

Выборный Евгений Викторович  
email: [evybornyi@hse.ru](mailto:evybornyi@hse.ru)

Математический анализ  
Тема 6: Функции многих переменных

Москва 2016

### Определение. Вещественное $n$ -мерное пространство $\mathbb{R}^n$

Множество упорядоченных наборов из  $n$  действительных чисел называют **вещественным  $n$ -мерным пространством  $\mathbb{R}^n$** :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Эти наборы чисел из  $\mathbb{R}^n$  называют точками или векторами. В  $\mathbb{R}^n$  определена сумма векторов и операция умножения вектора на число:

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Определено понятие расстояния между точкам:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Выполнено неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

## Шар в $\mathbb{R}^n$

Ключевым понятием для определения сходимости в одномерном случае была  $\epsilon$ -окрестность точки  $a$ . Определим аналогичные понятия в многомерном пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

### Определение. Шар в $\mathbb{R}^n$

**Открытым шаром** в  $\mathbb{R}^n$  с центром в точке  $a$  и радиусом  $r$  называют множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих условию

$$\|x - a\| < r \iff (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2.$$

Иногда это множество называют  $r$ -окрестностью точки  $a$ , сохраняя обозначение  $O_r(a)$ . Тогда **проколотой  $r$ -окрестностью** точки  $a$ , называют множество точек:

$$\dot{O}_r(a) = O_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - a\| < r\}.$$

### Определение. Ограниченное множество

Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется **ограниченным**, если  $A$  полностью лежит в некотором шаре. В этом случае существует  $R$  такое, что

$$\|x\| < R \quad \forall x \in A.$$

# Предел последовательности точек

## Определение. Предел последовательности точек

Говорят, что последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$ ,  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  сходится к точке  $y \in \mathbb{R}^n$ , пишут  $x^{(k)} \rightarrow y$ , если к нулю стремится расстояние между  $y$  и  $x^{(k)}$  при  $k \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(y, x^{(k)}) = 0.$$

Эквивалентные записи имеют вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : x^{(k)} \in O_\varepsilon(y) \quad \forall k \geq N.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|x^{(k)} - y\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

Таким образом, последовательность точек стремится к  $y$  тогда и только тогда, когда в любом открытом шаре с центром в точке  $y$  лежит бесконечно много точек последовательности, а вне его — лишь конечное число.

## Упражнение

Докажите, что множество точек сходящейся последовательности является ограниченным.

## Предел последовательности точек

### Предложение

Сходимость последовательности точек  $\{x^{(k)}\}$  к точке  $y$  эквивалентна сходимости координат точек  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  к координатам точки  $y = (y_1, \dots, y_n)$ :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = y \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} x_1^{(k)} = y_1, \dots, \lim_{k \rightarrow +\infty} x_n^{(k)} = y_n.$$

### Доказательство

Доказательство теоремы непосредственно следует из очевидных неравенств:

$$|x_j^{(k)} - y_j| \leq \sqrt{(x_1^{(k)} - y_1)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - y_n)^2} \leq n \max_{1 \leq j \leq n} |x_j^{(k)} - y_j|.$$

### Замечание

Иногда в  $\mathbb{R}^n$  вводят другое понятие расстояния по формуле:

$$\tilde{d}(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

Следовательно, сходимость последовательности точек относительно расстояния  $d$  и  $\tilde{d}$  эквивалентна.

# Открытые множества

## Определение. Внутренние точки множества

Точка  $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ , которая принадлежит множеству  $A$  вместе с некоторым открытым шаром с центром в точке  $a$ , называется **внутренней точкой** множества  $A$ .

## Определение. Открытое множество

Множество точек  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется **открытым**, если для каждой точки  $a \in A$  этого множества существует открытый шар с центром в точке  $a$ , который полностью лежит в  $A$ :

$$A \text{ — открыто} \iff \forall a \in A \exists r > 0 : O_r(a) \subset A.$$

Пустое множество  $\emptyset$  полагается открытым по определению.

Таким образом, открытое множество — это множество, которое полностью состоит из внутренних точек.

## Пример

Открытый шар является открытым множеством. Действительно,  $\forall x \in A = O_R(a)$  положим  $r = R - \|x - a\| > 0$ . Тогда

$$y \in O_r(x) \Rightarrow \|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r + \|x - a\| = R \Rightarrow y \in A.$$

### Свойства открытых множеств

- ❶ Все пространство  $\mathbb{R}^n$  является открытым.
- ❷ Любое объединение открытых множеств является открытым.
- ❸ Конечное пересечение открытых множеств является открытым.

### Замечание

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открыто. Например,

$$A_k = (-1/k, +1/k) \subset \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Множества  $A_k$  открыты, но

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_k \ \forall k\} = \{0\},$$

а множество, состоящее только из одной точки, не является открытым.

## Замкнутые множества

### Определение. Предельные и изолированные точки множества

Точка  $a \in \mathbb{R}^n$  называется **предельной точкой** множества  $A$  или точкой сгущения, если в любой окрестности точки  $a$  существуют точки из множества  $A$ , отличные от  $a$ :

$$\forall r > 0 \quad O_r(a) \cap A \neq \{a\}.$$

Точка  $a \in A$  называется **изолированной точкой** множества  $A$ , если существует окрестность точки  $a$ , в которой нет других точек из множества  $A$ .

Предельные точки могут как принадлежать, так и не принадлежать рассматриваемому множеству.

### Определение. Замкнутое множество

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. Пустое множество считают замкнутым по определению.

### Предложение. Замкнутость в терминах последовательностей

Множество замкнуто тогда и только тогда, когда предел любой сходящейся последовательности точек этого множества также принадлежит этому множеству.



