produto de uma $k-$forma por uma $s-$forma.

Se w é uma k-forma e φ uma s-forma é possível definir uma operação, chamada produto exterior $w \wedge \varphi$ obtendo uma (k + s)-forma definida como segue:

Definição 1.1.9 *Sejam* $w = \sum_I a_I dx_I, I = (i_1, \cdots, i_k),\ i_1 < \cdots < i_k$ *e* $\varphi = \sum_J b_J dx_J,\ J = (j_1, \cdots, j_s),\ j_1 < \cdots < j_s$. *Por definição*

$$w \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

A operação de produto exterior goza das seguintes propriedades :

Proposição 1.1.10 *Se* w *é uma* k *- forma,* φ *uma* s*-forma e* θ *uma* r*-forma temos:*

$$\begin{array}{ll} (i) & (w \wedge \varphi) \wedge \theta = w \wedge (\varphi \wedge \theta) \\ (ii) & w \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge w \\ (iii) & w \wedge (\varphi + \theta) = w \wedge \varphi + w \wedge \theta \quad \textit{quando } r = s \end{array}$$

Demonstração . (i) Seja $w = \sum_I a_I dx_I$, $\varphi = \sum_J b_J dx_J$ e $\theta = \sum_H c_H dx_H$, temos que

$$\begin{aligned} (w \wedge \varphi) \wedge \theta &= [(\sum_I a_I dx_I) \wedge (\sum_J b_J dx_J)] \wedge (\sum_H c_H dx_H) \\ &= (\sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J) \wedge \sum_H c_H dx_H \\ &= \sum_{I,J,H} a_I b_J c_H dx_I \wedge dx_J \wedge dx_H \\ &= \sum_I a_I dx_I \wedge (\sum_{J,H} b_J c_H dx_J \wedge dx_H) \\ &= w \wedge (\varphi \wedge \theta) \end{aligned}$$

(ii) Seja $w = \sum_I a_I dx_I$ e $\varphi = \sum_J b_J dx_J$, onde $I = (i_1, \cdots, i_k)$ e $J = (j_1, \cdots, j_s)$

$$\begin{aligned} w \wedge \varphi &= \sum_{I,J} a_I b_J dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &= \sum_{I,J} b_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &= \sum_{I,J} b_J a_I (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo raciocínio para cada dx_{j_l}, $j_l \in J$, e como J tem s elementos obtemos

$$w \wedge \varphi = \sum_{I,J} b_J a_I (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}.$$

Portanto

$$w \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge w.$$

(iii) Seja $w = \sum_I a_I dx_I$, $\varphi = \sum_J b_J dx_J$ e $\theta = \sum_H c_H dx_H$, como φ e θ são $r-$ formas podemos tomar $J = H$. Então

$$\begin{aligned}
w \wedge (\varphi + \theta) &= \sum_I a_I dx_I \wedge (\sum_J b_J dx_J + \sum_J c_J dx_J) \\
&= \sum_I a_I dx_I \wedge (\sum_J (b_J + c_J) dx_J) \\
&= \sum_{I,J} a_I (b_J + c_J) dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{I,J} (a_I b_J + a_I c_J) dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I c_J dx_I \wedge dx_J \\
&= w \wedge \varphi + w \wedge \theta.
\end{aligned}$$

Em geral, o produto exterior de uma k-forma e uma s-forma é uma (k+s)-forma. Visto que uma 0-forma é meramente uma função diferenciável, a multiplicação por uma 0-forma não afeta o grau de uma forma.

O produto exterior de uma k-forma e uma s-forma será zero em $\mathbb{R}^n$ se $k + s$ é maior que n, visto que existirão repetições.

Exemplo 1.1.11 *Para as formas diferenciais no* $\mathbb{R}^3$ *com* $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ $\alpha = xdx - ydy$ *e* $\beta = xdx - zdy + y^2 dz$*, temos:*

$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ e $dx \wedge dz = -dz \wedge dx$, logo

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (xdx - ydy) \wedge (xdx - zdy + y^2 dz) \\
&= x^2 dx \wedge dx - xydy \wedge dx - xzdx \wedge dy + yzdy \wedge dy + xy^2 dx \wedge dz - y^3 dy \wedge dz \\
&= x(y - z) dx \wedge dy - y^3 dy \wedge dz - xy^2 dz \wedge dx.
\end{aligned}$$

Embora $dx_i \wedge dx_i = 0$, pode ocorrer que para alguma forma diferencial w tenhamos $w \wedge w \neq 0$. Por exemplo, se $w = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4$, é um $2-$forma no $\mathbb{R}^4$ teremos

$$\begin{aligned}
w \wedge w &= (x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4) \wedge (x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4) \\
&= {x_1}^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \\
&\quad + x_2 x_1 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + {x_2}^2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&= x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&= 2 x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

1.2 A Diferencial Exterior

A diferencial exterior de uma forma w é definida de tal modo que os vários teoremas do Cálculo, conhecidos sob os nomes de Green, Gauss, Stokes e até mesmo o Teorema fundamental do Cálculo

$$\int_a^b df = f(b) - f(a),$$

sejam resumidos numa única fórmula, que se escreve

$$\int_S dw = \int_{\partial S} w$$

a qual é conhecida como Teorema de Stokes. Nosso próximo passo, a caminho desta fórmula, será a definição e o estabelecimento de propriedades básicas sobre dw.

Definição 1.2.1 *Seja $w = \sum_I w_I dx_I$ uma k-forma diferencial. Definimos uma $(k+1)$-forma diferencial dw que chamaremos a diferencial exterior de w, como sendo*

$$\begin{aligned}
dw &= \sum_I dw_I \wedge dx_I \\
&= \sum_{I,j} \frac{\partial w_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.2 *Sejam w, η formas diferencias de classe C^2 definidas em $\mathbb{R}^m$. Então:*

(1) *$d(w + \eta) = dw + d\eta$, onde w, η são $k-$formas*

(2) *Sendo w, η formas diferenciais de ordem k, l, respectivamente. Tem-se:*

$$d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta$$

(3) $d(dw) = 0$, *ou seja*, $d^2 = 0$.

