Выборный Евгений Викторович
email: evybornyi@hse.ru

Математический анализ
Тема 3: Дифференциальное исчисление

Москва 2015

Дифференциал и производная функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение (Дифференциал)

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение можно представить в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Линейная часть приращения (как функция от Δx) называется **дифференциалом функции** $f(x)$ в точке x_0. Пишут

$$df(x_0) = df(x_0)(\Delta x) = A \cdot \Delta x \quad \forall\, \Delta x \in \mathbb{R}.$$

Определение (Производная)

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда соответствующее число A называют **производной** функции $f(x)$ в точке x_0. Пишут

$$A = f'(x_0).$$

Таким образом,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Дифференциал и производная функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Поделив на Δx, получаем

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + o(1) \quad (\Delta x \to 0).$$

Устремляя $\Delta x \to 0$, получаем, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Эту формулу часто используют для определения и вычисления производных. Мы доказали, что этот предел (производная $f'(x_0)$) существует, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Верно и обратное утверждение **(проверьте дома)**. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема (2-ое определение производной)

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности x_0, является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Примеры вычисления дифференциала и производной

1. Пусть $y(x) = x$. Тогда

$$y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x = 1 \cdot \Delta x.$$

Следовательно, функция $y(x) = x$ дифференцируема в любой точке x, ее дифференциал и производная соответственно равны:

$$dy(x) = dx = 1 \cdot \Delta x, \qquad y'(x) = 1.$$

2. Пусть $y(x) = x^2$. Тогда

$$y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

Поскольку $(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то

$$y(x + \Delta x) - y(x) = 2x\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Следовательно, функция $y(x) = x^2$ дифференцируема в любой точке x, ее дифференциал и производная соответственно равны:

$$dy(x) = dx^2 = 2x\Delta x = 2x\ dx, \qquad y'(x) = 2x.$$

Замечания касательно обозначений

Пусть $f(x)$ — дифференцируемая в точке x_0 функция, а $df(x_0)$ — соответствующий дифференциал. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

где равенство необходимо понимать как тождество двух функций от Δx, справедливое при любых $\Delta x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Важно понимать, что дифференциал функции f — это df, а $df(x_0)$ — это значение дифференциала df в точке x_0, а не дифференциал выражения $f(x_0)$:

$$df(x_0) \neq d\left(f(x_0)\right).$$

Во избежание путаницы в обозначениях часто пишут, что

$$df(x_0) = (df)(x_0) = d\left(f(x)\right)\Big|_{x=x_0},$$

где символ $\Big|$ означает подстановку. Соответственно, для производной используют следующие обозначения:

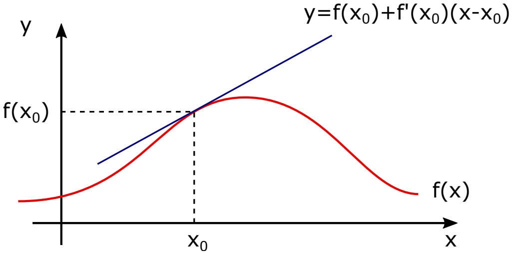
$$f'(x_0) = (f(x))'\Big|_{x=x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Геометрический смысл производной и дифференциала

По определению функция f дифференцируема в точке x_0, если
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0,$$
то есть значение функции f в точке x, близкой к x_0, можно приблизить значением линейной функции
$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
с небольшой погрешностью $o(x - x_0)$.

Определение (Касательная)

Линейную функцию $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ называют **касательной** к функции $f(x)$ в точке x_0, а соответствующую прямую на графике — касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.



Касательная как предел секущих

Рассмотрим секущую $y_{\text{сек.}}$, которая пересекает график функции f в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$. Тогда уравнение этой секущей будет иметь вид:

$$y_{\text{сек.}} = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0).$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то для любого фиксированного x будет существовать предел $y_{\text{сек.}}$ при $\Delta x \to 0$. Очевидно, что эта секущая переходит в касательную в пределе при $\Delta x \to 0$.

Физический смысл производной

Пусть материальная точка движется прямолинейно и равномерно. Тогда ее скорость v определяется, как отношение пройденного пути s к затраченному времени t: $v = s/t$. Если положение точки описать функцией $x = x(t)$, то

$$v = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Если движение является неравномерным, то выражение для скорости v является функцией от t_0 и t_1. Данное число называют средней скоростью $v_{\text{средн.}}$ на интервале (t_0, t_1). Мгновенной скоростью $v = v(t_0)$ при $t = t_0$ называют предел величины $v_{\text{средн.}}$ при $t_1 \to t_0$.

Производные основных функций

1. Пусть $f(x) = C$ — константа, не зависящая от x. Тогда

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

2. Пусть $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \neq 0$. Тогда

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x/x)^\alpha - 1}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\ \Delta x/x}{\Delta x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}.$$

   Если α — целое, то это правило сохраняется для всех $x \in \mathbb{R}$.

