Выборный Евгений Викторович
email: evybornyi@hse.ru

Математический анализ
Тема 2: Предел и непрерывность функции

Москва 2015

Точки сгущения

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое множество действительных чисел.

$$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$$

Определение

Точка x является **предельной точкой** (точкой сгущения) множества $\mathcal{X}$, если в любой проколотой окрестности точки x есть точки из множества $\mathcal{X}$.

Данное определение естественным образом обобщается на случай, когда x — это один из символов: $+\infty$, $-\infty$ или ∞.

Свойства

1. Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству. Пример: $x = 1$ — предельная точка для отрезка $[0, 2]$ и для интервала $(0, 1)$.
2. В любой окрестности предельной точки содержится бесконечно много точек множества $\mathcal{X}$.
3. У конечного множества нет предельных точек.
4. Предельные точки множества всех значений последовательности являются ее частичными пределами. Обратное верно не всегда.

Докажите эти свойства!

Определение предела функции

Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 — предельная точка (конечная или бесконечная) множества $\mathcal{X}$. Рассмотрим поведение функции f вблизи x_0.

Определение предела (на языке окрестностей)

Говорят, что число f_0 (или символы $\pm\infty$, ∞) является **пределом функции** $f = f(x)$ при $x \to x_0$ ($x \in \mathcal{X}$), если для любой окрестности V точки f_0 найдется окрестность U точки x_0 такая, что

$$\forall x \in U \cap \mathcal{X},\ x \neq x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \in V.$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \quad \text{или} \quad f(x) \to f_0 \text{ при } x \to x_0.$$

Перепишем данное определение на "языке $\varepsilon - \delta$" в случае конечного предела f_0 и конечной точки x_0.

Определение предела (на "языке $\varepsilon - \delta$")

Говорят, что число f_0 является **пределом функции** $f = f(x)$ при $x \to x_0$ ($x \in \mathcal{X}$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in \mathcal{X} \quad |f(x) - f_0| < \varepsilon \text{ при } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Определение предела функции

На "языке $\varepsilon - \delta$" можно аналогично сформулировать определения бесконечных пределов ($f_0 = \infty$ или $\pm\infty$), а также пределов на бесконечности ($x_0 = \infty$ или $\pm\infty$).

Упражнения

1. Выпишете все эти определения и отрицания к ним. Приведите примеры соответствующих функций. Покажите эквивалентность определений на "языке $\varepsilon - \delta$" и исходного определения предела.
2. Докажите, что определение предела функции $a(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ при $n \to +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$) полностью совпадает с определением предела последовательности $a_n = a(n)$.

Примеры

1. Пусть $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$, и функция f определена на всей оси. По определению:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \Delta > 0 : \ \forall x < -\Delta \quad f(x) > \mathcal{E}.$$

   В качестве примера можно привести $f(x) = -x$.
2. Несложно видеть, что $\lim\limits_{x \to 0} 1/x = \infty$. Действительно:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta = 1/\mathcal{E} : \ |1/x| > \mathcal{E} \text{ при } 0 < |x| < \delta.$$

Определение предела функции

На "языке $\varepsilon - \delta$" можно аналогично сформулировать определения бесконечных пределов ($f_0 = \infty$ или $\pm\infty$), а также пределов на бесконечности ($x_0 = \infty$ или $\pm\infty$).

Упражнения

1. Выпишете все эти определения и отрицания к ним. Приведите примеры соответствующих функций. Покажите эквивалентность определений на "языке $\varepsilon - \delta$" и исходного определения предела.
2. Докажите, что определение предела функции $a(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ при $n \to +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$) полностью совпадает с определением предела последовательности $a_n = a(n)$.

Примеры

1. Пусть $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$, и функция f определена на всей оси. По определению:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \Delta > 0 : \ \forall x < -\Delta \quad f(x) > \mathcal{E}.$$
В качестве примера можно привести $f(x) = -x$.
2. Несложно видеть, что $\lim\limits_{x \to 0} 1/x = \infty$. Действительно:
$$\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta = 1/\mathcal{E} : \ |1/x| > \mathcal{E} \text{ при } 0 < |x| < \delta.$$

Левый и правый предел функции

Предположим, что точка x_0 является точкой сгущения для множества точек из области определения $\mathcal{X}$ функции f, которые строго больше x_0. Тогда, определяя предел, можно считать, что x стремится к x_0 приближаясь к точке x_0 только справа ($x > x_0$).

