Выборный Евгений Викторович
email: evybornyi@hse.ru

Математический анализ
Тема 5: Ряды

Москва 2016

Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

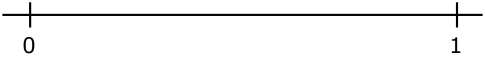
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

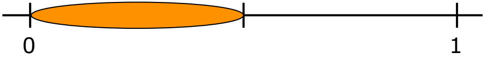
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

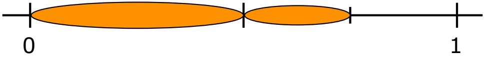
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \dots,$$

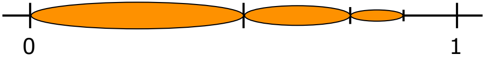
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

В математике и различных приложениях крайне часто возникает необходимость рассматривать суммы с бесконечным числом слагаемых. Приведем два примера.

Представление числа в десятичной системе счисления

В десятичной системе счисления любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

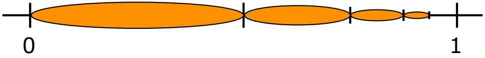
где d_k — цифра от 0 до 9. Эта запись означает, что

$$a = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$



Числовые ряды. Определение

Определение

Пусть задана последовательность a_n. Тогда символ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

представляющий упорядоченную сумму бесконечного числа слагаемых, называют **числовым рядом**. Величины S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n,$$

называют **частичными суммами** числового ряда. Если последовательность числе S_n имеет предел при $n \to +\infty$, то говорят, что соответствующий числовой ряд **сходится**, а число

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называют **суммой числового ряда**. В этом случае пишут:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Числовые ряды. Определение

В действительности, числовые ряды — это другой способ говорить о числовых последовательностях.

Каждому числовому ряду соответствует последовательность частичных сумм:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k \quad \to \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} h_k.$$

Обратно, для произвольной последовательности a_n можно рассмотреть числовой ряд:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots ,$$

где

$$d_n = a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2, \qquad d_1 = a_1.$$

Частичные суммы этого ряда в точности совпадают с членами последовательности a_n:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Следовательно, если последовательность a_n сходится, то и ряд с членами d_k сходится, и соответствующие пределы совпадают.

Числовые ряды. Примеры

1. Числовой ряд
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$
расходится к $+\infty$, поскольку частичные суммы $S_n = n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.
2. Числовой ряд
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$
расходится, поскольку частичные суммы S_n не имеют предела.
3. Числовой ряд
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+k)k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$
сходится, поскольку частичные суммы имеют вид:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
4. Расходится числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) = +\infty.$$

Остаток ряда

Числовой ряд

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$$

называют k-ым **остатком ряда** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Исходный ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Линейность

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, то сходится и ряд с общим членом $A\,a_n + B\,b_n$.
Справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (A\,a_n + B\,b_n) = A\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + B\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Теорема. Необходимое условие сходимости ряда

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Доказательство

Сходимость ряда означает, что

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Обратное утверждение не верно. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, поскольку

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\,\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad S_n \to +\infty.$$

Ряд называют знакопостоянным, если все $a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Предложение

Положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$, всегда имеет сумму. Сумма ряда будет конечной, если последовательность частичных сумм ряда ограничена, иначе сумма ряда будет равна $+\infty$.

Доказательство

Последовательность частичных сумм является монотонной:

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = A_n + a_{n+1} \geq A_n, \quad \forall n.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел последовательности A_n, представляющий сумму ряда.

Числовые ряды. Теорема сравнения

Теорема. Сравнение

Рассмотрим два положительных ряда $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Пусть справедливо неравенство

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Тогда из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда A следует расходимость ряда B.

Аналогичное утверждение справедливо при выполнении условия $a_n = O(b_n)$.

Теорема. Асимптотическое сравнение

Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n$, при $n \to +\infty$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение

Выпишите полное доказательство этих теорем.

