Выборный Евгений Викторович
email: evybornyi@hse.ru

Математический анализ
Тема 6: Функции многих переменных

Москва 2016

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение. Вещественное n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$

Множество упорядоченных наборов из n действительных чисел называют **вещественным n-мерным пространством** $\mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Эти наборы чисел из $\mathbb{R}^n$ называют точками или векторами. В $\mathbb{R}^n$ определена сумма векторов и операция умножения вектора на число:

$$x + y = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) + (y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots,\ x_n + y_n),$$

$$\alpha x = \alpha \cdot (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, \ldots,\ \alpha x_n).$$

Определено понятие расстояния между точкам:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Выполнено неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Шар в $\mathbb{R}^n$

Ключевым понятием для определения сходимости в одномерном случае была ε-окрестность точки a. Определим аналогичные понятия в многомерном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение. Шар в $\mathbb{R}^n$

Открытым шаром в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке a и радиусом r называют множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\|x - a\| < r \iff (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < r^2.$$

Иногда это множество называют r-окрестностью точки a, сохраняя обозначение $O_r(a)$. Тогда **проколотой r-окрестностью** точки a, называют множество точек:

$$\dot{O}_r(a) = O_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - a\| < r\}.$$

Определение. Ограниченное множество

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется **ограниченным**, если A полностью лежит в некотором шаре. В этом случае существует R такое, что

$$\|x\| < R \quad \forall x \in A.$$

Определение. Предел последовательности точек

Говорят, что последовательность точек $\{x^{(k)}\}$, $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ сходится к точке $y \in \mathbb{R}^n$, пишут $x^{(k)} \to y$, если к нулю стремится расстояние между y и $x^{(k)}$ при $k \to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty} d(y,\ x^{(k)}) = 0.$$

Эквивалентные записи имеют вид:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \quad x^{(k)} \in O_\varepsilon(y) \quad \forall k \geq N.$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \quad \|x^{(k)} - y\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

Таким образом, последовательность точек стремится к y тогда и только тогда, когда в любом открытом шаре с центром в точке y лежит бесконечно много точек последовательности, а вне его — лишь конечное число.

Упражнение

Докажите, что множество точек сходящейся последовательности является ограниченным.

Предел последовательности точек

Предложение

Сходимость последовательности точек $\{x^{(k)}\}$ к точке y эквивалентна сходимости координат точек $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ к координатам точки $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = y \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} x_1^{(k)} = y_1, \dots, \lim_{k\to+\infty} x_n^{(k)} = y_n.$$

Доказательство

Доказательство теоремы непосредственно следует из очевидных неравенств:

$$|x_j^{(k)} - y_j| \le \sqrt{(x_1^{(k)} - y_1)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - y_n)^2} \le n \max_{1\le j\le n} |x_j^{(k)} - y_j|.$$

Замечание

Иногда в $\mathbb{R}^n$ вводят другое понятие расстояния по формуле:

$$\tilde{d}(x,\ y) = \max_{1\le j\le n} |x_j - y_j|.$$

Следовательно, сходимость последовательности точек относительно расстояния d и $\tilde{d}$ эквивалентна.

Открытые множества

Определение. Внутренние точки множества

Точка $a \in A \subset \mathbb{R}^n$, которая принадлежат множеству A вместе с некоторым открытым шаром с центром в точке a, называется **внутренней точкой** множества A.

Определение. Открытое множество

Множество точек $A \subset \mathbb{R}^n$ называется **открытым**, если для каждой точки $a \in A$ этого множества существует открытый шар с центром в точке a, который полностью лежит в A:

$$A \text{ — открыто} \iff \forall a \in A \; \exists r > 0 : \; O_r(a) \subset A.$$

Пустое множество $\emptyset$ полагается открытым по определению.

Таким образом, открытое множество — это множество, которое полностью состоит из внутренних точек.

Пример

Открытый шар является открытым множеством. Действительно, $\forall x \in A = O_R(a)$ положим $r = R - \|x - a\| > 0$. Тогда

$$y \in O_r(x) \;\Rightarrow\; \|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r + \|x - a\| = R \;\Rightarrow\; y \in A.$$

Свойства открытых множеств

1. Все пространство $\mathbb{R}^n$ является открытым.
2. Любое объединение открытых множеств является открытым.
3. Конечное пересечение открытых множеств является открытым.

Замечание

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открыто. Например,

$$A_k = (-1/k, +1/k) \subset \mathbb{R}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Множества A_k открыты, но

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_k \ \forall k\} = \{0\},$$

а множество, состоящее только из одной точки, не является открытым.

Замкнутые множества

Определение. Предельные и изолированные точки множества

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется **предельной точкой** множества A или точкой сгущения, если в любой окрестности точки a существуют точки из множества A, отличные от a:

$$\forall r > 0 \quad O_r(a) \cap A \neq \{a\}.$$

Точка $a \in A$ называется **изолированной точкой** множества A, если существует окрестность точки a, в которой нет других точек из множества A.

Предельные точки могут как принадлежать, так и не принадлежать рассматриваемому множеству.

Определение. Замкнутое множество

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. Пустое множество считают замкнутым по определению.

Предложение. Замкнутость в терминах последовательностей

Множество замкнуто тогда и только тогда, когда предел любой сходящейся последовательности точек этого множества также принадлежит этому множеству.

Свойства замкнутых множеств

1. Множество является замкнутым тогда и только тогда, когда его дополнение является открытым:
$$A \text{ — замкнуто} \iff (\mathbb{R}^n \setminus A) \text{ — открыто.}$$
2. Все пространство $\mathbb{R}^n$ является замкнутым.
3. Конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым.
4. Любое пересечение замкнутых множеств является замкнутым.

Определение. Компакт

Замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ называют **компактом**.

Понятие компакта является естественным обобщением понятия отрезка в многомерном пространстве.

Предложение. Компактность в терминах последовательностей

Множество является компактом тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке из заданного множества.

Граница множества

Определение. Граница множества

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется **граничной точкой** для множества $M \subset \mathbb{R}^n$, если в любой окрестности точки x есть как точки из множества M, так и точки не принадлежащие M. Граничные точки могут принадлежать или не принадлежать множеству M.

Множество всех граничных точек для заданного множества M называют **границей** M и обозначают ∂M.

Несложно доказать, что замкнутое множество всегда содержит свою границу.

Объединение множества и его границы всегда является замкнутым. Это множество называют замыканием множества M и обозначают

$$\bar{M} = M \cup \partial M.$$

Пример

Несложно найти границы следующих множеств:

$$\partial\,[a, b] = \{a,\ b\}, \qquad \partial\,(a,\ b) = \{a,\ b\};$$

$$\partial\, O_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\},$$

$$\partial\,\mathbb{R}^n = \emptyset.$$

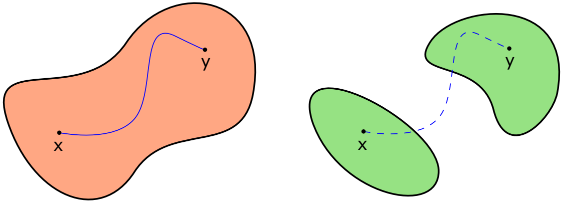
Область

Определение. Связное множество

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является **связным** (линейно связным), если для любой пары точек x и y из M существует непрерывный путь (кривая), которая соединяет точки x и y, и при этом полностью лежит в M.

