Exemplo 01

Verifique o teorema de Gauss considerando $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e D a região dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Sol

Por definição a integral de fluxo

$$\Phi_S = \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

onde

$$d\vec{\sigma} = \mathbf{n}\, dudv$$

com

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$$

e

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Uma outra alternativa a essa abordagem é utilizar o Jacobiano

$$\mathbf{n} = \frac{\partial\,(y, z)}{\partial\,(u, v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\,(z, x)}{\partial\,(u, v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(u, v)}\,\mathbf{k}$$

sendo que x, y, z são as coordenadas do vetor $\mathbf{r}$ que é a parametrização da superfície por onde o campo vai fluir, que para o caso da esfera, em coordenadas esféricas, é

$$\mathbf{r}(u, v) = a\,\sin v\,\cos u\,\mathbf{i} + a\,\sin v\,\sin u\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}, \qquad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]\mathbf{k} \\
&= \left[(a\sin v\cos u)\,(-a\sin v) - (0)\,(a\cos v\sin u)\right]\mathbf{i} + \\
&\quad \left[(0)\,(a\cos v) - (-a\sin v\sin u)\,(-a\sin v)\right]\mathbf{j} + \\
&\quad \left[(-a\sin v\sin u)\,(a\cos v\sin u) - (a\sin v\cos u)\,(a\cos v\cos u)\right]\mathbf{k} \\
&= -\left(a^2\sin^2 v\cos u\right)\mathbf{i} - \left(a^2\sin^2 v\sin u\right)\mathbf{j} - \\
&\quad \left(a^2\sin v\cos v\sin^2 u + a\sin v\cos v\cos^2 u\right)\mathbf{k} \\
&= -\left(a^2\sin^2 v\cos u\right)\mathbf{i} - \left(a^2\sin^2 v\sin u\right)\mathbf{j} - \\
&\quad a^2\sin v\cos v\left(\sin^2 u + \cos^2 u\right)\mathbf{k} \\
&= -\left(a^2\sin^2 v\cos u\right)\mathbf{i} - \left(a^2\sin^2 v\sin u\right)\mathbf{j} - a^2\sin v\cos v\,\mathbf{k} \\
&= -a\sin v\left[a\,\sin v\,\cos u\,\mathbf{i} + a\,\sin v\,\sin u\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}\right] \\
&= -a\sin v\,\mathbf{r}
\end{aligned}$$

Note que o vetor $\mathbf{n}$ aponta para dentro da esfera já que $\sin v \geq 0$ no intervalo $0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$ o qual representa o hemisfério superior, e $\sin v \leq 0$ no intervalo $\dfrac{\pi}{2} < v \leq \pi$, o qual representa o hemisfério inferior. Devido a que desejamos trabalhar com a orientação positiva redefinimos nosso vetor normal para

$$\mathbf{n} = a \sin v \, \mathbf{r}$$

Escrevendo o campo $\mathbf{F}$ em termos de (u, v):

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(u, v) =& a\, \sin v\, \cos u \,\mathbf{i} + a\, \sin v\, \sin u \,\mathbf{j} + a \cos v \,\mathbf{k} \\
=& \mathbf{r}
\end{aligned}$$

de onde o elemento de fluxo está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} =& (a \sin v \, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \\
=& a^3 \sin v
\end{aligned}$$

dessa forma a integral de superfície do campo vetorial será

$$\begin{aligned}
\Phi_S =& \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} \\
=& \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a^3 \sin v \, du \, dv \\
=& 2\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin v \, dv \\
=& -2\pi a^3 (\cos \pi - \cos 0) \\
=& 4\pi a^3
\end{aligned}$$

Segundo o teorema da Divergência, o fluxo também está dado por

$$\Phi_S = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV$$

calculando a divergência do campo

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} =& \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x \,\mathbf{i} + y \,\mathbf{j} + z \,\mathbf{k}) \\
=& 3
\end{aligned}$$

dessa forma

$$
\begin{aligned}
\Phi_S &= \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dV \\
&= \iiint_D 3\,dV \\
&= 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \\
&= 4\pi a^3
\end{aligned}
$$

Exemplo 02

Avalie a integral o fluxo do campo

$$
\mathbf{F}(x,y,z) = xy\,\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\,\mathbf{j} + \sin(xy)\,\mathbf{k}
$$

através da superfície S dada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ o qual é delimitado pelos planos $z = 0$, $y = 0$, e $y + z = 2$ (ver figura)

Sol

Utilizando o teorema da divergência

$$
\iint_R \mathbf{F}\cdot d\vec{\sigma} = \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dV
$$

podemos calcular o fluxo sem necessidade de avaliar a integral de superfície diretamente. Dessa forma

