

Выборный Евгений Викторович  
email: evybornyi@hse.ru

## Математический анализ Тема 5: Ряды

Москва 2016

## Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

### Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

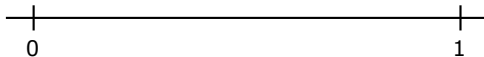
где  $d_k$  — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots$$

### Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$



## Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

### Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

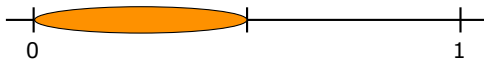
где  $d_k$  — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots$$

### Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$



## Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

### Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

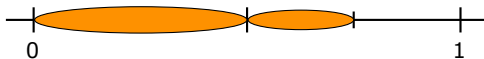
где  $d_k$  — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots$$

### Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$



## Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

### Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

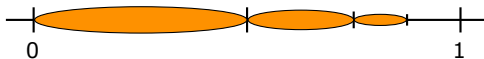
где  $d_k$  — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots$$

### Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$



## Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

### Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

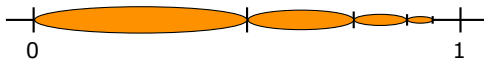
где  $d_k$  — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots$$

### Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$



# Числовые ряды. Определение

## Определение

Пусть задана последовательность  $a_n$ . Тогда символ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

представляющий упорядоченную сумму бесконечного числа слагаемых, называют **числовым рядом**. Величины  $S_n$ :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n,$$

называют **частичными суммами** числового ряда. Если последовательность чисел  $S_n$  имеет предел при  $n \rightarrow +\infty$ , то говорят, что соответствующий числовой ряд **сходится**, а число

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

называют **суммой числового ряда**. В этом случае пишут:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

## Числовые ряды. Определение

В действительности, числовые ряды — это другой способ говорить о числовых последовательностях.

Каждому числовому ряду соответствует последовательность частичных сумм:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n h_k.$$

Обратно, для произвольной последовательности  $a_n$  можно рассмотреть числовой ряд:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots,$$

где

$$d_n = a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad d_1 = a_1.$$

Частичные суммы этого ряда в точности совпадают с членами последовательности  $a_n$ :

$$a_n = \sum_{k=1}^n d_k.$$

Следовательно, если последовательность  $a_n$  сходится, то и ряд с членами  $d_k$  сходится, и соответствующие пределы совпадают.



## Числовые ряды. Примеры

### ❶ Числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$$

расходится к  $+\infty$ , поскольку частичные суммы  $S_n = n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

### ❷ Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

расходится, поскольку частичные суммы  $S_n$  не имеют предела.

### ❸ Числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+k)k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

сходится, поскольку частичные суммы имеют вид:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

### ❹ Расходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = +\infty.$$

## Остаток ряда

Числовой ряд

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$$

называют  $k$ -ым **остатком ряда**  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ . Исходный ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

## Линейность

Если ряды  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходятся, то сходится и ряд с общим членом  $A a_n + B b_n$ .

Справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (A a_n + B b_n) = A \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + B \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

### Теорема. Необходимое условие сходимости ряда

Если числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, то  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

### Доказательство

Сходимость ряда означает, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = S.$$

Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Обратное утверждение не верно. Например, ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  расходится, поскольку

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \Rightarrow S_n \rightarrow +\infty.$$

## Числовые ряды. Знакопостоянные ряды

Ряд называют знакопостоянным, если все  $a_n \geq 0$  или  $a_n \leq 0$ .

### Предложение

Положительный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , где  $a_n \geq 0$ , всегда имеет сумму. Сумма ряда будет конечной, если последовательность частичных сумм ряда ограничена, иначе сумма ряда будет равна  $+\infty$ .

### Доказательство

Последовательность частичных сумм является монотонной:

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = A_n + a_{n+1} \geq A_n, \quad \forall n.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел последовательности  $A_n$ , представляющий сумму ряда.

# Числовые ряды. Теорема сравнения

## Теорема. Сравнение

Рассмотрим два положительных ряда  $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и  $B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ . Пусть справедливо неравенство

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Тогда из сходимости ряда  $B$  следует сходимость ряда  $A$ , а из расходимости ряда  $A$  следует расходимость ряда  $B$ .

Аналогичное утверждение справедливо при выполнении условия  $a_n = O(b_n)$ .

## Теорема. Асимптотическое сравнение

Пусть  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$  и  $a_n \sim b_n$ , при  $n \rightarrow +\infty$ . Тогда ряды  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  сходятся или расходятся одновременно.