Числовые ряды. Признак Коши

В качестве эталона для сравнения рядов выберем геометрическую прогрессию:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad 0 \leq q < 1.$$

Теорема. Признак Коши

Пусть $a_n \geq 0$ и для достаточно больших n справедливо неравенство:

$$\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а если $\mathcal{C}_n \geq 1$, то ряд расходится.

Доказательство

Из предположения теоремы следует, что $a_n < q^n$ для достаточно больших n. Из теоремы о сравнение рядов и сходимости геометрической прогрессии с знаменателем $q < 1$ следует сходимость ряда с членами a_n.

Если $\mathcal{C}_n \geq 1$, то и $a_n \geq 1$. Следовательно, $a_n \not\to 0$ при $n \to +\infty$, то есть не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Числовые ряды. Признак Коши

Поскольку нас интересует выполнение неравенства

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

только для достаточно больших n можно сформулировать предельный признак сравнения.

Теорема. Предельный признак Коши

Пусть существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ расходится. Если $q = 1$, то вопрос остается открытым.

Доказательство

Рассмотрим случай $q < 1$. Дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \quad |\sqrt[n]{a_n} - q| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Выбирая положительное $\varepsilon = \varepsilon_0 < 1 - q$, получаем, что

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q + \varepsilon_0 < 1 \quad \forall n \geq N.$$

Остается применить признак сходимости Коши.

Пример

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{e^{n^2}}.$$

Применим предельный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Упражнение

Аналогично рассмотрите ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$.

Числовые ряды. Признак Даламбера

Сложность применения признака Коши связана с необходимостью вычисления корня n-ой степени. Существует более простой признак сходимости Даламбера.

Теорема. Признак Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Если для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а если $\mathcal{D}_n \geq 1$, то ряд расходится.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, то ряд сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda > 1$.

Доказательство

Рассмотрим случай $q < 1$:

$$\mathcal{D}_n \leq q < 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq q\, a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \ldots \leq q^n a_1.$$

Следовательно, $a_n = O(q^n)$, и ряд с членами a_n сходится по теореме сравнения, где сравнение происходит с геометрической прогрессией.

Признак Даламбера особенно удобно применять, если в формуле для общего члена присутствуют факториалы.

Пример

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

По признаку Даламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{1+n} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad (n \geq 1).$$

Следовательно, ряд сходится.

Нам известно, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Упражнение

Аналогично рассмотрите ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Числовые ряды. Интегральный признак

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Теорема. Интегральный признак сходимости ряда

Пусть

$$a_n = f(n),$$

где $f \in C[1, +\infty)$ положительна и монотонно убывает.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

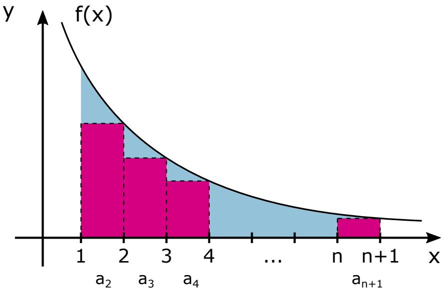
Из положительности f следует, что сходимость интеграла эквивалентна ограниченности $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, а сходимость ряда эквивалентна ограниченности последовательности частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

По теореме сравнения для интеграла:

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k \quad \Rightarrow \quad S_{n+1} - a_1 \leq F(n+1) \leq S_n$$

Из последнего неравенства следует эквивалентность ограниченности $F(x)$ и S_n.

Теорема об интегральном признаки сходимости имеет простую геометрическую интерпретацию.



Если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он представляет площадь под графиком $f(x)$ при $x \geq 1$. Сумма ряда $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ можно интерпретировать, как площадь прямоугольников, полностью лежащих под графиком f.
Следовательно, из ограниченности площади под графиком f следует и ограниченность суммарной площади прямоугольников.

Ряд Дирихле

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Доказательство

При $\alpha \le 0$ ряд, очевидно, расходится. Пусть $\alpha > 0$. Поскольку $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ положительна, непрерывна и монотонно убывает, то применим интегральный признак сходимости. Таким образом, интеграл и ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходятся или расходятся одновременно. Мы знаем, что этот интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$.