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)\cdot\left[xy\,\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\,\mathbf{j} + \sin(xy)\,\mathbf{k}\right] \\
&= y + 2y \\
&= 3y
\end{aligned}
$$

de forma que

$$
\Phi = \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dV
$$

onde

$$
D = \left\{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x^2,\ 0 \le y \le 2 - z\right\}
$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
\Phi =& \int_0^1 \int_{-1}^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y \, dydzdx \\
=& \frac{3}{2} \int_0^1 \int_{-1}^{1-x^2} (2-z)^2 \; dz \, dx \\
=& -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[(2-z)^3\right]_0^{1-x^2} dx \\
=& -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\left(2-1+x^2\right)^3 - 8\right] dx \\
=& -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\left(1+x^2\right)^3 - 8\right] dx
\end{aligned}
$$

utilizando o binômio de Newton

$$
(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) a^{n-p} b^p
$$

onde os coeficientes binomiais

$$
C_{n,p} = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \frac{n!}{p! \, (n-p)!}
$$

dessa forma

$$
\begin{aligned}
\left(1+x^2\right)^3 =& \sum_{p=0}^{3} \left(\begin{array}{c} 3 \\ p \end{array} \right) 1^{3-p} x^{2p} \\
=& \left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right) 1^3 x^0 + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) 1^2 x^2 + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) 1^1 x^4 + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) 1^{3-3} x^6 \\
=& 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\Phi = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(3x^2 + 3x^4 + x^6 - 7\right) dx
$$

como a função é par, temos

$$
\begin{aligned}
\Phi =& -\int_0^1 \left(3x^2 + 3x^4 + x^6 - 7\right) dx \\
=& -\left(1 + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} - 7\right) \\
=& \frac{184}{35}
\end{aligned}
$$

Exemplo 04

Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$$

através da superfície S do retângulo sólido determinado por (ver figura)$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$ utilizando o (a) método direto e (b) o teorema de Gauss.

Sol

Utilizando o método direto devemos calcular a integral $\iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$ para cada uma das 6 faces. Para o caso da face $x = 1$ temos que $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2y = y$ já que $x = 1$, dessa forma

$$\iint_{x=1} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^3 \int_0^2 y\,dy\,dz = 6$$

A tabela a seguir resume o resultado obtido para o resto das faces

Dessa forma

$$\Phi = 6 + 0 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 54 + 0 = 60$$

Pelo teorema de Gauss

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dV \\
&= \iiint_D \left(2xy + 0 + 3yz^2\right) dV \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \left(2xy + 3yz^2\right) dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 (6xy + 27y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 (12x + 54)\,dx \\
&= \left[6x^2 + 54x\right]_0^1 \\
&=60
\end{aligned}$$

Exemplo 04

Seja S o cilindro sólido delimitada pelos planos $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$, e $\mathbf{n}$ o vetor unitário que aponta para fora da superfície (ver figura). Se $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3 + \tan yz)\,\mathbf{i} + (y^3 - e^{xz})\,\mathbf{j} + (3z + x^3)\,\mathbf{k}$, encontre o fluxo através da superfície.

Sol

Tentar avaliar a integral $\iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$ pode ser uma tarefa difícil, se comparado ao trabalho de se calcular a integral $\iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV$,

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \cdot \left[\left(x^3 + \tan yz\right)\,\mathbf{i} + \left(y^3 - e^{xz}\right)\,\mathbf{j} + \left(3z + x^3\right)\,\mathbf{k}\right] \\
&= 3x^2 + 3y^2 + 3 \\
&= 3\left(x^2 + y^2 + 1\right)
\end{aligned}
$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
\iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV &= \iiint_D 3\left(x^2 + y^2 + 1\right)\, dV \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 \left(r^2 + 1\right) r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= 9\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r^3 + r\right)\, dr\, d\theta \\
&= 54\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 108\pi
\end{aligned}
$$

Exemplo 05

Considere um sólido o qual está delimitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 2y + z = 6$ e seja $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Calcule o fluxo através da superfície.