## Упражнение

Выпишите полное доказательство этих теорем.

## Числовые ряды. Признак Коши

В качестве эталона для сравнения рядов выберем геометрическую прогрессию:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad 0 \leq q < 1.$$

### Теорема. Признак Коши

Пусть  $a_n \geq 0$  и для достаточно больших  $n$  справедливо неравенство:

$$C_n = \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1.$$

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, а если  $C_n \geq 1$ , то ряд расходится.

### Доказательство

Из предположения теоремы следует, что  $a_n < q^n$  для достаточно больших  $n$ . Из теоремы о сравнении рядов и сходимости геометрической прогрессии с знаменателем  $q < 1$  следует сходимость ряда с членами  $a_n$ .

Если  $C_n \geq 1$ , то и  $a_n \geq 1$ . Следовательно,  $a_n \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то есть не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

## Числовые ряды. Признак Коши

Поскольку нас интересует выполнение неравенства

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

только для достаточно больших  $n$  можно сформулировать предельный признак сравнения.

### Теорема. Предельный признак Коши

Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда при  $q < 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, а при  $q > 1$  расходится. Если  $q = 1$ , то вопрос остается открытым.

### Доказательство

Рассмотрим случай  $q < 1$ . Дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |\sqrt[n]{a_n} - q| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Выбирая положительное  $\varepsilon = \varepsilon_0 < 1 - q$ , получаем, что

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q + \varepsilon_0 < 1 \quad \forall n \geq N.$$

Остается применить признак сходимости Коши.

### Пример

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{e^{n^2}}.$$

Применим предельный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

### Упражнение

Аналогично рассмотрите ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$ .



## Числовые ряды. Признак Даламбера

Сложность применения признака Коши связана с необходимостью вычисления корня  $n$ -ой степени. Существует более простой признак сходимости Даламбера.

### Теорема. Признак Даламбера

Пусть  $a_n > 0$ . Если для достаточно больших  $n$  справедливо неравенство

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, а если  $\mathcal{D}_n \geq 1$ , то ряд расходится.

Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ , то ряд сходится при  $\lambda < 1$  и расходится при  $\lambda > 1$ .

### Доказательство

Рассмотрим случай  $q < 1$ :

$$\mathcal{D}_n \leq q < 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \dots \leq q^n a_1.$$

Следовательно,  $a_n = O(q^n)$ , и ряд с членами  $a_n$  сходится по теореме сравнения, где сравнение происходит с геометрической прогрессией.

## Числовые ряды. Признак Даламбера

Признак Даламбера особенно удобно применять, если в формуле для общего члена присутствуют факториалы.

### Пример

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ .

По признаку Даламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{1+n} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad (n \geq 1).$$

Следовательно, ряд сходится.

Нам известно, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

### Упражнение

Аналогично рассмотрите ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

## Числовые ряды. Интегральный признак

Рассмотрим положительный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

### Теорема. Интегральный признак сходимости ряда

Пусть

$$a_n = f(n),$$

где  $f \in C[1, +\infty)$  положительна и монотонно убывает.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно.

### Доказательство

Из положительности  $f$  следует, что сходимость интеграла эквивалентна ограниченности  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ , а сходимость ряда эквивалентна ограниченности последовательности частичных сумм  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

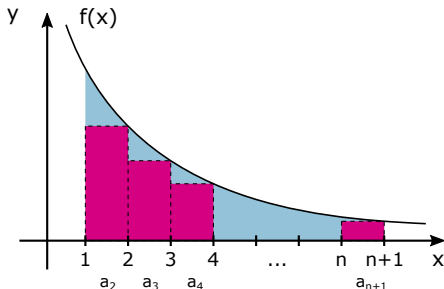
По теореме сравнения для интеграла:

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k \quad \Rightarrow \quad S_{n+1} - a_1 \leq F(n+1) \leq S_n$$

Из последнего неравенства следует эквивалентность ограниченности  $F(x)$  и  $S_n$ .

## Числовые ряды. Интегральный признак

Теорема об интегральном признаке сходимости имеет простую геометрическую интерпретацию.



Если интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходится, то он представляет площадь под графиком  $f(x)$  при  $x \geq 1$ . Сумма ряда  $\sum_{k=2}^{+\infty} a_k$  можно интерпретировать, как площадь прямоугольников, полностью лежащих под графиком  $f$ .