3. Пусть $f(x) = \sin(x)$. Тогда

$$(\sin(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) = 1 \cdot \cos(x) = \cos(x).$$

4. Пусть $f(x) = e^x$. Тогда

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Производные основных функций

Аналогичным образом можно получить следующую таблицу производных:

$$1.\ C' = 0$$

$$2.\ x' = 1$$

$$3.\ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4.\ \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$5.\ \left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$$

$$6.\ (e^x)' = e^x$$

$$7.\ \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$8.\ \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$9.\ (\sin x)' = \cos x$$

$$10.\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$11.\ (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12.\ (ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13.\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14.\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15.\ (arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16.\ (arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$17.\ (sh\,x)' = ch\,x$$

$$18.\ (ch\,x)' = sh\,x$$

$$19.\ (th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$20.\ (cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Проведите вычисления производных для всех функций из таблицы!

Правила дифференцирования

Свойства производной и правила дифференцирования:

1. Если производная $f'(x_0)$ существует, то она определена однозначно.

   Доказательство. Данное свойство следует из свойств предела.

2. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

   Доказательство. Дано:

   $$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0.$$

   Устремляя $x \to x_0$, получаем, что $f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \to 0$, а следовательно, $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$, что и требовалось доказать.

3. Дифференцирование — линейная операция:

   $$(A\,f(x) + B\,g(x))' = A\,f'(x) + B\,g'(x),$$

   где f и g — дифференцируемые в точке x функции.

   Доказательство. Действительно,

   $$\lim_{z \to x} \frac{A\,f(z) + B\,g(z) - A\,f(x) - B\,g(x)}{z - x} = A \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} + B \lim_{z \to x} \frac{g(z) - g(x)}{z - x} =$$
   $$= A\,f'(x) + B\,g'(x).$$

Правила дифференцирования

4. Производная произведения вычисляется по правилу Лейбница:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

где f и g — дифференцируемые в точке x функции.

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{z\to x}\frac{f(z)g(z)-f(x)g(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{f(z)g(z)-f(x)g(z)+f(x)g(z)-f(x)g(x)}{z-x} =$$

$$= \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}g(z) + \lim_{z\to x} f(x)\frac{g(z)-g(x)}{z-x} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

5. Производная отношения вычисляется по правилу:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$

где f и g — дифференцируемые в точке x функции и $g(x) \neq 0$.

Доказательство проведите самостоятельно.

Производная сложной функции

Теорема (Производная сложной функции)

Пусть $f(y)$ и $g(x)$ — функции, дифференцируемые в точках x_0 и $y_0 = g(x_0)$ соответственно. Тогда сложная функция $f(g(x))$ — дифференцируема в точке x_0, производная сложной функции вычисляется по правилу:

$$\left.\frac{df(g(x))}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x_0)} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Доказательство

Учитывая, что

$$f(y) - f(y_0) = f'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$$

где $y_0 = g(x_0)$, и то, что $o(g(x) - g(x_0)) = o(1)(g(x) - g(x_0))$, получаем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= f'(g(x_0)) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} o(1)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Следствие (Инвариантность формы дифференциала)

Справедливо правило дифференцирования:

$$df(x) = f'(x)dx, \quad x = x(t), dx(t) = x'(t)dt \quad \Rightarrow \quad df(x) = f'(x)dx = f'(x)x'(t)dt.$$

Таким образом, при взятии дифференциала функции $f(x)$ не имеет значения является ли x независимой переменной или является функцией от переменной t. Вид дифференциала сохраняется.

Пример

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2} = \frac{d}{dy}\left(y^{1/2}\right)\Big|_{y=x^2+1}\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Производная обратной функции

Теорема (Производная обратной функции)

Пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда функция $g(y)$, обратная к $f(x)$, дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и

$$g'(y_0) = \left(f^{-1}(y)\right)'\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство

Из условий теоремы следует, что обратная функция $g(y)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$. Делая замену переменных $y = f(x)$, получаем

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \{x = g(y),\ y = f(x),\ y \to y_0 \ \Rightarrow\ x \to x_0\} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Из существования и конечности это предела следует, что функция $g(y)$ дифференцируема в точке y_0.

Производная обратной функции

Замечание

Предположим, что нам уже известно, что функция $f(x)$ и обратная к ней $g(y)$ дифференцируемы в точках x_0 и $y_0 = f(x_0)$ соответственно. Тогда дифференцируя тождество

$$g(f(x)) = x \quad (\forall x \text{ из некоторой окрестности } x_0),$$

получаем правило дифференцирования обратной функции:

$$g'(y_0)f'(x_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример

Функция $y = e^x$ дифференцируема и строго возрастает для всех $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = (e^x)' = e^x.$$

Следовательно, обратная функция $x = \ln(y)$ — дифференцируема и

$$(\ln(y))' = \frac{1}{y'(x)}\Big|_{x=\ln(y)} = e^{-\ln(y)} = \frac{1}{y},$$

для всех $y > 0$.

