

Выборный Евгений Викторович  
email: [evybornyi@hse.ru](mailto:evybornyi@hse.ru)

Математический анализ  
Тема 6: Функции многих переменных

Москва 2016

## Определение. Вещественное $n$ -мерное пространство $\mathbb{R}^n$

Множество упорядоченных наборов из  $n$  действительных чисел называют **вещественным  $n$ -мерным пространством  $\mathbb{R}^n$** :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Эти наборы чисел из  $\mathbb{R}^n$  называют точками или векторами. В  $\mathbb{R}^n$  определена сумма векторов и операция умножения вектора на число:

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Определено понятие расстояния между точкам:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Выполнено неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

## Шар в $\mathbb{R}^n$

Ключевым понятием для определения сходимости в одномерном случае была  $\epsilon$ -окрестность точки  $a$ . Определим аналогичные понятия в многомерном пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

### Определение. Шар в $\mathbb{R}^n$

**Открытым шаром** в  $\mathbb{R}^n$  с центром в точке  $a$  и радиусом  $r$  называют множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих условию

$$\|x - a\| < r \iff (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2.$$

Иногда это множество называют  $r$ -окрестностью точки  $a$ , сохраняя обозначение  $O_r(a)$ . Тогда **проколотой  $r$ -окрестностью** точки  $a$ , называют множество точек:

$$\dot{O}_r(a) = O_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - a\| < r\}.$$

### Определение. Ограниченное множество

Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется **ограниченным**, если  $A$  полностью лежит в некотором шаре. В этом случае существует  $R$  такое, что

$$\|x\| < R \quad \forall x \in A.$$

# Предел последовательности точек

## Определение. Предел последовательности точек

Говорят, что последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$ ,  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  сходится к точке  $y \in \mathbb{R}^n$ , пишут  $x^{(k)} \rightarrow y$ , если к нулю стремится расстояние между  $y$  и  $x^{(k)}$  при  $k \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(y, x^{(k)}) = 0.$$

Эквивалентные записи имеют вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : x^{(k)} \in O_\varepsilon(y) \quad \forall k \geq N.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x^{(k)} - y\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

Таким образом, последовательность точек стремится к  $y$  тогда и только тогда, когда в любом открытом шаре с центром в точке  $y$  лежит бесконечно много точек последовательности, а вне его — лишь конечное число.

## Упражнение

Докажите, что множество точек сходящейся последовательности является ограниченным.

## Предел последовательности точек

### Предложение

Сходимость последовательности точек  $\{x^{(k)}\}$  к точке  $y$  эквивалентна сходимости координат точек  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  к координатам точки  $y = (y_1, \dots, y_n)$ :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = y \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} x_1^{(k)} = y_1, \dots, \lim_{k \rightarrow +\infty} x_n^{(k)} = y_n.$$

### Доказательство

Доказательство теоремы непосредственно следует из очевидных неравенств:

$$|x_j^{(k)} - y_j| \leq \sqrt{(x_1^{(k)} - y_1)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - y_n)^2} \leq n \max_{1 \leq j \leq n} |x_j^{(k)} - y_j|.$$

### Замечание

Иногда в  $\mathbb{R}^n$  вводят другое понятие расстояния по формуле:

$$\tilde{d}(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

Следовательно, сходимость последовательности точек относительно расстояния  $d$  и  $\tilde{d}$  эквивалентна.

# Открытые множества

## Определение. Внутренние точки множества

Точка  $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ , которая принадлежит множеству  $A$  вместе с некоторым открытым шаром с центром в точке  $a$ , называется **внутренней точкой** множества  $A$ .

## Определение. Открытое множество

Множество точек  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется **открытым**, если для каждой точки  $a \in A$  этого множества существует открытый шар с центром в точке  $a$ , который полностью лежит в  $A$ :

$$A \text{ — открыто} \iff \forall a \in A \exists r > 0 : O_r(a) \subset A.$$

Пустое множество  $\emptyset$  полагается открытым по определению.

Таким образом, открытое множество — это множество, которое полностью состоит из внутренних точек.

## Пример

Открытый шар является открытым множеством. Действительно,  $\forall x \in A = O_R(a)$  положим  $r = R - \|x - a\| > 0$ . Тогда

$$y \in O_r(x) \Rightarrow \|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r + \|x - a\| = R \Rightarrow y \in A.$$

### Свойства открытых множеств

- ❶ Все пространство  $\mathbb{R}^n$  является открытым.
- ❷ Любое объединение открытых множеств является открытым.
- ❸ Конечное пересечение открытых множеств является открытым.