Следовательно, из ограниченности площади под графиком  $f$  следует и ограниченность суммарной площади прямоугольников.

## Ряд Дирихле

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

## Доказательство

При  $\alpha \leq 0$  ряд, очевидно, расходится. Пусть  $\alpha > 0$ . Поскольку  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  положительна, непрерывна и монотонно убывает, то применим интегральный признак сходимости. Таким образом, интеграл и ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходятся или расходятся одновременно. Мы знаем, что этот интеграл сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $0 < \alpha \leq 1$ .

## Замечание

Величину суммы ряда  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  называют функцией Римана. Она имеет ключевое значение в теории чисел.

## Пример

Рассмотри ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+5}}$ . Заметим, что

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+5}} \sim \frac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \frac{O(n^{1/4})}{n^{3/2}} = O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right).$$

Поскольку ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$  сходится (ряд Дирихле), то сходится и исходный ряд (теорема об асимптотическом сравнении рядов).

## Упражнения

Исследуйте сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}.$$

Попробуйте применить к ним признаки Даламбера, Коши и интегральный признак сходимости.

# Числовые ряды. Знакопеременные ряды

## Определение

Числовой ряд называют **знакопеременным**, если среди членов ряда имеется бесконечно много как положительных так и отрицательных членов.

Действительно, иначе отбросив фиксированное число членов ряда мы бы получили знакопостоянный ряд.

## Определение

Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ , то говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  **абсолютно сходится**. Если ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся, то говорят, что ряд **сходится условно**.

## Теорема

Из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ — сходится.}$$

## Определение

Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ , где  $a_n \geq 0$ , называют **рядом Лейбница**.

## Теорема. Признак Лейбница

Пусть  $a_n \geq 0$  монотонно стремятся к нулю:

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty), \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда ряд Лейбница  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  сходится.

Если ряд Лейбница сходится, то остаток ряда не превосходит первого отброшенного слагаемого:

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_N \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$



## Числовые ряды. Знакопеременные ряды

### Доказательство признака Лейбница

Рассмотрим последовательность частичных сумм с нечетным числом слагаемых:

$$S_{2n+1} = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq S_{2n-1}.$$

Таким образом, последовательность  $S_{2n+1}$  монотонно возрастает, но

$$S_{2n+1} = -(a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1} \leq 0.$$

По теореме Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности получаем, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = S.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n-1} + a_{2n}) = S + 0 = S \Rightarrow S_n \rightarrow S.$$

Мы доказали сходимость ряда. Докажем оценку для остаточного члена.

Последовательность  $S_{2n}$  является монотонно убывающей. Следовательно,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n} \Rightarrow \left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| = |S - S_{N-1}| \leq |S_N - S_{N-1}| = a_N.$$

### Пример

Рассмотрим знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Этот ряд не является абсолютно сходящимся, так как расходится ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ .

Исследуем ряд на условную сходимость. Последовательность  $1/n$ , очевидно, монотонно стремится к нулю. Применяя признак Лейбница, получаем, что ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  сходится условно.

# Числовые ряды. Перестановка членов ряда

## Определение

Будем говорить, что ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  получен из ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , перестановкой слагаемых, если  $b_n = a_{s(n)}$ , где  $s(n)$  — биекция из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ .

## Теоремы о перестановке слагаемых

Если ряд сходится абсолютно, то к той же сумме абсолютно сходится и ряд с переставленными слагаемыми.

Если ряд является лишь условно сходящимся, то для любого числа  $S$  существует такая перестановка слагаемых, что ряд с переставленными слагаемыми будет сходиться к сумме  $S$ .

Для заданного знакопеременного ряда рассмотрим суммы его положительных и отрицательных слагаемых:

$$A_+ = \sum_{n: a_n > 0} a_n, \quad A_- = \sum_{n: a_n < 0} |a_n|.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся положительные ряды  $A_+$  и  $A_-$ . В этом случае справедливо равенство для сумм:  $A = A_+ - A_-$ .

# Числовые ряды. Перестановка членов ряда

## Определение

Будем говорить, что ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  получен из ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , перестановкой слагаемых, если  $b_n = a_{s(n)}$ , где  $s(n)$  — биекция из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ .

## Теоремы о перестановке слагаемых

Если ряд сходится абсолютно, то к той же сумме абсолютно сходится и ряд с переставленными слагаемыми.