Demonstração . (1) Sejam $w = \sum_I w_I dx_I$ e $\eta = \sum_I \eta_I dx_I$ duas k-formas. Então

$$w + \eta = \sum_I (w_I + \eta_I) dx_I$$

e

$$\begin{aligned} d(w+\eta) &= \sum_I d(w_I + \eta_I) \wedge dx_I \\ &= \sum_I (dw_I + d\eta_I) \wedge dx_I \\ &= \sum_I dw_I \wedge dx_I + \sum_I d\eta_I \wedge dx_I \\ &= dw + d\eta \end{aligned}$$

(2) Seja $w = \sum_I w_I dx_I$ uma k-forma e $\eta = \sum_J \eta_J dx_J$ uma s-forma. Então

$$w \wedge \eta = \sum_{I,J} w_I \eta_J dx_I \wedge dx_J$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(w \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(w_I \eta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} (dw_I \eta_J + w_I d\eta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta \end{aligned}$$

Observemos que se w, η são $0-$formas (aplicações difenciáveis), então $d(w\eta) = wd\eta + dw\eta$, ou seja, basta aplicar a regra do produto para funções diferenciáveis.

(3) Seja $w = \sum_I w_I dx_I$, então $dw = \sum_{I,j} \frac{\partial w_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$. Daí

$$\begin{aligned} d(dw) &= d(\sum_{I,j} \frac{\partial w_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I) = \sum_{k,I,j} \frac{\partial^2 w_I}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge (dx_j \wedge dx_I) \\ &= \sum_I \left[\sum_{k,j} \frac{\partial^2 w_I}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \right] \wedge dx_I \\ &= \sum_I \left[\sum_{k<j} \left(\frac{\partial^2 w_I}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 w_I}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx_k \wedge dx_j \right] \wedge dx_I \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelo teorema de Schwarz.

1.3 O Operador Pull-Back

Passaremos agora a definir um aplicação que leva k-formas sobre o espaço $\mathbb{R}^m$ em k-formas sobre o espaço $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A aplicação linear $df(p) : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ induz uma transformação linear $f_p^* : \wedge^k(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)^* \to \wedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ que para cada $\varphi_{f(p)} \in \wedge^k(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)^*$ associa $f_p^*(\varphi_{f(p)})$, definida da seguinte maneira*

$$f_p^*(\varphi_{f(p)})(v_1, \cdots, v_k) = \varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, df(p) \cdot v_k),\ \ v_1, \cdots, v_k \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Aqui, a transformação linear $df(p) : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ é a derivada de f no ponto p. Fazendo o ponto p variar em $\mathbb{R}^n$, obteremos uma aplicação f^* que leva k-formas de $\mathbb{R}^m$ em k-formas de $\mathbb{R}^n$, denoninada Pull-Back . $\varphi \mapsto f^*\varphi$ define uma transformação linear, isto é, $f^*(a \cdot \varphi + b \cdot \omega) = a \cdot f^*\varphi + b \cdot f^*\omega$ se $a, b \in \mathbb{R}$.

Observemos que $f_p^*(\varphi_{f(p)})$ assim definida é um elemento de $\wedge^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
f_p^*(\varphi_{f(p)})(v_1, \cdots, v_i + u_i, \cdots, v_k) &= \varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, df(p) \cdot (v_i + u_i), \cdots, df(p) \cdot v_k) \\
&= \varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, df(p) \cdot v_i + df(p) \cdot u_i, \cdots, df(p) \cdot v_k) \\
&= \varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, df(p) \cdot v_i, \cdots, df(p) \cdot v_k) \\
&+ \varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, df(p) \cdot u_i, \cdots, df(p) \cdot v_k) \\
&= f_p^*(\varphi_{f(p)})(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + f_p^*(\varphi_{f(p)})(v_1, \cdots, u_i, \cdots, v_k)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f_p^*(\varphi_{f(p)})(v_1, \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_k) &= \varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, df(p) \cdot (\lambda v_i), \cdots, df(p) \cdot v_k) \\
&= \varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, \lambda df(p) \cdot v_i, \cdots, df(p) \cdot v_k) \\
&= \lambda\varphi_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \cdots, df(p) \cdot v_i, \cdots, df(p) \cdot v_k) \\
&= \lambda f_p^*(\varphi_{f(p)})(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k),
\end{aligned}$$

logo, $f_p^*(\varphi_{f(p)})$ é $k-$ linear.

Convenciona-se que $f^*(g) = g \circ f$ se g é uma 0-forma. Por simplicidade de notação, ao longo deste texto, usaremos f^* ao invés de f_p^*.

Proposição 1.3.2 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável então:*

(i) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$, onde ω_1 e ω_2 são k-formas sobre $\mathbb{R}^m$.

(ii) $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$, onde g é uma 0-forma e ω uma k-forma sobre $\mathbb{R}^m$.

(iii) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$, onde ω_1 e ω_2 são 1-formas sobre $\mathbb{R}^m$.

Demonstração . (i) Seja $p \in \mathbb{R}^n$ e $v_1, v_2, \cdots, v_k \in T_p\mathbb{R}^n$. Então

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1+\omega_2)(v_1,\cdots,v_k) &= (\omega_1+\omega_2)(df(p)\cdot v_1,\cdots,df(p)\cdot v_k) \\ &= \omega_1(df(p)\cdot v_1,\cdots,df(p)\cdot v_k)+\omega_2(df(p)\cdot(v_1),\cdots,df(p)\cdot(v_k)) \\ &= f^*(\omega_1)(v_1,\cdots,v_k)+f^*(\omega_2)(v_1,\cdots,v_k) \\ &= (f^*(\omega_1)+f^*(\omega_2))(v_1,\cdots,v_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii)\ f^*(g\omega)(v_1,\cdots,v_k) &= (g\omega)(df(p)\cdot v_1,\cdots,df(p)\cdot v_k) \\ &= g\circ\omega(df(p)\cdot v_1,\cdots,df(p)\cdot v_k) \\ &= g(\omega(df(p)\cdot v_1,\cdots,df(p)\cdot v_k)) \\ &= g\circ f^*\omega \\ &= f^*(g)f*(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii)\ f^*(\omega_1\wedge\omega_2)(v_1,v_2) &= (\omega_1\wedge\omega_2)(df(v_1),df(v_2)) \\ &= \begin{vmatrix} \omega_1(df(v_1)) & \omega_1(df(v_2)) \\ \omega_2(df(v_1)) & \omega_2(df(v_2)) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} f^*\omega_1(v_1) & f^*\omega_1(v_2) \\ f^*\omega_2(v_1) & f^*\omega_2(v_2) \end{vmatrix} \\ &= (f^*\omega_1)\wedge(f^*\omega_2)(v_1,v_2) \end{aligned}$$

O item (iii) vale para formas w_1 e w_2 quaisquer e será provado mais adiante.