Определение (Правый и левый предел)

Говорят, что число f_0 (или символы $\pm\infty$, ∞) является **правым пределом функции** $f = f(x)$ при $x \to x_0$ ($x \in \mathcal{X}$), если для любой окрестности V точки f_0 найдется окрестность U точки x_0 такая, что

$$\forall x \in U \cap \mathcal{X},\ x > x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in V.$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f_0 \quad \text{или} \quad f(x) \to f_0 \text{ при } x \to x_0 + 0.$$

На языке $\varepsilon - \delta$ (в случае конечного f_0) получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon \ \Rightarrow \ |f(x) - f_0| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется и левый предел, при этом пишут $x \to x_0 - 0$ или $x \nearrow x_0$.

Примеры вычисления пределов по определению

1. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$. Доказательство. Если $\varepsilon<2$, то

$$|\sqrt{x}-2|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad 2-\varepsilon<\sqrt{x}<2+\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad 4-4\varepsilon+\varepsilon^2<x<4+4\varepsilon+\varepsilon^2$$
$$\Leftrightarrow\quad -4\varepsilon+\varepsilon^2<x-4<4\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Следовательно, выбирая $\delta=4\varepsilon-\varepsilon^2$, получаем, что

$$|x-4|<\delta \quad\Rightarrow\quad -4\varepsilon+\varepsilon^2<x-4<4\varepsilon-\varepsilon^2<4\varepsilon+\varepsilon^2 \quad\Rightarrow\quad |\sqrt{x}-2|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Для случая $\varepsilon\geq 2$ можно просто взять $\delta=1$.

2. $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$. Доказательство. Если $\varepsilon<\pi/2$, то

$$|\operatorname{arctg}(1/x)-\pi/2|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \pi/2-\varepsilon<\operatorname{arctg}(1/x)<\pi/2+\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{arctg}(1/x)>\pi/2-\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\quad 1/x>\operatorname{tg}(\pi/2-\varepsilon) \quad\Leftrightarrow\quad 0<x<(\operatorname{tg}(\pi/2-\varepsilon))^{-1}.$$

Следовательно, если выбирать $\delta=1/\operatorname{tg}(\pi/2-\varepsilon)$, то

$$0<x<\delta \quad\Rightarrow\quad |\operatorname{arctg}(1/x)-\pi/2|<\varepsilon.$$

Свойство левого и правого предела функции

Утверждение

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Предел функции $f = f(x)$ при $x \to x_0$ существует и равен f_0 тогда и только тогда, когда существует как левый, так и правый предел $f(x)$ при $x \to x_0$, и они оба равны f_0.

$$f_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_0 = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Доказательство

Необходимость $(\Rightarrow)$. Имеем:

$$f_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) \in O_\varepsilon(f_0).$$

Поскольку из $x_0 - \delta < x < x_0$ следует, что $0 < |x - x_0| < \delta$, получаем, что предел слева существует и равен f_0. Аналогично для предела справа.
Достаточность $(\Leftarrow)$. Имеем:

$$f_0 = \lim_{x \to x_0+0} f(x) \quad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \ x_0 < x < x_0 + \delta_1 \ \Rightarrow \ f(x) \in O_\varepsilon(f_0),$$

$$f_0 = \lim_{x \to x_0-0} f(x) \quad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \ x_0 - \delta_2 < x < x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \in O_\varepsilon(f_0).$$

Выбирая $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, получаем то, что $f(x) \in O_\varepsilon(f_0)$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.

Пусть $f(x)$ — функция, заданная на множестве $\mathcal{X}$, а z — предельная точка (конечная или бесконечная) множества $\mathcal{X}$.

Теорема

Предел функции $f(x)$ при $x \to z$ существует и равен w тогда и только тогда, когда существует и равен w предел **последовательности** значений функции $f(x_n)$ на произвольной последовательности x_n такой, что $x_n \in \mathcal{X}$, $x_n \neq z$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to z$ при $n \to +\infty$.

$$\lim_{x \to z} f(x) = w \quad \Leftrightarrow \quad \forall \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \ x_n \in \mathcal{X}, \ x_n \neq z, \ x_n \to z \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = w.$$

На основании этой теоремы можно предложить другое эквивалентное определение предела.

