Lista 02 de cálculo 3

1. Calcule a derivada direcional, usando a definição (não o gradiente), no ponto e direção indicados

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, no ponto $P(1,2)$ e na direção de $\mathbf{v}(t) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$
   Sol. $-\sqrt{2}$

   (b) $f(x,y) = 2x+3y$, no ponto $P(-1,2)$ e na direção da reta $y = 2x$
   Sol. $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

   (c) $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$, no ponto $P(1,1)$ e na direção do vetor tangente à curva C : $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$ no ponto $(1,1)$
   Sol. $-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

   (d) $f(x,y) = 2x+3y-z$, no ponto $P(1,1,-1)$ e na direção de $\mathbf{k}$
   Sol. 3

2. Calcule o gradiente das seguintes funções

   (a) $f(x,y) = \cos\left(x^2 + y\right)$
   Sol. $-\left(2x\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\right)\sin\left(x^2+y\right)$

   (b) $g(x,y) = xyz^{-3}$
   Sol. $yz^{-3}\,\mathbf{i} + xz^{-3}\,\mathbf{j} - 3xyz^{-4}\,\mathbf{k}$

   (c) $\phi(x,y,z) = 3x^2y - y^2z^2$, no ponto $(1,-2,-1)$
   Sol. $-12\,\mathbf{i} - 9\,\mathbf{j} - 16\,\mathbf{k}$

   (d) $\phi(x,y,z) = \ln|\mathbf{r}|$ e $\phi(x,y,z) = \dfrac{1}{\mathbf{r}}$, se $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$
   Sol. $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^2$ e $-\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$

   (e) $w(x,y,z) = e^{-5x}\sec x^2yz$
   Sol. $e^{-5x}\sec(x^2yz)\left[(2xyz\tan(x^2yz) - 5)\,\mathbf{i} + x^2z\tan(x^2yz)\,\mathbf{j} + x^2y\tan(x^2yz)\,\mathbf{k}\right]$

   (f) $w(x,y,z) = y^2z\tan^3 x$, no ponto $(\pi/4,-3,1)$
   Sol. $54\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}$

   (g) $z(x,y,z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no ponto $(-2,3)$
   Sol. $15\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j}$

   (h) $f(x,y) = e^{x+y}\cos z + (y+1)\sin^{-1} x$, no ponto $P(0,0,\pi/6)$ e na direção de $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$
   Sol. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\right)\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} - \dfrac{1}{2}\mathbf{k}$

3. Calcule a derivada direcional de f, no ponto P, na direção de $\mathbf{a}$

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P(1,2)$ e na direção de $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$
   Sol. $8,8$

   (b) $f(x,y) = x^2y^3$, $P(1/6,3)$ e na direção de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
   Sol. $\dfrac{39}{4\sqrt{2}}$

   (c) $f(x,y) = \tan^{-1}(xy)$, $P(3,4)$ e na direção de $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$
   Sol. $\dfrac{7\sqrt{2}}{290}$

   (d) $f(x,y) = xe^{-yz}$, $P(1,2,0)$ e na direção de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{j}$
   Sol. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   (e) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $P(3,2)$, na direção que aponta do ponto à origem.
   Sol. $-\dfrac{50}{4\sqrt{13}}$

   (f) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{xy+2}$, $P(1,-1)$ e na direção de $\mathbf{a} = 12\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$
   Sol. $21/13$

   (g) $f(x,y) = \tan^{-1}(x/y) + \sqrt{3}\sin^{-1}(xy/2)$, $P(1,1)$, na direção de $\mathbf{a} = 3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$
   Sol. $-\dfrac{2}{2\sqrt{13}}$

   (h) $f(x,y) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$, $P(1,1,1/2)$, na direção de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$
   Sol. 2

4. Encontre um vetor unitário na direção na qual f cresce mais rapidamente em P e obtenha a taxa de variação de f em P nessa direção.