A operação f^* equivale, na verdade, a uma substituição de variáveis. Com efeito, seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável que a cada $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ associa $(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^m$ da forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 &=& f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ y_m &=& f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Se $w=\sum_I a_I dy_I$ é uma k-forma em $\mathbb{R}^m$, usando as propriedades de f^*, temos que

$$f^*w=\sum_I f^*(a_I)f^*(dy_{i_1})\wedge\cdots\wedge f^*(dy_{i_k}).$$

Como pela regra da cadeia $dy_i(f(p))df(p)=d(y_i\circ f)(p)$. Então

$$\begin{aligned} f^*(dy_i)(v) &= dy_i(df(p)\cdot v) \\ &= d(y_i\circ f)(p)\cdot v \\ &= df_i(p)\cdot v \end{aligned}$$

obteremos

$$f^*w = \sum_I a_I(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

onde f_i e df_i são funções de x_j. Portanto aplicar f^* a w, equivale a substituir em w as variáveis y_i e suas diferenciais dy_i pelas funções de x_k e dx_k obtidas em **??**.

Proposição 1.3.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável que a cada $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associa $(y_1, \cdots, y_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$. Então:*

(i) $f^*(w \wedge \varphi) = f^*w \wedge f^*\varphi$, onde w e φ são formas diferenciais em $\mathbb{R}^m$.

(ii) $(f \circ g)^*w = g^*(f^*w)$, onde $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ é um aplicação diferenciável.

Demonstração . (i) Se $w = \sum_I a_I dy_I$ e $\varphi = \sum_J b_J dy_J$

então

$$w \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I b_J dy_I \wedge dy_J.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f^*(w \wedge \varphi) &= \sum_{I,J} a_I(f_1, \cdots, f_m) b_J(f_1, \cdots, f_m) df_I \wedge df_J \\ &= (\sum_I a_I(f_1, \cdots, f_m) df_I) \wedge (\sum_J b_J(f_1, \cdots, f_m) df_J) \\ &= f^*w \wedge f^*\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii)\ (f \circ g)^*w &= \sum_I a_I((f \circ g)_1, \cdots, (f \circ g)_m) d(f \circ g)_I \\ &= \sum_I a_I(f_1(g_1, \cdots, g_n), \cdots, f_m(g_1, \cdots, g_n)) df_I(dg_1, \cdots, dg_n) \\ &= g^*(f^*(w)). \end{aligned}$$

Teorema 1.3.4 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Então para uma k-forma w sobre o $\mathbb{R}^m$ temos*

$$f^*(dw) = d(f^*w).$$

Demonstração . Seja, inicialmente, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma 0 - forma que a cada $(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ associa $g(y_1, \cdots, y_m)$. Então,

$$f^*(dg) = f^*(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i) = \sum_{i=1}^m f^*(\frac{\partial g}{\partial y_i}) f^*(dy_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f) df_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j \\
&= d(g \circ f) = d(f^* g).
\end{aligned}
$$

Suponhamos agora que $d(f^*w) = f^*(dw)$ para uma k-forma w. Para mostrarmos a validade deste resultado para uma (k+1)-forma basta tomarmos uma (k+1)-forma do tipo $w \wedge dx_i$ visto que qualquer (k+1)-forma é uma soma finita de formas deste tipo. Sendo assim temos:

$$
\begin{aligned}
f^*(d(w \wedge dx_i)) &= f^*(dw \wedge dx_i + (-1)^k w \wedge d(dx_i)) \\
&= f^*(dw \wedge dx_i) \\
&= f^*(dw) \wedge f^*(dx_i).
\end{aligned}
$$

Por hipótese $f^*(dw) = d(f^*w)$, portanto

$$
\begin{aligned}
f^*(d(w \wedge dx_i)) &= d(f^*(w) \wedge f^*(dx_i) \\
&= d(f^*w \wedge f^*(dx_i)) \\
&= d(f^*(w \wedge dx_i)).
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

Os Teoremas Clássicos

Neste capitulo iremos apresentar os teoremas clássicos do cáculo vetorial: o teorema de Green, o teorema de Gauss e o teorema de Stokes.

2.1 Teorema de Green

O teorema de Green pode ser usado para calcular áreas de figuras planas limitadas e fechadas, trabalho de um campo de forças bidimensional, dentre outras aplicações. Além disso seu principio é utilizado para formulação de outros teoremas como por exemplo o teorema de Stokes e o teorema de Gauss. Suas aplicações se estendem para áreas da Física, química, engenharias, geologia, etc..

Antes de enunciar e demonstrar o teorema de Green precisamos de alguns conceitos com respeito a Campos vetoriais e integrais de linha.

Definição 2.1.1 *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\gamma : [a, b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *uma curva suave (isto é,* $\gamma'(t)$ *é continua e* $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$*). Seja ainda* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Tomemos $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$.

Seja $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *uma partição de* $[a, b]$*. Consideremos* $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \cdots, n$*. Esta partição em* $[a, b]$ *determina uma partição do arco* $\widehat{AB}$ *em arcos* $\widehat{P_{i-1}P_i}$*, onde* $P_i = \gamma(t_i)$.

Sejam $\Delta S_i =$ *comprimento do arco* $\widehat{P_{i-1}P_i}$ *e* $||\Delta|| = \max \Delta S_i$.

Em cada arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ *tomemos* (u_i, v_i) *e formamos a soma*

$$\sum_i f(u_i, v_i)\Delta S_i$$

Definimos a integral curvilínea (de linha) de f sobre γ de A até B como sendo

$$\int_\gamma f(x,y)ds = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_i f(u_i, v_i)\Delta S_i$$

desde que o limite exista independentemente da escolha $(u_i, v_i) \in \widehat{P_{i-1}P_i}$.

Definição 2.1.2 *Uma curva $\gamma : [a,b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é dita fechada quando $\gamma(a) = \gamma(b)$. Se γ não possui autointerseção é chamada de simples.*

Definição 2.1.3 *Uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é dita suave se possue derivadas contínuas de todas as ordens.*

Definição 2.1.4 *Uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é dita suave por partes se existe uma partição finita de $[a,b]$ em subintervalos tal que a restrição de γ a cada subintervalo seja suave.*

Definição 2.1.5 *Uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dita uma região simples se toda reta paralela a um dos eixos coordenados corta a fronteira de Ω em um segmento ou, no máximo, em dois pontos.*

Teorema 2.1.6 *(Green) Seja Ω uma região simples plana e simplesmente conexa, cuja fronteira é uma curva C suave por partes, fechada, simples e orientada no sentido anti-horário. Se f e g forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem continuas em algum conjunto aberto de $\mathbb{R}$, então*

$$\int_{\partial\Omega} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_\Omega (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy$$