Односторонние производные

Аналогично тому, как определялась левый и правый пределы и непрерывность, определяется левая и правая производные и дифференцируемость.

Левая и правая производные

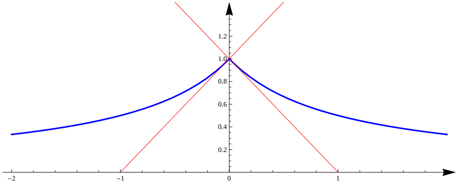
Левую и правую производные функции $f(x)$ определяют, как

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{и} \quad f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

соответственно.

Пример

Рассмотрим $f(x) = (1 + |x|)^{-1}$. Тогда $f'(+0) = -1$, $f'(-0) = 1$.



Примеры

Бесконечная производная

Бесконечная производная функции в точке означает существование вертикальной касательной в этой точке. Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0; \\ -\sqrt[3]{|x|}, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $f'(0) = +\infty$.

Теорема о производной обратной функции естественным образом распространяется на случай $f'(x_0) = 0$ или $\pm\infty$. Тогда $g'(y_0)$ равно $\pm\infty$ или 0 соответственно, где g — обратная к f функция.

Пример недифференцируемой функции

Рассмотрим $f(x) = x \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Тогда

$$f'(x) = x \cos(1/x) + \sin(1/x), \quad x \neq 0.$$

Следовательно, у непрерывной функции $f(x)$ не существует даже односторонних касательных в точке $x = 0$.

Дифференциалы высших порядков

Определение

Функция $f(x)$ называется является дважды дифференцируемой в точке x_0, если функция $f'(x)$ определена в окрестности x_0 и дифференцируема в точке x_0. Вторая производная f имеет вид

$$f''(x_0) = \left(f'(x)\right)'\Big|_{x=x_0}.$$

Аналогично определяются производные любого порядка.

Найдем второй дифференциал, учитывая, что функция $dx(h) = h$ не зависит от x, а зависит только от независимого приращения h:

$$d^2 f(x) = d\left(df(x)\right) = d\left(f'(x)dx\right) = f''(x)d^2x.$$

Для второй производной часто используют обозначения:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

Утверждение

Несложно доказать по индукции, что

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Дифференциалы высших порядков

Пример

Рассмотрим многочлен степени n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Тогда

$$P(0) = a_0,$$

$$P'(0) = \left(n a_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1\right)\Big|_{x=0} = a_1,$$

$$\dots$$

$$P^{(k)}(0) = k! a_k,$$

$$\dots$$

$$P^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Следовательно, любой многочлен $P(x)$ степени n можно представить в виде:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!} x + \dots + \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Неявно заданная функция

Иногда значение функции $y(x)$ определяется не из явной формулы вида

$$y(x) = \dots,$$

а из уравнения содержащего x и y. В этом случае говорят, что функция **задана неявно**.

Пример

Уравнение окружности имеет вид:

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Поскольку каждому значению x должно соответствовать только одно значение функции $y(x)$, рассмотрим верхнюю полуокружность $y > 0$.

Если необходимо найти производную $y'(x)$ при $x_0 = r\sqrt{2}/2$ и $y(x_0) = r\sqrt{2}/2$. Предполагая, что $y(x)$ дифференцируема в этой точке, получаем

$$2y'(x_0)y(x_0) + 2x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x_0) = -\frac{x_0}{y(x_0)} = -1.$$

Параметрически заданная функция

Говорят, что функция задана параметрически, если

$$\begin{cases} y = y(t); \\ x = x(t), \end{cases}$$

где t — параметр. Пусть в окрестности $t = t_0$ существует функция $t = t(x)$, обратная к $x(t)$. Определим $Y(x) = y(t(x))$, $x_0 = x(t_0)$. Если функции $y(t)$, $x(t)$ и $t(x)$ дифференцируемы, то производная $Y'(x_0)$ имеет вид:

$$Y'(x_0) = \frac{dy(t(x))}{dx}\Big|_{x=x_0} = y'(t(x_0))t'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Таким образом,

$$\frac{dY(x_0)}{dx} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления. Теорема Ферма.

Лемма

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда, если $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в некоторой окрестности x_0.

Доказательство следует непосредственно из определения производной и свойств предела (свойство сохранения знака).

Теорема Ферма

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и принимает наибольшие или наименьшее значение в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда, если функция $f(x)$ дифференцируема в x_0, то необходимо $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

Предположим обратное. Тогда немедленно получаем противоречие с леммой.

Упражнение

Проведите самостоятельно полное подробное доказательство леммы и теоремы Ферма.

Определение

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, а значение $f(x_0)$ называют локальным максимумом (минимумом) функции $f(x)$, если $f(x_0)$ является максимумом (минимумом) значений функции $f(x)$ для x из некоторой окрестности точки x_0.

Аналогично формулируется определение для точек строгого максимума и минимума.