Определение предела функции по Гейне

Говорят, что предел функции $f(x)$ при $x \to z$ существует и равен w, если для любой последовательности x_n такой, что $x_n \in \mathcal{X}$, $x_n \neq z$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to z$ при $n \to \infty$, предел последовательности значений функции $f(x_n)$ существует и равен w.

Доказательство эквивалентности определений по Коши и по Гейне

$$\lim_{x\to z} f(x) = w \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}:\ x_n \in \mathcal{X},\ x_n \neq z,\ x_n \to z \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = w.$$

Необходимость ($\Rightarrow$). По определению предела:

$$\lim_{x\to z} f(x) = w \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ f(x) \in O_\varepsilon(w) \text{ при } \forall x \in \dot{O}_\delta(z),\ x \in \mathcal{X}.$$

Пусть x_n — произвольная последовательность точек из $\mathcal{X}$ такая, что $x_n \to z$ при $n \to +\infty$ и $x_n \neq z$. Тогда по определению предела последовательности:

$$x_n \to z \quad \Rightarrow \quad \exists N > 0:\ \forall n \geq N \quad x_n \in O_\delta(z).$$

Поскольку $x_n \neq z$, то $x_n \in \dot{O}_\delta(z)$ при $n \geq N$. Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0:\ f(x_n) \in O_\varepsilon(w) \ \ \forall n \geq N,$$

то есть последовательность $f(x_n)$ стремится к w.

Доказательство эквивалентности определений по Коши и по Гейне

$$\lim_{x\to z} f(x) = w \quad \Leftrightarrow \quad \forall \, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \; x_n \in \mathfrak{X}, \; x_n \neq z, \; x_n \to z \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = w.$$

Достаточность ($\Leftarrow$). Предположим обратное: предел по Гейне существует и равен w, а по Коши — нет. Тогда по определению предела (по Коши):

$$\lim_{x\to z} f(x) \neq w \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \; \forall \delta > 0 \; \exists x = x(\delta) \in \dot{O}_\delta(z), \; x \in \mathfrak{X} : \quad f(x) \notin O_\varepsilon(w).$$

Выбирая последовательность значений $\delta = \delta_n = 1/n$ получаем последовательность x_n такую, что $f(x_n) \notin O_\varepsilon(w)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to z$ при $n \to +\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq w$, что противоречит определению предела по Гейне.

Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin(1/x)$ в окрестности точки $x = 0$. Пусть

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}.$$

Очевидно, что $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, но $f(x_n) = 1$, а $f(y_n) = -1$ при любых $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует!

Свойства предела функции

Свойства пределов функций аналогичны свойствам пределов последовательностей.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ определены в некоторой окрестности x_0 и $f(x) \to f_0$, $g(x) \to g_0$ при $x \to x_0$.

1. **Единственность.** Предел функции определен однозначно.
2. **Арифметические свойства пределов**
   1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (af(x) + bg(x)) = af_0 + bg_0$,
   2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = f_0 g_0$,
   3. Если $g_0 \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x) = f_0/g_0$.
3. **Переход к пределу в неравенствах.** Если $f(x) \leq g(x)$ при x из некоторой окрестности x_0, то $f_0 \leq g_0$.
4. **Лемма "о двух милиционерах".** Пусть $h(x)$ — функция, определенная в некоторой окрестности x_0, и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда, если $f_0 = g_0 = A$, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.
5. **Сохранение знака.** Если $f_0 > 0$ (или $f_0 < 0$), то $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$) в некоторой проколотой окрестности x_0.

Упражнения

Доказать эти свойства, используя как определение предела по Коши, так и определение по Гейне.

Замена переменных в пределе

Пусть функция $g(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности x_0, а функция $f(y)$ определена в некоторой проколотой окрестности y_0.

Теорема (Замена переменных в пределе)

Пусть существуют пределы:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0, \qquad \lim_{y \to a} f(y) = z,$$

и $g(x) \neq y_0$ для x, достаточно близких к x_0. Тогда

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = z.$$

В качестве x_0, y_0 и z могут фигурировать символы $\pm\infty$ и ∞.