Sol

Utilizando o teorema de Gauss

$$\Phi = \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV$$

onde

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \cdot \left[x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\right] \\
&= 1 + 2y + 1 \\
&= 2 + 2y
\end{aligned}
$$

de onde

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2+2y)\, dz\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-y} [2z + 2yz]_0^{6-2x-2y}\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-y} [2(6-2x-2y) + 2y(6-2x-2y)]\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-y} \left[12 - 4x - 4y + 12y - 4xy - 4y^2\right] dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-y} \left[12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2\right] dx\, dy \\
&= \int_0^3 \left[12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2\right]_0^{3-y} dy \\
&= \int_0^3 \left[4x\left(3 + 2y - y^2\right) - 2x^2(1+y)\right]_0^{3-y} dy \\
&= \int_0^3 \left[-4x\left(y^2 - 2y - 3\right) - 2x^2(1+y)\right]_0^{3-y} dy \\
&= \int_0^3 \left[-4x(y-3)(y+1) - 2x^2(1+y)\right]_0^{3-y} dy \\
&= \int_0^3 \left[4x(3-y)(y+1) - 2x^2(1+y)\right]_0^{3-y} dy \\
&= \int_0^3 \{2x(y+1)[2(3-y) - x]\}_0^{3-y} dy \\
&= \int_0^3 \{2(3-y)(y+1)[2(3-y) - (3-y)]\}\, dy \\
&= \int_0^3 \left[2(3-y)^2(y+1)\right] dy \\
&= \int_0^3 \left[2(3-y)\left(y^2 - 2y - 3\right)\right] dy \\
&= \int_0^3 \left[2\left(3y^2 - 6y - 9 - y^3 + 2y^2 + 3y\right)\right] dy \\
&= \int_0^3 \left[2\left(5y^2 - 3y - 9 - y^3\right)\right] dy \\
&= -\int_0^3 \left[18 + 6y - 10y^2 + 2y^3\right] dy \\
&= -\left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2}\right]_0^3 \\
&= -\frac{63}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 06

Verifique o teorema de Gauss para o caso da região sólida delimitada pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano xy, considerando para isso o campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$

Sol

Primeiro vamos calcular o fluxo diretamente da integral de fluxo

$$\Phi = \iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

da figura vemos que temos duas superfícies pelas quais o campo está passando, vamos analisar primeiro o plano $z = 0$, o vetor

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$$

com isso

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 &= \left(2z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}\right) \cdot (-\mathbf{k}) \\ &= -y^2 \end{aligned}$$

dessa forma o fluxo através dessa superfície está dado por

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \iint_{0 \le x^2 + y^2 \le 4} y^2 dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(-4\cos^2\theta\right) r\,dr\,d\theta \\ &= -\frac{4}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)\, r\,d\theta\,dr \\ &= -4\pi \int_0^2 r\,dr \\ &= -8\pi \end{aligned}$$

Para o caso do paraboloide temos

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 &= -\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

com isso

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 &= \left(2z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}\right) \cdot (2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 4xz + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

dessa forma

$$\begin{aligned}
\Phi_2 =& \iint_{0\leq x^2+y^2\leq 4} \left(4xz + 2xy + y^2\right) dx\, dy \\
=& \iint_{0\leq x^2+y^2\leq 4} \left[4x\left(4 - x^2 - y^2\right) + 2xy + y^2\right] dx\, dy \\
=& \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[32\cos\theta\left(1 - r^2\right) + 8\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta\right] r\, dr\, d\theta \\
=& \frac{4}{2}\int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos\theta\right) r\, d\theta\, dr \\
=& 4\pi \int_0^2 r\, dr \\
=& 8\pi
\end{aligned}$$

Por tanto o fluxo total é

$$\Phi = -8\pi + 8\pi = 0$$

Realizando os cálculos utilizando o teorema da divergência

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F} =& \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)\cdot\left[2z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}\right] \\
=& 0 + 0 + 0
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\Phi =& \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\, dV \\
=& \iiint_D 0\, dV \\
=& 0
\end{aligned}$$

Exemplo 07

Seja D o sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$, o plano $x + z = 6$, e o plano xy, como mostrado na figura. Calcule o fluxo através dessa superfície do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \sin z)\,\mathbf{i} + (xy + \cos z)\,\mathbf{j} + e^y\,\mathbf{k}$

Sol

Utilizando o teorema da divergência podemos calcular essa integral

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F} =& \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)\cdot\left[\left(x^2+\sin z\right)\,\mathbf{i}+\left(xy+\cos z\right)\,\mathbf{j}+e^y\,\mathbf{k}\right]\\
=&2x+x\\
=&3x
\end{aligned}
$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
\Phi =& \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dV\\
=&3\iiint_D x\,dV\\
=&3\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{6-r\cos\theta} r\cos\theta\,r dz\,dr\,d\theta\\
=&3\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\cos\theta\left(6-r\cos\theta\right)dr\,d\theta\\
=&18\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\cos\theta dr\,d\theta-3\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^3\cos^2\theta dr\,d\theta\\
=&-3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{2} r^3 dr\\
=&-\frac{3}{4}2^4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\\
=&-6\int_0^{2\pi}\left(1+\cos 2\theta\right)\,d\theta\\
=&-12\pi
\end{aligned}
$$

Exemplo 08

Através da utilização do teorema da divergência e utilizando o campo radial $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, calcule o volumem de um cone que tem uma base de área A e altura h. Suponha para a base qualquer superfície suave que tenha por contorno à superfície do cone.