Например, x_0 — точка локального минимума $f(x)$, если существует окрестность U точки x_0 такая, что

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in U.$$

Точки локального максимума и минимума вместе называют точками локального экстремума функции.

Геометрический смысл теоремы Ферма

Касательная, если она существует, является горизонтальной в точках локального экстремума функции $f(x)$.

Алгоритм поиска максимума функции на отрезке

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, по теореме Вейерштрасса она достигает своего минимального и максимального значения на этом отрезке. Из теоремы Ферма следует, что для поиска точек глобального минимума и максимума функции $f(x)$ необходимо рассмотреть:

1. Все точки интервала (a, b), для которых $f'(x) = 0$.
2. Все точки интервала (a, b), в которых не существует $f'(x)$.
3. Граничные точки $x = a$ и $x = b$.

Глобальный максимум и минимум $f(x)$ обязательно достигается в одной (или в нескольких) из этих точек.

Пример

Пусть $f(x) = e^x - x - 1$ при $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Учитывая, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, получаем, что $\min f(x) = f(0) = 0$, $\sup f(x) = +\infty$. Следовательно, справедливо неравенство:

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Теорема Ролля

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, если $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство

По второй теореме Вейерштрасса существует x_{min} и x_{max} такие, что

$$f(x_{min}) = m = \min_{x \in [a,b]} f(x), \qquad f(x_{max}) = M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

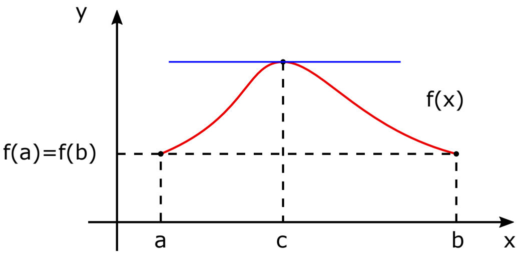
Возможны два случая

1. Если $m = M$, то функция $f(x) = m$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда в качестве точки c можно взять любую точку из интервала (a, b).
2. Если $m < M$, то $m \neq f(a)$ или $M \neq f(a)$. Следовательно, одна из точек x_{min} или x_{max} заведомо лежит на интервале (a, b), а не совпадает с точками a и b. Пусть c — эта точка, то есть x_{min} или x_{max}. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Основные теоремы дифференциального исчисления. Теорема Ролля.

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если дифференцируемая функция принимает равные значения на концах интервала, то найдется точка на интервале такая, что касательная в этой точке будет горизонтальной.



Физический смысл теоремы Ролля

Если точка движется по прямой и в какой-то момент времени оказывается в начальной точке, то обязательно в некоторой момент времени точка совершила поворот в направление своего движения, то есть в некоторый момент времени скорость точки была равна 0.

Теорема Лагранжа

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Данную формулу называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Доказательство

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функция $g(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля, так как $g(a) = g(b) = f(a)$. Следовательно, существует $c \in (a, b)$ такая, что $g'(c) = 0$. Получаем

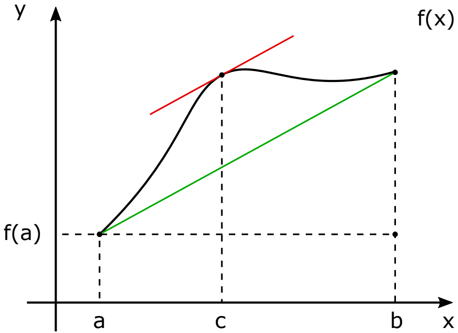
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

что и требовалось доказать.

Основные теоремы дифференциального исчисления. Теорема Лагранжа.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Если функция дифференцируема на интервале, то существует точка, в которой касательная параллельна хорде, которая соединяет значения функции на концах заданного интервала.



Формула Лагранжа:

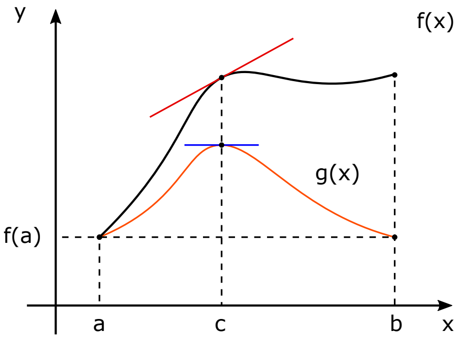
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Уравнение хорды:

$$y_{\text{хорд.}} = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Если функция дифференцируема на интервале, то существует точка, в которой касательная параллельна хорде, которая соединяет значения функции на концах заданного интервала.



Формула Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Уравнение хорды:

$$y_{\text{хорд.}} = f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Формула для $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема Лагранжа. Замечания

Физический смысл теоремы Лагранжа

Пусть точка движется по прямой с переменной скоростью в течение определенного интервала времени. Тогда в некоторый момент времени мгновенная скорость точки в точности совпадала со средней скоростью на этом интервале.