Определение. Область

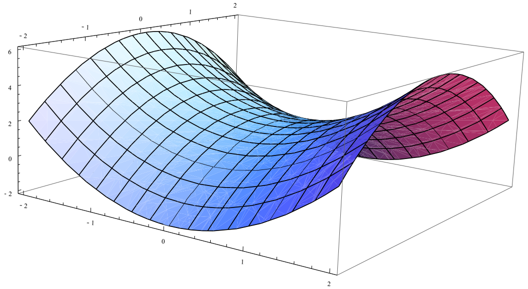
Областью в $M \subset \mathbb{R}^n$ называют открытое связное множество.



Множество, изображенное на рисунке слева, является связным, а множество, изображенное справа, не является связным (состоит из двух частей).

Определение. Функция нескольких переменных

Числовой функцией нескольких переменных называют отображение $f: E \to \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество, называемое **множеством определения** функции. Значение функции f в точке $x \in E$ записывают, как $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, при этом x_j называют независимыми переменными, а $z = f(x)$ — зависимой переменной, так как ее значение определяется выбором точки x.



При рассмотрении функций двух переменных $z = f(x, y)$ можно рассматривать график функции как поверхность Γ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$:

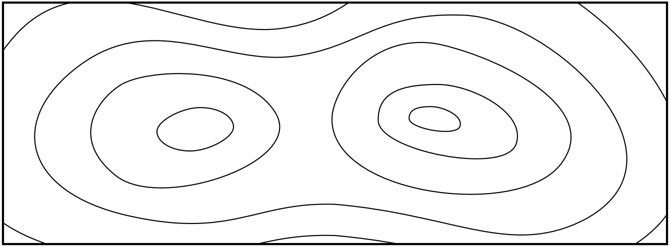
$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in E\}.$$

Линии уровни

Другой способ визуально представить функцию двух независимых переменных — это рассмотреть семейство кривых на плоскости, вдоль которых функция является постоянной

$$f(x, y) = const$$

Данные кривые называют **линиями уровня** для функции f.



Предел функции

Определение. Предел функции

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что число f_0 является **пределом** $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad |f(x) - f_0| < \varepsilon, \ \forall x \in \dot{O}_\delta(a).$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f_0$.

В случае двух переменных иногда пишут

$$\lim_{x \to x_0, \ y \to y_0} f(x, y) = f_0,$$

а соответствующий предел называют двойным.

Как и в одномерном случае, можно определить сходимость в терминах последовательностей (по Гейне).

Предел $f(x)$ равен f_0 при $x \to a$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к a последовательности точек $\{x^{(k)}\}$ из проколотой окрестности точки a последовательность значений функции в этих точках $f(x^{(k)})$ сходится к f_0:

$$\forall \{x^{(k)}\} : \ x^{(k)} \to a, \ x^{(k)} \neq a \ \Rightarrow \ f(x^{(k)}) \to f_0.$$

По аналогии с одномерным случаем определяются и бесконечные пределы функций.

Предел функции

Пусть функция f определена на множестве M и точка a является предельной точкой множества M. Тогда уместно говорить о стремлении $x \to a$ при условии $x \in M$, $x \neq a$.

Определение. Предел функции по множеству

Говорят, что число f_0 является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ по множеству M $(x \to a,\ x \in M)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad |f(x) - f_0| < \varepsilon,\ \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap M.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a,\ x \in M} f(x) = f_0$.

Частным случаем предела по множеству служат односторонние пределы функции одной переменной.

Непрерывность функции

Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $A \in \mathbb{R}^n$, **непрерывна в точке** $x = A$, если

$$\exists \lim_{x \to A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве M и точка $A \in M$ является предельной точкой этого множества. Если точка A не является внутренней для множества M, а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, **непрерывна по множеству** M в точке $x = A$, если

$$\exists \lim_{x \to A,\ x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества M.

Непрерывность функции

Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $A \in \mathbb{R}^n$, **непрерывна в точке** $x = A$, если

$$\exists \lim_{x \to A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве M и точка $A \in M$ является предельной точкой этого множества. Если точка A не является внутренней для множества M, а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, **непрерывна по множеству** M в точке $x = A$, если

$$\exists \lim_{x \to A,\ x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества M.

Непрерывность функции

Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $A \in \mathbb{R}^n$, **непрерывна в точке** $x = A$, если

$$\exists \lim_{x \to A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве M и точка $A \in M$ является предельной точкой этого множества. Если точка A не является внутренней для множества M, а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, **непрерывна по множеству** M в точке $x = A$, если

$$\exists \lim_{x \to A,\ x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества M.

Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, **непрерывна** на множестве M, если она непрерывна в каждой точке множества M.

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

Свойства непрерывных функций

1. Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
2. Композиция непрерывных функций непрерывна.
3. Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

Теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на множестве K и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{min} \in K: \quad f(x_{min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{max} \in K: \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Непрерывность функции

Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, **непрерывна** на множестве M, если она непрерывна в каждой точке множества M.

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

Свойства непрерывных функций

1. Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
2. Композиция непрерывных функций непрерывна.
3. Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

Теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на множестве K и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{min} \in K: \quad f(x_{min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{max} \in K: \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, **непрерывна** на множестве M, если она непрерывна в каждой точке множества M.

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

Свойства непрерывных функций

1. Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
2. Композиция непрерывных функций непрерывна.
3. Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

Теорема Вейерштрасса

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на множестве K и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{min} \in K : \quad f(x_{min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{max} \in K : \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Частные производные. Определение

Рассмотрим функцию $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, заданную в окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Тогда можно рассмотреть функцию одной переменной x_k, фиксировав остальные переменные:

$$\phi(x_k) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0).$$

Для определения скорости изменения значения функции $f(x)$ при изменении только одной переменной x_k можно рассмотреть производную функции $\phi(x_k)$. Эту производную называют **частной производной** функции f по переменной x_k в точке x^0 и обозначают:

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=x^0} = \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_{x=x^0} f(x) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = f'_{x_k}(x^0) = f_{x_k}(x^0) = \partial_k f(x_0).$$

Определение

Говорят, что функция f, определенная в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, имеет **частную производную** по переменной x_k в точке x^0, если существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x^0)}{h} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=x^0}.$$

Частные производные. Пример

Пример

Вычислим частные производные функции трех переменных

$$u = x^2 + 2xy + \cos(xz).$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y - \sin(xz)\, z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -x \sin(xz).$$

В данном случае вычисления производились в произвольной точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Тогда при дифференцировании по одной из переменных все остальные переменные можно считать постоянными.

Производная по направлению

Частная производная отражает изменение функции при изменении только одной переменной. Иногда удобно рассматривать производные и по другим направлениям не связанным с координатными осями.