# Свойства замкнутых множеств

## Свойства замкнутых множеств

- ❶ Множество является замкнутым тогда и только тогда, когда его дополнение является открытым:

$$A \text{ — замкнуто} \iff (\mathbb{R}^n \setminus A) \text{ — открыто.}$$

- ❷ Все пространство  $\mathbb{R}^n$  является замкнутым.
- ❸ Конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым.
- ❹ Любое пересечение замкнутых множеств является замкнутым.

## Определение. Компакт

Замкнутое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$  называют **компактом**.

Понятие компакта является естественным обобщением понятия отрезка в многомерном пространстве.

## Предложение. Компактность в терминах последовательностей

Множество является компактом тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке из заданного множества.

# Граница множества

## Определение. Граница множества

Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  называется **граничной точкой** для множества  $M \subset \mathbb{R}^n$ , если в любой окрестности точки  $x$  есть как точки из множества  $M$ , так и точки не принадлежащие  $M$ . Граничные точки могут принадлежать или не принадлежать множеству  $M$ .

Множество всех граничных точек для заданного множества  $M$  называют **границей**  $M$  и обозначают  $\partial M$ .

Несложно доказать, что замкнутое множество всегда содержит свою границу.

Объединение множества и его границы всегда является замкнутым. Это множество называют замыканием множества  $M$  и обозначают

$$\bar{M} = M \cup \partial M.$$

## Пример

Несложно найти границы следующих множеств:

$$\partial [a, b] = \{a, b\}, \quad \partial (a, b) = \{a, b\};$$

$$\partial O_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\},$$

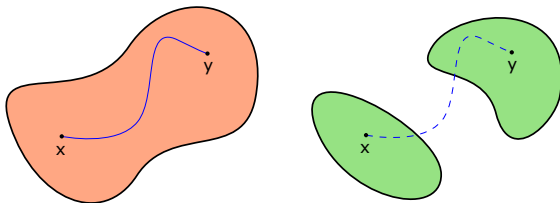
$$\partial \mathbb{R}^n = \emptyset.$$

## Определение. Связное множество

Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  является **связным** (линейно связным), если для любой пары точек  $x$  и  $y$  из  $M$  существует непрерывный путь (кривая), которая соединяет точки  $x$  и  $y$ , и при этом полностью лежит в  $M$ .

## Определение. Область

**Областью** в  $M \subset \mathbb{R}^n$  называют открытое связное множество.

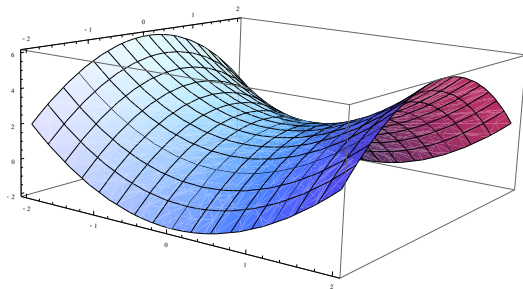


Множество, изображенное на рисунке слева, является связным, а множество, изображенное справа, не является связным (состоит из двух частей).

# Функция нескольких переменных

## Определение. Функция нескольких переменных

**Числовой функцией** нескольких переменных называют отображение  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $E \subset \mathbb{R}^n$  — некоторое множество, называемое **множеством определения** функции. Значение функции  $f$  в точке  $x \in E$  записывают, как  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , при этом  $x_j$  называют независимыми переменными, а  $z = f(x)$  — зависимой переменной, так как ее значение определяется выбором точки  $x$ .



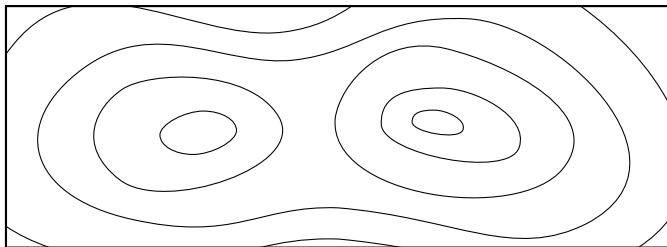
При рассмотрении функций двух переменных  $z = f(x, y)$  можно рассматривать график функции как поверхность  $\Gamma$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in E\}.$$

Другой способ визуально представить функцию двух независимых переменных — это рассмотреть семейство кривых на плоскости, вдоль которых функция является постоянной

$$f(x, y) = \text{const}$$

Данные кривые называют **линиями уровня** для функции  $f$ .



# Предел функции

## Определение. Предел функции

Пусть функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a \in \mathbb{R}^n$ . Говорят, что число  $f_0$  является **пределом**  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f_0| < \varepsilon, \forall x \in \dot{O}_\delta(a).$$

В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f_0$ .

В случае двух переменных иногда пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = f_0,$$

а соответствующий предел называют двойным.

Как и в одномерном случае, можно определить сходимость в терминах последовательностей (по Гейне).

Предел  $f(x)$  равен  $f_0$  при  $x \rightarrow a$  тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к  $a$  последовательности точек  $\{x^{(k)}\}$  из проколотой окрестности точки  $a$  последовательность значений функции в этих точках  $f(x^{(k)})$  сходится к  $f_0$ :

$$\forall \{x^{(k)}\} : x^{(k)} \rightarrow a, x^{(k)} \neq a \Rightarrow f(x^{(k)}) \rightarrow f_0.$$

По аналогии с одномерным случаем определяются и бесконечные пределы функций.

# Предел функции

Пусть функция  $f$  определена на множестве  $M$  и точка  $a$  является предельной точкой множества  $M$ . Тогда уместно говорить о стремлении  $x \rightarrow a$  при условии  $x \in M, x \neq a$ .

