Encontre o comprimento arco da curva dada por $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{k}$ entre $t = 0$ e $t = 2$.

Da definição da função $\mathbf{r}(t)$ identificamos as funções componentes e calculamos suas derivas:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 \\ y'(t) &= 2t^{1/2} \\ z'(t) &= t \end{aligned}$$

dessa forma

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{(1)^2 + (2t^{1/2})^2 + (t)^2} \;\; dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2}\; dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3}\; dt \end{aligned}$$

a solução dessa equação requer utilizar as seguentes substituições:

$$\begin{aligned} n =& \;\; t + 2 \\ dn =& \;\; dt \end{aligned}$$

vamos solucionar a integral indefinida, assim a integral muda para

$$I = \int \sqrt{n^2 - 3} dn$$

utilizando substituição trigonométrica, vemos que colocando u na hipotenusa e $\sqrt{3}$ no cateto adjacente, então

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - 3} =& \;\; \sqrt{3}\tan\theta \\ \frac{n}{\sqrt{3}} =& \;\; \sec\theta \\ dn =& \;\; \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta d\theta \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} I &= 3\int \sec\theta\tan^2\theta d\theta \\ &= 3\int \sec\theta\left(\sec^2\theta - 1\right) d\theta \\ &= 3\int \sec^3\theta d\theta - 3\int \sec\theta d\theta \end{aligned}$$

resolvendo cada uma das integrais:

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int \sec\theta d\theta = & \int \sec\theta \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} d\theta \\
= & \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} d\theta
\end{aligned}
$$

fazemos

$$
\begin{aligned}
u = & \sec\theta + \tan\theta \\
du = & \left(\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta\right) d\theta
\end{aligned}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
I_2^* = & \int \frac{1}{u} du \\
I_2 = & \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1
\end{aligned}
$$

A I integral:

$$
I_1 = \sec^3\theta d\theta
$$

integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
u = & \sec\theta & \qquad dv = & \sec^2\theta d\theta \\
du = & \sec\theta\tan\theta d\theta & \qquad v = & \tan\theta
\end{aligned}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
\sec^3\theta d\theta = & \sec\theta\tan\theta - \int \left(\sec^3\theta - \sec\theta\right) d\theta \\
2\sec^3\theta d\theta = & \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta d\theta \\
\sec^3\theta d\theta = & \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_2
\end{aligned}
$$

assim a integral original fica

$$
I = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C
$$

como

$$
\sec\theta = \frac{t+2}{\sqrt{3}} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{(t+2)^2 - 3}}{\sqrt{3}}
$$

então

$$
\int \sqrt{(t+2)^2 - 3}\; dt = \frac{(t+2)\sqrt{(t+2)^2 - 3}}{2} - \frac{3}{2}\left|\frac{t+2+\sqrt{(t+2)^2 - 3}}{\sqrt{3}} \qquad \right|
$$