

Exemplo 01

Verifique o teorema de Gauss considerando $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e D a região dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Sol

Por definição a integral de fluxo

$$\Phi_S = \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

onde

$$d\vec{\sigma} = \mathbf{n} \, du \, dv$$

com

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$$

e

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Uma outra alternativa a essa abordagem é utilizar o Jacobiano

$$\mathbf{n} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k}$$

sendo que x, y, z são as coordenadas do vetor \mathbf{r} que é a parametrização da superfície por onde o campo vai fluir, que para o caso da esfera, em coordenadas esféricas, é

$$\mathbf{r}(u, v) = a \sin v \cos u \mathbf{i} + a \sin v \sin u \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi$$

de forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left[\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \mathbf{k} \\ &= [(a \sin v \cos u)(-a \sin v) - (0)(a \cos v \sin u)] \mathbf{i} + \\ &\quad [(0)(a \cos v) - (-a \sin v \sin u)(-a \sin v)] \mathbf{j} + \\ &\quad [(-a \sin v \sin u)(a \cos v \sin u) - (a \sin v \cos u)(a \cos v \cos u)] \mathbf{k} \\ &= -(a^2 \sin^2 v \cos u) \mathbf{i} - (a^2 \sin^2 v \sin u) \mathbf{j} - \\ &\quad (a^2 \sin v \cos v \sin^2 u + a \sin v \cos v \cos^2 u) \mathbf{k} \\ &= -(a^2 \sin^2 v \cos u) \mathbf{i} - (a^2 \sin^2 v \sin u) \mathbf{j} - \\ &\quad a^2 \sin v \cos v (\sin^2 u + \cos^2 u) \mathbf{k} \\ &= -(a^2 \sin^2 v \cos u) \mathbf{i} - (a^2 \sin^2 v \sin u) \mathbf{j} - a^2 \sin v \cos v \mathbf{k} \\ &= -a \sin v [a \sin v \cos u \mathbf{i} + a \sin v \sin u \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}] \\ &= -a \sin v \mathbf{r} \end{aligned}$$

Note que o vetor \mathbf{n} aponta para dentro da esfera já que $\sin v \geq 0$ no intervalo $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ o qual representa o hemisfério superior, e $\sin v \leq 0$ no intervalo $\frac{\pi}{2} < v \leq \pi$, o qual representa o hemisfério inferior. Devido a que desejamos trabalhar com a orientação positiva redefinimos nosso vetor normal para

$$\mathbf{n} = a \sin v \mathbf{r}$$

Escrevendo o campo \mathbf{F} em termos de (u, v) :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(u, v) &= a \sin v \cos u \mathbf{i} + a \sin v \sin u \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k} \\ &= \mathbf{r}\end{aligned}$$

de onde o elemento de fluxo está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= (a \sin v \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \\ &= a^3 \sin v\end{aligned}$$

dessa forma a integral de superfície do campo vetorial será

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^3 \sin v \, du \, dv \\ &= 2\pi a^3 \int_0^\pi \sin v \, dv \\ &= -2\pi a^3 (\cos \pi - \cos 0) \\ &= 4\pi a^3\end{aligned}$$

Segundo o teorema da Divergência, o fluxo também está dado por

$$\Phi_S = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV$$

calculando a divergência do campo

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \\ &= 3\end{aligned}$$

dessa forma

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_D 3 \, dV \\ &= 3 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \\ &= 4\pi a^3\end{aligned}$$

Exemplo 02

Avalie a integral o fluxo do campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2}) \mathbf{j} + \sin(xy) \mathbf{k}$$

através da superfície S dada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ o qual é delimitado pelos planos $z = 0$, $y = 0$, e $y + z = 2$ (ver figura)

Sol

Utilizando o teorema da divergência

$$\iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV$$

podemos calcular o fluxo sem necessidade de avaliar a integral de superfície diretamente. Dessa forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left[xy \mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2}) \mathbf{j} + \sin(xy) \mathbf{k} \right] \\ &= y + 2y \\ &= 3y\end{aligned}$$

de forma que

$$\Phi = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV$$

onde

$$D = \{ (x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z \}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \int_0^1 \int_{-1}^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y \, dy \, dz \, dx \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_{-1}^{1-x^2} (2-z)^2 \, dz \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(2-z)^3]_0^{1-x^2} \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(2-1+x^2)^3 - 8] \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(1+x^2)^3 - 8] \, dx
 \end{aligned}$$

utilizando o binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

onde os coeficientes binomiais

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

dessa forma

$$\begin{aligned}
 (1+x^2)^3 &= \sum_{p=0}^3 \binom{3}{p} 1^{3-p} x^{2p} \\
 &= \binom{3}{0} 1^3 x^0 + \binom{3}{1} 1^2 x^2 + \binom{3}{2} 1^1 x^4 + \binom{3}{3} 1^0 x^6 \\
 &= 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6
 \end{aligned}$$

por tanto

$$\Phi = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3x^2 + 3x^4 + x^6 - 7) \, dx$$

como a função é par, temos

$$\begin{aligned}
 \Phi &= - \int_0^1 (3x^2 + 3x^4 + x^6 - 7) \, dx \\
 &= - \left(1 + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} - 7 \right) \\
 &= \frac{184}{35}
 \end{aligned}$$