## Определение. Предел функции по множеству

Говорят, что число  $f_0$  является пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  по множеству  $M$  ( $x \rightarrow a, x \in M$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f_0| < \varepsilon, \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap M.$$

В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) = f_0$ .

Частным случаем предела по множеству служат односторонние пределы функции одной переменной.

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $A \in \mathbb{R}^n$ , **непрерывна в точке**  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве  $M$  и точка  $A \in M$  является предельной точкой этого множества. Если точка  $A$  не является внутренней для множества  $M$ , а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна по множеству**  $M$  в точке  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A, x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества  $M$ .



# Непрерывность функции

## Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $A \in \mathbb{R}^n$ , **непрерывна в точке**  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве  $M$  и точка  $A \in M$  является предельной точкой этого множества. Если точка  $A$  не является внутренней для множества  $M$ , а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна по множеству**  $M$  в точке  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A, x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества  $M$ .

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности в точке

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $A \in \mathbb{R}^n$ , **непрерывна в точке**  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A).$$

Предположим, что функция определена на множестве  $M$  и точка  $A \in M$  является предельной точкой этого множества. Если точка  $A$  не является внутренней для множества  $M$ , а принадлежит его границе, то рассматривают следующие определение непрерывности:

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна по множеству**  $M$  в точке  $x = A$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow A, x \in M} f(x) = f(A).$$

Функция считается по определению непрерывной в изолированных точках множества  $M$ .

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна** на множестве  $M$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $M$ .

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

## Свойства непрерывных функций

- ❶ Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
- ❷ Композиция непрерывных функций непрерывна.
- ❸ Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда она ограничена на множестве  $K$  и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{\min} \in K : f(x_{\min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{\max} \in K : f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна** на множестве  $M$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $M$ .

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

## Свойства непрерывных функций

- ❶ Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
- ❷ Композиция непрерывных функций непрерывна.
- ❸ Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда она ограничена на множестве  $K$  и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{\min} \in K : f(x_{\min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{\max} \in K : f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

# Непрерывность функции

## Определение непрерывности по множеству

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , **непрерывна** на множестве  $M$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $M$ .

Свойства непрерывных функций нескольких переменных во многом совпадают со свойствами непрерывных функций одной переменной.

## Свойства непрерывных функций

- ❶ Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций заведомо непрерывно, если делитель (знаменатель) не обращается в ноль.
- ❷ Композиция непрерывных функций непрерывна.
- ❸ Элементарные функции непрерывны на своем множестве определения.

## Теорема Вейерштрасса

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда она ограничена на множестве  $K$  и достигает на нем своей верхней и нижней грани:

$$\exists x_{\min} \in K : f(x_{\min}) = \inf_{x \in K} f(x),$$

$$\exists x_{\max} \in K : f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x).$$

## Частные производные. Определение

Рассмотрим функцию  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , заданную в окрестности точки  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда можно рассмотреть функцию одной переменной  $x_k$ , фиксируя остальные переменные:

$$\phi(x_k) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0).$$

Для определения скорости изменения значения функции  $f(x)$  при изменении только одной переменной  $x_k$  можно рассмотреть производную функции  $\phi(x_k)$ . Эту производную называют **частной производной** функции  $f$  по переменной  $x_k$  в точке  $x^0$  и обозначают:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|_{x=x^0} = \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_{x=x^0} f(x) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = f'_{x_k}(x^0) = f_{x_k}(x^0) = \partial_k f(x^0).$$

### Определение

Говорят, что функция  $f$ , определенная в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , имеет **частную производную** по переменной  $x_k$  в точке  $x^0$ , если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x^0)}{h} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|_{x=x^0}.$$

## Частные производные. Пример

### Пример

Вычислим частные производные функции трех переменных

$$u = x^2 + 2xy + \cos(xz).$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y - \sin(xz) z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -x \sin(xz).$$

В данном случае вычисления производились в произвольной точке  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Тогда при дифференцировании по одной из переменных все остальные переменные можно считать постоянными.

## Производная по направлению

Частная производная отражает изменение функции при изменении только одной переменной. Иногда удобно рассматривать производные и по другим направлениям не связанным с координатными осями.

### Определение

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , имеет в точке  $x_0$  **производную по направлению**  $l$ :

$$l = (l_1, \dots, l_n), \quad l_1^2 + \dots + l_n^2 = 1,$$

если существует предел:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hl) - f(x_0)}{h}.$$

Например, в двумерном случае направление  $l$  можно представить в виде:

$$l = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Тогда производная по направлению  $l$  функции  $f(x, y)$  примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \sin \alpha) - f(x, y)}{h}.$$



## Определение. Дифференцируемая функция

Говорят, что функция  $f$ , определенная в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , **дифференцируема** в точке  $x^0$ , если для любого достаточно маленького приращения  $\Delta x$  переменной  $x$ :

$$\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n),$$

приращение значения функции представимо в виде:

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k + o(\|\Delta x\|),$$

где  $A_k$  — постоянные.

Линейную часть приращения функции называют **дифференциалом** и обозначают:

$$df(x^0)(\Delta x) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k.$$

Дифференциал является линейной формой порядка  $n$ , как функция от  $\Delta x$ , а также неявно зависит от выбора точки  $x^0$ .

## Теорема. Необходимое условие дифференцируемости

Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  и

$$df(x^0)(\Delta x) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k.$$

Тогда у функции  $f$  существуют частные производные по всем переменным  $x_k$  в точке  $x^0$  и

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0).$$

Таким образом, для дифференцируемости функции  $f$  необходимо наличие у нее всех частных производных в заданной точке.

В одномерном случае существования производной было вполне достаточно для дифференцируемости функции, но в многомерном случае это уже не так.