Замечание

Величину суммы ряда $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ называют функцией Римана. Она имеет ключевое значение в теории чисел.

Пример

Рассмотри ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+5}}$. Заметим, что

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+5}} \sim \frac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \frac{O(n^{1/4})}{n^{3/2}} = O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ сходится (ряд Дирихле), то сходится и исходный ряд (теорема об асимптотическом сравнении рядов).

Упражнения

Исследуйте сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}.$$

Попробуйте применить к ним признаки Даламбера, Коши и интегральный признак сходимости.

Определение

Числовой ряд называют **знакопеременным**, если среди членов ряда имеется бесконечно много как положительных так и отрицательных членов.

Действительно, иначе отбросив фиксированное число членов ряда мы бы получили знакопостоянный ряд.

Определение

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **абсолютно сходится**. Если ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся, то говорят, что ряд **сходится условно**.

Теорема

Из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ — сходится.}$$

Определение

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, где $a_n \geq 0$, называют **рядом Лейбница**.

Теорема. Признак Лейбница

Пусть $a_n \geq 0$ монотонно стремятся к нулю:

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty), \qquad a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

Если ряд Лейбница сходится, то остаток ряда не превосходит первого отброшенного слагаемого:

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \leq a_N \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Доказательство признака Лейбница

Рассмотрим последовательность частичных сумм с нечетным числом слагаемых:

$$S_{2n+1} = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq S_{2n-1}.$$

Таким образом, последовательность S_{2n+1} монотонно возрастает, но

$$S_{2n+1} = -(a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1} \leq 0.$$

По теореме Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности получаем, что

$$\exists \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (S_{2n-1} + a_{2n}) = S + 0 = S \quad \Rightarrow \quad S_n \to S.$$

Мы доказали сходимость ряда. Докажем оценку для остаточного члена.
Последовательность S_{2n} является монотонно убывающей. Следовательно,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n} \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| = |S - S_{N-1}| \leq |S_N - S_{N-1}| = a_N.$$

Пример

Рассмотрим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Этот ряд не является абсолютно сходящимся, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Исследуем ряд на условную сходимость. Последовательность $1/n$, очевидно, монотонно стремится к нулю. Применяя признак Лейбница, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно.

Числовые ряды. Перестановка членов ряда

Определение

Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, перестановкой слагаемых, если $b_n = a_{s(n)}$, где $s(n)$ — биекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Теоремы о перестановке слагаемых

Если ряд сходится абсолютно, то к той же сумме абсолютно сходится и ряд с переставленными слагаемыми.

Если ряд является лишь условно сходящимся, то для любого числа S существует такая перестановка слагаемых, что ряд с переставленными слагаемыми будет сходится к сумме S.

Для заданного знакопеременного ряда рассмотрим суммы его положительных и отрицательных слагаемых:

$$A_+ = \sum_{n:\ a_n>0} a_n, \qquad A_- = \sum_{n:\ a_n<0} |a_n|.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся положительные ряды A_+ и A_-. В этом случае справедливо равенство для сумм: $A = A_+ - A_-$.

Числовые ряды. Перестановка членов ряда

Определение

Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, перестановкой слагаемых, если $b_n = a_{s(n)}$, где $s(n)$ — биекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Теоремы о перестановке слагаемых

Если ряд сходится абсолютно, то к той же сумме абсолютно сходится и ряд с переставленными слагаемыми.

Если ряд является лишь условно сходящимся, то для любого числа S существует такая перестановка слагаемых, что ряд с переставленными слагаемыми будет сходится к сумме S.

Для заданного знакопеременного ряда рассмотрим суммы его положительных и отрицательных слагаемых:

$$A_+ = \sum_{n:\ a_n>0} a_n, \qquad A_- = \sum_{n:\ a_n<0} |a_n|.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся положительные ряды A_+ и A_-. В этом случае справедливо равенство для сумм: $A = A_+ - A_-$.