Exemplo 04

Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + yz^3 \mathbf{k}$$

através da superfície S do retângulo sólido determinado por (ver figura) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$ utilizando o (a) método direto e (b) o teorema de Gauss.

Sol

Utilizando o método direto devemos calcular a integral $\iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$ para cada uma das 6 faces. Para o caso da face $x = 1$ temos que $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2y = y$ já que $x = 1$, dessa forma

$$\iint_{x=1} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^3 \int_0^2 y \, dy \, dz = 6$$

A tabela a seguir resume o resultado obtido para o resto das faces

Dessa forma

$$\Phi = 6 + 0 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 54 + 0 = 60$$

Pelo teorema de Gauss

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_D (2xy + 0 + 3yz^2) \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2xy + 3yz^2) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (6xy + 27y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 (12x + 54) \, dx \\ &= [6x^2 + 54x]_0^1 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Exemplo 04

Seja S o cilindro sólido delimitada pelos planos $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$, e \mathbf{n} o vetor unitário que aponta para fora da superfície (ver figura). Se $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + \tan yz) \mathbf{i} + (y^3 - e^{xz}) \mathbf{j} + (3z + x^3) \mathbf{k}$, encontre o fluxo através da superfície.

Sol

Tentar avaliar a integral $\iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$ pode ser uma tarefa difícil, se comparado ao trabalho de se calcular a integral $\iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} dV$,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot [(x^3 + \tan yz) \mathbf{i} + (y^3 - e^{xz}) \mathbf{j} + (3z + x^3) \mathbf{k}] \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3 \\ &= 3(x^2 + y^2 + 1)\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} dV &= \iiint_D 3(x^2 + y^2 + 1) dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + 1) r dz dr d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^3 + r) dr d\theta \\ &= 54 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 108\pi\end{aligned}$$

Exemplo 05

Considere um sólido o qual está delimitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 2y + z = 6$ e seja $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Calcule o fluxo através da superfície.

Sol

Utilizando o teorema de Gauss

$$\Phi = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} dV$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot [x \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}] \\ &= 1 + 2y + 1 \\ &= 2 + 2y\end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2+2y) dz dx dy \\&= \int_0^3 \int_0^{3-y} [2z + 2yz]_0^{6-2x-2y} dx dy \\&= \int_0^3 \int_0^{3-y} [2(6-2x-2y) + 2y(6-2x-2y)] dx dy \\&= \int_0^3 \int_0^{3-y} [12-4x-4y+12y-4xy-4y^2] dx dy \\&= \int_0^3 \int_0^{3-y} [12-4x+8y-4xy-4y^2] dx dy \\&= \int_0^3 [12x-2x^2+8xy-2x^2y-4xy^2]_0^{3-y} dy \\&= \int_0^3 [4x(3+2y-y^2)-2x^2(1+y)]_0^{3-y} dy \\&= \int_0^3 [-4x(y^2-2y-3)-2x^2(1+y)]_0^{3-y} dy \\&= \int_0^3 [-4x(y-3)(y+1)-2x^2(1+y)]_0^{3-y} dy \\&= \int_0^3 [4x(3-y)(y+1)-2x^2(1+y)]_0^{3-y} dy \\&= \int_0^3 \{2x(y+1)[2(3-y)-x]\}_0^{3-y} dy \\&= \int_0^3 \{2(3-y)(y+1)[2(3-y)-(3-y)]\} dy \\&= \int_0^3 [2(3-y)^2(y+1)] dy \\&= \int_0^3 [2(3-y)(y^2-2y-3)] dy \\&= \int_0^3 [2(3y^2-6y-9-y^3+2y^2+3y)] dy \\&= \int_0^3 [2(5y^2-3y-9-y^3)] dy \\&= - \int_0^3 [18+6y-10y^2+2y^3] dy \\&= - \left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2} \right]_0^3 \\&= - \frac{63}{2}\end{aligned}$$

Exemplo 06

Verifique o teorema de Gauss para o caso da região sólida delimitada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano xy , considerando para isso o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$

Sol

Primeiro vamos calcular o fluxo diretamente da integral de fluxo

$$\Phi = \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

da figura vemos que temos duas superfícies pelas quais o campo está passando, vamos analisar primeiro o plano $z = 0$, o vetor