Доказательство

Доказательство проведем, используя определение предела по Гейне:

$$\forall \{x_n\}: \; x_n \neq x_0, \; x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad g(x_n) \to y_0, \; g(x_n) \neq y_0 \quad \Rightarrow \quad f(g(x_n)) \to z, \; (n \to +\infty).$$

Непрерывность функции

Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется **непрерывной** в точке x_0, если существует предел $f(x)$ при $x \to x_0$ и он равен значению функции f в этой точке:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале**, если она непрерывна в каждой его точке.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \qquad \exists \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

Замечание

Если функция $f(y)$ непрерывна в точке y_0, и $g(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ то

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(y_0).$$

Пример непрерывной функции

Функция $f(x) = \sin(x)$ — непрерывна на всей оси.

Убедимся в непрерывности синуса в произвольной точке x_0. Необходимо проверить, что

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0).$$

По определению предела:

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon \text{ при } |x - x_0| < \delta.$$

Пользуясь формулой для разности синусов и неравенством $|\sin(x)| < |x|$, получаем, что

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \leq |x - x_0|.$$

Выбирая $\delta = \varepsilon$, получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon \text{ при } |x - x_0| < \delta.$$

Что и требовалось показать.

Упражнение

Проведите аналогичное доказательство для $cos(x)$.

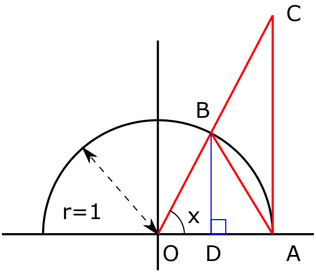
Первый замечательный предел

Лемма

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1, \quad \text{при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство

Поскольку $\sin(x)/x$ и $\cos(x)$ — четные функции, то неравенство необходимо проверить только для $0 < x < \pi/2$.



Сравним площадь треугольника ΔOAB, сектора OAB и треугольника ΔOAC:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|BD||OA| = \frac{1}{2}\sin(x).$$

$$S_{\text{сектор}(OAB)} = \frac{1}{2}r^2 x = \frac{x}{2}.$$

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}|AC||OA| = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(x).$$

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сектор}(OAB)} < S_{\Delta OAC} \quad \Rightarrow \quad \sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Утверждение (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Доказательство

Доказательство основано на неравенстве:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1, \quad \text{при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $\cos(x)$ — непрерывная функция:

$$\lim_{x\to 0}\cos(x) = \cos(0) = 1.$$

Следовательно, достаточно перейти к пределу при $x \to 0$ в неравенстве, используя лемму "о двух милиционерах".

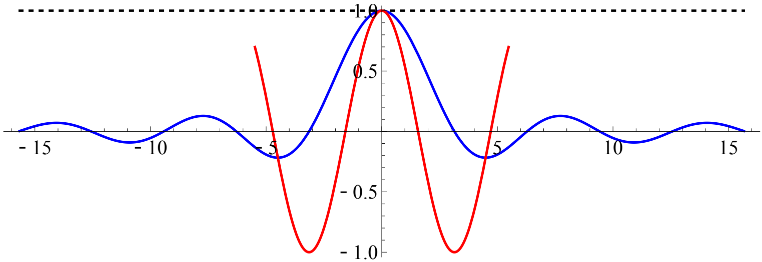
Первый замечательный предел

Замечание

Функция $\frac{\sin(x)}{x}$ не является непрерывной при $x = 0$, поскольку не определена в этой точке, но если мы рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0; \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

то $f(x)$ будет непрерывна на всей оси.



Примеры вычисления пределов

Несколько примеров на вычисление пределов:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1,$$

   здесь мы воспользовались арифметическими свойствами предела.

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = \{x=\sin(z),\ z=\arcsin(x),\ x\to 0\ \Rightarrow z\to 0\} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(z)} = 1,$$

   здесь мы воспользовались арифметическими свойствами предела, теоремой о замене переменных в пределе и тем, что

   $$\lim_{x\to 0}\arcsin(x) = 0.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \left\{1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{x^2} = \{x/2=z,\ x=2z\} = \frac{2}{4}\left(\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Свойства непрерывных функций

Локальные свойства непрерывных функций следуют из соответствующих свойств пределов.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности x_0 и непрерывны в точке x_0.