Определение

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, имеет в точке x_0 **производную по направлению** l:

$$l = (l_1, \dots, l_n), \qquad l_1^2 + \dots + l_n^2 = 1,$$

если существует предел:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hl) - f(x_0)}{h}.$$

Например, в двумерном случае направление l можно представить в виде:

$$l = (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Тогда производная по направлению l функции $f(x, y)$ примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\alpha, y + h\sin\alpha) - f(x, y)}{h}.$$

Определение. Дифференцируемая функция

Говорят, что функция f, определенная в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, **дифференцируема** в точке x^0, если для любого достаточно маленького приращения Δx переменной x:

$$\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n),$$

приращение значения функции представимо в виде:

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} A_k \, \Delta x_k + o\,(\|\Delta x\|),$$

где A_k — постоянные.

Линейную часть приращения функции называют **дифференциалом** и обозначают:

$$df\left(x^0\right)(\Delta x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \, \Delta x_k.$$

Дифференциал является линейной формой порядка n, как функция от Δx, а также неявно зависит от выбора точки x^0.

Дифференцируемость

Теорема. Необходимое условие дифференцируемости

Пусть функция f дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и

$$df\left(x^0\right)(\Delta x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \, \Delta x_k.$$

Тогда у функции f существуют частные производные по всем переменным x_k в точке x^0 и

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^0\right).$$

Таким образом, для дифференцируемости функции f необходимо наличие у нее всех частных производных в заданной точке.

Дифференцируемость

В одномерном случае существования производной было вполне достаточно для дифференцируемости функции, но в многомерном случае это уже не так.

Упражнения

- Проведите доказательство теоремы о необходимом условии дифференцируемости, аналогично доказательству в одномерном случае.
- Докажите, что дифференцируемая функция непрерывна.
- Покажите, что функция

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0,$$

  не является дифференцируемой, но имеет частные производные в точке $(0, 0)$. Покажите, что эта функция не является даже непрерывной.

Дифференцируемость

Вычислим дифференциал функции

$$u(x_1, \ldots, x_n) = x_k.$$

Тогда

$$u(x + \Delta x) - u(x) = (x_k + \Delta x_k) - x_k = \Delta x_k.$$

Следовательно, дифференциал имеет вид

$$du(x)(\Delta x) = dx_k(\Delta x) = \Delta x_k.$$

Таким образом, общую формулу для дифференциала функции f можно переписать в виде:

$$df(x^0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\ dx_k.$$

Упражнение

Проверьте, что

$$d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Теорема. Достаточное условие дифференцируемости

Пусть все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ функции $f(x)$ определены в окрестности точки x_0 и непрерывны в точке x^0. Тогда функция f является дифференцируемой в точке x_0.

Доказательство

Проведем доказательство для $n = 2$. Пусть $f = f(x, y)$. Тогда, применяя формулу конечных приращений, получаем:

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0).$$

Из непрерывности частных производных следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1).$$

Таким образом,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o\left(|x - x_0|\right) + o\left(|y - y_0|\right).$$

Частные производные. Градиент

Определение. Градиент

Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, имеет частные производные по всем переменным (n штук) в фиксированной точке x^0, то числовой вектор

$$\operatorname{grad} f \Big|_{x=x^0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^0\right) \right)$$

называют **градиентом** функции f в точке x^0. То есть градиент — это вектор, составленный из частных производных функции f в точке x^0.

Определение. Производные высших порядков

Если частная производная функции $f(x)$ по переменной x_k определена в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то можно определить **частные производные второго порядка**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}\left(x^0\right) = \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_{x=x^0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

как частные производные по переменной x_m от функции $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$. Аналогично определяются производные третьего порядка и далее.

Пример

Пусть
$$f = x^2 + 2xy.$$

Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 2y) = 2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2y) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0.$$

Таким образом, для функции двух переменных существует четыре частных производных второго порядка. Они образуют матрицу 2×2. В общем случае размерности n мы получим квадратную матрицу размера $n \times n$.

Свойства градиента

Предложение

Пусть функция f дифференцируема в точке x. Тогда для производной по направлению l справедлива формула:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + l_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x) = \langle l, \operatorname{grad} f \rangle.$$

То есть производная по направлению l совпадает с проекцией вектора $\operatorname{grad} f$ на вектор l.

Доказательство

Функция f является дифференцируемой:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k + o\left(\|\Delta x\|\right).$$

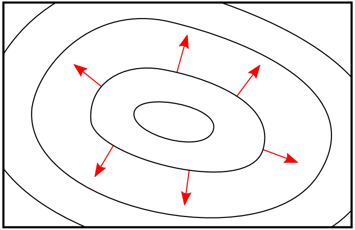
Пусть $\Delta x = hl$. Тогда $\quad \|\Delta x\| = |h| \, \|l\| = |h|, \quad \Delta x_k = l_k h.$
Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hl) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} l_k h + o(h) \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} l_k.$$

Геометрический смысл градиента

Производная по направлению l характеризует скорость роста функции в этом направлении. Мы видим, что производная по направлению совпадает с проекцией направляющего вектора l на вектор градиента $\operatorname{grad} f$. Следовательно, направление, в котором функция растет сильнее всего, совпадает с направлением градиента.

Направление градиента — это направление наискорейшего роста функции, а модуль градиента — это скорость роста функции в этом направлении.



Если рассмотреть линии уровни функции, то есть кривые на которых функция постоянна, то градиент будет ортогонален линиям уровня. **Докажите это** в двумерном случае.

Поскольку частные производные — это производные от функции многих переменных, как от функции одной переменной при фиксации остальных переменных, то все правила дифференцирования сохраняют силу. Остановимся только на дифференцировании сложной функции.

Правило дифференцирования сложной функции

Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, n функций $g_j(t) = g_j(t_1, \ldots, t_m)$ дифференцируемы в точке $t^0 \in \mathbb{R}^m$, и $g_j(t^0) = x_j^0$, где $j = 1, \ldots, n$. Тогда сложная функция $F(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t^0 и справедливы формулы

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k}\bigg|_{t=t^0} f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s}(g_1(t^0), \ldots, g_n(t^0))\,\frac{\partial g_s}{\partial t_k}(t^0).$$

Пример

Пусть на прямой задана потенциальная энергия $U(x)$. Тогда уравнение Ньютона имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx}.$$

Определим функцию

$$E(x, v) = \frac{mv^2}{2} + U(x).$$

Пусть $x(t)$, $v(t) = \dot{x}(t)$ — решение уравнений Ньютона. Тогда

$$\frac{d}{dt}E(x(t), v(t)) = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{dv}{dt} = U'(x(t))v(t) + mv(t)\left(-\frac{1}{m}U'(x(t))\right) = 0.$$

Таким образом, функция $E(x, v)$ сохраняет свое значение — это закон сохранения энергии.

Теорема Шварца

Теорема о равенстве смешанных производных

Пусть частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ функция $f(x, y)$ определены в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и **непрерывны** в этой точке. Тогда они совпадают:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Теорема естественным образом обобщается на случай функции нескольких переменных и на производные выше второго порядка. Так значение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, если соответствующие частные производные непрерывны.

Замечание

Условие непрерывности является достаточным, но отнюдь не является необходимым. Смешанные производные могут совпадать и в случае, когда непрерывность не имеет место.