Если ряд является лишь условно сходящимся, то для любого числа  $S$  существует такая перестановка слагаемых, что ряд с переставленными слагаемыми будет сходиться к сумме  $S$ .

Для заданного знакопеременного ряда рассмотрим суммы его положительных и отрицательных слагаемых:

$$A_+ = \sum_{n: a_n > 0} a_n, \quad A_- = \sum_{n: a_n < 0} |a_n|.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся положительные ряды  $A_+$  и  $A_-$ . В этом случае справедливо равенство для сумм:  $A = A_+ - A_-$ .

# Числовые ряды. Перестановка членов ряда

## Определение

Будем говорить, что ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  получен из ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , перестановкой слагаемых, если  $b_n = a_{s(n)}$ , где  $s(n)$  — биекция из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ .

## Теоремы о перестановке слагаемых

Если ряд сходится абсолютно, то к той же сумме абсолютно сходится и ряд с переставленными слагаемыми.

Если ряд является лишь условно сходящимся, то для любого числа  $S$  существует такая перестановка слагаемых, что ряд с переставленными слагаемыми будет сходиться к сумме  $S$ .

Для заданного знакопеременного ряда рассмотрим суммы его положительных и отрицательных слагаемых:

$$A_+ = \sum_{n: a_n > 0} a_n, \quad A_- = \sum_{n: a_n < 0} |a_n|.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся положительные ряды  $A_+$  и  $A_-$ . В этом случае справедливо равенство для сумм:  $A = A_+ - A_-$ .

# Функциональные последовательности. Определение

## Определения

Последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots,$$

где все функции  $f_n(x)$  определены на общем множестве  $x \in X \subset \mathbb{R}$ , называют **функциональной последовательностью**.

Можно считать, что  $\{f_n(x)\}$  — это семейство числовых последовательностей, зависящее от  $x \in X$ , как от параметра.

Говорят, что функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  **сходится**, для фиксированного  $x = x_0$ , если сходится соответствующая числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}$ .

Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится для всех  $x \in X$ . Тогда, очевидно, предел функциональной последовательности

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

зависеть от  $x$ , как от параметра. В этом случае говорят, что последовательность функций  $\{f_n\}$  **поточечно сходится** к функции  $f$ , функцию  $f$  называют **предельной функцией**, а множество  $X$  — **множеством сходимости**.

### Пример

Рассмотрим последовательность функций  $\{x^n\}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 < x < 1; \\ 1, & \text{при } x = 1; \\ \nexists & \text{при } x \notin (-1, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, функциональная последовательность сходится на множестве  $(-1, 1]$ .

### Замечание

Из рассмотренного примера видно, что функциональная последовательность непрерывных функций не обязательно сходится к непрерывной функции.

Так последовательность непрерывных функций  $x^n$  сходятся на множестве  $x \in (-1, 1]$ . Но предельная функция не является непрерывной в точке  $x = 1$ .

### Упражнение

Для последовательности  $(1 - x^2)^n$  определите множество сходимости и предельную функцию.

## Функциональные последовательности. Пример

### Определение. Равномерная сходимость

Говорят, что функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  **сходится равномерно** к функции  $f(x)$  при  $x \in X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \quad \forall n \geq N, \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Если записать определение поточечной сходимости на  $X$ , то получим

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \quad \forall n \geq N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, равномерная сходимость является более сильным условием, так как требуется не только существование номера  $N$  но и его независимость от  $x$ .

### Утверждение

Последовательность  $f_n(x)$  равномерно сходится к  $f(x)$  при  $x \in X$  тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

### Доказательство

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$



# Функциональные последовательности. Пример

## Утверждение

Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное вообще говоря не верно.

## Доказательство

То, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость — очевидно. Покажем на примере, что обратное не верно.

## Пример

Рассмотрим функциональную последовательность  $x^n$  при  $x \in (0, 1)$ , которая сходится поточечно к нулю. Пусть  $x_n = 1 - 1/n$ . Тогда  $x_n \in (0, 1)$ , и  $f_n(x_n) \rightarrow 1/e$  при  $n \rightarrow +\infty$ , следовательно, равномерной сходимости нет.

Действительно, из равномерной сходимости следует, что  $f_n(x)$  должна стремиться к нулю при  $n \rightarrow +\infty$  в независимости от выбора  $x$ , но  $f_n(x_n) \rightarrow 1/e \neq 0$ .