## Упражнения

- Проведите доказательство теоремы о необходимом условии дифференцируемости, аналогично доказательству в одномерном случае.
- Докажите, что дифференцируемая функция непрерывна.
- Покажите, что функция

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0,$$

не является дифференцируемой, но имеет частные производные в точке  $(0, 0)$ .  
Покажите, что эта функция не является даже непрерывной.

# Дифференцируемость

Вычислим дифференциал функции

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_k.$$

Тогда

$$u(x + \Delta x) - u(x) = (x_k + \Delta x_k) - x_k = \Delta x_k.$$

Следовательно, дифференциал имеет вид

$$du(x)(\Delta x) = dx_k(\Delta x) = \Delta x_k.$$

Таким образом, общую формулу для дифференциала функции  $f$  можно переписать в виде:

$$df(x^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) dx_k.$$

## Упражнение

Проверьте, что

$$d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

## Дифференцируемость. Достаточное условие

### Теорема. Достаточное условие дифференцируемости

Пусть все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  функции  $f(x)$  определены в окрестности точки  $x_0$  и непрерывны в точке  $x^0$ . Тогда функция  $f$  является дифференцируемой в точке  $x_0$ .

### Доказательство

Проведем доказательство для  $n = 2$ . Пусть  $f = f(x, y)$ . Тогда, применяя формулу конечных приращений, получаем:

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0).\end{aligned}$$

Из непрерывности частных производных следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1).$$

Таким образом,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(|x - x_0|) + o(|y - y_0|).$$

## Частные производные. Градиент

### Определение. Градиент

Если функция  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , имеет частные производные по всем переменным ( $n$  штук) в фиксированной точке  $x^0$ , то числовой вектор

$$\operatorname{grad} f \Big|_{x=x^0} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

называют **градиентом** функции  $f$  в точке  $x^0$ . То есть градиент — это вектор, составленный из частных производных функции  $f$  в точке  $x^0$ .

### Определение. Производные высших порядков

Если частная производная функции  $f(x)$  по переменной  $x_k$  определена в некоторой окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , то можно определить **частные производные второго порядка**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}(x^0) = \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_{x=x^0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

как частные производные по переменной  $x_m$  от функции  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ . Аналогично определяются производные третьего порядка и далее.

## Частные производные. Пример

### Пример

Пусть

$$f = x^2 + 2xy.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 2y) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + 2y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2x) = 0.$$

Таким образом, для функции двух переменных существует четыре частных производных второго порядка. Они образуют матрицу  $2 \times 2$ . В общем случае размерности  $n$  мы получим квадратную матрицу размера  $n \times n$ .

### Предложение

Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x$ . Тогда для производной по направлению  $l$  справедлива формула:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x) = \sum_{k=1}^n l_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = \left( l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + l_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x) = \langle l, \text{grad } f \rangle.$$

То есть производная по направлению  $l$  совпадает с проекцией вектора  $\text{grad } f$  на вектор  $l$ .

### Доказательство

Функция  $f$  является дифференцируемой:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k + o(\|\Delta x\|).$$

Пусть  $\Delta x = hl$ . Тогда  $\|\Delta x\| = |h| \|l\| = |h|$ ,  $\Delta x_k = l_k h$ .

Следовательно,

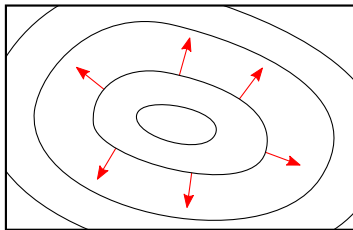
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hl) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} l_k h + o(h) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} l_k.$$



## Геометрический смысл градиента

Производная по направлению  $l$  характеризует скорость роста функции в этом направлении. Мы видим, что производная по направлению совпадает с проекцией направляющего вектора  $l$  на вектор градиента  $\text{grad } f$ . Следовательно, направление, в котором функция растет сильнее всего, совпадает с направлением градиента.

Направление градиента — это направление наискорейшего роста функции, а модуль градиента — это скорость роста функции в этом направлении.



Если рассмотреть линии уровни функции, то есть кривые на которых функция постоянна, то градиент будет ортогонален линиям уровня. **Докажите это** в двумерном случае.

# Правила дифференцирования

Поскольку частные производные — это производные от функции многих переменных, как от функции одной переменной при фиксации остальных переменных, то все правила дифференцирования сохраняют силу. Остановимся только на дифференцировании сложной функции.

## Правило дифференцирования сложной функции

Пусть функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $n$  функций  $g_j(t) = g_j(t_1, \dots, t_m)$  дифференцируемы в точке  $t^0 \in \mathbb{R}^m$ , и  $g_j(t^0) = x_j^0$ , где  $j = 1, \dots, n$ . Тогда сложная функция  $F(t) = f(g(t))$  дифференцируема в точке  $t^0$  и справедливы формулы

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \Big|_{t=t^0} f(g_1(t), \dots, g_n(t)) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_s}(g_1(t^0), \dots, g_n(t^0)) \frac{\partial g_s}{\partial t_k}(t^0).$$

# Правила дифференцирования

## Пример

Пусть на прямой задана потенциальная энергия  $U(x)$ . Тогда уравнение Ньютона имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dU}{dx}.$$

Определим функцию

$$E(x, v) = \frac{mv^2}{2} + U(x).$$

Пусть  $x(t)$ ,  $v(t) = \dot{x}(t)$  — решение уравнений Ньютона. Тогда

$$\frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{dv}{dt} = U'(x(t))v(t) + mv(t) \left( -\frac{1}{m} U'(x(t)) \right) = 0.$$

Таким образом, функция  $E(x, v)$  сохраняет свое значение — это закон сохранения энергии.