Числовые ряды. Перестановка членов ряда

Определение

Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, перестановкой слагаемых, если $b_n = a_{s(n)}$, где $s(n)$ — биекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Теоремы о перестановке слагаемых

Если ряд сходится абсолютно, то к той же сумме абсолютно сходится и ряд с переставленными слагаемыми.

Если ряд является лишь условно сходящимся, то для любого числа S существует такая перестановка слагаемых, что ряд с переставленными слагаемыми будет сходится к сумме S.

Для заданного знакопеременного ряда рассмотрим суммы его положительных и отрицательных слагаемых:

$$A_+ = \sum_{n:\ a_n>0} a_n, \qquad A_- = \sum_{n:\ a_n<0} |a_n|.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся положительные ряды A_+ и A_-. В этом случае справедливо равенство для сумм: $A = A_+ - A_-$.

Определения

Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,$$

где все функции $f_n(x)$ определены на общем множестве $x \in X \subset \mathbb{R}$, называют **функциональной последовательностью**.

Можно считать, что $\{f_n(x)\}$ — это семейство числовых последовательностей, зависящее от $x \in X$ как от параметра.

Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится в точке** $x = x_0$, если сходится соответствующая числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится для всех $x \in Y \subset X$. Тогда, очевидно, предел функциональной последовательности

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

зависит от x. В этом случае говорят, что последовательность функций $\{f_n\}$ **поточечно сходится** к функции f при $x \in Y$, функцию f называют **предельной функцией**.

Функциональные последовательности. Пример

Пример

Рассмотрим последовательность функций $\{x^n\}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 < x < 1; \\ 1, & \text{при } x = 1; \\ \nexists & \text{при } x \notin (-1, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, функциональная последовательность сходится на множестве $(-1, 1]$.

Замечание

Из рассмотренного примера видно, что функциональная последовательность непрерывных функций не обязательно сходится к непрерывной функции.

Так последовательность непрерывных функций x^n сходятся на множестве $x \in (-1, 1]$. Но предельная функция не является непрерывной в точке $x = 1$.

Упражнение

Для последовательности $(1 - x^2)^n$ определите множество сходимости и предельную функцию.

Определение. Равномерная сходимость

Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится равномерно** к функции $f(x)$ при $x \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N, \; \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Если записать определение поточечной сходимости на X, то получим

$$\forall x \in X, \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon, x): \quad \forall n \geq N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, равномерная сходимость является более сильным условием, так как требуется не только существование номера N, но и его независимость от x.

Утверждение

Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ при $x \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Доказательство

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Равномерная сходимость

Утверждение

Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство

То, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость — очевидно. Покажем на примере, что обратное не верно.

Пример

Рассмотрим функциональную последовательность x^n при $x \in (0, 1)$, которая сходится поточечно к нулю. Пусть $x_n = 1 - 1/n$. Тогда $x_n \in (0, 1)$ и $f_n(x_n) \to 1/e$ при $n \to +\infty$, следовательно, равномерной сходимости нет.

Действительно, из равномерной сходимости следует, что $f_n(x)$ должна стремится к нулю при $n \to +\infty$ вне зависимости от выбора x, но $f_n(x_n) \to 1/e \neq 0$.

Утверждение

Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство

То, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость — очевидно. Покажем на примере, что обратное не верно.

Пример

Рассмотрим функциональною последовательность x^n при $x \in (0, 1)$, которая сходится поточечно к нулю. Пусть $x_n = 1 - 1/n$. Тогда $x_n \in (0, 1)$ и $f_n(x_n) \to 1/e$ при $n \to +\infty$, следовательно, равномерной сходимости нет.

Действительно, из равномерной сходимости следует, что $f_n(x)$ должна стремится к нулю при $n \to +\infty$ вне зависимости от выбора x, но $f_n(x_n) \to 1/e \neq 0$.

Функциональные ряды

Аналогично с функциональными последовательностями рассматривают и функциональные ряды.