Sol

Da figura observamos 2 superfícies distintas, a primeira superfície é a base do cone que escolhemos com sendo $z=h$ e por tanto tem por normal $\mathbf{n}_1=\mathbf{k}$, a segunda superfície é o corpo do cone, como o campo $\mathbf{F}$ é um campo radial então é claro que $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2=0$. Calculando a divergência do campo temos $\vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}=1+1+1=3$, por tanto

$$
\iiint_D \vec{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dV = 3\iiint_D dV = 3V
$$

Calculando o fluxo da forma tradicional observamos que (lembrando que $z = h$)

$$\begin{aligned}
\iint_R \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} =& \iint_{R_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}_1 + \iint_{R_2} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}_2 \\
=& \iint_{R_1} (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\, da \\
=& \iint_{R_1} h\, da \\
=& h \iint_{R_1} da \\
=& hA
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
3V =& hA \\
V =& \frac{1}{3} hA
\end{aligned}$$

que é a equação para o volumem dos cones.

A fim de verificar a afirmação de que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, consideremos o cone

$$\mathbf{r}(u, v) = v(x_0 + \cos u)\,\mathbf{i} + v(y_0 + \sin u)\,\mathbf{j} + hv\,\mathbf{k}$$

equação que descreve um cone similar ao da figura. A normal está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} =& \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{k} \\
=& \left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]\mathbf{k} \\
=& [(v\cos u)(h) - 0]\,\mathbf{i} + [0 - (-v\sin u)(h)]\,\mathbf{j} + \\
& [(-v\sin u)(y_0 + \sin u) - (v\cos u)(x_0 + \cos u)]\,\mathbf{k} \\
=& [hv\cos u]\,\mathbf{i} + [hv\sin u]\,\mathbf{j} - v[1 + x_0\cos u + y_0\sin u]\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Escrevendo o campo em termos de $\mathbf{r}$

$$\mathbf{F} = v(x_0 + \cos u)\,\mathbf{i} + v(y_0 + \sin u)\,\mathbf{j} + hv\,\mathbf{k}$$

aplicando o produto escalar

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} =& hv^2\left(x_0\cos u + y_0\sin u + \cos^2 u + \sin^2 u\right) - hv^2(1 + x_0\cos u + y_0\sin u) \\
=& hv^2(x_0\cos u + y_0\sin u + 1) - hv^2(1 + x_0\cos u + y_0\sin u) \\
=& 0
\end{aligned}$$

demostrando assim a expressão.

Exemplo 08

Considere o campo vetorial
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{c\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
Calcule o fluxo através da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Sol

Como temos que a superfície é definida de forma implícita, o vetor normal, para o hemisfério superior, está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} =& \frac{\vec{\nabla}\,(x^2+y^2+z^2-a^2)}{\left|\vec{\nabla}\,(x^2+y^2+z^2-a^2)\cdot\mathbf{k}\right|} \\
=& \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{z}
\end{aligned}$$

escrevendo o campo em termos da superfície

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{c\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})}{a^3}$$

dessa forma, o fluxo através do hemisfério superior está dado por

$$\begin{aligned}
\Phi_1 =& \iint_R \mathbf{F}\cdot d\vec{\sigma} \\
=& \iint_{0\le x^2+y^2\le a^2} \left[\frac{c\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})}{a^3}\right]\cdot\left(\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{z}\right)\,dx\,dy \\
=& \iint_{0\le x^2+y^2\le a^2} \frac{c}{a^3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right)dx\,dy \\
=& \frac{c}{a^3}a^2 \iint_{0\le x^2+y^2\le a^2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}}dx\,dy \\
=& \frac{c}{a}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,d\theta\,dr \\
=& -2\pi\frac{c}{2a}\int_{a^2}^0\frac{1}{\sqrt{u}}du \\
=& -2\pi\frac{c}{2a}\left(-2\sqrt{a^2}\right) \\
=& 2\pi c
\end{aligned}$$

Para o caso do hemisfério inferior teremos que

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{\nabla}\,(x^2+y^2+z^2-a^2)}{\left|\vec{\nabla}\,(x^2+y^2+z^2-a^2)\cdot(\mathbf{k})\right|} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{z}$$

e por tanto,

$$\Phi_2 = 2\pi c$$

de onde temos que o fluxo total estará dado por

$$\Phi = 4\pi$$

Note que para o caso do eletromagnetismo $c = Q/4\pi\epsilon_0$ por tanto o fluxo do campo eletromagnético está dado por

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$