# Теорема Шварца

## Теорема о равенстве смешанных производных

Пусть частные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  функция  $f(x, y)$  определены в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и **непрерывны** в этой точке. Тогда они совпадают:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Теорема естественным образом обобщается на случай функции нескольких переменных и на производные выше второго порядка. Так значение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, если соответствующие частные производные непрерывны.

## Замечание

Условие непрерывности является достаточным, но отнюдь не является необходимым. Смешанные производные могут совпадать и в случае, когда непрерывность не имеет места.

## Упражнения

- Докажите теорему.
- Рассмотрите пример 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

# Теорема Шварца

## Теорема о равенстве смешанных производных

Пусть частные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  функция  $f(x, y)$  определены в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и **непрерывны** в этой точке. Тогда они совпадают:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Теорема естественным образом обобщается на случай функции нескольких переменных и на производные выше второго порядка. Так значение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, если соответствующие частные производные непрерывны.

## Замечание

Условие непрерывности является достаточным, но отнюдь не является необходимым. Смешанные производные могут совпадать и в случае, когда непрерывность не имеет место.

## Упражнения

- Докажите теорему.
- Рассмотрите пример 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

## Старшие дифференциалы. Формула Тейлора

Для дифференцируемой функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , справедлива формула линеаризации:

$$f(x + y) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), y \rangle + o(\|y\|).$$

Часто возникает необходимость приближения более высокой точности.

### Теорема. Формула Тейлора

Пусть все частные производные функция  $f$  до порядка  $m$  включительно определены в некоторой окрестности точки  $x \in \mathbb{R}^n$  и непрерывны в этой точке. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x + y) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} y_k + \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_r} y_k y_r + \dots \\ + \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \dots, k_m=1}^n \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m}} y_{k_1} \dots y_{k_m} + o(\|y\|^m). \end{aligned}$$

## Старшие дифференциалы. Формула Тейлора

### Пример

Для функции двух переменных получаем:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \dots,$$

где производные взяты в точке  $(x, y)$ .

**Второй дифференциал** функции  $f(x, y)$  определяется как:

$$d^2 f(x, y) = d(df(x, y)),$$

Следовательно,

$$d^2 f(x, y) = d \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы старших порядков.

Мы видим, что формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + df(x, y)(\Delta x, \Delta y) + \frac{1}{2} d^2 f(x, y)(\Delta x, \Delta y) + \dots$$

## Определение. Локальный экстремум

Точка  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  называется **точкой локального максимума** (или минимума) функции  $f(x)$ , определенной в некоторой окрестности этой точки, если существует окрестность  $U$  точки  $x^0$  такая, что для всех  $x \in U$ ,  $x \neq x^0$  справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) > f(x^0).$$

Точки локальных минимумов и максимумов называют **точками локального экстремума** функции.

Пусть функция рассматривается на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , для которого точка  $x^0 \in M$  не является внутренней, а например, является точкой границы. Тогда данное выше определение дополняют условием  $x \in M$ .

## Определение. Условный локальный экстремум

Точка  $x^0 \in M$  называется **точкой условного локального максимума** (или минимума) функции  $f(x)$  при условии  $x \in M$ , если существует окрестность  $U$  точки  $x^0$  такая, что для всех  $x \in U \cap M$ ,  $x \neq x^0$  справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) < f(x^0).$$

Иногда говорят о внутренних и граничных точках локального экстремума.



### Определение. Локальный экстремум

Точка  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  называется **точкой локального максимума** (или минимума) функции  $f(x)$ , определенной в некоторой окрестности этой точки, если существует окрестность  $U$  точки  $x^0$  такая, что для всех  $x \in U$ ,  $x \neq x^0$  справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) > f(x^0).$$

Точки локальных минимумов и максимумов называют **точками локального экстремума** функции.

Пусть функция рассматривается на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , для которого точка  $x^0 \in M$  не является внутренней, а например, является точкой границы. Тогда данное выше определение дополняют условием  $x \in M$ .

### Определение. Условный локальный экстремум

Точка  $x^0 \in M$  называется **точкой условного локального максимума** (или минимума) функции  $f(x)$  при условии  $x \in M$ , если существует окрестность  $U$  точки  $x^0$  такая, что для всех  $x \in U \cap M$ ,  $x \neq x^0$  справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x^0), \quad \text{или} \quad f(x) < f(x^0).$$

Иногда говорят о внутренних и граничных точках локального экстремума.

## Достаточное условие экстремума

В многомерном случае справедлив аналог теоремы Фурье:

### Теорема. Достаточные условия локального экстремума

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  и имеет в этой точке локальный экстремум. Тогда в этой точке градиент функции равен нулю:

$$\text{grad } f(x^0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, во всех точках локального экстремума равны нулю все частные производные. Такие точки принято называть **критическими**.

### Доказательство

Докажем от противного. Пусть в точке  $x^0$  имеет место локальный экстремум, а градиент не обращается в ноль. Можно считать, что  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \neq 0$ . Тогда функция  $g(t) = f(x_1^0 + t, x_2^0, \dots, x_n^0)$  одной переменной  $t$ , очевидно, дифференцируема и имеет экстремум в точке  $t = 0$ , но

$$g'(0) = \frac{d}{dt} f(x_1^0 + t, x_2^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \neq 0,$$

что противоречит теореме Ферма.

## Необходимое условие

Как и в одномерном случае, для исследования критической точки можно рассмотреть второй дифференциал функции.

### Теорема. Необходимые условия локального экстремума

Пусть функция  $f(x)$  дважды дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , точка  $x^0$  является критической  $\text{grad } f(x^0) = 0$  и второй дифференциал функции  $f$  в этой точке является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой. Тогда эта точка является минимумом (максимумом).

### Двумерный случай

Для функции двух переменных условие максимума примет вид:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 < 0,$$

для произвольных приращений  $dx$  и  $dy$ , кроме  $dx = dy = 0$ .