Demonstração . Como Ω é simplesmente conexa existem funções contínuas $y_1(x), y_2(x)$, e $x_1(y), x_2(y)$ nos intervalos $a \le x \le b$ e $c \le y \le d$ respecitivamente, tais que

$$\begin{gathered}(x,y) \in \bar{\Omega} \Leftrightarrow a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ \text{e} \\ (x,y) \in \bar{\Omega} \Leftrightarrow c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\end{gathered}$$

onde $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

Sendo f, g contínuas com derivadas parciais contínuas no fecho $\bar{\Omega}$ de Ω , então

$$\iint_\Omega \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b (f(x,y)\mid_{y_1(x)}^{y_2(x)})dx \\
&= \int_a^b (f(x,y_2(x)) - f(x,y_1(x)))dx \\
&= -\int_a^b f(x,y_1(x))dx - \int_b^a f(x,y_2(x))dx
\end{aligned}
$$

A primeira integral é sobre a parte inferior C_1 da fronteira de Ω, orientada da esquerda para direita e a segunda sobre C_2 da mesma fronteira $\partial\Omega$, agora orientada da direita para esquerda.
Assim podemos escrever

$$
\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial\Omega} f(x,y)dx,
$$

pois a integral de fdx sobre algum possível trecho na vertical do contorno $\partial\Omega$ será zero , visto ser $dx = 0$ em tal trecho. De modo análogo temos que

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} dxdy &= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} dx \right) dy \\
&= \int_c^d (g(x_2(y),y) - g(x_1(y),y))dy \\
&= \int_c^d (g(x_2(y),y)dy + \int_d^c g(x_1(y),y))dy
\end{aligned}
$$

logo podemos escrever

$$
\iint_\Omega \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\Omega} gdy
$$

portanto,

$$
\int_{\partial\Omega} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_\Omega (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy
$$

2.2 Teorema da Divergência

O teorema da Divergência é também conhecido como teorema de Gauss e desempenha um papel semelhante ao do Teorema de Green para integrais curvilíneas. O teorema de Gauss nos dá uma alternativa interessante para o cálculo do fluxo de um campo de velocidades no plano ou espaço.

Para entender os teoremas de Gauss e mais adiante o teorema de Stokes, precisamos definir dois operadores para campos vetoriais que são básicos nas aplicações do cálculo vetorial. Cada operador lembra uma diferenciação, mas um produz um campo escalar enquanto que outro produz um campo vetorial.

Definiremos o operador diferencial vetorial ∇ como sendo:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Seja $F(x, y, z) = A_1(x, y, z)i + A_2(x, y, z)j + A_3(x, y, z)k$ um campo de vetores onde A_1, A_2, A_3 são funções diferenciáveis.

Definição 2.2.1 *A divergência de F denotada por $divF$, é definida por :*

$$divF = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

Definição 2.2.2 *O rotacional de F, denotado por $rotF$, é definido por :*

$$rotF = (\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})i + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})j + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})k.$$

Definição 2.2.3 *Uma superficie S é dita suave se o seu vetor normal unitário η varia continuamente através de S.*

Definição 2.2.4 *Consideremos uma superficie S, que tem como vetor unitário normal $\eta = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$. Sejam $A_1(x, y, z), A_2(x, y, z), A_3(x, y, z)$ funções contínuas definidas em S. Definimos,*

$$\iint_S A_1 dydz = \iint_S A_1 \cos\alpha dS$$

$$\iint_S A_2 dydz = \iint_S A_2 \cos\beta dS$$

$$\iint_S A_3 dydz = \iint_S A_3 \cos\gamma dS$$

Teorema 2.2.5 *(Gauss) Seja Ω um sólido limitado por uma superficie fechada S, formada por um número finito de superfícies suaves, e η a normal externa unitária. Se as componentes $F(x, y, z)$ tem derivadas parciais continuas num aberto contendo Ω, então :*

$$\iint_S F \cdot \eta dS = \iiint_\Omega divF dxdydz$$

Demonstração . A equação acima pode ser reescrita em termos de suas componentes como

$$\iint_S (A_1 dydz + A_2 dzdx + A_3 dxdy)\, dS = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial A_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_3(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz$$

É suficiente, então, estabelecer as três equações:

$$\iint_S A_3 dxdy = \iiint_\Omega \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz$$

As demonstrações da equações

$$\begin{aligned}
\iint_S A_1 dydz &= \iiint_\Omega \frac{\partial A_1}{\partial x} dxdydz \\
\iint_S A_2 dzdx &= \iiint_\Omega \frac{\partial A_2}{\partial y} dxdydz
\end{aligned}$$

seguem o mesmo raciocínio.

Suponhamos que Ω pode ser representada sob a forma

$$f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y), \quad (x,y) \in R_{xy}$$

onde R_{xy} é uma região fechada limitada no plano xy, limitada por uma curva simples fechada suave C. Então a superfície S é composta por três partes:

$$\begin{aligned}
S_1 :&\quad z = f_1(x,y), \quad (x,y) \in R_{xy} \\
S_2 :&\quad z = f_2(x,y), \quad (x,y) \in R_{xy} \\
S_3 :&\quad f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y), \; \textit{para } (x,y) \textit{ sobre } C
\end{aligned}$$

Pela definição **??** $\iint_S A_3 dydz = \iint_S A_3 \cos\gamma dS$.

A parte S_2 forma a tampa de S, S_1 o fundo de S e S_3 nos dá a lateral de S. Temos

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz &= \iint_{R_{xy}} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right) dxdy \\
&= \iint_{R_{xy}} \left(A_3(x,y,f_2(x,y)) - A_3(x,y,f_1(x,y)) \right) dxdy.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para a integral de superfície, temos

$$\iint_S A_3 \cos\gamma dS = \iint_{S_1} A_3 \cos\gamma dS + \iint_{S_2} A_3 \cos\gamma dS + \iint_{S_3} A_3 \cos\gamma dS.$$

Sobre S_3 temos $\gamma = \frac{\pi}{2}$, logo $\cos\gamma = 0$ onde a integral sobre S_3 é nula. Sejam $P_1(x,y) = xi + yj + f_1(x,y)k$ e $P_2(x,y) = xi + yj + f_2(x,y)k$ as representações de S_1 e S_2, respectivamente. Em S_1 a normal η tem sentido oposto ao de $\dfrac{\partial P_1}{\partial x} \times \dfrac{\partial P_1}{\partial y}$, assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} A_3 \cos\gamma dS &= -\iint_{S_1} A_3 dxdy \\ &= -\iint_{R_{xy}} A_3(x,y,f_1(x,y))dxdy.\end{aligned}$$

Em S_2 a normal η tem mesmo sentido de $\dfrac{\partial P_2}{\partial x} \times \dfrac{\partial P_2}{\partial y}$, assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} A_3 \cos\gamma dS &= \iint_{S_2} A_3 dxdy \\ &= \iint_{R_{xy}} A_3(x,y,f_2(x,y))dxdy.\end{aligned}$$

Então,

$$\iint_S A_3 \cos\gamma dS = \iint_{R_{xy}} (A_3(x,y,f_2(x,y)) - A_3(x,y,f_1(x,y)))dxdy,$$

e

$$\iiint_\Omega \frac{\partial A_3}{\partial z} dxdydz = \iint_S A_3 \cos\gamma dS.$$

como queríamos.