1. **Линейная комбинация** $h(x) = a\,f(x) + b\,g(x)$ непрерывных функций непрерывна.
2. **Произведение** $h(x) = f(x)g(x)$ непрерывных функций непрерывно.
3. Если $g(x_0) \neq 0$, то **отношение** непрерывных функций $h(x) = f(x)/g(x)$ непрерывно.
4. **Сохранение знака.** Если $f(x_0) > 0$ (или $f(x_0) < 0$), то $f(x) > 0$ (соответственно, $f(x) < 0$) в некоторой окрестности x_0.
5. **Сложная функция** $h(x) = f(g(x))$, составленная из двух непрерывных функций, непрерывна. Здесь $f(x)$ должна быть определена и непрерывна не в окрестности точки x_0, а в точке $g(x_0)$.

Упражнения

Доказать эти свойства, используя соответствующие свойства пределов. Показать, что если условия, наложенные на f и g, не справедливы, то свойства могут и не выполняться. Приведите различные примеры.

Определение

Функцию $P(x)$ вида:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ и $a_0 \neq 0$, называют **многочленом** (или полиномом) степени n.

Утверждение

Многочлены непрерывны на всей оси.

Данное утверждение следует непосредственно из свойств непрерывных функций и из непрерывности постоянной функции $f(x) = 1$ и линейной функции $g(x) = x$.

Определение

Функцию $R(x)$ вида:

$$R(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — полиномы, называют рациональной функцией от x.

Утверждение

Рациональные функции непрерывны на всей своей области определения.

Критерий непрерывности

Функция f, определенная в окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют как левый, так и правый пределы f в этой точке, и они равны $f(x_0)$:

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0). \qquad (*)$$

Следовательно, возникает следующая классификация точек разрыва функций:

1. Говорят, что x_0 — точка разрыва **1-го рода**, если оба односторонних предела существуют и конечны, но не выполнено одно из равенств в $(*)$.
2. Говорят, что x_0 — точка разрыва **2-го рода**, если один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Иногда отдельно выделяют случай, где правый и левый предел совпадают:

$$f(x_0+0) = f(x_0-0),$$

но они не равны $f(x_0)$ или $f(x_0)$ не определено. Такие точки называют **устранимыми точками разрыва** функции f. Действительно, функция

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0; \\ f(x_0+0) & x = x_0, \end{cases}$$

отличающаяся от f лишь в точке x_0, будет непрерывной.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Определение

Функция $\alpha(x)$, определенная в некоторой окрестности x_0, называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если она стремится к 0 при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Определение

Функция $A(x)$, определенная в некоторой окрестности x_0, называется **бесконечно большой** при $x \to x_0$, если она стремится к ∞ при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} A(x) = \infty.$$

Аналогичные определения используются и в случае других предельных процессов, таких как $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$, $x \to x_0 \pm 0$ и др.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Основные свойства

1. Функция $f(x)$ стремится к числу f_0 при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда разность $\alpha(x) = f(x) - f_0$ является бесконечно малой функцией.
2. Сумма, разность, произведение двух бесконечно малых функций — это бесконечно малая функция.
3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию — это бесконечно малая функция.
4. Если $A(x)$ — бесконечно большая функция, то $1/A(X)$ — это бесконечно малая функция.

Примеры

Функции x, x^2, $\sin(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Теорема

Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда любое бесконечно малое приращение аргумента приводит к бесконечно малому приращению функции.

Доказательство

Необходимо показать, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \alpha(z) \quad |f(x_0+\alpha(z)) - f(x_0)| \text{ — бесконечна малая,}$$

где $\alpha(z)$ — бесконечно малая функция z. Дальнейшее доказательство полностью аналогично доказательству эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.

Упражнения

Проведите полностью данное доказательство, а также доказательства основных свойств бесконечно больших и бесконечно малых.
Как данная теорема связана с теоремой о непрерывности сложной функции?

Асимптотическая эквивалентность

Определение

Две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и не равные 0 в некоторой проколотой окрестности точки x_0, являются **асимптотически эквивалентными**, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Записывают это следующим образом:

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

Свойства

1. **Рефлексивность:** $f(x) \sim f(x)$.
2. **Симметричность:** $f(x) \sim g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \sim f(x)$.
3. **Транзитивность:** $f(x) \sim g(x),\ g(x) \sim h(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \sim h(x)$.

Упражнение

Докажите данные свойства, исходя из свойств предела функции.