### Замечание

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открыто. Например,

$$A_k = (-1/k, +1/k) \subset \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Множества  $A_k$  открыты, но

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_k \ \forall k\} = \{0\},$$

а множество, состоящее только из одной точки, не является открытым.

## Замкнутые множества

### Определение. Предельные и изолированные точки множества

Точка  $a \in \mathbb{R}^n$  называется **предельной точкой** множества  $A$  или точкой сгущения, если в любой окрестности точки  $a$  существуют точки из множества  $A$ , отличные от  $a$ :

$$\forall r > 0 \quad O_r(a) \cap A \neq \{a\}.$$

Точка  $a \in A$  называется **изолированной точкой** множества  $A$ , если существует окрестность точки  $a$ , в которой нет других точек из множества  $A$ .

Предельные точки могут как принадлежать, так и не принадлежать рассматриваемому множеству.

### Определение. Замкнутое множество

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. Пустое множество считают замкнутым по определению.

### Предложение. Замкнутость в терминах последовательностей

Множество замкнуто тогда и только тогда, когда предел любой сходящейся последовательности точек этого множества также принадлежит этому множеству.



# Свойства замкнутых множеств

## Свойства замкнутых множеств

- ❶ Множество является замкнутым тогда и только тогда, когда его дополнение является открытым:

$$A \text{ — замкнуто} \iff (\mathbb{R}^n \setminus A) \text{ — открыто.}$$

- ❷ Все пространство  $\mathbb{R}^n$  является замкнутым.
- ❸ Конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым.
- ❹ Любое пересечение замкнутых множеств является замкнутым.

## Определение. Компакт

Замкнутое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$  называют **компактом**.

Понятие компакта является естественным обобщением понятия отрезка в многомерном пространстве.

## Предложение. Компактность в терминах последовательностей

Множество является компактом тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке из заданного множества.

# Граница множества

## Определение. Граница множества

Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  называется **граничной точкой** для множества  $M \subset \mathbb{R}^n$ , если в любой окрестности точки  $x$  есть как точки из множества  $M$ , так и точки не принадлежащие  $M$ . Граничные точки могут принадлежать или не принадлежать множеству  $M$ .

Множество всех граничных точек для заданного множества  $M$  называют **границей**  $M$  и обозначают  $\partial M$ .

Несложно доказать, что замкнутое множество всегда содержит свою границу.

Объединение множества и его границы всегда является замкнутым. Это множество называют замыканием множества  $M$  и обозначают

$$\bar{M} = M \cup \partial M.$$

## Пример

Несложно найти границы следующих множеств:

$$\partial [a, b] = \{a, b\}, \quad \partial (a, b) = \{a, b\};$$

$$\partial O_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\},$$

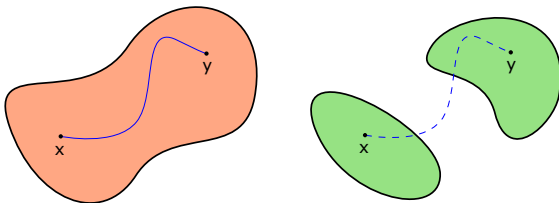
$$\partial \mathbb{R}^n = \emptyset.$$

## Определение. Связное множество

Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  является **связным** (линейно связным), если для любой пары точек  $x$  и  $y$  из  $M$  существует непрерывный путь (кривая), которая соединяет точки  $x$  и  $y$ , и при этом полностью лежит в  $M$ .

## Определение. Область

**Областью** в  $M \subset \mathbb{R}^n$  называют открытое связное множество.

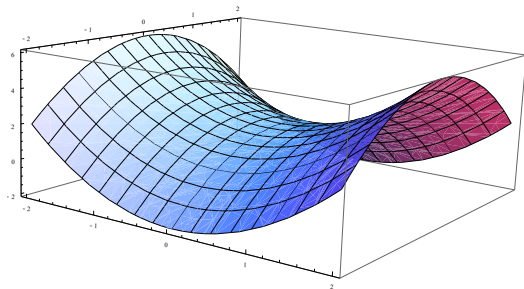


Множество, изображенное на рисунке слева, является связным, а множество, изображенное справа, не является связным (состоит из двух частей).

# Функция нескольких переменных

## Определение. Функция нескольких переменных

**Числовой функцией** нескольких переменных называют отображение  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $E \subset \mathbb{R}^n$  — некоторое множество, называемое **множеством определения** функции. Значение функции  $f$  в точке  $x \in E$  записывают, как  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , при этом  $x_j$  называют независимыми переменными, а  $z = f(x)$  — зависимой переменной, так как ее значение определяется выбором точки  $x$ .