2.3 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes pode ser olhado como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana Ω com uma integral de linha ao redor de sua curva fronteira, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral ao redor da fronteira de S.

Teorema 2.3.1 *(Stokes) Sejam $A_1, A_2, A_3 : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com primeiras derivadas parciais contínuas em U. Seja $S \subset U$ uma superfície suave por partes e seja $C = \partial S$ uma curva simples fechada e suave por partes. Sendo o campo vetorial*

$$F(x,y,z) = A_1(x,y,z)i + A_2(x,y,z)j + A_3(x,y,z)k$$

sobre S temos

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S rotF \cdot \eta dS.$$

Demonstração . Sabemos da Geometria Diferencial que se S é uma superfície regular então para cada ponto $p \in S$ existe uma vizinhança V de p em S tal que V é o gráfico de uma função diferenciável sobre um dos três planos coordenados, ou seja, toda superfície regular S é localmente o gráfico de uma função diferenciável f. Baseado neste teorema e na possibilidade de podermos decompor a superfície S em várias superfícies S_t que tem em comum apenas partes de suas fronteiras nos limitaremos ao caso em que S pode ser representada pelo gráfico de $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in D$ onde D é a projeção de S sobre o plano xy. A curva C tem por projeção em xy a curva $\bar{C}$.

Lembremos que $F \cdot dr$ pode ser escrito como $A_1dx + A_2dy + A_3dz$ e

$$\begin{aligned}
rotF \cdot \eta dS &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \cdot \eta dS \\
&= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \cdot (\eta_1, \eta_2, \eta_3) dS \\
&= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) \eta_1 dS + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) \eta_2 dS + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \eta_3 dS
\end{aligned}$$

e sendo $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ a parametrização de S em D temos

$$\begin{aligned}
\eta_3 dS &= \langle \eta, k \rangle \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| dxdy \\
&= \left\langle \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}, k \right\rangle dxdy \\
&= dxdy.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\eta_1 dS = dydz \quad \text{e} \quad \eta_2 dS = dzdx.$$

Desta forma precisamos mostrar que

$$\int_C A_1dx + A_2dy + A_3dz = \iint_S \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) dxdy.$$

Pelo teorema de Green temos,

$$\begin{aligned}
\int_C A_1(x, y, z) dx &= \int_{\bar{C}} A_1(x, y, f(x, y)) dx \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\iint_S \frac{\partial A_1}{\partial z}dzdx - \frac{\partial A_1}{\partial y}dxdy \quad = \quad -\iint_D \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)dxdy$$

onde

$$\int_C A_1(x,y,z)dx = \iint_S \frac{\partial A_1}{\partial z}dzdx - \frac{\partial A_1}{\partial y}dxdy.$$

Analogamente obtemos

$$\int_C A_2(x,y,z)dy = \iint_S \frac{\partial A_2}{\partial x}dxdy - \frac{\partial A_2}{\partial z}dydz$$
$$\int_C A_3(x,y,z)dz = \iint_S \frac{\partial A_3}{\partial y}dydz - \frac{\partial A_3}{\partial x}dzdx.$$

Somando as equações acima obtemos obtemos a identidade desejada.

Capítulo 3

O Teorema de Stokes

3.1 n-Cadeias

Definição 3.1.1 *Seja* $[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-vezes}$ *e* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Dizemos que uma função contínua* $f : [0,1]^n \to A$ *define um cubo singular de dimensão* n *em* A.

Sendo $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ a função identidade, esta define o cubo singular de dimensão n conhecido como cubo unitário n-dimensional.

Definição 3.1.2 *Sejam* $C_1, \cdots, C_k : [0,1]^n \to A$, *cubos singulares n-dimensionais. Para* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ *a soma* $\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_k C_k$ *é chamada uma n-cadeia em* A.

Em particular o cubo singular C de dimensão n é considerado como sendo a n-cadeia $1 \cdot C$.

Definição 3.1.3 *Para cada* $i, 1 \leq i \leq n$, *definimos os cubos singulares* $I^n_{(i,0)}$ *e* $I^n_{(i,1)}$, *ambos de dimensão* $n-1$ *pondo para cada* $x \in [0,1]^{n-1}$

$$\begin{aligned} I^n_{(i,0)}(x) &= I^n(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1}) \\ &= (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1}) \quad e \\ I^n_{(i,1)}(x) &= I^n(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_i, \cdots, x_{n-1}) \\ &= (x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_i, \cdots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

$I^n_{(i,0)}$ *e* $I^n_{(i,1)}$ *são chamados, respectivamente, de faces* $(i,0)$ *e* $(i,1)$ *do cubo* I^n.

Por exemplo, para $n = 3$ as faces do cubo I^3 é dada por :

$$I^3_{(1,0)}(x,y) = (0,x,y)$$

$$I^3_{(1,1)}(x,y) = (1,x,y)$$
$$I^3_{(2,0)}(x,y) = (x,0,y)$$
$$I^3_{(2,1)}(x,y) = (x,1,y)$$
$$I^3_{(3,0)}(x,y) = (x,y,0)$$
$$I^3_{(3,1)}(x,y) = (x,y,1)$$

onde $(x_1, x_2) = (x, y)$.

Definição 3.1.4 *Definimos a fronteira de um cubo unitário n-dimensional por*

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}.$$

Por exemplo, a fronteira de I^2 pode ser definida como a soma de quatro cubos singulares unidimensionais, ordenados ao redor da fronteira de $[0,1]^2$ no sentido anti-horário, ou seja,

$$\partial I^2 = I^2_{(2,0)} + I^2_{(1,1)} - I^2_{(2,1)} - I^2_{(1,0)} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^2_{(i,\alpha)}.$$

Definição 3.1.5 *Para um cubo singular de dimensão n qualquer $C : [0,1]^n \to A$, definimos a face (i,α) de C por*

$$C_{(i,\alpha)} = C \circ (I^n_{(i,\alpha)})$$

e

$$\partial C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} C_{(i,\alpha)}.$$

Finalmente, definimos a fronteira de uma n-cadeia $\sum a_i C_i$ por

$$\partial(\sum a_i C_i) = \sum a_i \partial(C_i)$$

Teorema 3.1.6 *Para qualquer n-cadeia $C = \sum a_k C_k$ em A, se verifica a identidade $\partial(\partial C) = 0$, ou seja, $\partial^2 C = 0$.*

Demonstração . Consideremos $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$, para $i \leq j$. Sendo $x \in [0,1]^{n-2}$ temos

$$\begin{aligned}
(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) &= I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x)) \\
&= I^n_{(i,\alpha)}(x_1, \cdots, x_{j-1}, \beta, x_{j+1}, \cdots, x_{n-2}) \\
&= I^n(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \beta, x_{j+1}, \cdots, x_{n-2}).
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos

$$
\begin{aligned}
(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}(x) &= I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)) \\
&= I^n_{(j+1,\beta)}(x_1,\cdots,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},\cdots,x_{n-2}) \\
&= I^n(x_1,\cdots,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},\cdots,x_{j-1},\beta,x_{j+1},\cdots,x_{n-2}).
\end{aligned}
$$

Onde concluimos que $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$, para $i \leq j$.