Вопрос о знаке квадратичной формы детально изучается в линейной алгебре.

## Достаточное условие экстремума

### Пример

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 + x + 2y^2 + xy$ . Задача стоит в поиске локальных и глобальных точек минимума и максимума.

Функция, очевидно, является дифференцируемой. Критические точки определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 1 + y = 0; \\ 4y + x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4/7; \\ y = 1/7. \end{cases}$$

Вычислим  $d^2f$  в этой точке:

$$d^2f = 2dx^2 + 2dxdy + 4dy^2 = dx^2 + (dx + dy)^2 + 3dy^2 > 0,$$

при  $dx$  и  $dy$  неравных нулю одновременно. Следовательно, рассматриваемая точка является точкой минимума.

# Критерий Сильвестра

В алгебре доказывается теорема, позволяющая легко проверять знак второго дифференциала.

## Теорема. Критерий Сильвестра

Пусть  $F$  — квадратичная форма порядка  $n$ :

$$F(y) = \langle Ay, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j,$$

где  $A$  — симметричная матрица  $a_{ij} = a_{ji}$ . Тогда  $F$  положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  положительны, и  $F$  отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки  $A_k$  чередуются так, что  $A_1 < 0$ .

Угловые миноры  $A_k$  матрицы  $A$  — это определители:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## Условный экстремум

Предположим, что нам необходимо исследовать функцию  $f(x, y)$  на условный экстремум, если условие имеет вид  $g(x, y) = 0$ . Функции  $f$  и  $g$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

### Прямой метод

Если уравнение кривой  $g(x, y) = 0$  можно переписать в параметрическом виде  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , то исследование функции  $f$  можно свести к исследованию функции  $F(t) = f(x(t), y(t))$  одной переменной  $t$ .

### Метод множителей Лагранжа

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

### Теорема Лагранжа

Пусть точка  $(x_0, y_0)$  — точка условного экстремума  $f$  и  $\text{grad } g(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда найдется такая постоянная  $\lambda_0$ , что точка  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  будет критической точкой функции  $L$ , то есть

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

в точке  $(x_0, y_0, \lambda_0)$ .

## Теоремы о неявной функции

Предположим, что функция  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , задана неявно уравнением:

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0.$$

Возникает вопрос об условиях разрешимости этого уравнения.

### Теорема о неявной функции

Пусть  $F(x, y)$  имеет непрерывные частные производные в точке  $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , точка  $(x^0, y^0)$  удовлетворяет уравнению  $F(x^0, y^0) = 0$ , частная производная  $F$  по  $y$  не равна нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0.$$

Тогда существует окрестность  $U$  точки  $x^0$ , в которой уравнение  $F(x, y) = 0$  однозначно определяет непрерывную функцию  $y = f(x)$ , для которой  $y^0 = f(x^0)$ . Функция  $f(x)$  имеет непрерывные в точке  $x^0$  частные производные.

### Следствие

Дифференцируя равенство  $F(x, f(x)) = 0$  по переменной  $x_k$ , получаем формулу для частных производных функции  $f(x)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = -\frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0) \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \right)^{-1}.$$

## Замены координат

Рассмотрим  $n$  отображений  $y_1 = f_1(x), \dots, y_n = f_n(x)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда вектор  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  можно также интерпретировать, как точку  $n$ -мерного пространства. Говорят, что  $f$  задает отображение из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ . Говорят, что отображение  $y = f(x)$  непрерывно (или дифференцируемо), если таковыми являются все функции  $f_i(x)$ .

### Определение

Матрицей Якоби дифференцируемого отображения  $f$  называют матрицу:

$$\mathcal{J}(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Якобианом отображения  $f$  называют определитель этой матрицы  $J(x) = \det \mathcal{J}(x)$ .

### Определение

Отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является регулярным (невырожденным) в точке  $x^0$ , если оно непрерывно дифференцируемо в окрестности точки  $x^0$  и якобиан отображения не обращается в ноль:  $J(x^0) \neq 0$ .



# Обратное отображение

Рассмотрим вопрос о том, когда отображение  $y = f(x)$  является обратимым.

## Теорема об обратном отображение

Пусть отображение  $y = f(x)$  регулярно в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда существует окрестность  $U$  точки  $x^0$  такая, что уравнение  $y = f(x)$  однозначно разрешимо относительно  $x$ , и соответствующее отображение  $x = g(y)$  регулярно в  $U$ .

## Следствие

Вычислим частные производные  $\frac{\partial g_k}{\partial y_m}(y)$ , продифференцировав равенство:

$$y_m = f_m(g(y)) \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial y_s} = \delta_{s,m} = \begin{cases} 1, & s = m; \\ 0, & s \neq m. \end{cases}$$

Таким образом, матрицы Якоби взаимно обратных отображений  $\frac{\partial g}{\partial y}$  и  $\frac{\partial f}{\partial x}$  являются взаимно обратными матрицами. Как известно из алгебры, обратная матрица существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы не равен нулю. В этом и заключается условие регулярности отображений.

## Примеры замен

Некоторые замены переменных крайне часто используются на практике.

### Полярные координаты

Переход к полярным координатам на плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi); \\ y &= r \sin(\phi), \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \phi &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Найдем матрицу Якоби:

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, Якобиан перехода от  $(r, \phi)$  к  $(x, y)$  равен

$$J(r, \phi) = r \cos^2(\phi) + r \sin^2(\phi) = r.$$

Замена координат не является регулярной при  $r = 0$  или  $x = y = 0$ . Действительно, в этих точках отображение даже не является взаимно однозначным.