Упражнения

- Докажите теорему.
- Рассмотрите пример $f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Теорема Шварца

Теорема о равенстве смешанных производных

Пусть частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ функция $f(x, y)$ определены в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и **непрерывны** в этой точке. Тогда они совпадают:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Теорема естественным образом обобщается на случай функции нескольких переменных и на производные выше второго порядка. Так значение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, если соответствующие частные производные непрерывны.

Замечание

Условие непрерывности является достаточным, но отнюдь не является необходимым. Смешанные производные могут совпадать и в случае, когда непрерывность не имеет место.

Упражнения

- Докажите теорему.
- Рассмотрите пример $f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Для дифференцируемой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, справедлива формула линеаризации:

$$f(x+y) = f(x) + \langle \mathrm{grad}\, f(x),\ y \rangle + o\left(\|y\|\right).$$

Часто возникает необходимость приближения более высокой точности.

Теорема. Формула Тейлора

Пусть все частные производные функция f до порядка m включительно определены в некоторой окрестности точки $x \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в этой точке. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} y_k + \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_r} y_k y_r + \cdots$$
$$+ \frac{1}{m!} \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_m}} y_{k_1} \cdots y_{k_m} + o\left(\|y\|^m\right).$$

Старшие дифференциалы. Формула Тейлора

Пример

Для функции двух переменных получаем:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right) + \cdots,$$

где производные взяты в точке (x, y).

Второй дифференциал функции $f(x, y)$ определяется как:

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)),$$

Следовательно,

$$d^2 f(x,y) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы старших порядков.
Мы видим, что формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + df(x,y)(\Delta x, \Delta y) + \frac{1}{2}d^2 f(x,y)(\Delta x, \Delta y) + \cdots$$

Определение. Локальный экстремум

Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется **точкой локального максимума** (или минимума) функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности этой точки, если существует окрестность U точки x^0 такая, что для всех $x \in U$, $x \neq x^0$ справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) > f(x^0).$$

Точки локальных минимумов и максимумов называют **точками локального экстремума** функции.

Пусть функция рассматривается на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, для которого точка $x^0 \in M$ не является внутренней, а например, является точкой границы. Тогда данное выше определение дополняют условием $x \in M$.

Определение. Условный локальный экстремум

Точка $x^0 \in M$ называется **точкой условного локального максимума** (или минимума) функции $f(x)$ при условии $x \in M$, если существует окрестность U точки x^0 такая, что для всех $x \in U \cap M$, $x \neq x^0$ справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) < f(x^0).$$

Иногда говорят о внутренних и граничных точках локального экстремума.

Локальные экстремумы

Определение. Локальный экстремум

Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется **точкой локального максимума** (или минимума) функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности этой точки, если существует окрестность U точки x^0 такая, что для всех $x \in U$, $x \neq x^0$ справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) > f(x^0).$$

Точки локальных минимумов и максимумов называют **точками локального экстремума** функции.

Пусть функция рассматривается на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, для которого точка $x^0 \in M$ не является внутренней, а например, является точкой границы. Тогда данное выше определение дополняют условием $x \in M$.

Определение. Условный локальный экстремум

Точка $x^0 \in M$ называется **точкой условного локального максимума** (или минимума) функции $f(x)$ при условии $x \in M$, если существует окрестность U точки x^0 такая, что для всех $x \in U \cap M$, $x \neq x^0$ справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) < f(x^0).$$

Иногда говорят о внутренних и граничных точках локального экстремума.

Достаточное условие экстремума

В многомерном случае справедлив аналог теоремы Фурье:

Теорема. Достаточные условия локального экстремума

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и имеет в этой точке локальный экстремум. Тогда в этой точке градиент функции равен нулю:

$$\operatorname{grad} f(x^0) = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, во всех точках локального экстремума равны нулю все частные производные. Такие точки принято называть **критическими**.

Доказательство

Докажем от противного. Пусть в точке x^0 имеет место локальный экстремум, а градиент не обращается в ноль. Можно считать, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \neq 0$. Тогда функция $g(t) = f(x_1^0 + t, x_2^0, \dots, x_n^0)$ одной переменной t, очевидно, дифференцируема и имеет экстремум в точке $t = 0$, но

$$g'(0) = \frac{d}{dt} f(x_1^0 + t, x_2^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \neq 0,$$

что противоречит теореме Ферма.

Необходимое условие

Как и в одномерном случае, для исследования критической точки можно рассмотреть второй дифференциал функции.

Теорема. Необходимые условия локального экстремума

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, точка x^0 является критической $\mathrm{grad}\, f(x^0) = 0$ и второй дифференциал функции f в этой точке является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой. Тогда эта точка является минимумом (максимумом).

Двумерный случай

Для функции двух переменных условие максимума примет вид:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2 < 0,$$

для произвольных приращений dx и dy, кроме $dx = dy = 0$.

Вопрос о знаке квадратичной формы детально изучается в линейной алгебре.

Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + x + 2y^2 + xy$. Задача стоит в поиске локальных и глобальный точек минимума и максимума.

Функция, очевидно, является дифференцируемой. Критические точки определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 1 + y = 0; \\ 4y + x = 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -4/7; \\ y = 1/7. \end{cases}$$

Вычислим $d^2 f$ в этой точке:

$$d^2 f = 2dx^2 + 2dxdy + 4dy^2 = dx^2 + (dx + dy)^2 + 3dy^2 > 0,$$

при dx и dy неравных нулю одновременно. Следовательно, рассматриваемая точка является точкой минимума.

Критерий Сильвестра

В алгебре доказывается теорема, позволяющая легко проверять знак второго дифференциала.

Теорема. Критерий Сильвестра

Пусть F — квадратичная форма порядка n:

$$F(y) = \langle Ay, y \rangle = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, y_i y_j,$$

где A — симметричная матрица $a_{ij} = a_{ji}$. Тогда F положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры A_k, $k = 1, \ldots, n$ положительны, и F отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки A_k чередуются так, что $A_1 < 0$.

Угловые миноры A_k матрицы A — это определители:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Условный экстремум

Предположим, что нам необходимо исследовать функцию $f(x, y)$ на условный экстремум, если условие имеет вид $g(x, y) = 0$. Функции f и g предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Прямой метод

Если уравнение кривой $g(x, y) = 0$ можно переписать в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, то исследование функции f можно свести к исследованию функции $F(t) = f(x(t), y(t))$ одной переменной t.

Метод множителей Лагранжа

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Теорема Лагранжа

Пусть точка (x_0, y_0) — точка условного экстремума f и $\operatorname{grad} g(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда найдется такая постоянная λ_0, что точка (x_0, y_0, λ_0) будет критической точкой функции L, то есть

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

в точке (x_0, y_0, λ_0).

Предположим, что функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, задана неявно уравнением:

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$$

Возникает вопрос об условиях разрешимости этого уравнения.