Определение. Сходимость функционального ряда

Пусть задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$. Тогда символ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ называют **функциональным рядом**. Если для любого $x \in X$ сходится последовательность частичных сумм ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to S(x), \qquad (n \to +\infty),$$

то говорят, что ряд **сходится поточечно** при $x \in X$ и имеет сумму $S(x)$. Пишут:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

Определение. Равномерная сходимость

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ **сходится равномерно** по $x \in X$ к сумме $S(x)$, если равномерно к $S(x)$ сходится последовательность частичных сумм ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N, \ \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

Функциональные ряды

Аналогично с функциональными последовательностями рассматривают и функциональные ряды.

Определение. Сходимость функционального ряда

Пусть задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$. Тогда символ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ называют **функциональным рядом**. Если для любого $x \in X$ сходится последовательность частичных сумм ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to S(x), \qquad (n \to +\infty),$$

то говорят, что ряд **сходится поточечно** при $x \in X$ и имеет сумму $S(x)$. Пишут:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

Определение. Равномерная сходимость

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ **сходится равномерно** по $x \in X$ к сумме $S(x)$, если равномерно к $S(x)$ сходится последовательность частичных сумм ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N, \ \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема (Непрерывность)

Пусть последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема (Интегрирование)

Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ при $x \in [a, b]$. Тогда, если функции $f_n(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема (Дифференцирование)

Пусть функциональная последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ при $x \in [a, b]$ и последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

Аналогичные утверждения справедливы и для функциональных рядов.

Признак равномерной сходимости ряда

Теорема Вейерштрасса

Пусть задан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ при $x \in X$ и сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Если справедливы неравенства:

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X,$$

то функциональный ряд сходится равномерно в X.

В этом случае числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ называют **мажорирующим** для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Определение степенного ряда

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ называют **степенным рядом** с центром в точке x_0.

Последовательность a_n называют **последовательностью коэффициентов** степенного ряда.

Простой заменой переменных $\tilde{x} = x - x_0$ можно перейти к рассмотрению степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \tilde{x}^n$ с центром в точке $\tilde{x} = 0$.

Определение ряда Тейлора

Рядом Тейлора функции $f(x)$, дифференцируемой любое число раз в окрестности точки x_0, называют степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

Пример

Бесконечная геометрическая прогрессия сходится при $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Сходимость не является равномерной на $(-1, 1)$. Действительно

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{n} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Равномерная сходимость на $(-1, 1)$ эквивалентна (по утверждению):

$$\sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \to 0, \qquad (n \to +\infty)$$

но sup равен $+\infty$ для каждого n.

С другой стороны, равномерная сходимость имеет место для любого отрезка $[-r, r] \subset (-1, 1)$, поскольку:

$$\sup_{x \in [-r,r]} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{r^n}{1-r} \to 0, \qquad (n \to +\infty).$$

Теорема о множестве сходимости степенного ряда

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится для $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится для любого $|x_1| < |x_0|$. Ряд равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$, где $r = |x_1|$.

Доказательство

По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно,

$$a_n x_0^n \to 0, \quad n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists M: \ |a_n x_0^n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $|x_1| < |x_0|$. Тогда

$$|a_n x_1^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^n \leq M\ q^n,$$

где $q = \left| \frac{x_1}{x_0} \right| < 1$. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n x_1^n|$ сходится. Равномерная сходимость на $[-r, r]$ следует из признака Вейерштрасса.

Радиус сходимости степенного ряда

Определение

Рассмотрим множество X сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Радиусом сходимости степенного ряда называют величину

$$R = \sup_{x \in X} |x|.$$

Множество X всегда не пусто, поскольку $0 \in X$.

Если $R = 0$, то есть степенной ряд сходится только для $x = 0$, то его называют **всюду расходящимся**.

Если множество X не является ограниченным и, следовательно, $R = +\infty$, то степенной ряд (по теореме) сходится для любых $x \in \mathbb{R}$. Такой ряд называют **всюду сходящимся**.

Следствия

Из доказанной теоремы следует, что интервал $(-R, R)$ всегда лежит в множестве сходимости степенного ряда X. На интервале $(-R, R)$ степенной ряд сходится абсолютно и ряд расходится вне этого интервала. Ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r]$, который полностью лежит в интервале сходимости $(-R, R)$.