### Упражнения

Найдите Якобианы перехода к сферическим координатам:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\phi) \sin(\theta); \\y &= r \sin(\phi) \sin(\theta); \\z &= r \cos(\theta),\end{aligned}$$

и цилиндрическим координатам:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\phi); \\y &= r \sin(\phi); \\z &= z,\end{aligned}$$

Определите, где отображения являются обратимыми.

## Формула линеаризации

Пусть  $y = f(x)$  — регулярное отображение в окрестности точки  $x^0$ . Построим линейное приближение для  $f(x)$  в случае, когда  $x$  близко к  $x^0$ . Для каждой функции  $f_m(x)$  имеем:

$$f_m(x) = f_m(x^0) + \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x^0) (x_k - x_k^0) + o(\|x - x^0\|).$$

Следовательно, в матричной записи получаем, что

$$f(x) = f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0) (x - x^0) + o(\|x - x^0\|),$$

где  $\frac{\partial f}{\partial x}$  — матрица Якоби размера  $n \times n$ .

Таким образом, линейным приближением для отображения  $f$  в окрестности точки  $x^0$  является линейный оператор с матрицей Якоби в базисе с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Следовательно, если отображение  $f$  регулярно в точке  $x^0$  (то есть определитель матрицы Якоби не равен нулю), то набор векторов  $v_k = \text{grad } f_k(x^0)$  является линейно независимым.

### Определение

Рассмотрим  $n$ -мерный параллелепипед с вершинами в точках  $A^1, \dots, A^n$ . Тогда его **ориентируемый объем** определяется как

$$\text{Vol}(A) = \det(A),$$

где матрица  $A$  составлена из вектор-столбцов  $A^k$ .

Ориентируемый объем может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от взаимного расположения точек  $A^k$ . Объемом параллелепипеда называют величину  $|\text{Vol}(A)|$ .

## Якобиан отображения и ориентируемый объем

Пусть  $y = f(x)$  — регулярное в точке  $x^0$  отображение, а  $\Delta x$  — малое приращение аргумента  $x$ . Учитывая формулу линеаризации, можно считать, что образом прямоугольного параллелепипеда  $D$  со сторонами  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  является параллелепипед  $M$  с вершинами

$$\begin{aligned}u_1 &= f(x^0 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x^0) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1, \\&\dots \\u_n &= f(x^0, x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x^0) \approx \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.\end{aligned}$$

Следовательно, объем параллелепипеда  $M$  связан с объемом параллелепипеда  $D$  по формуле

$$\text{Vol}(M) = \det \mathcal{J}(x^0) \Delta x_1 \cdots \Delta x_n = J(x^0) \text{Vol}(D).$$

Таким образом якобиан отображения является коэффициентом преобразования ориентированного объема элемента пространства при отображении  $f$  в точке  $x^0$ .

## Площадь плоской области

Определим понятие площади для плоского ограниченного множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ .

### Определение. Клеточное множество

Если  $M$  представляется в виде объединения конечного числа прямоугольников, пересекающихся лишь по границам, то  $M$  называют **клеточным** множеством.

Тогда площадь  $S_M$  клеточного множества  $M$  — это сумма площадей соответствующих прямоугольников.

### Определение. Площадь

Будем говорить, что множество  $D \subset \mathbb{R}^2$  имеет **площадь**  $S(D) = S_D$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся два клеточных множества  $\Omega$  и  $\omega$  такие, что

$$\omega \subset D \subset \Omega, \quad S_\omega < S_D < S_\Omega, \quad S_\Omega - S_\omega < \varepsilon.$$

Множества, имеющие площадь, называют **измеримыми** (по Жордану).

### Замечание

Область, ограниченная кусочно-гладкой кривой, всегда измерима. Не все множества на плоскости вообще имеют какую-либо площадь.

Аналогично определяются понятия измеримости и объема множества в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ , и в случае большей размерности.

## Двойной интеграл

Предположим, что  $f(x, y)$  — скалярная функция, заданная на ограниченном множестве  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Определим объем тела в трехмерном пространстве, которое лежит между графиком функции  $z = f(x, y)$  и плоскостью  $xOy$ , при  $(x, y) \in D$ .

Предположим, что  $D$  — измеримое множество. Разобьем  $D$  на конечное число измеримых частей  $D_1, \dots, D_m$ :

$$D = \bigcup_{k=1}^m D_k, \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

В каждом множестве  $D_k$  выберем опорную точку  $A_k = (x_k, y_k) \in D_k$ .

Диаметром  $d_k = d(D_k)$  множества  $D_k$  называют расстояние между максимально удаленными точками множества  $D_k$ :

$$d(D_k) = \sup_{a, b \in D_k} \|a - b\|.$$

Параметром разбиения будем называть величину  $d = \max d_k$ .

Интегральной суммой будем называть величину:

$$\sum_{k=1}^m f(A_k) S(D_k).$$



## Двойной интеграл. Определение

### Определение

Будем говорить, что функция  $f(x, y)$ , определенная на измеримом множестве  $D$ , интегрируема в  $D$ , если существует предел интегральных сумм:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(A_k) S(D_k),$$

при стремлении параметра разбиения к нулю, для произвольного выбора разбиения и опорных точек.

Аналогичным образом определяется тройной интеграл по трехмерному измеримому множеству:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

В многомерном случае пишут просто

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_D f(x) dx,$$

где  $D$  — ограниченное измеримое множество в  $\mathbb{R}^n$ .