Desde que para qualquer cubo n-dimensional $C_{(i,\alpha)} = C \circ (I^n_{(i,\alpha)})$, temos também

$$
\begin{aligned}
(C_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} &= C_{(i,\alpha)} \circ I^{n-1}_{(j,\beta)} \\
&= (C \circ (I^n_{(i,\alpha)})) \circ (I^{n-1}_{(j,\beta)}) \\
&= C \circ (I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)})) \\
&= C \circ (I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} \\
&= C \circ (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} \\
&= C \circ (I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)})) \\
&= (C \circ (I^n_{(j+1,\beta)})) \circ (I^{n-1}_{(i,\alpha)}) \\
&= (C_{(j+1,\beta)}) \circ (I^{n-1}_{(i,\alpha)}) \\
&= (C_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}
\end{aligned}
$$

para $i \leq j$. Segue-se que

$$
\begin{aligned}
\partial^2 C &= \partial \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} C_{(i,\alpha)} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\beta=0,1} (-1)^{i+\alpha+\beta+j} (C_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} \left[(C_{(i,0)})_{(j,0)} - (C_{(i,0)})_{(j,1)} - (C_{(i,1)})_{(j,0)} + (C_{(i,1)})_{(j,1)} \right]
\end{aligned}
$$

e fazendo $\sigma_{ij} = (-1)^{i+j} \left[(C_{(i,0)})_{(j,0)} - (C_{(i,0)})_{(j,1)} - (C_{(i,1)})_{(j,0)} + (C_{(i,1)})_{(j,1)} \right]$ temos para $i \leq j$.

$$
\begin{aligned}
\sigma_{(j+1)i} &= (-1)^{i+j+1} \left[(C_{(j+1,0)})_{(i,0)} - (C_{(j+1,0)})_{(i,1)} - (C_{(j+1,1)})_{(i,0)} + (C_{(j+1,1)})_{(i,1)} \right] \\
&= (-1)^{i+j+1} \left[(C_{(i,0)})_{(j,0)} - (C_{(i,1)})_{(j,0)} - (C_{(i,0)})_{(j,1)} + (C_{(i,1)})_{(j,1)} \right] \\
&= -\sigma_{ij}.
\end{aligned}
$$

Sendo assim

$$
\begin{aligned}
\partial^2 C &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{ij} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{1j} + \sum_{i=2}^{n}\sigma_{i1}\right] + \left[\sum_{j=2}^{n-1}\sigma_{2j} + \sum_{i=3}^{n}\sigma_{i2}\right] + \cdots + \left[\sum_{j=n-1}^{n-1}\sigma_{(n-1)j} + \sum_{i=n}^{n}\sigma_{i(n-1)}\right] \\
&= \left[-\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{(j+1)1} + \sum_{i=2}^{n}\sigma_{i1}\right] + \left[-\sum_{j=2}^{n-1}\sigma_{(j+1)2} + \sum_{i=3}^{n}\sigma_{i2}\right] + \cdots + \left[-\sum_{j=n-1}^{n-1}\sigma_{(j+1)(n-1)} + \sum_{i=n}^{n}\sigma_{i(n-1)}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Sendo o teorema válido para qualquer cubo singular n-dimensional, ele é válido para qualquer n-cadeia singular. ■

3.2 Integração em cadeias

O fato de termos tanto $d^2 = 0$ como $\partial^2 = 0$, além da semelhança simbólica, determina uma conexão entre cadeias e formas. Tal conexão se estabelece ao integrarmos formas sobre cadeias. No que segue consideraremos apenas cubos n-dimensionais singulares diferenciáveis.

Definição 3.2.1 *Seja w uma forma k-dimensional em $[0,1]^k$, representada por $w = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Definimos*

$$\int_{[0,1]^k} w = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \cdots, x_k) dx_1 . \cdots . dx_k .$$

Definição 3.2.2 *Sendo w uma forma k-dimensional sobre A e C um cubo singular k-dimensional, em A, definimos*

$$\int_C w = \int_{[0,1]^k} C^* w.$$

Lembre-se que C^*w é uma $k-$forma diferencial definida em **??**.

Definição 3.2.3 *Sendo w uma forma k-dimensional sobre A e $C = \sum a_i C_i$ uma cadeia singular k-dimensional, em A, definimos*

$$\int_C w = \sum a_i \int_{C_i} w.$$

3.3 O elemento de volume

Definição 3.3.1 *Um Homeomorfismo do aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *no espaço* $\mathbb{R}^m$ *é uma aplicação* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *contínua com inversa contínua.*

Definição 3.3.2 *Uma Imersão do aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *no espaço* $\mathbb{R}^m$ *é uma aplicação diferenciável* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *tal que, para todo* $x \in U$*, a derivada* $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é uma transformação linear injetiva.*

Definição 3.3.3 *Uma parametrizão de classe* C^∞ *e dimensão* n *de um conjunto* $V \subset \mathbb{R}^m$ *é uma imersão* $f : V_0 \to V$ *de classe* C^∞ *que é um homeomorfismo do aberto* $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ *no* V*.*

Definição 3.3.4 *Um conjunto* $M \subset \mathbb{R}^n$ *chama-se uma superficie de dimensão* k *e classe* C^∞ *quando todo* $p \in M$ *está contido em algum aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $V = U \cap M$ *é a imagem de uma parametrização* $f : V_0 \to V$*, de dimensão* k *e classe* C^∞*. O conjunto* V *é um aberto em* M*, chamado uma vizinhança paramtrizada do ponto* p*.*

Definição 3.3.5 *Seja* M *uma superfície no* $\mathbb{R}^n$*, com fronteira, k-dimensinal, munida da orientação* η*. O elemento de volume de* M *é a forma diferencial* w *de grau* $k-1$*, definida pondo-se para cada* $x \in M$ *,* $w(x) \in \wedge^k (T_x M)^*$ *denotado por* dV*.*

Aqui $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ é o espaço vetorial tangente a M no ponto x. Um atlas numa superficie M é um conjunto de parametrizações $f : V_0 \to V$ cujas imagens V cobrem M. Duas parametrizações $f : V_0 \to V, g : W_0 \to W$, dizem compatíveis quando $V \cap W = \oslash$ ou quando $V \cap W \neq \oslash$ e $g^{-1} \circ f : f^{-1}(V \cap W) \to g^{-1}(V \cap W)$ tem determinante jacobiano positivo em todos os pontos $x \in f^{-1}(V \cap W)$. Um atlas A na superficie M chama-se coerente quando duas parametrizações $f, g \in A$ são compativeis. Uma superfície M chama-se *Orientável* quando admite um atlas coerente.