Теорема о неявной функции

Пусть $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, точка (x^0, y^0) удовлетворяет уравнению $F(x^0, y^0) = 0$, частная производная F по y не равна нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0.$$

Тогда существует окрестность U точки x^0, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно определяет непрерывную функцию $y = f(x)$, для которой $y^0 = f(x^0)$. Функция $f(x)$ имеет непрерывные в точке x^0 частные производные.

Следствие

Дифференцируя равенство $F(x, f(x)) = 0$ по переменной x_k, получаем формулу для частных производных функции $f(x)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = -\frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)\right)^{-1}.$$

Замены координат

Рассмотрим n отображений $y_1 = f_1(x), \dots, y_n = f_n(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда вектор $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ можно также интерпретировать, как точку n-мерного пространства. Говорят, что f задает отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что отображение $y = f(x)$ непрерывно (или дифференцируемо), если таковыми являются все функции $f_i(x)$.

Определение

Матрицей Якоби дифференцируемого отображения f называют матрицу:

$$\mathcal{J}(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Якобианом отображения f называют определитель этой матрицы $J(x) = \det \mathcal{J}(x)$.

Определение

Отображение $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является регулярным (невырожденным) в точке x^0, если оно непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x^0 и якобиан отображения не обращается в ноль: $J(x^0) \neq 0$.

Обратное отображение

Рассмотрим вопрос о том, когда отображение $y = f(x)$ является обратимым.

Теорема об обратном отображение

Пусть отображение $y = f(x)$ регулярно в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует окрестность U точки x^0 такая, что уравнение $y = f(x)$ однозначно разрешимо относительно x, и соответствующее отображение $x = g(y)$ регулярно в U.

Следствие

Вычислим частные производные $\frac{\partial g_k}{\partial y_m}(y)$, продифференцировав равенство:

$$y_m = f_m(g(y)) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial y_s} = \delta_{s,m} = \begin{cases} 1, & s = m; \\ 0, & s \neq m. \end{cases}$$

Таким образом, матрицы Якоби взаимно обратных отображений $\frac{\partial g}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются взаимно обратными матрицами. Как известно из алгебры, обратная матрица существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы не равен нулю. В этом и заключается условие регулярности отображений.

Примеры замен

Некоторые замены переменных крайне часто используются на практике.

Полярные координаты

Переход к полярным координатам на плоскости имеет вид:

$$\begin{array}{l} x = r\cos(\phi); \\ y = r\sin(\phi), \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2}; \\ \phi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{array}$$

Найдем матрицу Якоби:

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, Якобиан перехода от (r,ϕ) к (x,y) равен

$$J(r,\phi) = r\cos^2(\phi) + r\sin^2(\phi) = r.$$

Замена координат не является регулярной при $r = 0$ или $x = y = 0$. Действительно, в этих точках отображение даже не является взаимно однозначным.

Примеры замен

Упражнения

Найдите Якобианы перехода к сферическим координатам:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\phi)\sin(\theta);\\
y &= r\sin(\phi)\sin(\theta);\\
z &= r\cos(\theta),
\end{aligned}
$$

и цилиндрическим координатам:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\phi);\\
y &= r\sin(\phi);\\
z &= z,
\end{aligned}
$$

Определите, где отображения являются обратимыми.

Формула линеаризации

Пусть $y = f(x)$ — регулярное отображение в окрестности точки x^0. Построим линейное приближение для $f(x)$ в случае, когда x близко к x^0. Для каждой функции $f_m(x)$ имеем:

$$f_m(x) = f_m(x^0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0)\,(x_k - x_k^0) + o(\|x - x^0\|).$$

Следовательно, в матричной записи получаем, что

$$f(x) = f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0)\,(x - x^0) + o(\|x - x^0\|),$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ — матрица Якоби размера $n \times n$.

Таким образом, линейным приближением для отображения f в окрестности точки x^0 является линейный оператор с матрицей Якоби в базисе с координатами $(x_1, \dots, x_n)$.

Следовательно, если отображение f регулярно в точке x^0 (то есть определитель матрицы Якоби не равен нулю), то набор векторов $v_k = \mathrm{grad}\, f_k(x^0)$ является линейно независимым.

Якобиан отображения и ориентируемый объем

Определение

Рассмотрим n-мерный параллелепипед с вершинами в точках $A^1, \ldots, A^n$. Тогда его **ориентируемый объем** определяется как

$$Vol(A) = \det(A),$$

где матрица A составлена из вектор-столбцов A^k.

Ориентируемый объем может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от взаимного расположения точек A^k. Объемом параллелепипеда называют величину $|Vol(A)|$.

Пусть $y = f(x)$ — регулярное в точке x^0 отображение, а Δx — малое приращение аргумента x. Учитывая формулу линеаризации, можно считать, что образом прямоугольного параллелепипеда D со сторонами $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ является параллелепипед M с вершинами

$$u_1 = f(x^0 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x^0) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1,$$

$$\ldots$$

$$u_n = f(x^0, x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x^0) \approx \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Следовательно, объем параллелепипеда M связан с объемом параллелепипеда D по формуле

$$Vol(M) = \det \mathcal{J}(x^0)\, \Delta x_1 \cdots \Delta x_n = J(x^0)\, Vol(D).$$

Таким образом якобиан отображения является коэффициентом преобразования ориентированного объема элемента пространства при отображении f в точке x^0.

Площадь плоской области

Определим понятие площади для плоского ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Клеточное множество

Если M представляется в виде объединения конечного числа прямоугольников, пересекающихся лишь по границам, то M называют **клеточным** множеством.

Тогда площадь S_M клеточного множества M — это сумма площадей соответствующих прямоугольников.

Определение. Площадь

Будем говорить, что множество $D \subset \mathbb{R}^2$ имеет **площадь** $S(D) = S_D$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества Ω и ω такие, что

$$\omega \subset D \subset \Omega, \quad S_\omega < S_D < S_\Omega, \quad S_\Omega - S_\omega < \varepsilon.$$

Множества, имеющие площадь, называют **измеримыми** (по Жордану).

Замечание

Область, ограниченная гладкой кривой, всегда измерима. Не все множества на плоскости вообще имеют какую-либо площадь.

Аналогично определяются понятия измеримости и объема множества в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, и в случае большей размерности.

Двойной интеграл

Предположим, что $f(x, y)$ — скалярная функция, заданная на ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^2$. Определим объем тела в трехмерном пространстве, которое лежит между графиком функции $z = f(x, y)$ и плоскостью xOy, при $(x, y) \in D$.

Предположим, что D — измеримое множество. Разобьем D на конечное число измеримых частей $D_1, \ldots, D_m$:

$$D = \bigcup_{k=1}^{m} D_k, \qquad D_i \cap D_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

В каждом множестве D_k выберем опорную точку $A_k = (x_k, y_k) \in D_k$.

Диаметром $d_k = d(D_k)$ множества D_k называют расстояние между максимально удаленными точками множества D_k:

$$d(D_k) = \sup_{a,b \in D_k} \|a - b\|.$$

Параметром разбиения будем называть величину $d = \max d_k$.

