Вопросы к экзамену. Часть 1

1. Расскажите о числах: натуральных, целых, действительных. Сформулируйте аксиому полноты действительных чисел. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррациональное.

2. Расскажите о понятии множества и отображения. Что такое суперпозиция отображений? Что такое обратное отображение и при каком условии оно существует? Как связаны графики прямой и обратной функций? Приведите пример сложной и обратной функции.

3. Дайте определения ограниченных множеств, точной верхней и нижней грани множества (sup и inf) на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Сформулируйте теорему Больцано о существовании верхней (нижней) грани всякого множества, ограниченного сверху (снизу).

4. Что такое последовательность? Дайте определение монотонной последовательности, ограниченной сверху (снизу) последовательности, ограниченной последовательности. Приведите примеры.

5. Дайте определение конечного предела последовательности. Приведите примеры последовательностей, имеющих и не имеющих предел. Определите бесконечный предел последовательности.

6. Дайте определения сходящейся последовательности. Покажите, что предел последовательности определен однозначно. Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена.

7. Сформулируйте арифметические свойства предела последовательности и докажите одно из них. Расскажите о неопределенностях и приведите примеры раскрытия неопределенностей.

8. Докажите теорему о предельном переходе в неравенствах для последовательностей. Сформулируйте лемму «о двух милиционерах». Найдите предел последовательности $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

9. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Найдите предел последовательности $a_n = \frac{n}{2^n}$. Что такое бесконечно малые и бесконечно большие последовательности?

10. Определите число e. Докажите сходимость соответствующей последовательности.

11. Дайте определение частичного, верхнего и нижнего пределов последовательности. Как связаны эти понятия? Сформулируйте критерий сходимости ограниченной последовательностей в терминах верхнего и нижнего предела и в терминах частичных пределов.

12. Дайте определение фундаментальной последовательности. Покажите фундаментальность сходящейся последовательности. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.

13. Дайте определение конечной и бесконечной точки сгущения множества. Дайте определения пределов функции

    $$\lim_{x \to x_0\ (\pm\infty,\ \infty)} f(x) = a\ (\pm\infty, \infty).$$

    Приведите примеры.

14. Сформулируйте определения левого и правого предела функции. Сформулируйте и докажите критерий существования предела функции в терминах левого и правого предела.

15. Сформулируйте определение предела функции по Коши и по Гейне. Сформулируйте теорему об их эквивалентности. Покажите, что не существует предела $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$.

16. Сформулируйте основные свойства предела функции: однозначность, арифметические свойства, переход к пределу в неравенствах, свойство сохранения знака. Докажите одно из них.

17. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменных в пределе. Приведите пример.

18. Дайте определение функции, непрерывной в точке. Что означает непрерывность функции на интервале и отрезке? Докажите, что $\sin x$ — непрерывная функция.

19. Расскажите об арифметических свойствах непрерывных функций. Приведите классификацию точек разрыва функции (с примерами).

20. Расскажите о бесконечно малых и бесконечно больших функциях, их свойствах. В каком случае функция 2^{-x} является бесконечно малой (бесконечно большой)? Дайте определение записи $f(x) = o(g(x))$. Сравните ассимптотическое поведение $\ln x$, x^n, e^x при $x \to +\infty$.

21. Дайте определение асимптотической эквивалентности. Докажите, что если $a(x) \sim b(x)$ и $c(x) \sim d(x)$, то $a(x)c(x) \sim b(x)d(x)$ и $a(x)/c(x) \sim b(x)/d(x)$. Верно ли, что $a(x) + c(x) \sim b(x) + d(x)$? Приведите примеры.

22. Сформулируйте и докажите теорему о первом замечательном пределе. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

23. Сформулируйте и докажите теорему о втором замечательном пределе. Докажите, что $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1 + x) \sim x$, $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$.

24. Сформулируйте и докажите теорему о промежуточном значении, дайте геометрическую интерпретацию. Изложите метод деления отрезка пополам для решения уравнения $f(x) = 0$.

25. При каком условии для функции, непрерывной на отрезке, существует непрерывная обратная функция. Сформулируйте и докажите соответствующую теорему.

26. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о наибольшем (наименьшем) значении непрерывной функции. Покажите на примере существенность условий теоремы.

27. Дайте определение дифференциала и производной функции. Объясните геометрический и физический смысл производной. Как связаны понятия дифференциала и производной?

28. Определите понятие касательной к графику функции и выведите её уравнение. Что такое односторонние производные? Приведите примеры недифференцируемых функций (с конечными односторонними производными и без).

29. Вычислите по определению производные следующих функций: $y = C,\ y = x^a,\ y = \sin x, y = \cos x,\ \ y = e^x$. Определите старшие производные функций.

