Выборный Евгений Викторович
email: evybornyi@hse.ru

Математический анализ
Тема 5: Ряды

Москва 2016

Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots ,$$

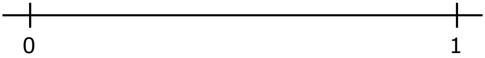
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

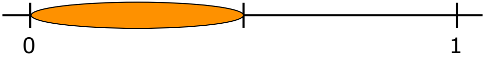
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

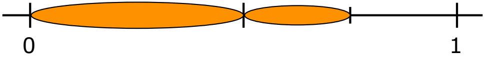
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

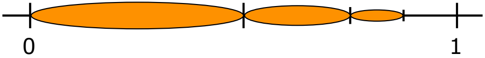
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

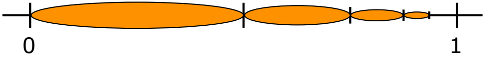
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

Определение

Пусть задана последовательность a_n. Тогда символ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

представляющий упорядоченную сумму бесконечного числа слагаемых, называют **числовым рядом**. Величины S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n,$$

называют **частичными суммами** числового ряда. Если последовательность числе S_n имеет предел при $n \to +\infty$, то говорят, что соответствующий числовой ряд **сходится**, а число

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называют **суммой числового ряда**. В этом случае пишут:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Числовые ряды. Определение

В действительности, числовые ряды — это другой способ говорить о числовых последовательностях.

Каждому числовому ряду соответствует последовательность частичных сумм:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \quad \to \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} h_k.$$

Обратно, для произвольной последовательности a_n можно рассмотреть числовой ряд:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots ,$$

где

$$d_n = a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2, \qquad d_1 = a_1.$$

Частичные суммы этого ряда в точности совпадают с членами последовательности a_n:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Следовательно, если последовательность a_n сходится, то и ряд с членами d_k сходится, и соответствующие пределы совпадают.

Числовые ряды. Примеры

1. Числовой ряд
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$
расходится к $+\infty$, поскольку частичные суммы $S_n = n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.
2. Числовой ряд
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$
расходится, поскольку частичные суммы S_n не имеют предела.
3. Числовой ряд
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+k)k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$
сходится, поскольку частичные суммы имеют вид:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
4. Расходится числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln(n+1) - \ln(n) \Big) = +\infty.$$

Числовые ряды. Свойства

Остаток ряда

Числовой ряд

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$$

называют k-ым **остатком ряда** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Исходный ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Линейность

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, то сходится и ряд с общим членом $A\,a_n + B\,b_n$.
Справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (A\,a_n + B\,b_n) = A\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + B\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Теорема. Необходимое условие сходимости ряда

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Доказательство

Сходимость ряда означает, что

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Обратное утверждение не верно. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, поскольку

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\,\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad S_n \to +\infty.$$

Числовые ряды. Знакопостоянные ряды

Ряд называют знакопостоянным, если все $a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Предложение

Положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$, всегда имеет сумму. Сумма ряда будет конечной, если последовательность частичных сумм ряда ограничена, иначе сумма ряда будет равна $+\infty$.

Доказательство

Последовательность частичных сумм является монотонной:

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = A_n + a_{n+1} \geq A_n, \quad \forall n.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел последовательности A_n, представляющий сумму ряда.

Числовые ряды. Теорема сравнения

Теорема. Сравнение

Рассмотрим два положительных ряда $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Пусть справедливо неравенство

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Тогда из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда A следует расходимость ряда B.

Аналогичное утверждение справедливо при выполнении условия $a_n = O(b_n)$.

Теорема. Асимптотическое сравнение

Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n$, при $n \to +\infty$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение

Выпишите полное доказательство этих теорем.

Числовые ряды. Признак Коши

В качестве эталона для сравнения рядов выберем геометрическую прогрессию:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad 0 \le q < 1.$$

Теорема. Признак Коши

Пусть $a_n \ge 0$ и для достаточно больших n справедливо неравенство:

$$\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n} \le q < 1.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а если $\mathcal{C}_n \ge 1$, то ряд расходится.

Доказательство

Из предположения теоремы следует, что $a_n < q^n$ для достаточно больших n. Из теоремы о сравнение рядов и сходимости геометрической прогрессии с знаменателем $q < 1$ следует сходимость ряда с членами a_n.

Если $\mathcal{C}_n \ge 1$, то и $a_n \ge 1$. Следовательно, $a_n \not\to 0$ при $n \to +\infty$, то есть не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Поскольку нас интересует выполнение неравенства

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

только для достаточно больших n можно сформулировать предельный признак сравнения.

Теорема. Предельный признак Коши

Пусть существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ расходится. Если $q = 1$, то вопрос остается открытым.

Доказательство

Рассмотрим случай $q < 1$. Дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \quad |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Выбирая положительное $\varepsilon = \varepsilon_0 < 1 - q$, получаем, что

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon_0 < 1.$$

Остается применить признак сходимости Коши.

Пример

Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{e^{n^2}}.$$

Применим предельный признак Коши:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Упражнение

Аналогично рассмотрите ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$.

Числовые ряды. Признак Даламбера

Сложность применения признака Коши связана с необходимостью вычисления корня n-ой степени. Существует более простой признак сходимости Даламбера.

Теорема. Признак Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Если для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а если $\mathcal{D}_n \geq 1$, то ряд расходится.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, то ряд сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda > 1$.

Доказательство

Рассмотрим случай $q < 1$:

$$\mathcal{D}_n \leq q < 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq q\, a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \ldots \leq q^n a_1.$$

Следовательно, $a_n = O(q^n)$, и ряд с членами a_n сходится по теореме сравнения, где сравнение происходит с геометрической прогрессией.

Числовые ряды. Признак Даламбера

Признак Даламбера особенно удобно применять, если в формуле для общего члена присутствуют факториалы.

Пример

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$.

По признаку Даламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{1+n} \le \frac{1}{2} < 1 \quad (n \ge 1).$$

Следовательно, ряд сходится.

Нам известно, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Упражнение

Аналогично рассмотрите ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Числовые ряды. Интегральный признак

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Теорема. Интегральный признак сходимости ряда

Пусть
$$a_n = f(n),$$
где $f \in C[1, +\infty)$ положительна и монотонно убывает.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Из положительности f следует, что сходимость интеграла эквивалентна ограниченности $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, а сходимость ряда эквивалентна ограниченности последовательности частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

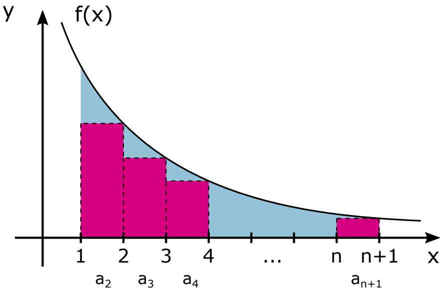
По теореме сравнения для интеграла:

$$a_k \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_{k+1} \quad \Rightarrow \quad S_n \leq F(n+1) \leq S_{n+1} - a_1$$

Из последнего неравенства следует эквивалентность ограниченности $F(x)$ и S_n.

Числовые ряды. Интегральный признак

Теорема об интегральном признаки сходимости имеет простую геометрическую интерпретацию.



Если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он представляет площадь под графиком $f(x)$ при $x \geq 1$. Сумма ряда $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ можно интерпретировать, как площадь прямоугольников, полностью лежащих под графиком f.

Следовательно, из ограниченности площади под графиком f следует и ограниченность суммарной площади прямоугольников.