Definição 3.3.6 *Sendo* M *compacta no* $\mathbb{R}^n$ *definimos o volume de* M *como sendo*

$$\int_M dV.$$

Para superfícies unidimensionais ou bidimensionais, o termo volume é geralmente substituido por comprimento ou área, empregando no lugar de dV, ds para o elemento de comprimento e dA ou dS para o elemento de área.

Definição 3.3.7 *Seja* M *uma superfície no* $\mathbb{R}^3$*, e seja* $\eta(x)$ *a normal exterior unitária em* $x \in M$*. Definimos* $w \in \wedge^2 T_x M$ *por*

$$w(v, u) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \eta_1(x) & \eta_2(x) & \eta_3(x) \end{vmatrix} = \langle v \times u, \eta(x) \rangle = dA(v, u)$$

Em particular, $w(v,u)=1$ quando v,u compuserem uma base ortonormal de T_xM. Se $v\times u$ for um múltiplo de $\eta(x)$ teremos

$$dA(v,u)=|v\times u|$$

Teorema 3.3.8 *Seja M uma superfície orientada com ou sem fronteira, no $\mathbb{R}^3$. Sendo η a sua normal unitária exterior, temos que*

$$dA=\eta_1 dy\wedge dz+\eta_2 dz\wedge dx+\eta_3 dx\wedge dy \qquad (1)$$

Além disto, são válidos em M as relações

$$\eta_1 dA = dy\wedge dz \qquad (2)$$

$$\eta_2 dA = dz\wedge dx \qquad (3)$$

$$\eta_3 dA = dx\wedge dy \qquad (4).$$

Demonstração . Sendo $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3), v=(v_1,v_2,v_3)$ e $u=(u_1,u_2,u_3)$ temos que relação (1) equivale a

$$\begin{aligned}
dA(v,u) &= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}\\
&= \eta_1(v_2u_3-u_2v_3)+\eta_2(u_1v_3-u_3v_1)+\eta_3(v_1u_2-v_2u_1)\\
&= \eta_1\begin{vmatrix} v_2 & u_2\\ v_3 & u_3\end{vmatrix}+\eta_2\begin{vmatrix} v_3 & u_3\\ v_1 & u_1\end{vmatrix}+\eta_3\begin{vmatrix} v_1 & u_1\\ v_2 & u_2\end{vmatrix}\\
&= \eta_1\begin{vmatrix} dy(v) & dy(u)\\ dz(v) & dz(u)\end{vmatrix}+\eta_2\begin{vmatrix} dz(v) & dz(u)\\ dx(v) & dx(u)\end{vmatrix}+\eta_3\begin{vmatrix} dx(v) & dx(u)\\ dy(v) & dy(u)\end{vmatrix}\\
&= \eta_1 dy\wedge dz+\eta_2 dz\wedge dx+\eta_3 dx\wedge dy
\end{aligned}$$

Para demonstrarmos as outras relações, tomemos $z\in T_x\mathbb{R}^3$. Sendo $v\times u=\alpha\eta(x)$ para algum $\alpha\in\mathbb{R}$, temos então

$$\begin{aligned}
\langle z,\eta(x)\rangle\cdot\langle v\times u,\eta(x)\rangle &= \langle z,\eta(x)\rangle\,\alpha\\
&= \langle z,\alpha\eta(x)\rangle=\langle z,v\times u\rangle
\end{aligned}$$

Tomando agora sucessivamente $z=e_1,e_2,e_3$ obtemos

$$\langle e_1,\eta(x)\rangle\cdot\langle v\times u,\eta(x)\rangle=\langle e_1,v\times u\rangle$$

então

$$\eta_1 dA(v,u)=\langle e_1,v\times u\rangle=v_2u_3-u_2v_3$$

por outro lado

$$\begin{aligned} dy \wedge dz(v,u) &= \begin{vmatrix} dy(v) & dy(u) \\ dz(v) & dz(u) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & u_2 \\ v_3 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= v_2u_3 - u_2v_3 \end{aligned}$$

comparando com $\eta_1 dA(v,u)$ obtemos

$$\eta_1 dA = dy \wedge dz$$

de forma análoga, fazendo $z = e_2, e_3$ obtemos

$$\eta_2 dA = dz \wedge dx$$

$$\eta_3 dA = dx \wedge dy$$

respectivamente.

3.4 O teorema de Stokes

Finalmente estamos em condições de sintetizar a relação entre formas, cadeias, d e ∂. Esta relação fica bem determinada no enunciado do teorema a seguir conhecido como teorema de Stokes:

Teorema 3.4.1 *(Stokes) Dado um aberto A de $\mathbb{R}^n$, sejam w uma forma de dimensão $k-1$ e C uma cadeia k-dimensional, ambas sobre A. Temos*

$$\int_C dw = \int_{\partial C} w$$

Demonstração . Pela definição de integral e pelo teorema **??** temos

$$\int_c dw = \int_{[0,1]^k} c^* dw = \int_{[0,1]^k} dc^* w$$

Uma vez que c^*w é uma $k-1$-forma em $[0,1]^k$ pode ser escrita como

$$c^*w = \sum_{i=1}^{k} g_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

Para determinadas funções $g_1, g_2, \cdots, g_k$ definidas em $[0,1]^k$, onde $\hat{dt_i}$ significa que estamos omitindo a entrada de ordem i. Por isso

$$\int_c dw = \sum_{i=1}^{k} \int_{[0,1]^k} d(g_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Alterando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_1 dt_2 \cdots dt_k &= \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k \\
&= \int_{[0,1]^{k-1}} dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_i
\end{aligned}$$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} (g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \cdots, t_k) - g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \cdots, t_k)) dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

as fórmulas

$$g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \cdots, t_k) dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

e

$$g_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \cdots, t_k) dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k$$

nada mais são que $c^*_{(i,1)} w$, $c^*_{(i,0)} w$ respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_c dw &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial t_i} dt_i dt_1 dt_2 \cdots \hat{dt_i} \cdots dt_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} (c^*_{(i,1)} w - c^*_{(i,0)} w) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \int_{[0,1]^{k-1}} c^*_{(i,\rho)} w \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \int_{c_{(i,\rho)}} w = \int_{\partial c} w,
\end{aligned}$$

o que comprova o resultado.