30. Расскажите, как связаны между собой понятие непрерывности и дифференцируемости функции? Приведите пример. Докажите теорему об арифметических свойствах производной.

31. Докажите теорему о производной суперпозиции функций. Приведите примеры.

32. Докажите теорему о производной обратной функции. Вычислите $(\arcsin x)'$, $(\operatorname{arctg} x)'$, $(\ln x)'$.

33. Функция, заданная неявно или параметрически. Приведите примеры. Как находить производные в этих случаях?

34. Дайте определение и выведите необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма). Приведите примеры, показывающие существенность условий теоремы Ферма.

35. Сформулируйте и докажите теорему Роля. Дайте геометрическую интерпретацию.

36. Докажите теорему о формуле конечных приращений Лагранжа. Объясните ее геометрический смысл. Докажите, что если $f'(x) = 0$ при всех x из некоторого интервала, то f постоянна на этом интервале.

37. Сформулируйте и докажите теорему о формуле конечных приращений Коши. Дайте геометрическую интерпретацию. Приведите пример.

38. Выведите необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке в терминах ее первой производной. Приведите примеры.

39. Дайте определение многочлена Тейлора. Докажите теорему об остаточном члене в форме Пеано. Получите стандартные разложения для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$.

40. Докажите утверждение о том, что многочлен Тейлора дает наилучшее, среди всех многочленов, приближение функции в малой окрестности заданной точки. Найдите многочлены Тейлора для $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$.

41. Напишите формулу Тейлора для функции одного переменного с остаточным членом в форме Лагранжа. Приведите альтернативное определение числа e и сравните скорость сходимости соответствующих последовательностей.

42. Выведите достаточные условия экстремума по первой производной. Расскажите о достаточном условии экстремума по старшим производным. Приведите примеры.

43. Функция, выпуклая (вогнутая) на интервале. Выведите условия выпуклости (вогнутости) функции с точки зрения первой и второй производных. Приведите примеры. Дайте геометрическую интерпретацию выпуклости с точки зрения расположения хорд и касательных.

44. Дайте определения вертикальной и наклонной асимптот функции. Выведите условия существования наклонной асимптоты. Выведите формулы для её нахождения. Приведите пример.

45. Сформулируйте правило Лопиталя, докажите его в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Приведите примеры.

Вопросы к экзамену. Часть 2

46. Дайте определение неопределенного интеграла (первообразной) и укажите его основные свойства. Докажите утверждение об общем виде первообразной заданной функции. Приведите пример.

47. Опишите с обоснованием методы замены переменной и подведения под знак дифференциала в неопределённом интеграле. Найдите первообразную для $\sqrt{1+x^2}$.

48. Расскажите с обоснованием об интегрировании по частям в неопределённом интеграле. Найдите первообразную функции $\ln(x)$.

49. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы простых дробей. Расскажите об интегрировании рациональной функции. Приведите пример.

50. Расскажите, как следующие интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций:
$$\int R(x^\alpha, x^\beta, \dots, x^\omega)dx, \qquad \int R(e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \dots, e^{\omega x})dx,$$
где R — рациональная функция своих аргументов, а $\alpha, \dots, \omega$ – рациональные числа. Вычислите
$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx.$$

51. Расскажите о вычислении интегралов от $R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где R — рациональная функция. Приведите пример.

52. Расскажите о том, как тригонометрические интегралы вида:
$$\int R(\sin(x), \cos(x))dx,$$
где R — рациональная функция, можно привести к интегралам от рациональных функций. Приведите пример.

53. Расскажите о вычислении интегралов от $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ при помощи подстановок Эйлера (R — рациональная функция). Приведите пример.

54. Дайте определение функции интегрируемой на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла. Выведите свойство линейности и свойство аддитивности определенного интеграла.

55. Сформулируйте и докажите теоремы об интегрировании неравенств и об оценке модуля определённого интеграла.

56. Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении для определенного интеграла. В чём геометрический смысл этой теоремы? Приведите формулировку общей теоремы о среднем.

57. Докажите теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона–Лейбница.

58. Сформулируйте правила замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. Приведите примеры.

59. Выведете формулу Тейлора с остаточным членом в виде интеграла.

60. Приведите формулы для площади фигуры на плоскости и объёма тела (в том числе тела вращения), в пространстве. Приведите формулы для длины гладкой кривой заданной параметрически на плоскости и в пространстве. Как вычислить длину дуги графика функции.

61. Дайте определение несобственного интеграла 1-го рода (по бесконечному промежутку). Приведите пример сходящегося и расходящегося интеграла.

62. Дайте определение несобственного интеграла 2-го рода (от неограниченной функции по конечному промежутку). Приведите пример сходящегося и расходящегося интеграла.