Радиус сходимости степенного ряда

Пример $R = 0$

Рассмотрим $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n! x^n$. Определим множество сходимости степенного ряда, применив признак сходимости Даламбера:

$$\mathcal{D}_n = \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = (n+1)|x| \to +\infty, \qquad n \to +\infty, \ x \neq 0.$$

Таким образом, данный ряд расходится для любых $x \neq 0$, он является всюду расходящимся.

Пример $R = +\infty$

Рассмотрим $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Определим множество сходимости степенного ряда, применив признак сходимости Даламбера:

$$\mathcal{D}_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Таким образом, данный ряд сходится для любых $x \in \mathbb{R}$, он является всюду сходящимся.

Радиус сходимости степенного ряда

Возникает вопрос о том, как вычислить радиус сходимости степенного ряда в общем случае $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Теорема Коши-Адамара

Для радиуса сходимости степенного ряда справедлива формула

$$R^{-1} = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

если верхний предел равен $+\infty$, то $R=0$ и наоборот если верхний предел равен 0 то $R=+\infty$.

Доказательство

Доказательство проведем в простейшем случае сходимости $\sqrt[n]{|a_n|} \to q \neq 0$.

Применим признак Коши сходимости ряда:

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\sqrt[n]{|a_n|} \to |x-x_0|\, q, \qquad n\to+\infty.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-x_0| < q^{-1}$ и расходится при $|x-x_0| > q^{-1}$ по признаку Коши. Таким образом, $R = q^{-1}$, что и требовалось доказать.

Радиус сходимости степенного ряда

Возникает вопрос о том, как вычислить радиус сходимости степенного ряда в общем случае $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Теорема Коши-Адамара

Для радиуса сходимости степенного ряда справедлива формула

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

если верхний предел равен $+\infty$, то $R=0$ и наоборот если верхний предел равен 0 то $R=+\infty$.

Доказательство

Доказательство проведем в простейшем случае сходимости $\sqrt[n]{|a_n|} \to q \neq 0$.

Применим признак Коши сходимости ряда:

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} \to |x-x_0|\, q, \qquad n\to+\infty.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-x_0| < q^{-1}$ и расходится при $|x-x_0| > q^{-1}$ по признаку Коши. Таким образом, $R = q^{-1}$, что и требовалось доказать.

Дифференцирование и интегрирование степенного ряда

Теорема о дифференцировании и интегрировании степенного ряда

Пусть степенной ряд имеет радиус сходимости $R > 0$ и $f(x)$ — его сумма:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad |x| < R.$$

Тогда

1. При почленном дифференцировании или интегрировании степенного ряда получаются ряды с тем же радиусом сходимости R.
2. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема любое число раз при $|x| < R$. Ряд можно дифференцировать почленно:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n\, x^{n-1}, \qquad |x| < R.$$

3. Ряд можно интегрировать почленно:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad |x| < R.$$

Доказательство

Докажем, что при почленном дифференцировании или интегрировании степенного ряда получаются ряды с тем же радиусом сходимости R.

При почленном дифференцирование получаем ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n\, x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n\, x^n.$$

Вычислим радиус сходимости последнего ряда по формуле Коши-Адамара:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot R^{-1} = R^{-1},$$

поскольку

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left\{\ln\left(n^{1/n}\right)\right\} = \exp\left\{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n}\right\} = e^0 = 1.$$

Таким образом, при почленном дифференцировании сохраняется радиус сходимости ряда. Аналогично и при почленном интегрировании.

Доказательство (продолжение)

Из равномерной сходимости степенных рядов на любом отрезке, который лежит в интервале сходимости $(-R, R)$, следует, что сумма почленно продифференцированного или проинтегрированного ряда совпадает с производной и интегралом от суммы исходного ряда:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n\, x^{n-1}, \qquad |x| < R,$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \; dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad |x| < R.$$

Мы использовали теоремы об интегрировании и дифференцировании функциональных рядов при равномерной сходимости. В качестве подходящего отрезка, на котором имеет место равномерная сходимость, можно взять $[-r, r]$, где $|x| < r < R$.