Замечания

1. Теорему Лагранжа иногда называют теоремой о среднем значении в дифференциальном исчислении.
2. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа. Действительно, если $f(a) = f(b)$, то
$$0 = f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 0.$$
3. Формула конечных приращений Лагранжа сохраняет силу и при $b \le a$, если точки a и b взяты из интервала, на котором функция $f(x)$ дифференцируема. Точка c, очевидно, зависит от выбора точек a и b.
4. Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 и приращение Δx координаты x не выводит из этого интервала. Тогда формулу Лагранжа можно переписать в виде
$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\,\Delta x, \quad \theta \in (0, 1),$$
где $c = x_0 + \theta\,\Delta x$.

Теорема (Признак монотонности функции)

Если функция дифференцируема на некотором интервале, то она строго возрастает (строго убывает) на нем тогда и только тогда, когда ее производная на этом интервале положительна (отрицательна).

Очевидно, это утверждение справедливо и для случая нестрогой монотонности и не отрицательной (не положительной) производной.

Теорема (Признак постоянства функции)

Если функция дифференцируема на некотором интервале и ее производная тождественно равна 0, то эта функция является постоянной на данном интервале.

Пример

Рассмотрим $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(1/x)$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\,\frac{-1}{x^2} \equiv 0, \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \equiv f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично, $f(x) \equiv -\pi/2$ при $x < 0$.

Теорема Коши

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируемы на интервале (α, β), $x'(t) \neq 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$. Тогда существует точка $\xi \in (\alpha, \beta)$ такая, что

$$\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \frac{y'(\xi)}{x'(\xi)}.$$

Данную формулу называют формулой конечных приращений Коши.

Формула Коши является аналогом формулы Лагранжа для функций, заданных параметрически. Из условий теоремы следует, что функция $x(t)$ строго монотонна. Тогда $x(\alpha) \neq x(\beta)$ и существует монотонная функция $t = t(x)$, обратная к $x = x(t)$ при $t \in (\alpha, \beta)$.

Упражнение

Докажите теорему Коши, применяя формулу Лагранжа к функции $Y(x) = y(t(x))$.

Если просто применить формулу Лагранжа к $x(t)$ и $y(t)$ в отдельности, то получим

$$\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \frac{y'(\xi_1)(\beta - \alpha)}{x'(\xi_2)(\beta - \alpha)} = \frac{y'(\xi_1)}{x'(\xi_2)}.$$

Суть формулы Коши в том, что ξ_1 и ξ_2 можно выбрать равными!

Формула линеаризации

Задача состоит в построении наилучшего линейного приближения для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Формула линеаризации

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Ограничиваясь только линейной частью, получаем приближенную формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Эту формулу называют **формулой линеаризации**. Заметим, что график линейной части в приближении функции $f(x)$ — это касательная в точке x_0.

Формула линеаризации дает наилучшее линейное приближение функции $f(x)$ при $x \to x_0$.

Пример

Пусть $f(x) = \ln(\cos(x) + x)$, $x_0 = 0$. Тогда:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x) + x}\Big|_{x=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + o(x) \quad (x \to 0).$$

Многочлен Тейлора

Построим нелинейное приближение функции $f(x)$ в окрестности x_0 при помощи многочлена произвольной степени.

Предложение (о многочлене Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в x_0, а $P(x)$ — многочлен степени n. Тогда значения первых n производных f и P совпадают в точке x_0:

$$f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0), \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

тогда и только тогда, когда

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Многочлен $P(x)$ называют **многочленом Тейлора** степени n функции $f(x)$ в точке x_0.

Доказательство

Несложно получить (формула Тейлора для многочленов), что

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

для любого многочлена $P(x)$. Дальнейшее доказательство проведите самостоятельно.

Многочлен Тейлора

Мы предполагаем, что многочлен $P(x)$ является хорошим приближением для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, поскольку совпадают не только значения $f(x_0)$ и $P(x_0)$ но и все производные до n-го порядка включительно.

Определение

Величину

$$r(x) = r_n(x, x_0) = f(x) - P(x),$$

где $P(x)$ — многочлен Тейлора порядка n в точке x_0, называют **остаточным членом** порядка n.

Следовательно, справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x).$$

Эту формулу называют **формулой Тейлора**.

Пример

Пусть $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Тогда

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

Многочлен Тейлора. Формула Пеано

Лемма

Пусть функция $g(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0 и

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда $g(x) = o((x - x_0)^n)$.

Доказательство

Данная лемма справедлива для $n = 1$:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0), \quad (x \to x_0).$$

Пусть она справедлива для $n - 1$. Тогда, применяя ее к $g'(x)$, получаем

$$g'(x) = o(x - x_0)^{n-1} = \alpha(x)(x - x_0)^{n-1}, \quad (x \to x_0),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция. Применяя формулу конечных приращений $g(x) = g'(\xi)(x - x_0)$, получаем

$$|g(x)| = \left|g'(\xi)(x - x_0)\right| = \left|\alpha(\xi)(\xi - x_0)^{n-1}(x - x_0)\right| \le |\alpha(\xi)| \, |(x - x_0)^n|.$$

Следовательно, $g(x) = o(x - x_0)^n$.