## Свойства

- ❶ Если функция  $f(x)$  непрерывна на замыкании  $\overline{D}$  измеримого множества  $D \in \mathbb{R}^n$ , то она интегрируема.
- ❷ Площадь (объем) измеримого множества  $D \subset \mathbb{R}^n$  можно вычислить как

$$S(D) = \int_D 1 dx.$$

- ❸ Линейность:

$$\int_D (f(x) + g(x)) dx = \int_D f(x) dx + \int_D g(x) dx, \quad \int_D A f(x) dx = A \int_D f(x) dx.$$

- ❹ Аддитивность. Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — два непересекающихся ( $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ) измеримых множества в  $\mathbb{R}^n$ , и функция  $f$  интегрируема на  $D_1$  и  $D_2$ . Тогда  $f$  интегрируема на измеримом множестве  $D_1 \cup D_2$  и

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x) dx = \int_{D_1} f(x) dx + \int_{D_2} f(x) dx.$$

# Двойной интеграл. Свойства

## Интегрирование неравенств

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — интегрируемые функции на измеримом множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Если справедливо неравенство

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in D,$$

то

$$\int_D f(x) dx \leq \int_D g(x) dx.$$

## Теорема о среднем

Пусть  $f(x)$  — непрерывная на связном измеримом компакте  $D \subset \mathbb{R}^n$  функция. Тогда найдется такая точка  $\xi \in D$ , что

$$\int_D f(x) dx = f(\xi) \int_D 1 dx = f(\xi) S(D).$$

## Оценка интеграла

Если функция  $f(x)$  интегрируема на измеримом множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ , то функция  $|f(x)|$  также интегрируема и

$$\left| \int_D f(x) dx \right| \leq \int_D |f(x)| dx.$$

## Двойной интеграл. Сведение к повторному

### Теорема

Пусть  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}.$$

Тогда

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Интегралы в правой части последнего равенства принято называть повторными, поскольку интегрирование сначала производится только по одной переменной, и только затем — по второй. Часто их записывают в виде

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

соответственно.

### Следствие

Если функция  $f$  представляется в виде  $f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ , то

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \left( \int_a^b \phi(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d \psi(y) dy \right).$$

## Двойной интеграл. Сведение к повторному

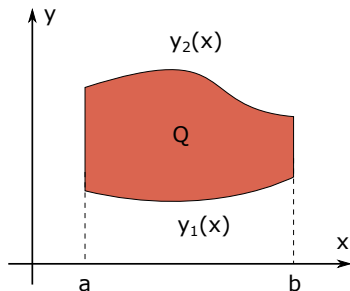
### Теорема

Пусть  $y_1(x) \leq y_2(x)$  — пара непрерывных на  $[a, b]$  функций, функция  $f(x, y)$  непрерывна на множестве

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y_1(x) < y < y_2(x)\}.$$

Тогда

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$



## Двойной интеграл. Замена переменных

Другой способ вычисления двойного интеграла связан с введением новых координат.

### Теорема

Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция на измеримом компакте  $D \subset \mathbb{R}^n$  с кусочно-гладкой границей,  $x = X(y)$  — регулярная замена координат, переводящая  $D'$  в  $D = \phi(D')$ . Тогда  $D'$  — компакт с кусочно гладкой границей и

$$\int_D f(x) dx = \int_{D'} f(X(y)) |J(y)| dy,$$

где  $J(y)$  — якобиан отображения  $x = X(y)$ .

В развернутом виде:

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{D'} f(X_1(y), \dots, X_n(y)) \left| \det \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \cdots dy_n.$$

Мы уже видели, что ориентируемый объем малого элемента пространства изменяется пропорционально якобиану отображения. Поскольку при интегрировании мы рассматриваем неориентированный объем, то в формуле возникает модуль якобиана.

## Двойной интеграл. Замена переменных

### Пример

Вычислим площадь круга

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 1 dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi); \\ y &= r \sin(\phi), \end{aligned} \quad J(r, \phi) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = r.$$

Тогда, если  $\Pi = \{(r, \phi) \mid r \in [0, R], \phi \in [0, 2\pi]\}$ , то

$$S = \iint_{\Pi} r dr d\phi.$$

Следовательно, приводя интеграл к повторному, получаем:

$$S = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2.$$

## Двойной интеграл. Замена переменных

### Пример

Рассмотрим

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy. \end{aligned}$$

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi); \\ y &= r \sin(\phi), \quad J(r, \phi) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = r \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} d(r^2) = -\pi e^{-z} \Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$



## Гладкие кривые в пространстве

Напомним, что кривую в пространстве  $\mathbb{R}^n$  можно задать параметрически:

$$r = r(t) \iff x_1 = r_1(t), \dots, x_n = r_n(t), \quad t \in [a, b].$$

В действительности одной кривой  $\Gamma$  может соответствовать множество различных параметризаций.

### Определение. Гладкая кривая в пространстве

Будем говорить, что  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая в пространстве, если она может быть задана параметрически  $r(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , при  $t \in [a, b]$ , то есть

$$\Gamma = \{r(t) \mid t \in [a, b]\},$$

где вектор  $r'(t) \neq 0$  для всех  $t \in [a, b]$ .

Тогда в каждой точке кривой можно определить касательную:

$$r_{\text{tan}}(t) = r'(t_0)(t - t_0) + r(t_0).$$

Кривую называют **кусочно-гладкой**, если условие  $r'(t) \neq 0$  нарушается в конечном числе точек. Кривую называют **замкнутой** если  $r(a) = r(b)$ .

# Криволинейный интеграл

Часто возникает необходимость вычислить определенный интеграл вдоль некоторой кривой в пространстве. Например, вычислить работу вдоль некоторого пути в физике.

## Определение

**Криволинейным интегралом первого рода** от функции  $f(x)$  вдоль кусочно-гладкой кривой  $\Gamma$  называют величину:

$$\int_{\Gamma} f(x) dl = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt,$$

где  $r(t)$  параметризация кривой  $\Gamma$ .

## Утверждение

Данное определение является корректным, то есть величина интеграла не зависит от выбора параметризации кривой.