Интегральной суммой будем называть величину:

$$\sum_{k=1}^{m} f(A_k)\, S(D_k).$$

Определение

Будем говорить, что функция $f(x, y)$, определенная на измеримом множестве D, интегрируема в D, если существует предел интегральных сумм:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{m} f(A_k)\, S(D_k),$$

при стремлении параметра разбиения к нулю, для произвольного выбора разбиения и опорных точек.

Аналогичным образом определяется тройной интеграл по трехмерному измеримому множеству:

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz.$$

В многомерном случае пишут просто

$$\int\limits_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_D f(x)dx,$$

где D — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$.

Свойства

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ измеримого множества $D \in \mathbb{R}^n$, то она интегрируема.
2. Площадь (объем) измеримого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ можно вычислить как
$$S(D) = \int_D 1dx.$$
3. Линейность:
$$\int_D (f(x) + g(x))\, dx = \int_D f(x)dx + \int_D g(x)dx, \qquad \int_D A\, f(x)\, dx = A \int_D f(x)\, dx.$$
4. Аддитивность. Пусть D_1 и D_2 — два непересекающихся ($D_1 \cap D_2 = \emptyset$) измеримых множества в $\mathbb{R}^n$, и функция f интегрируема на D_1 и D_2. Тогда f интегрируема на измеримом множестве $D_1 \cup D_2$ и
$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x)\, dx = \int_{D_1} f(x)\, dx + \int_{D_2} f(x)\, dx.$$

Двойной интеграл. Свойства

Интегрирование неравенств

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые функции на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Если справедливо неравенство

$$f(x) \le g(x), \qquad \forall x \in D,$$

то

$$\int_D f(x)dx \le \int_D g(x)dx.$$

Теорема о среднем

Пусть $f(x)$ — непрерывная на связном измеримом компакте $D \subset \mathbb{R}^n$ функция. Тогда найдется такая точка $\xi \in D$, что

$$\int_D f(x)dx = f(\xi)\int_D 1\,dx = f(\xi)S(D).$$

Оценка интеграла

Если функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема и

$$\left|\int_D f(x)dx\right| \le \int_D |f(x)|\,dx.$$

Двойной интеграл. Сведение к повторному

Теорема

Пусть $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y \in [b, c]\right\}.$$

Тогда

$$\iint_\Pi f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy.$$

Интегралы в правой части последнего равенства принято называть повторными, поскольку интегрирование сначала производится только по одной переменной, и только затем — по второй. Часто их записывают в виде

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy, \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx,$$

соответственно.

Следствие

Если функция f представляется в виде $f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$, то

$$\iint_\Pi f(x, y)dxdy = \left(\int_a^b \phi(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d \psi(y)dy\right).$$

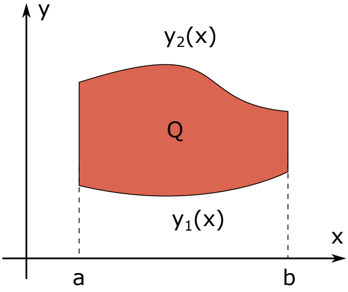
Теорема

Пусть $y_1(x) \leq y_2(x)$ — пара непрерывных на $[a, b]$ функций, функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\right\}.$$

Тогда

$$\iint_Q f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$



Другой способ вычисления двойного интеграла связан с введением новых координат.

Теорема

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на измеримом компакте $D \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, $x = X(y)$ — регулярная замена координат, переводящая D' в $D = \phi(D')$. Тогда D' — компакт с кусочно-гладкой границей и

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(X(y))|J(y)|dy,$$

где $J(y)$ — якобиан отображения $x = X(y)$.

В развернутом виде:

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \cdots dx_n = \int_{D'} f(X_1(y), \dots, X_n(y)) \left| \det \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \cdots dy_n.$$

Мы уже видели, что ориентируемый объем малого элемента пространства изменяется пропорционально якобиану отображения. Поскольку при интегрировании мы рассматриваем неориентированный объем, то в формуле возникает модуль якобиана.

Пример

Вычислим площадь круга

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} 1dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{array}{l} x = r\cos(\phi); \\ y = r\sin(\phi), \end{array} \qquad J(r,\phi) = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = r.$$

Тогда, если $\Pi = \{(r,\phi) \mid r \in [0,R],\ \phi \in [0,2\pi]\}$, то

$$S = \iint_{\Pi} r\,drd\phi.$$

Следовательно, приводя интеграл к повторному, получаем:

$$S = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R rdr = 2\pi\frac{r^2}{2}\Big|_0^R = \pi R^2.$$

Двойной интеграл. Замена переменных

Пример

Рассмотрим

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Тогда

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам:

$$\begin{array}{l} x = r\cos(\phi); \\ y = r\sin(\phi), \end{array} \qquad J(r,\phi) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = r \quad \Rightarrow$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} d(r^2) = -\pi e^{-z}\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Гладкие кривые в пространстве

Напомним, что кривую в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно задать параметрически:

$$r = r(t) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = r_1(t), \ldots, x_n = r_n(t), \qquad t \in [a, b].$$

В действительности одной кривой Γ может соответствовать множество различных параметризаций.

Определение. Гладкая кривая в пространстве

Будем говорить, что $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая в пространстве, если она задана параметрически $r(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, при $t \in [a, b]$, то есть

$$\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\},$$

где $r(t)$ — непрерывно дифференцируемо и вектор $r'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$.

Тогда в каждой точке кривой можно определить касательную:

$$r_{tan}(t) = r'(t_0)(t - t_0) + r(t_0).$$

Кривую называют **кусочно-гладкой**, если условие $r'(t) \neq 0$ нарушается в конечном числе точек. Кривую называют **замкнутой**, если $r(a) = r(b)$. Кривую называют **простой**, если она не имеет точек самопересечения.

Криволинейный интеграл

Часто возникает необходимость вычислить определенный интеграл вдоль некоторой кривой в пространстве.

Определение

Криволинейным интегралом первого рода от скалярной функции $f(x)$ вдоль гладкой кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ называют величину:

$$\int_\Gamma f(x)dl = \int_a^b f(r(t))\,|r'(t)|\,dt,$$

где $r(t)$ — параметризация кривой Γ.

Утверждение

Величина интеграла не зависит от выбора параметризации кривой и не зависит от направления движения по кривой.

Например, длина кривой Γ может быть вычислена независимо от параметризации кривой:

$$l(\Gamma) = \int_\Gamma 1\,dl, \qquad dl = \sqrt{(r_1'(t))^2 + \cdots + (r_n'(t))^2}\,dt.$$

Криволинейный интеграл

Определение

Криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вдоль гладкой кривой Γ называют скалярную величину:

$$\int_\Gamma \langle f(x), dl \rangle = \int_a^b \langle f(r(t)), r'(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(r(t)) r'_k(t) dt,$$

где $r(t)$ — параметризация кривой Γ.

Утверждение

Величина интеграла не зависит от выбора параметризации кривой, если параметризация не меняет направление движения по кривой. При изменении направления движения вдоль кривой интеграл меняет знак на противоположный.