Остаточный член $r_n(x)$ удовлетворяет всем требованиям предыдущей леммы. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n \quad (x \to x_0).$$

В случае $n = 1$ получаем формулу из определения дифференцируемости функции

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

При $x_0 = 0$ формулу Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0),$$

часто называют формулой Маклорена.

Таким образом, формула Тейлора может быть использована для построения хороших приближенных формул с малой погрешностью порядка $o(x - x_0)^n$.

Многочлен Тейлора. Примеры

Синус и косинус

Рассмотрим $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. Тогда:

$$f'(0) = \cos(x)\Big|_{x=0} = 1, \quad f''(0) = -\sin(x)\Big|_{x=0} = 0, \quad f^{(3)}(0) = -\cos(x)\Big|_{x=0} = -1, \quad \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Аналогично,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Логарифм

Рассмотрим $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \Rightarrow$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Многочлен Тейлора. Примеры

Степенная функция

Рассмотрим $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$. Вычисляя производные, получаем

$$f'(0) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\Big|_{x=0} = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1), \quad \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Например:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Поскольку это сумма геометрической прогрессии мы можем получить явную формулу для остатка $r_n(x)$:

$$1 - x + + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad \Rightarrow$$

$$r_n(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = o(x^n).$$

Многочлен Тейлора. Свойства

Многочлен Тейлора дает наилучшее приближение для функции $f(x)$ в окрестности x_0.

Предложение

Пусть $f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0 и справедливо равенство

$$f(x) - P(x) = o(x - x_0)^n, \quad (x \to x_0),$$

где $P(x)$ — многочлен степени n. Тогда $P(x)$ — многочлен Тейлора.

Доказательство

Используя формулу Тейлора для многочлена $P(x)$ и функции $f(x)$, получаем тождество:

$$f(x) - P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

$$f(x) - P(x) = o(x - x_0)^n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(f^{(k)}(x_0) - P^{(k)}(x_0))}{k!}(x - x_0)^k = o(x - x_0)^n.$$

Подставляя $x = x_0$, получаем $P(x_0) = f(x_0)$. Далее, деля на $x - x_0$ и подставляя $x = x_0$, получаем $P'(x_0) = f'(x_0)$, и так далее.

Многочлен Тейлора. Пример

Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ при $x_0 = 0$ Вместо вычисления производных $f(x)$ можно воспользоваться уже известной формулой

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + o(z^n),$$

для $z = -x^2$. Тогда

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Из доказанного предложения следует, что $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$ является многочленом Тейлора функции $f(x)$ и

$$f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (2n)! \qquad \forall n \geq 0.$$

Таким образом, мы нашли значения производных функции $f(x)$ вычисляя ее многочлен Тейлора.

Многочлен Тейлора. Пример

Пример

Найдем многочлен Тейлора для $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ при $x_0 = 0$. Получаем, что

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Следовательно,

$$f^{(2n+2)}(0) = g^{(2n+1)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = g^{(2n)}(0) = (-1)^n\,(2n)! \qquad \forall n \geq 0.$$

Таким образом,

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Упражнение

Аналогичным образом получите формулу:

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k}}{4^k(2k+1)}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Пример

Найдем несколько первых членов в формуле Тейлора для $f(x) = \mathrm{tg}(x)$. Используя разложение для синуса, косинуса и формулу:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + o(z^2) \quad (z \to 0),$$

получаем, что

$$\frac{1}{\cos(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^{-1} = \left(1 - \frac{x^2}{2}\,(1 + o(x))\right)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{2}\,(1 + o(x)) + o(x^3),$$

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^4),$$

$$\mathrm{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Упражнение

Проверьте этот результат, вычислив производные функции $f(x) = \mathrm{tg}(x)$.

Многочлен Тейлора. Формула Лагранжа

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобна для выяснения локальных свойств функции $f(x)$ при $x \to x_0$. С другой стороны, большой интерес представляет вопрос о явных оценках остаточного члена $r_n(x, x_0)$ в формуле Тейлора в случае конечного значения $x - x_0$.

Теорема. Формула Лагранжа для остаточного члена

Пусть функция $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$ в окрестности точки x_0. Тогда для остаточного члена справедливы формулы Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где x лежит в заданной окрестности x_0, а ξ лежит между x и x_0.