Асимптотическая эквивалентность

Определение

Две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и не равные 0 в некоторой проколотой окрестности точки x_0, являются **асимптотически эквивалентными**, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Записывают это следующим образом:

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

Свойства

1. **Рефлексивность:** $f(x) \sim f(x)$.
2. **Симметричность:** $f(x) \sim g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \sim f(x)$.
3. **Транзитивность:** $f(x) \sim g(x),\; g(x) \sim h(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \sim h(x)$.

Упражнение

Докажите данные свойства, исходя из свойств предела функции.

Асимптотическая эквивалентность

Лемма 1

Пределы эквивалентных функций совпадают:

$$f(x) \sim g(x),\ \ f(x) \to A \quad \Rightarrow \quad g(x) \to A$$

Доказательство

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = A \cdot 1 = A.$$

Лемма 2

Произведения и отношения эквивалентных функций — эквивалентны:

$$f(x) \sim g(x),\ \ h(x) \sim r(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)h(x) \sim g(x)r(x),\ \ f(x)/h(x) \sim g(x)/r(x).$$

Доказательство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)h(x)}{g(x)r(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{r(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{r(x)} = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)/h(x)}{g(x)/r(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{r(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{h(x)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Асимптотическая эквивалентность

Из Лемм 1 и 2 следует важная для вычисления пределов теорема.

Теорема

Предел произведения или отношения двух функций не изменится, если одну из них (или обе) заменить эквивалентными функциями.

Примеры эквивалентных функций

1. $\sin(x) \sim x$, при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg}(x) \sim x$ при $x \to 0$;
3. $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$, при $x \to 0$;
4. $x^2 + 3x + 5 \sim x^2$, при $x \to +\infty$;
5. $x^2 + 3x + 5 \sim 5$, при $x \to 0$;

Замечание

Если пара функций эквивалентна, то это еще не означает, что их разность мала. Например, $x^2 + 3x + 5 \sim x^2$ при $x \to +\infty$, но их разность $3x + 5$ является бесконечно большой величиной при $x \to +\infty$.

Сравнение бесконечно малых

Определение

Говорят, что функция $f(x)$ имеет меньший порядок чем $g(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

при этом пишут:

$$f(x) = o(g(x)), \quad (x \to x_0).$$

Из определения следует, что $f(x) = o(g(x))$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно маленькая функция, при $x \to x_0$.

Если $\alpha(x)$ — бесконечно маленькая функция, то $\alpha(x) = o(1)$, и наоборот.

Символ $o(1)$ и $o(g(x))$ часто используют в формулах, подразумевая, что вместо этого символа в формуле стоит некоторая, вообще говоря неизвестная, функция обладающая соответствующими свойствами.

Пример

$$\frac{\sin(x)}{x} \sim 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(x)}{x} = 1 + o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = x(1 + o(1)) = x + o(x).$$

Показательная функция

Функцию $f(x) = a^x$, где $a > 1$ — фиксированное действительное число, называют показательной функцией.
Величина a^x естественным образом определяется для рациональных $x > 0$:

$$a^x = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Для иррациональных значений x показательная функция определяется как предел значений $f(x_n)$, где x_n — рациональные приближения числа x ($x_n \in \mathbb{Q}$: $x_n \to x$, при $n \to +\infty$).
Хорошо известно, что

$$a^0 = 1, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{xy} = (a^x)^y, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Определяющие свойства

Функция $f(x)$ является показательной функцией a^x тогда и только тогда, когда:

1. $f(x)$ — непрерывна на всей оси.
2. $f(1) = a$
3. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x и y.

Ни одно из этих трех условий не является излишним.

Пример 1

Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad (a > 1).$$

Действительно, для любого $E > 0$ достаточно взять $\Delta = \log_a E$. Тогда при $x > \Delta$ будет $a^x > E$. Следовательно,

$$\forall E > 0 \ \exists \Delta > 0 : \ x > \Delta \ \Rightarrow \ a^x > E.$$

Аналогично вычисляются следующие пределы:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad (a > 1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \qquad (a > 1).$$

Упражнение

Проведите полностью соответствующие доказательства.