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$$

com isso

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 &= (2z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{k}) \\ &= -y^2\end{aligned}$$

dessa forma o fluxo através dessa superfície está dado por

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4} y^2 dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-4 \cos^2 \theta) r dr d\theta \\ &= -\frac{4}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) r d\theta dr \\ &= -4\pi \int_0^2 r dr \\ &= -8\pi\end{aligned}$$

Para o caso do parabolóide temos

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_2 &= -\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

com isso

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 &= (2z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}) \cdot (2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 4xz + 2xy + y^2\end{aligned}$$

dessa forma

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4} (4xz + 2xy + y^2) dx dy \\&= \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 4} [4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy + y^2] dx dy \\&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} [32 \cos \theta (1 - r^2) + 8 \sin \theta \cos \theta + 4 \cos^2 \theta] r dr d\theta \\&= \frac{4}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) r d\theta dr \\&= 4\pi \int_0^2 r dr \\&= 8\pi\end{aligned}$$

Por tanto o fluxo total é

$$\Phi = -8\pi + 8\pi = 0$$

Realizando os cálculos utilizando o teorema da divergência

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot [2z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}] \\&= 0 + 0 + 0\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\Phi &= \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} dV \\&= \iiint_D 0 dV \\&= 0\end{aligned}$$

Exemplo 07

Seja D o sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$, o plano $x + z = 6$, e o plano xy , como mostrado na figura. Calcule o fluxo através dessa superfície do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \sin z) \mathbf{i} + (xy + \cos z) \mathbf{j} + e^y \mathbf{k}$

Sol

Utilizando o teorema da divergência podemos calcular essa integral

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot [(x^2 + \sin z) \mathbf{i} + (xy + \cos z) \mathbf{j} + e^y \mathbf{k}] \\ &= 2x + x \\ &= 3x\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\Phi &= \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV \\ &= 3 \iiint_D x \, dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r \cos \theta} r \cos \theta \, r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos \theta (6 - r \cos \theta) \, dr \, d\theta \\ &= 18 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta - 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \cos^2 \theta \, dr \, d\theta \\ &= -3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^2 r^3 \, dr \\ &= -\frac{3}{4} 2^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= -6 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= -12\pi\end{aligned}$$

Exemplo 08

Através da utilização do teorema da divergência e utilizando o campo radial $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, calcule o volume de um cone que tem uma base de área A e altura h . Suponha para a base qualquer superfície suave que tenha por contorno à superfície do cone.

Sol

Da figura observamos 2 superfícies distintas, a primeira superfície é a base do cone que escolhemos com sendo $z = h$ e por tanto tem por normal $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}$, a segunda superfície é o corpo do cone, como o campo \mathbf{F} é um campo radial então é claro que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 = 0$. Calculando a divergência do campo temos $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$, por tanto

$$\iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV = 3 \iiint_D dV = 3V$$

Calculando o fluxo da forma tradicional observamos que (lembrando que $z = h$)

$$\begin{aligned}
 \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_{R_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}_1 + \iint_{R_2} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}_2 \\
 &= \iint_{R_1} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} da \\
 &= \iint_{R_1} h da \\
 &= h \iint_{R_1} da \\
 &= hA
 \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 3V &= hA \\
 V &= \frac{1}{3}hA
 \end{aligned}$$

que é a equação para o volume dos cones.

A fim de verificar a afirmação de que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, consideremos o cone

$$\mathbf{r}(u, v) = v(x_0 + \cos u) \mathbf{i} + v(y_0 + \sin u) \mathbf{j} + hv \mathbf{k}$$

equação que descreve um cone similar ao da figura. A normal está dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \\
 &= \left[\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \mathbf{k} \\
 &= [(v \cos u)(h) - 0] \mathbf{i} + [0 - (-v \sin u)(h)] \mathbf{j} + \\
 &\quad [(-v \sin u)(y_0 + \sin u) - (v \cos u)(x_0 + \cos u)] \mathbf{k} \\
 &= [hv \cos u] \mathbf{i} + [hv \sin u] \mathbf{j} - v[1 + x_0 \cos u + y_0 \sin u] \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Escrevendo o campo em termos de \mathbf{r}

$$\mathbf{F} = v(x_0 + \cos u) \mathbf{i} + v(y_0 + \sin u) \mathbf{j} + hv \mathbf{k}$$

aplicando o produto escalar

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= hv^2(x_0 \cos u + y_0 \sin u + \cos^2 u + \sin^2 u) - hv^2(1 + x_0 \cos u + y_0 \sin u) \\
 &= hv^2(x_0 \cos u + y_0 \sin u + 1) - hv^2(1 + x_0 \cos u + y_0 \sin u) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

demonstrando assim a expressão.