Таким образом, справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

При $n = 0$ получаем формулу конечных приращений Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

Многочлен Тейлора. Формула Лагранжа

Доказательство

По определению $r_n(x, x_0) = f(x) - P(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$

Рассмотрим зависимость $r_n(x, x_0)$ от точки x_0. Для этого фиксируем точку x и определим вспомогательную функцию

$$s(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x - z)^k.$$

Функция $s(z)$ дифференцируема в окрестности точки $z = x_0$:

$$s'(z) = -\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x - z)^k = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n.$$

Пусть $u(z) = (x - z)^{n+1}$. Тогда, применяя формулу конечных приращений Коши к $s(z)$ и $u(z)$ на отрезке с концами x и x_0, получаем, что

$$\frac{s'(\xi)}{u'(\xi)} = \frac{s(x) - s(x_0)}{u(x) - u(x_0)} = \frac{s(x_0)}{u(x_0)} = \frac{r_n(x, x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Другое определение числа e

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \quad r_n(x) = e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Следовательно,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + r_n(1),$$

$$r_n(1) < \frac{e}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Таким образом,

$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots .$$

Заметим, что последовательность $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ сходится к e значительно быстрее, чем последовательность $(1 + 1/n)^n$. Действительно,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)} = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Исследование функций. Экстремум.

По теореме Ферма производная функции обращается в ноль в точках локального экстремума. Следовательно, теорема Ферма дает необходимое условие для поиска экстремума. Построим достаточное условие.

Теорема. Достаточное условие строгого локального экстремума

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0. Точка x_0 является точкой строгого локального экстремума функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда производная $f'(x)$ меняет знак в точке x_0. Если при этом $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка строго локального минимума, а иначе x_0 — это точка максимума.

Доказательство следует непосредственно из признака монотонности функции.

Пример

Пусть $f(x) = x^2$. Тогда $f'(x) = 2x$ и $f'(0) = 0$. Производная $f'(x) = 2x$ меняет знак с минуса при $x < 0$ на плюс при $x > 0$, следовательно, $x = 0$ — точка минимума.

Замечание

Теорема справедлива и в том случае, когда производная $f'(x_0)$ не существует, но $f'(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Исследование функций. Экстремум.

Иногда проверка знака производной в окрестности стационарной точки вызывает затруднения. Оказывается, определить является ли точка точкой экстремума можно, анализируя знаки старших производных.

Теорема. Анализ знаков старших производных

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0 и

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда точка x_0 является точкой строгого локального минимума (максимума) функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда n - четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$ ($f^{(n)}(x_0) < 0$).

Доказательство

Используем формулу Тейлора с остаточным членом Пеано:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n,$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Следовательно, в некоторой проколотой окрестности точки x_0 приращение функции $f(x)$ меняет знак при нечетных n и сохраняет знак при четных n. Если n — четное число, то знак приращения совпадает со знаком производной $f^{(n)}(x_0)$.

Пример Коши

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Несложно видеть, что $f(x)$ имеет производные любого порядка и

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Таким образом, многочлен Тейлора функции f равен тождественно 0 и

$$f(x) = o(x^n), \quad (x \to 0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что точка $x = 0$ является точкой глобального минимума функции f.

Замечание

Мы видели, что многочлены Тейлора однозначно определяются дифференцируемой функцией $f(x)$. Пример Коши показывает, что обратное утверждение не верно, поскольку функции $f(x)$ соответствуют те же многочлены Тейлора, что и у функции, тождественно равной нулю.

Определение

Множество E точек (на плоскости или в пространстве) называется **выпуклым**, если вместе с любой парой точек x, y из E множеству E принадлежит отрезок, соединяющий эти точки:

$$x \in E,\ y \in E \quad \Rightarrow \quad x + (y - x)t \in E \quad \forall t \in [0, 1].$$

Иногда удобно вместо одного параметра t рассмотреть два коэффициента q_1 и q_2:

$$x + (y - x)t = (1 - t)x + ty = q_1 x + q_2 y \quad q_i \geq 0,\ q_1 + q_2 = 1.$$

Примерами выпуклых множеств являются выпуклые многоугольники и многогранники, шар, круг, т.д.

Определение

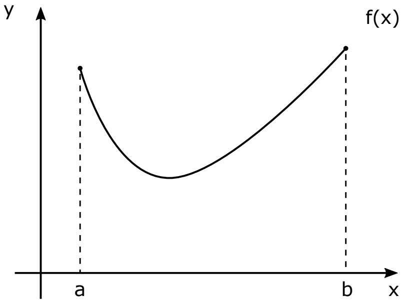
Функция $f(x)$ называется **выпуклой** (выпуклой вниз) на промежутке от a до b, если множество точек (x, y), для которых $y \geq f(x)$, является выпуклым. Это множество называют **надграфиком**.

Аналогично, функция называется **вогнутой** (выпуклой вверх), если множество точек, расположенных под графиком $f(x)$, является выпуклым.

Пусть функция $f(x)$ выпукла. Из определения выпуклости следует, что

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2), \quad \forall q_i \geq 0,\ q_1 + q_2 = 1, \quad \text{(Неравенство Йенсена)}$$

где x_1 и x_2 — точки из рассматриваемого промежутка. Верно и обратное утверждение, то есть из справедливости неравенства Йенсена для произвольных точек $x_{1,2}$ и коэффициентов $q_{1,2}$ следует выпуклость $f(x)$. Часто именно это неравенство выбирают за определение выпуклости.