Примеры вычисления пределов

Пример 2

Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty,\quad (a>1).$$

Нам известно, что для $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty.$$

Выбирая $n=n(x)$ так, что $n\le x<n+1$, получаем, что

$$\frac{a^x}{x}\ge\frac{a^n}{n+1}=\frac{a^n}{n}\frac{1}{1+1/n}\to+\infty,\quad (x\to+\infty).$$

Аналогично вычисляются следующие пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty,\quad (a>1,\ k>0),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a(x)}{x^k}=0,\quad \lim_{x\to+0}x^k\log_a(x)=0,\qquad (a>1,k>0).$$

Упражнение

Проведите полностью соответствующие доказательства.

Теорема (Второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Доказательство

Пусть для начала $x\to+\infty$. Выберем натуральное $n=n(x)$ такое, что $n\leq x<n+1$. Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Очевидно, левая и правая часть данного неравенства стремится к e при $x\to+\infty$. Теперь рассмотрим случай $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Следствия

1. $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. Действительно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln(e) = 1.$$

2. $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$. Выполнив замену переменной в пределе, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \{x = ln(1+t);\ t = e^x - 1;\ x \to 0 \ \Rightarrow\ t \to 0\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

3. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$. Учитывая, что $\alpha\ln(1+x) \to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Теорема о нуле непрерывной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков: $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, для которой $f(c) = 0$.

Доказательство

Пусть для определенности $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Положим $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Рассмотрим c_0 — середину отрезка $[a_0, b_0]$: $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

1. Если $f(c_0) = 0$, то положим $c = c_0$.
2. Если $f(c_0) > 0$, то положим $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$.
3. Если $f(c_0) < 0$, то положим $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$.

Повторяя данную операцию для отрезка $[a_1, b_1]$ и далее при необходимости, получаем последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Если точку c удается найти на конечном шаге n, то теорема доказана.

Предположим, что найти точку c не удалось. По построению: a_n не убывает, b_n не возрастает и $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Следовательно, a_n и b_n сходятся к общему пределу $c \in (a, b)$. Остается показать, что $f(c) = 0$. Учитывая непрерывность f, получаем, что $f(a_n) \to f(c)$ и $f(b_n) \to f(c)$ при $n \to +\infty$. Следовательно,

$$f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) \leq 0,\ f(c) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = 0.$$

Теорема о промежуточном значении

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда любое число d из интервала с концами $f(a)$ и $f(b)$ является значением функции $f(x)$ в некоторой точке $c \in (a, b)$: $f(c) = d$.

Доказательство

Достаточно применить теорему о нуле непрерывной функции к функции $f_1(x) = f(x) - d$.

Замечание

Условие непрерывности функции $f(x)$ существенно для данных теорем. Рассмотрите пример $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ на $[-1, 1]$.

Обратная функция

Теорема об обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует обратная к $y = f(x)$ функция $x = g(y)$, и она строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство

Пусть для определенности $f(x)$ строго возрастает, следовательно, $f(b) > f(a)$.

1. **Существование**. Уравнение $f(x) = y$ для фиксированного $y \in [f(a), f(b)]$ имеет единственное решение $x = g(y)$. Существование решения следует из теоремы о промежуточном значении, а единственность — из монотонности функции $f(x)$.
2. **Монотонность**. Пусть $y_0 < y_1$ и $x_0 = g(y_0)$, $x_1 = g(y_1)$. Тогда $f(x_0) = y_0$ и $f(x_1) = y_1$. Учитывая, что $f(x)$ строго возрастает и $y_0 < y_1$, получаем, что $x_0 < x_1$. Следовательно, $g(y_0) < g(y_1)$, то есть $g(y)$ также строго возрастает.
3. **Непрерывность**. Докажем непрерывность $g(y)$ в точке y_0. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть
$$g(y_0) = x_0, \quad y_1 = f(x_0 - \varepsilon), \quad y_2 = f(x_0 + \varepsilon).$$
Выбирая $\delta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$, получаем, что
$$|y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad y_1 < y < y_2 \quad \Rightarrow \quad g(y_1) < g(y) < g(y_2) \quad \Rightarrow \quad x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon.$$

Первая теорема Вейерштрасса

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, является ограниченной на этом отрезке:

$$\exists C > 0 : \ \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| < C.$$

Вторая теорема Вейерштрасса

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения:

$$\exists x_{1,2} \in [a, b] : \quad f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Замечание

Условие непрерывности функции $f(x)$ на отрезке существенно для данных теорем. Рассмотрите пример $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$.