В трехмерном пространстве вектор f задается тремя функциями (компонентами) $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. Тогда интеграл записывают в виде:

$$\int_\Gamma \langle f, dl \rangle = \int_\Gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Пример

Вычислим криволинейный интеграл второго рода от поля

$$f(x, y) = (y, x),$$

вдоль единичный окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{x^2+y^2=1} ydx + xdy = \{x = \cos(t),\ y = \sin(t)\} = \int_0^{2\pi} \sin(t) d\cos(t) + \cos(t) d\sin(t) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) dt = \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Причина, по которой мы получили нулевой ответ, очевидна, исходя из физической интерпретации данной задачи. Интеграл — это работа силы f вдоль замкнутого пути по окружности, но сила f является потенциальной:

$$f = -\mathrm{grad}\, V, \qquad V = ?$$

Потенциальное поле

Определение

Непрерывное векторное поле $f(x)$ называется потенциальным, если найдется непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$ такая, что

$$f(x) = \operatorname{grad} V(x) \quad \Longleftrightarrow \quad dV(x) = f_1(x)dx_1 + \cdots + f_n(x)dx_n.$$

Предложение

Криволинейный интеграл второго рода от потенциального поля f не зависит от выбора гладкого пути интегрирования, а зависит лишь от начальной и конечной точки A и B:

$$\int_\Gamma \langle f(x), dl\rangle = \int_A^B \langle f(x), dx\rangle.$$

Доказательство

Пусть Γ гладкий путь из точки A в точку B, заданный параметрически отображением $r(t)$, $t \in [a, b]$. Тогда

$$\int_\Gamma \langle f(x), dl\rangle = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(r(t))r_k'(t)\,dt = \int_a^b \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(r(t))r_k'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} V(r(t))\,dt = V(r(t))\Big|_a^b = V(B) - V(A).$$

Теорема

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании области G, а граница $\Gamma = \partial G$ является простой замкнутой кусочно-гладкой кривой. Тогда

$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

где ориентация кривой $\Gamma = \partial G$ взята в положительном направлении.

Доказательство

Проведем доказательство лишь для случая, когда $Q = 0$ и область G имеет вид:

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y_1(x) < y < y_2(x) \right\}.$$

Тогда, сводя двойной интеграл к повторному, получаем:

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)dxdy = -\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)dx =$$

$$= \int_a^b P(x,y_1(x))dx - \int_a^b P(x,y_2(x))dx = \int_{\partial G} P(x,y)dx.$$

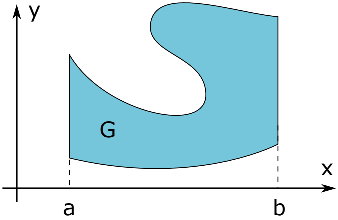
Формула Грина

Замечания

Мы доказали формулу

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_{\partial G} P(x,y)dx$$

для простой области G. Можно показать, что в общем случае область G разбивается на конечное число частей рассмотренного вида. Таким образом, данная формула справедлива для произвольной области с простой кусочно-гладкой границей.



Вторая формула

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_{\partial G} Q(x,y)dy$$

доказывается полностью аналогично, только оси x и y меняются местами.

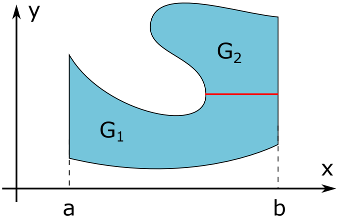
Формула Грина

Замечания

Мы доказали формулу

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial x}(x, y)dxdy = \int_{\partial G} P(x, y)dx$$

для простой области G. Можно показать, что в общем случае область G разбивается на конечное число частей рассмотренного вида. Таким образом, данная формула справедлива для произвольной области с простой кусочно-гладкой границей.



Вторая формула

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)dxdy = \int_{\partial G} Q(x, y)dy$$

доказывается полностью аналогично, только оси x и y меняются местами.

Мы уже видели, что если непрерывное векторное поле является потенциальным, то криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования. Оказывается верно и обратное утверждение.

Теорема

Пусть $(P(x, y), Q(x, y))$ — непрерывное векторное поле на плоскости и интеграл

$$F(A, B) = \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

вдоль гладкой кривой Γ_{AB}, соединяющей точки A и B, не зависит от выбора кривой Γ_{AB}, а зависит лишь от выбора точек A и B. Тогда поле является потенциальным, то есть найдется такая непрерывно дифференцируемая функция $U(x, y)$ (потенциал), что

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Идея доказательства заключается в том, что потенциал U имеет вид:

$$U(x, y) = F(A, B),$$

где точка $A = (x_0, y_0)$ фиксирована, а $B = (x, y)$ — произвольная точка.

Потенциальность плоского векторного поля

Теорема

Непрерывно дифференцируемое векторное поле $(P(x,y), Q(x,y))$ на плоскости является потенциальным тогда и только тогда, когда справедливо условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство

Необходимость. Пусть поле потенциально:

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Тогда по теореме Шварца:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достаточность. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два гладких пути из A в B, а G — область, ограниченная ими. Тогда по формуле Грина (с точностью до знака):

$$\int_{\Gamma_1}(Pdx + Qdy) - \int_{\Gamma_2}(Pdx + Qdy) = \iint_{\partial G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{\partial G} 0\,dxdy = 0.$$

Пример

Вернемся к примеру

$$(P, Q) = (y, x).$$

Данное поле является потенциальным поскольку:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Восстановим потенциал $U(x, y)$. Вычислим

$$U(x_1, y_1) = \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \{x = x_1 t, \; y = y_1 t\} =$$

$$= \int_0^1 (y_1 x_1 t + x_1 y_1 t)dt = x_1 y_1 \int_0^1 2t\,dt = x_1 y_1.$$

Следовательно, $U(x, y) = xy$. Действительно,

$$P(x, y) = y = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q(x, y) = x = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Площадь простой гладкой поверхности

Рассмотрим поверхность Σ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, заданную параметрически:

$$r = r(u, v), \qquad x = \psi(u, v),\ y = \phi(u, v),\ z = \eta(u, v),$$

где $r(u, v)$ — непрерывно дифференцируемая функция на замыкании простой области $(u, v) \in \Omega$, то есть области с простой замкнутой кусочно-гладкой границей.

Определение

Будем называть поверхность Σ — **простой гладкой поверхностью**, если функция $r(u, v)$ является непрерывно дифференцируемой и два вектора $r_u(u, v) = \dfrac{\partial r}{\partial u}(u, v)$ и $r_v(u, v) = \dfrac{\partial r}{\partial v}(u, v)$ линейно независимы $\forall (u, v) \in \Omega$.

Тогда в каждой точке поверхности можно определить касательную плоскость. Параметрическое уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$r_{tan}(t_1, t_2) = r_u(u_0, v_0)t_1 + r_v(u_0, v_0)t_2 + r(u_0, v_0), \qquad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Единичный вектор нормали можно определить как нормированное векторное произведение:

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}.$$

Площадь простой гладкой поверхности

Элемент площади поверхности можно определить как площадь параллелограмма, натянутого на вектора r_u и r_v:

$$dS = |r_u \times r_v| \, dudv.$$

Таким образом,

$$S = \iint_\Omega |r_u \times r_v| \, dudv.$$

Определение

Пусть на простой гладкой поверхности Σ определена непрерывная функция $f(x, y, z)$. Тогда величину

$$\iint_\Sigma f(x, y, z) dS = \iint_\Omega f(r(u, v)) \, |r_u \times r_v| \, dudv$$

называют **поверхностным интегралом первого рода**.