63. Расскажите с обоснованием о поведении несобственных интегралов:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}, \qquad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\gamma}.$$

64. Сформулируйте определения абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов. Докажите, что из абсолютной сходимости следует сходимость интеграла.

65. Сформулируйте теоремы о сравнении (асимптотическом сравнении) несобственных интегралов от положительных функций.

66. Дайте определение частичной суммы числового ряда, сходящегося числового ряда и его суммы. Сформулируйте основные свойства числовых рядов. Покажите, что если ряд сходится, то его члены стремятся к 0. Приведите пример, показывающий, что обратное не верно.

67. Дайте определение знакопостоянного ряда. Сформулируйте признаки сравнения и асимптотического сравнения для знакопостоянных рядов.

68. Сформулируйте признаки сходимости Даламбера и Коши в постой и передельной форме. Докажите один из этих признаков.

69. Выведите интегральный признак сходимости числового ряда. Исследуйте сходимость ряда Дирихле $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

70. Дайте определение абсолютно сходящегося числового ряда. Докажите, что из абсолютной сходимости ряда следует сходимость. Приведите пример сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда.

71. Докажите признак Лейбница о знакочередующихся рядах. Для рядов Лейбница выведите оценку уклонения частичной суммы от суммы ряда.

72. Дайте определение поточечной и равномерной сходимости функциональной последовательности (функционального ряда). Приведите пример показывающий, что из поточечной сходимости не следует равномерная сходимость.

73. Дайте определение степенного ряда. Сформулируйте теоремы о множестве сходимости степенного ряда и его равномерной сходимости. Приведите примеры всюду сходящегося и всюду расходящегося степенного ряда.

74. Приведите формулу Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда. Приведите пример.

75. Покажите, что внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать. Найдите сумму ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$$

76. Что такое ряд Тейлора и как он связан с формулой Тейлора? Докажите единственность разложения функции в сходящейся степенной ряди. Покажите, что не всякий сходящейся ряд Тейлора сходится к функции по которой он был построен.

77. Выведите стандартные разложения Маклорена и найдите интервалы сходимости для функций $e^x, \sin(x), \cos(x)$.

78. Выведите стандартные разложения Маклорена и найдите интервалы сходимости для функций $\ln(1+x), \operatorname{arctg}(x), (1+x)^\alpha(x)$.

79. Что такое расстояние в $\mathbb{R}^n$? Что такое шар в $\mathbb{R}^n$? Дайте определение предела последовательности точек в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что сходимость последовательности точек в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна покоординатной сходимости.

80. Дайте определения ограниченного множества, открытого и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$. Приведите их основные свойства. Определите границы множества, связное множество, область.

81. Расскажите о понятии функции нескольких переменных. Что такое график функции. Что такое множество уровня. Дайте определение предела функции и непрерывности.

82. Дайте определение компакта, функции непрерывной на множестве. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на компакте.

83. Определите частные производные первого порядка для функций многих переменных и расскажите об их арифметических свойствах. Поясните геометрический смысл частных производных в случае функции двух переменных.

84. Определите дифференциал функции многих переменных. Определите понятие касательной плоскости к графику функции двух переменных и приведите её уравнение. Сформулируйте условие на частные производные необходимое (достаточное) для дифференцируемости функции.

85. Определите понятие производной по направлению и градиента для функции многих переменных. Выведите формулу для производной по направлению.. В чём геометрический смысл градиента?

86. Расскажите о частных производных старших порядков, сформулируйте теорему Шварца и приведите пример. Расскажите о правилах дифференцирования сложной функции, приведите примеры.

87. Приведите формулу Тейлора для функции многих переменных. Дайте определение старших дифференциалов функции нескольких переменных. Найдите второй дифференциал функции двух переменных.

88. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций.

89. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции многих переменных в терминах второго дифференциала. Сформулируйте критерий Сильвестра. Приведите пример.

90. Сформулируйте теоремы о неявной функции многих переменных. Выведете формулу для частных производных функции заданной неявно.

91. Расскажите о заменах координат в многомерном пространстве. Дайте определение матрицы Якоби и поясните ее геометрический смысл, записав формулу локальной линеаризации отображения. Приведите пример.

92. Сформулируйте теорему об обратимости регулярной замены координат. Выведете формулу для матрицы Якоби обратного отображения. Рассмотрите переход к полярным и сферическим координатам.

93. Дайте определение измеримого (по Жордану) ограниченного множества. Дайте определение двойного и тройного интеграла. Укажите его основные свойства (линейность, аддитивность, интегрирование неравенств) и поясните его геометрический смысл.

94. Расскажите о сведении двойного интеграла к повторному. Как вычислить интеграл от функции с мультипликативной структурой по прямоугольнику? Приведите примеры.