   (a) $w(x,y,z) = e^{xy}$, no ponto $(2,3)$
   Sol. $\mathbf{u} = \dfrac{-\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{13}}$; $-\sqrt{13}\,e^{6}$

   (b) $w(x,y,z) = \cos(3x-y)$, no ponto $(\pi/6, \pi/4)$
   Sol. $\mathbf{u} = \dfrac{3\,\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{10}}$; $-\sqrt{5}$

   (c) $w(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$, no ponto $(3,1)$
   Sol. $\mathbf{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{16}\right)(\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j})$; $-\dfrac{\sqrt{5}}{8}$

   (d) $w(x,y,z) = 4e^{xy}\cos z$, no ponto $(0,1,\pi/4)$
   Sol. $\mathbf{u} = -\left(\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right)$; -4

5. Nos seguintes problemas encontre a equação da reta normal à superfície no ponto indicado

   (a) $x^2 + y^2 - z^2 = 6$ no ponto $(3,-1,2)$
   Sol. $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{-2}$

   (b) $y = e^{x}\cos z$ no ponto $(1,e,0)$
   Sol. $\dfrac{x-1}{e} = \dfrac{y-e}{-1}$; $z = 0$

   (c) $z = e^{3x}\sin 3y$ no ponto $(0,\pi/6,1)$
   Sol. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$; $y = \pi/6$

   (d) $x^2 = 12y$ no ponto $(6,3,3)$
   Sol. $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$; $z = 3$

   (e) $z = x^{1/2} + y^{1/2}$ no ponto $(1,1,2)$
   Sol. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$

6. Existe uma direção, vista desde o ponto $(1,-1,1)$, na qual a temperatura descrita pela função $T(x,y,z) = 2xy - yz$ (T é medido em $^{\circ}C$ e as distâncias em metros) tenha uma taxa de variação de $-3^{\circ}C/m$?, justifique sua resposta.
   Sol. Não já que $-\sqrt{6} > -3$.

7. Um insecto está inicialmente na posição $(3,9,4)$ se desloca numa seguindo uma linha reta até o ponto $(5,7,3)$. Qual é a taxa de variação da temperatura do insecto se esta está descrita pela função $T = xe^{y-z}$? (As unidades são $^{\circ}C$ e as distâncias em metros).
   Sol. $\dfrac{e^{5}}{3}$

8. Encontre a derivada direcional de $z = x\ln y$ no ponto $(1,2)$ na direção de 30° com $\mathbf{i}$
   Sol. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\right)$

9. Se o potencial elétrico em qualquer ponto (x,y) está dado por $V = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, encontre a taxa de variação em $(3,4)$ na direção do ponto $(2,6)$
   Sol. $\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

10. Se $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - z$, encontre a taxa de variação de f no ponto $(1,1,2)$ ao longo da linha $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-2}$, na direção de incremento de x.
    Sol. $-\sqrt{17}$

11. A densidade em qualquer ponto de uma placa retangular colocada no plano xy é $\rho(x,y)$ quilogramas por metro quadrado, onde

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+3}}$$

(a) Calcule a taxa de variação da densidade no ponto $(3,2)$ na direção do vetor unitário $\cos\frac{3\pi}{2}\,\mathbf{i} + \sin\frac{2\pi}{3}\,\mathbf{j}$

(b) Determine a intensidade (módulo) da máxima taxa de variação de ρ em $(3,2)$.

Sol. (a) $\frac{1}{64}\,(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})$, (b) $\frac{\sqrt{3}}{64}$

12. Em qualquer ponto de um objeto tridimensional a temperatura está dada pela equação

$$T(x,y,z) = \frac{60}{x^2+y^2+z^2}$$

Aqui as distâncias estão medidas em polegas. (a) Calcule a taxa de variação da temperatura no ponto $(3,-2,2)$ na direção do vetor $-2\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-6\,\mathbf{k}$. (b) Determine a intensidade da máxima taxa de variação no ponto $(3,-2,2)$.

Sol. (a) $\frac{36}{33}$, (b) $\frac{3\sqrt{17}}{10}$

13. Uma equação da superfície de uma montanha é

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$$

onde a distâncias são medidas em metros, o eixo x aponto para o leste e o eixo y para o norte. Uma alpinista se encontra no ponto $(-10,5,850)$. (a) Qual é a direção de máxima inclinação? (b) Se a alpinista se desloca para o leste, estará ela descendo ou subindo e qual é a taxa? (c) Se a alpinista se desloca na direção sul-oeste estará ela descendo ou subindo e qual é a taxa?. (d) Em qual direção a alpinista de se dirigir para permanecer sobre uma curva de nível.

Sol. (a) $\frac{-\,(3\,\mathbf{i} - \mathbf{j})}{\sqrt{10}}$, (b) sobe 60 metros por cada metro caminhado para o leste. (c) Desce $20\sqrt{20}$ metro por metro caminhado. (d) Aquela que é ortogonal à reta $\frac{\pm\,(3\,\mathbf{i} - \mathbf{j})}{\sqrt{10}}$