Данный интеграл не зависит от выбора параметризации простой гладкой поверхности.

Определение

Пусть в трехмерном пространстве задано непрерывное векторное поле:

$$f(x, y, z) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)).$$

Поток данного векторного поля через простую гладкую поверхность Σ имеет вид:

$$\iint_{\Sigma} \langle f(x, y, z), dS \rangle = \iint_{\Sigma} \langle f(x, y, z), n \rangle dS.$$

Данную величину называют также **поверхностным интегралом второго рода**.

Данный интеграл не зависит от выбора параметризации простой гладкой поверхности, если при изменении параметризации не меняется направление нормали. Иначе знак интеграла меняется на противоположный.

В развернутом виде данный интеграл также записывают как

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

Поток векторного поля

Пример

Вычислим поток векторного поля $f = (x, y, 1)$ через поверхность верхней полусферы:

$$\Sigma: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0,$$

где положительное направление выбрано в направлении от начала координат.
Таким образом, необходимо вычислить интеграл

$$I = \iint_\Sigma x\, dydz + y\, dzdx + 1\, dxdy = \iint_\Sigma \langle f,\; n \rangle dS.$$

Введем параметризацию:

$$\Sigma: \quad x = \cos u \sin v; \; y = \sin u \sin v; \; z = \cos v, \qquad \Omega: \; u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2].$$

Тогда $n = (\cos u \sin v,\; \sin u \sin v,\; \cos v)$,

$$I = \iint_\Omega \left(\cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos v\right) dudv = 2\pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 v + \cos v) dv =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2v)) dv + 1 \right) = 2\pi \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right).$$

Использование формулы

$$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

для обозначения поверхностного интеграла обосновывается следующим утверждением.

Предложение

Пусть Σ — простая гладкая поверхность, заданная параметрически как $r = r(u, v)$ при $(u, v) \in \Omega$, а $f = (P, Q, R)$ — непрерывное векторное поле. Тогда

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Omega \Big(P(r(u,v)) \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} +$$

$$+Q(r(u,v)) \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(r(u,v)) \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Big)\, dudv.$$

Таким образом, выражение в левой части можно представить, как 3 отдельных интеграла, в каждом из которых выполнен переход к координатам (u, v) по правилу замены переменных в двойном интеграле.

Данную формулу можно проверить непосредственно, раскрыв якобианы и сравнив с определением поверхностного интеграла.

Поток векторного поля

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Omega \left(P(r(u,v)) \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \right.$$
$$\left. + Q(r(u,v)) \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(r(u,v)) \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv.$$

Доказательство

По определению:

$$I = \iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Sigma \langle f, n\rangle dS = \iint_\Omega \langle f, n\rangle\, |r_u \times r_v| dudv.$$

Подставляя вектор нормали $n = \dfrac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ и пользуясь формулой для смешанного произведения, получаем:

$$I = \iint_\Omega \langle f, \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \rangle\, |r_u \times r_v| dudv = \iint_\Omega \langle f, r_u \times r_v \rangle\, dudv = \iint_\Omega \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv.$$

Искомая формула получается разложением данного определителя по первой строке.

Ротор и дивергенция

Определение

Ротором (кручением) дифференцируемого векторного поля $f = (P, Q, R)$ называют векторное поле $\operatorname{rot} f$, имеющее вид:

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Определение

Дивергенцией дифференцируемого векторного поля $f = (P, Q, R)$ называют скалярную функцию $\operatorname{div} f$, имеющую вид:

$$\operatorname{div} f = \langle \nabla, \ f \rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Проверьте, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0, \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0,$$

где f — векторное поле, а ψ — скалярная функция.

О геометрическом смысле дивергенции

Рассмотрим малую сферу G с центром в точке $M = (x, y, z)$ и радиусом r_0. Тогда поток векторного поля через поверхность G имеет вид

$$\iint_G \langle f, dS \rangle.$$

Устремляя $r_0 \to 0$ получаем:

$$\operatorname{div} f = \lim_{r_0 \to 0} \frac{1}{V} \iint_G \langle f, dS \rangle, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r_0^3.$$

Таким образом, дивергенция определяет поток векторного поля, исходящий из данной точки.

Если дивергенция векторного поля равна нулю, то соответствующее поле называют **соленоидальным**.

О геометрическом смысле ротора

Циркуляцией векторного поля f вдоль контура Γ называют криволинейный интеграл:

$$\int_\Gamma \langle f,\, dl\rangle.$$

Рассмотрим окружность γ с центром в точке $M = (x, y, z)$ и радиусом r_0. Пусть n — вектор нормали к окружности и направление обхода γ согласованно с n по правилу правого винта. Устремляя $r_0 \to 0$ получаем, что

$$\langle \mathrm{rot}\, f,\, n\rangle = \lim_{r_0\to 0} \frac{1}{\pi r_0^2} \int_\gamma \langle f,\, dl\rangle.$$

Таким образом, проекция ротора на нормаль к малой площадке γ определяется циркуляцией векторного поля вдоль контура γ.

Величину ротора иногда называют циркуляцией векторного поля в данной точке.

Если ротор векторного поля равен нулю, то соответствующие поле называют **безвихревым**.

Теорема

Пусть $G \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, граница ∂G является кусочно-гладкой поверхностью, ориентированной внешней нормалью. Векторное поле $f = (P, Q, R)$ является непрерывно дифференцируемым в замыкании G. Тогда поток поля f через границу G равен интегралу от $\operatorname{div} f$ по области G:

$$\iint_{\partial G} \langle f,\, dS \rangle = \iiint_G \operatorname{div} f\, dv,$$

$$\iint_{\partial G} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Доказательство данной теоремы строится по аналогии с доказательством формулы Грина.

Следствие

Если дивергенция поля равна нулю, то поток векторного поля через произвольную замкнутую поверхность также равен нулю.

Теорема Стокса

Пусть Σ — простая гладкая поверхность, заданная параметрически $r = r(u, v)$, при $(u, v) \in \Omega$, то образ ∂G при отображении r называют краем поверхности Σ.

Теорема

Пусть Σ — простая гладкая поверхность, кривая $\partial\Sigma$ — край поверхности. Векторное поле $f = (P, Q, R)$ является непрерывно дифференцируемым в окрестности поверхности Σ. Тогда

$$\int_{\partial\Sigma} \langle f, dl \rangle = \iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} f, dS \rangle.$$

Циркуляция векторного поля по кривой совпадает с потоком ротора векторного поля через поверхность натянутую на данную кривую.

Формула Грина

$$\int_{\partial\Sigma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

является частным случаем формулы Стокса для плоской поверхности и плоского векторного поля.

Условие потенциальности векторного поля f сводится к $\operatorname{rot} f = 0$. Для таких полей циркуляция векторного поля по замкнутой кривой будет равна нулю.