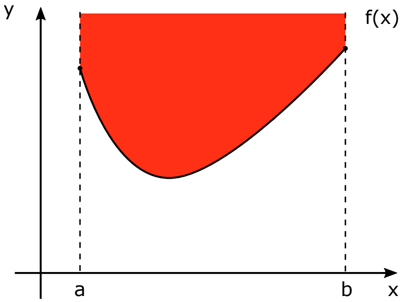
Точка $c = q_1x_1 + q_2x_2$, $f(c) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$.

Исследование функций. Выпуклость и вогнутость.

Пусть функция $f(x)$ выпукла. Из определения выпуклости следует, что

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2),\quad \forall q_i\ge 0,\ q_1+q_2=1,\quad \text{(Неравенство Йенсена)}$$

где x_1 и x_2 — точки из рассматриваемого промежутка. Верно и обратное утверждение, то есть из справедливости неравенства Йенсена для произвольных точек $x_{1,2}$ и коэффициентов $q_{1,2}$ следует выпуклость $f(x)$. Часто именно это неравенство выбирают за определение выпуклости.



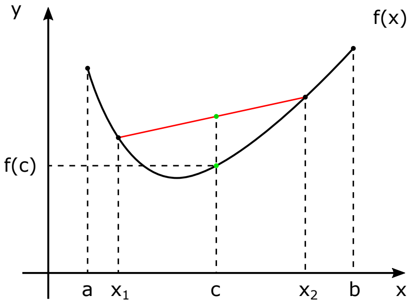
Точка $c=q_1x_1+q_2x_2$, $f(c)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$.

Исследование функций. Выпуклость и вогнутость.

Пусть функция $f(x)$ выпукла. Из определения выпуклости следует, что

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2), \quad \forall q_i \geq 0,\ q_1 + q_2 = 1, \quad \text{(Неравенство Йенсена)}$$

где x_1 и x_2 — точки из рассматриваемого промежутка. Верно и обратное утверждение, то есть из справедливости неравенства Йенсена для произвольных точек $x_{1,2}$ и коэффициентов $q_{1,2}$ следует выпуклость $f(x)$. Часто именно это неравенство выбирают за определение выпуклости.



Точка $c = q_1x_1 + q_2x_2$, $f(c) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$.

Исследование функций. Выпуклость и вогнутость.

Пусть функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a, b]$, а $x \in [a, b]$ — произвольная точка. Тогда неравенство Йенсена можно переписать в виде:

$$f(x) \leq \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a), \quad \forall x \in [a, b],$$

или эквиваленто,

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Теорема

Пусть $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Функция $f(x)$ является выпуклой тогда и только тогда, когда ее производная не убывает.

Если существует вторая производная, то $f''(x) \geq 0$ — это условие выпуклости.

Следствие

Все точки графика выпуклой функции лежат выше касательной к графику в произвольной точке.

Упражнения

Проведите последовательные доказательства утверждений, представленных на этом слайде, используя формулу конечных приращений. Сделайте соответствующие иллюстрации.

Определение

Прямую $y = ax + b$ называют **асимптотой** функции $f(x)$, если точки графика $f(x)$ стремятся к заданной прямой при $x \to \pm\infty$. В случае, если $f(x_0 \pm 0) \to \infty$, то говорят, что прямая $x = x_0$ — вертикальная асимптота.

Несложно видеть, что $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = ax + b$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) - (ax + b) \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

Следовательно,

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)\,.$$

Вычисляя эти пределы, можно проверить функцию на наличие наклонных асимптот.

Пример

Рассмотрим гиперболу $ay^2 - bx^2 = 1$, где $a > 0$, $b > 0$. Тогда

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{bx^2 + 1} = \pm x\sqrt{\frac{b}{a}} + o(x), \quad (x \to \infty).$$

Правила Лопиталя

Задача состоит в нахождении предела в случае неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Теорема (Правило Лопиталя)

Пусть выполнены условия:

1. функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности x_0 и производная $g'(x) \neq 0$;
2. $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$;
3. существует (не обязательно конечный) предел отношения производных $f'(x)/g'(x)$ при $x \to x_0$.

Тогда существует предел отношения функций:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство

Можно считать, что $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$. Применяя формулу Коши, получаем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Далее достаточно применить теорему о пределе сложной функции, так как $\xi = \xi(x) \to x_0$ при $x \to x_0$ и $\xi(x) \neq x_0$.

Правила Лопиталя

Аналогичные правила справедливы и в случае бесконечного x_0, пределов справа и слева, и в случае неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Примеры

Найдем пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to +0} x\ln(x) = \lim_{x\to +0}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to +0} x = -0.$$

Замечание

В правилах Лопеталя условие существования предела отношения производных является необходимым условием. Бывает так, что предел отношения функций существует, а предел отношения производных — нет. Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos(x)}{1} \text{ — не существует.}$$