## Функциональные последовательности. Пример

### Утверждение

Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное вообще говоря не верно.

### Доказательство

То, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость — очевидно. Покажем на примере, что обратное не верно.

### Пример

Рассмотрим функциональную последовательность  $x^n$  при  $x \in (0, 1)$ , которая сходится поточечно к нулю. Пусть  $x_n = 1 - 1/n$ . Тогда  $x_n \in (0, 1)$ , и  $f_n(x_n) \rightarrow 1/e$  при  $n \rightarrow +\infty$ , следовательно, равномерной сходимости нет.

Действительно, из равномерной сходимости следует, что  $f_n(x)$  должна стремиться к нулю при  $n \rightarrow +\infty$  в независимости от выбора  $x$ , но  $f_n(x_n) \rightarrow 1/e \neq 0$ .

## Функциональные ряды

Аналогично с функциональными последовательностями рассматривают и функциональные ряды.

### Определение. Сходимость функционального ряда

Пусть задана функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$ . Тогда символ  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

называют **функциональным рядом**. Если для любого  $x \in X$  сходится последовательность частичных сумм ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \rightarrow S(x) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

то говорят, что ряд **сходится поточечно** при  $x \in X$  и имеет сумму  $S(x)$ . Пишут:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

### Определение. Равномерная сходимость

Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  **сходится равномерно** по  $x \in X$  к сумме  $S(x)$ , если равномерно к  $S(x)$  сходится последовательность частичных сумм ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \quad \forall n \geq N, \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

## Функциональные ряды

Аналогично с функциональными последовательностями рассматривают и функциональные ряды.

### Определение. Сходимость функционального ряда

Пусть задана функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$ . Тогда символ  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

называют **функциональным рядом**. Если для любого  $x \in X$  сходится последовательность частичных сумм ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \rightarrow S(x) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

то говорят, что ряд **сходится поточечно** при  $x \in X$  и имеет сумму  $S(x)$ . Пишут:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

### Определение. Равномерная сходимость

Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  **сходится равномерно** по  $x \in X$  к сумме  $S(x)$ , если равномерно к  $S(x)$  сходится последовательность частичных сумм ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \quad \forall n \geq N, \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

# Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

## Теорема (Непрерывность)

Пусть функциональная последовательность непрерывных функций  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к  $f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Тогда функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

## Теорема (Интегрирование)

Пусть функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к  $f(x)$  при  $x \in [a, b]$ . Тогда, если функции  $f_n(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $f(x)$  также интегрируема на  $[a, b]$  и

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

## Теорема (Дифференцирование)

Пусть функциональная последовательность непрерывно дифференцируемых функций  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  при  $x \in [a, b]$  и последовательность функций  $\{f'_n(x)\}$  сходится равномерно на  $[a, b]$ . Тогда функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$  и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)$$

Аналогичные утверждения справедливы и для функциональных рядов.

# Признак равномерной сходимости ряда

## Теорема Вейерштрасса

Пусть задан функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  при  $x \in X$  и сходящейся числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

Если справедливы неравенства:

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n, \forall x \in X$$

то функциональный ряд сходится равномерно в  $X$ .

В этом случае числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  называют **мажорирующим** для ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

# Степенные ряды

## Определение степенного ряда

Функциональный ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$  называют **степенным рядом** с центром в точке  $x_0$ .

Последовательность  $a_n$  называют **последовательностью коэффициентов** степенного ряда.

Простой заменой переменных  $\tilde{x} = x - x_0$  можно перейти к рассмотрению степенного

ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tilde{x}^n$  с центром в точке  $\tilde{x} = 0$ .

## Определение ряда Тейлора

**Рядом Тейлора** функции  $f(x)$ , дифференцируемой любое число раз в окрестности точки  $x_0$ , называют степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

## Пример

Бесконечная геометрическая прогрессия сходится при  $|x| < 1$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Сходимость не является равномерной на  $(-1, 1)$ . Действительно

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{k=1}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Равномерная сходимость на  $(-1, 1)$  эквивалентна (по утверждению):

$$\sup_{x \in (-1, 1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty)$$

но  $\sup$  равен  $+\infty$  для каждого  $n$ .

С другой стороны, равномерная сходимость имеет место для любого отрезка  $[-r, r] \subset (-1, 1)$ , поскольку:

$$\sup_{x \in [-r, r]} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{|r|^{n+1}}{1-r} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty).$$