При рассмотрении функций двух переменных  $z = f(x, y)$  можно рассматривать график функции как поверхность  $\Gamma$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ :

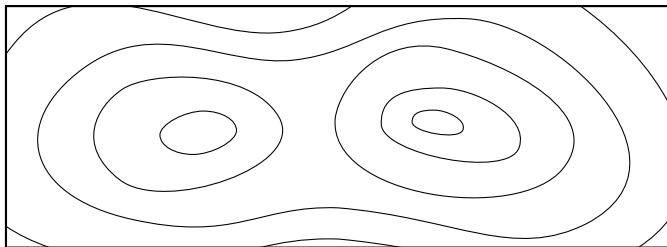
$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in E\}.$$

## Линии уровни

Другой способ визуально представить функцию двух независимых переменных — это рассмотреть семейство кривых на плоскости, вдоль которых функция является постоянной

$$f(x, y) = \text{const}$$

Данные кривые называют **линиями уровня** для функции  $f$ .



# Предел функции

## Определение. Предел функции

Пусть функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a \in \mathbb{R}^n$ . Говорят, что число  $f_0$  является **пределом**  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f_0| < \varepsilon, \forall x \in \dot{O}_\delta(a).$$

В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f_0$ .

В случае двух переменных иногда пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = f_0,$$

а соответствующий предел называют двойным.

Как и в одномерном случае, можно определить сходимость в терминах последовательностей (по Гейне).

Предел  $f(x)$  равен  $f_0$  при  $x \rightarrow a$  тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к  $a$  последовательности точек  $\{x^{(k)}\}$  из проколотой окрестности точки  $a$  последовательность значений функции в этих точках  $f(x^{(k)})$  сходится к  $f_0$ :

$$\forall \{x^{(k)}\} : x^{(k)} \rightarrow a, x^{(k)} \neq a \Rightarrow f(x^{(k)}) \rightarrow f_0.$$

По аналогии с одномерным случаем определяются и бесконечные пределы функций.

# Предел функции

Пусть функция  $f$  определена на множестве  $M$  и точка  $a$  является предельной точкой множества  $M$ . Тогда уместно говорить о стремлении  $x \rightarrow a$  при условии  $x \in M, x \neq a$ .

## Определение. Предел функции по множеству

Говорят, что число  $f_0$  является пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  по множеству  $M$  ( $x \rightarrow a, x \in M$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f_0| < \varepsilon, \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap M.$$

В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) = f_0$ .

Частным случаем предела по множеству служат односторонние пределы функции одной переменной.

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $A \in \mathbb{R}^n$ , **непрерывна в точке**  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве  $M$  и точка  $A \in M$  является предельной точкой этого множества. Если точка  $A$  не является внутренней для множества  $M$ , а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна по множеству**  $M$  в точке  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A, x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества  $M$ .



# Непрерывность функции

## Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $A \in \mathbb{R}^n$ , **непрерывна в точке**  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве  $M$  и точка  $A \in M$  является предельной точкой этого множества. Если точка  $A$  не является внутренней для множества  $M$ , а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна по множеству**  $M$  в точке  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A, x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества  $M$ .

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $A \in \mathbb{R}^n$ , **непрерывна в точке**  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве  $M$  и точка  $A \in M$  является предельной точкой этого множества. Если точка  $A$  не является внутренней для множества  $M$ , а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна по множеству**  $M$  в точке  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A, x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества  $M$ .

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна** на множестве  $M$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $M$ .

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

## Свойства непрерывных функций

- ❶ Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
- ❷ Композиция непрерывных функций непрерывна.
- ❸ Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда она ограничена на множестве  $K$  и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{\min} \in K : f(x_{\min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{\max} \in K : f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна** на множестве  $M$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $M$ .

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

## Свойства непрерывных функций

- ❶ Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
- ❷ Композиция непрерывных функций непрерывна.
- ❸ Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда она ограничена на множестве  $K$  и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{\min} \in K : f(x_{\min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{\max} \in K : f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна** на множестве  $M$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $M$ .