Ряды Тейлора

Утверждение

Если функция $f(x)$ представлена в виде степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad |x - x_0| < R,$$

с ненулевым радиусом сходимости $R \neq 0$, то этот ряд — это ряд Тейлора функции $f(x)$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, любой не всюду расходящийся ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Доказательство

Почленно дифференцируя k раз ряд в точке $x = x_0$ получаем:

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big|_{x=x_0} (x - x_0)^n = \begin{cases} k!, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k}\Big|_{x=x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = k!\, a_k.$$

Ряды Тейлора

Мы установили, что существует единственное разложение функции в степенной ряд, и это ряд Тейлора заданной функции. Обратное не верно, то есть один сходящийся степенной ряд может быть рядом Тейлора не только для своей суммы.

Пример

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема любое число раз в точке $x = 0$. Действительно,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = 0, \quad \ldots$$

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0,$$

где P — некоторый многочлен.

Таким образом, ряд Тейлора функции $f(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 + \cdots = 0$$

Радиус сходимости этого ряда $R = +\infty$, но он не сходится к $f(x)$, его сумма равно 0.

Ряды Тейлора

Для исследования вопроса о том, сходится ли ряд Тейлора к функции $f(x)$, которой он соответствует, полезно вспомнить формулы для остаточного члена в формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt,$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Если $r_n(x) \to 0$ при $n \to +\infty$ для фиксированного x, то значение $f(x)$ совпадает с значением суммы ряда Тейлора в этой точке.

Нашей следующей задачей будет исследование рядов Тейлора базовых функций.

Ряды Тейлора: экспонента

Рассмотрим ряд Тейлора функции $f(x) = e^x$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Радиус сходимости этого ряда $R = +\infty$, в чем легко убедится по признаку Даламбера:

$$\mathcal{D}_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = e^{\xi} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad n \to +\infty,$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ряды Тейлора: синус и косинус

Рассмотрим ряд Тейлора функции $f(x) = \sin(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad n \to +\infty,$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, радиус сходимости ряда $R = +\infty$ и

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Поскольку $\cos(x) = (\sin(x))'$, то

$$\cos(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ряд Тейлора: логарифм

Рассмотрим ряд Тейлора функции $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Поскольку $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$, и при $|t| < 1$ сходится степенной ряд:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots,$$

то, почленно интегрируя, получаем:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad |x| < 1.$$

Несложно видеть, что ряд расходится при $x = -1$, и сходится при $x = 1$ по признаку Лейбница. Покажем, что при $x = 1$ его сумма равна $\ln(2)$:

$$|r_n(1)| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^1 f^{(n+1)}(t)(1-t)^n dt \right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \leq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Ряд Тейлора: арктангенс

Рассмотрим ряд Тейлора функции $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Поскольку $\operatorname{arctg}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, и при $|t| < 1$ сходится степенной ряд:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots,$$

то, почленно интегрируя, получаем:

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1.$$

Несложно видеть, что ряд сходится при $x = \pm 1$. Докажите, что

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Биномиальный ряд Тейлора

Рассмотрим ряд Тейлора функции $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

Исследуем сходимость ряда, применяя признак Даламбера:

$$\mathcal{D}_n = \frac{|\alpha - n|}{n+1} |x| \to |x| \qquad n \to +\infty.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$, то есть $R = 1$.
Оценим остаточный член формулы Тейлора при $|x| < 1$:

$$|r_n(x)| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right| = \frac{|\alpha \cdots (\alpha - n)|}{n!} \left| \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1} |x-t|^n dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\alpha \cdots (\alpha - n)|}{n!} |x|^n \left| \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt \right| \leq \frac{|\alpha \cdots (\alpha - n)|}{n!} |x|^n \frac{(1+x)^\alpha}{\alpha} \to 0,$$

где мы учли неравенство $\dfrac{|x-t|}{1+t} \leq |x|$.
Таким образом, биномиальный ряд сходится к $(1+x)^\alpha$ при $|x| < 1$.