3.4.1 Os Teoremas Clássicos a partir de Stokes

Temos agora a disposição todo o instrumento necessário para enunciar e demonstrar os teoremas clássicos do tipo Stokes.

Teorema 3.4.2 *(Green) Seja A um aberto do $\mathbb{R}^2$ com fronteira. Para quaisquer funções diferenciáveis $f, g : A \to \mathbb{R}$ se tem*

$$\int_{\partial A} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int \int_A (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}) dxdy$$

Demonstração . Observemos que

$$\begin{aligned} d(f(x,y)dx+g(x,y)dy) &= d(fdx)+d(gdy) \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{y}dy)\wedge dx+(\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy)\wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial g}{\partial x}dx\wedge dy \\ &= (\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dx\wedge dy \end{aligned}$$

Aplicando o teorema **??** temos

$$\int\int_A(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})dxdy=\int_{\partial A}f(x,y)dx+g(x,y)dy$$

■

Teorema 3.4.3 *(Gauss) Seja S uma superficie do $\mathbb{R}^3$ com fronteira, e seja η a normal unitária exterior a ∂S. Para um campo vetorial $F(x,y,z)$ definido em S, temos:*

$$\int_{\partial S}F\cdot\eta dS=\int_S divFdxdydz$$

Demonstração . Pelo teorema **??** observamos que a igualdade acima pode ser expressa como:

$$\int_{\partial S}F_1dydz+F_2dzdx+F_3dxdy=\int_S(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z})dxdydz$$

então definimos em S, $w=F_1dydz+F_2dzdx+F_3dxdy$ e calculemos $d(w)$

$$\begin{aligned} d(w) &= d(F_1dydz+F_2dzdx+F_3dxdy)=d(F_1)dydz+d(F_2)dzdx+d(F_3)dxdy \\ &= (\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz)dydz+(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz)dzdx \\ &+ (\frac{\partial F_3}{\partial x}dx+\frac{\partial F_3}{\partial y}dy+\frac{\partial F_3}{\partial z}dz)dxdy \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x}dxdydz+\frac{\partial F_2}{\partial y}dydzdx+\frac{\partial F_3}{\partial z}dzdxdy \\ &= (\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z})dxdydz \end{aligned}$$

aqui utilizamos o fato de que $dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i$ e $dx_i\wedge dx_i=0$. Asssim basta aplicar o teorema **??** concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial S}F_1dydz+F_2dzdx+F_3dxdy &= \int_S dw=\int_{\partial S}w \\ &= \int_S(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z})dxdydz \end{aligned}$$

Portanto segue o resultado.

Teorema 3.4.4 *(Stokes) Seja M uma superfície do $\mathbb{R}^3$, seja η a normal unitária exterior a M. Dado um campo vetorial T em ∂M para o qual $ds(T) = 1$ e um campo vetorial arbitrário em um aberto que contém M, se tem*

$$\int_M rotF \cdot \eta dA = \int_{\partial M} F \cdot T ds$$

Demonstração . Definimos w em M por $w = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$. Como as componentes de $rotF$ são

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

utilizando os mesmos passos na demonstração do teorema **??**, deduz ser válida em M

$$\begin{aligned} rotF \cdot \eta dA &= (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) dy \wedge dz \\ &+ (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}) dz \wedge dx \\ &+ (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dx \wedge dy \\ &= dw \end{aligned}$$

Por outro, uma vez que $ds(T) = 1$, são válidas em ∂M

$$T_1 ds = dx$$

$$T_2 ds = dy$$

$$T_3 ds = dz$$

então se verifica em ∂M que

$$\begin{aligned} F \cdot T ds &= F_1 T_1 ds + F_2 T_2 ds + F_3 T_3 ds \\ &= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= w \end{aligned}$$

Logo aplicando o teorema **??** concluimos que

$$\begin{aligned} \int_M rotF \cdot \eta dA &= \int_M dw \\ &= \int_{\partial M} w \\ &= \int_{\partial M} F \cdot T ds \end{aligned}$$

Considerações Finais

Esse trabalho apresentou o conceito de formas diferenciais, diferencial exterior e operador pull-back. Ficou claro que a sua aplicação facilita sobremaneira a interpretação e representação de certos fenômenos que são dificilmente compreendidos e representados usando-se a abordagem vetorial clássica.

Apresentou de forma detalhada os teoremas integrais, através de demonstrações adaptadas de livros da análise vetorial, observando que o teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do teorema de Green. Enquanto o teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana com uma integral de linha ao redor de sua curva fronteira, o teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral ao redor da fronteira de S.

Finalmente apresentou-se uma aplicação do teorema de Stokes, para redemonstrar os teoremas clássicos de uma forma mais precisa e elegante.

Referências Bibliográficas

[1] SPIVAK, Michael. **Cálculo em Variedades**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2003

[2] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, Rio de Janeiro v.2 2004

[3] ______, ______. **Álgebra exterior**, Rio de janeiro: IMPA,(Coleção Matemática Universitária)2005

[4] ______, ______. **Análise Vetorial**. Rio de Janeiro: IMPA,(Coleção Matemática Universitária), v.3, 2007

[5] COUTINHO, Severino Collier. **Cálculo vetorial com formas diferenciais**. Disponível em: $\langle http : //www.dcc.ufrj.br/\ collier/e - books/formas.pdf\rangle$ acesso em 08 de setembro de 2010.

[6] MENDES, Cláudio Martins. **Notas de aula: Cálculo vetorial**. Disponível em: $\langle http : //www.icmc.sc.usp.br/\ cmmendes/CalculoII/Calculo2Vetorial.pdf\rangle$, acesso em 08 de setembro de 2010.

[7] ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Cálculo 3: funções de várias variáveis**, 3.ed.Rio de Janeiro : LTC - Livros Técnicos e Cientificos Editora S.A. , 1983

[8] COELHO, Flávio Ulhoa. LOERENÇO, Mary Lilian. **Um curso de álgebra linear**. 2.ed. São Paulo. Editora da Universidade de Saõ Paulo, 2007.

[9] HSU, Hwei P. **Análise vetorial**, Tradutor Edgard Pedreira de Cerqueira Neto. Rio de Janeiro, Livros Técicos e Cientifícos, 1972.

[10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v.3. 3ed

[11] KAPLAN, Wilfred. **Cálculo avançado**. v.1