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

## Свойства непрерывных функций

- ❶ Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
- ❷ Композиция непрерывных функций непрерывна.
- ❸ Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда она ограничена на множестве  $K$  и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{\min} \in K : f(x_{\min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{\max} \in K : f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

## Частные производные. Определение

Рассмотрим функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , заданную в окрестности точки  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда можно рассмотреть функцию одной переменной  $x_k$ , фиксируя остальные переменные:

$$\phi(x_k) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0).$$

Для определения скорости изменения значения функции  $f(x)$  при изменении только одной переменной  $x_k$  можно рассмотреть производную функции  $\phi(x_k)$ . Эту производную называют **частной производной** функции  $f$  по переменной  $x_k$  в точке  $x^0$  и обозначают:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|_{x=x^0} = \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_{x=x^0} f(x) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = f'_{x_k}(x^0) = f_{x_k}(x^0) = \partial_k f(x^0).$$

### Определение

Говорят, что функция  $f$ , определенная в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , имеет **частную производную** по переменной  $x_k$  в точке  $x^0$ , если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x^0)}{h} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|_{x=x^0}.$$

## Частные производные. Пример

### Пример

Вычислим частные производные функции трех переменных

$$u = x^2 + 2xy + \cos(xz).$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y - \sin(xz)z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -x \sin(xz).$$

В данном случае вычисления производились в произвольной точке  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Тогда при дифференцировании по одной из переменных все остальные переменные можно считать постоянными.

## Определение. Дифференцируемая функция

Говорят, что функция  $f$ , определенная в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , **дифференцируема** в точке  $x^0$ , если для любого достаточно маленького приращения  $\Delta x$  переменной  $x$ :

$$\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n),$$

приращение значения функции представимо в виде:

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k + o(\|\Delta x\|),$$

где  $A_k$  — постоянные.

Линейную часть приращения функции называют **дифференциалом** и обозначают:

$$df(x^0)(\Delta x) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k.$$

Дифференциал является линейной формой порядка  $n$ , как функция от  $\Delta x$ , а также неявно зависит от выбора точки  $x^0$ .



## Теорема. Необходимое условие дифференцируемости

Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  и

$$df(x^0)(\Delta x) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k.$$

Тогда у функции  $f$  существуют частные производные по всем переменным  $x_k$  в точке  $x^0$  и

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0).$$

Таким образом, для дифференцируемости функции  $f$  необходимо наличие у нее всех частных производных в заданной точке.

В одномерном случае существования производной было вполне достаточно для дифференцируемости функции, но в многомерном случае это уже не так.

## Упражнения

- Проведите доказательство теоремы о необходимом условии дифференцируемости, аналогично доказательству в одномерном случае.
- Докажите, что дифференцируемая функция непрерывна.
- Покажите, что функция

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0,$$

не является дифференцируемой, но имеет частные производные в точке  $(0, 0)$ .  
Покажите, что эта функция не является даже непрерывной.

# Дифференцируемость

Вычислим дифференциал функции

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_k.$$

Тогда

$$u(x + \Delta x) - u(x) = (x_k + \Delta x_k) - x_k = \Delta x_k.$$

Следовательно, дифференциал имеет вид

$$du(x)(\Delta x) = dx_k(\Delta x) = \Delta x_k.$$

Таким образом, общую формулу для дифференциала функции  $f$  можно переписать в виде:

$$df(x^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) dx_k.$$

## Упражнение

Проверьте, что

$$d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

## Дифференцируемость. Достаточное условие

### Теорема. Достаточное условие дифференцируемости

Пусть все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  функции  $f(x)$  определены в окрестности точки  $x_0$  и непрерывны в точке  $x^0$ . Тогда функция  $f$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ .

### Доказательство

Проведем доказательство для  $n = 2$ . Пусть  $f = f(x, y)$ . Тогда, применяя формулу конечных приращений, получаем:

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0).\end{aligned}$$

Из непрерывности частных производных следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1).$$

Таким образом,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|x - x_0|) + o(|y - y_0|).$$

## Частные производные. Градиент

### Определение. Градиент

Если функция  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , имеет частные производные по всем переменным ( $n$  штук) в фиксированной точке  $x^0$ , то числовой вектор

$$\operatorname{grad} f \Big|_{x=x^0} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

называют **градиентом** функции  $f$  в точке  $x^0$ . То есть градиент — это вектор, составленный из частных производных функции  $f$  в точке  $x^0$ .

### Определение. Производные высших порядков

Если частная производная функции  $f(x)$  по переменной  $x_k$  определена в некоторой окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , то можно определить **частные производные второго порядка**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}(x^0) = \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_{x=x^0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

как частные производные по переменной  $x_m$  от функции  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ . Аналогично определяются производные третьего порядка и далее.

### Пример

Пусть

$$f = x^2 + 2xy.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 2y) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + 2y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2x) = 0.$$

Таким образом, для функции двух переменных существует четыре частных производных второго порядка. Они образуют матрицу  $2 \times 2$ . В общем случае размерности  $n$  мы получим квадратную матрицу размера  $n \times n$ .