Mecánica de fluidos
2° semestre 2020: 541209-1

Práctica 8: Flujos compresibles

Problema 1:

Se tiene para una onda de choque estacionaria:

- $p_1 = 80\,\text{kPa}$
- $T_1 = 5\,^{\circ}\text{C} = 278.5\,\text{K}$
- $V_1 = 600\,\text{m/s}$

Determine las condiciones de flujo aguas abajo.

Respuesta:
Para calcular las condiciones de flujo aguas abajo, utilizaremos las ecuaciones para ondas de choque normales (Apéndice de flujos compresibles). Estas ecuaciones relacionan el número de Mach Ma_1 del flujo en el punto previo a la onda de choque (punto 1) el cual **debe** ser supersónico (en caso contrario, no se podrá formar una onda de choque), Ma_2 el número de Mach Ma_2 del flujo en el punto posterior a la onda de choque el cual **debe** ser subsónico, y las propiedades del fluido en ambos puntos. Primero, en base a las propiedades del flujo ya conocidas, calcularemos Ma_1:

$$Ma_1 = \frac{V_1}{C_1} = \frac{V_1}{\sqrt{KRT}} = \frac{600 \text{ m/s}}{\sqrt{1.4 \cdot 286.9 \frac{Nm}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 278.5\text{K}}} = \frac{600 \text{ m/s}}{334.6 \text{ m/s}} = 1.79$$

Ya que $Ma_1 > 1$, el flujo es supersónico y cumplimos con que el flujo debe ser supersónico en el punto previo a la onda de choque. *nota: para aire* $k = 1.4$ *y* $R = 286.9 \frac{Nm}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.
Ya conocido Ma_1, podemos calcular las propiedades del flujo en el punto posterior a la onda de choque normal:

$$Ma_2^2 = \frac{(k-1)Ma_1^2 + 2}{2kMa_1^2 - (k-1)} \quad \xrightarrow{\text{aire}} \quad M_{a_2} = \sqrt{\frac{0.4Ma_n^2 + 2}{2.8Ma_1^2 - 0.4}} = 0.62$$

El flujo en el punto 2 es subsónico (por supuesto, ya que $Ma_1 > 1$ siempre obtendremos $Ma_2 < 1$ al utilizar esta relación)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left(2kM_{a_1}^2 - (k-1)\right) \xrightarrow{\text{aire}} \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2.4}\left(2.8\text{Ma}_1^2 - 0.4\right) = 3.57$$
$$\Rightarrow p_2 = 3.57 \cdot p_1 = 3.57 + 80\text{kPa} = 285.6\text{kPa}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (k-1)Ma_1^2]\,\frac{2Ma^2 - (k-1)}{(k+1)^2 M_{a_1}^2} \xrightarrow{aire} [2 + 0.4Ma_1^2]\left[\frac{2.6Ma_1^2 - 0.4}{(2.4)^2 Ma_1^2}\right]$$
$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 1.524$$
$$\Rightarrow T_2 = T_1 \cdot 1.524 = 1.524 \cdot 278.5\text{k} = 424.4\text{k}$$

La densidad del aire en ambos puntos puede ser calculada utilizando la ecuacion que relaciona el cambio de densidad a través de una onda de choque en conjunto con la ecuación de gases perfectos o utilizando la ecuación de gases perfectos para ambos puntos por separado:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{p_2}{RT_2}$$

Un par de alternativas a evaluar las distintas expresiones presentadas corresponden a obtener los valores correspondientes a partir de los valores tabulados en el apéndice de flujos compresibles e interpolar en caso de que no se encuentre el valor deseado o tambien a partir del gráfico correspondiente (tambien presentado en el apéndice)

Problema 2:

Determine el fluijo másico máximo admisible para la tobera de la figura 1 y la presión en el plano de salida cuando se tiene flujo estrangulado

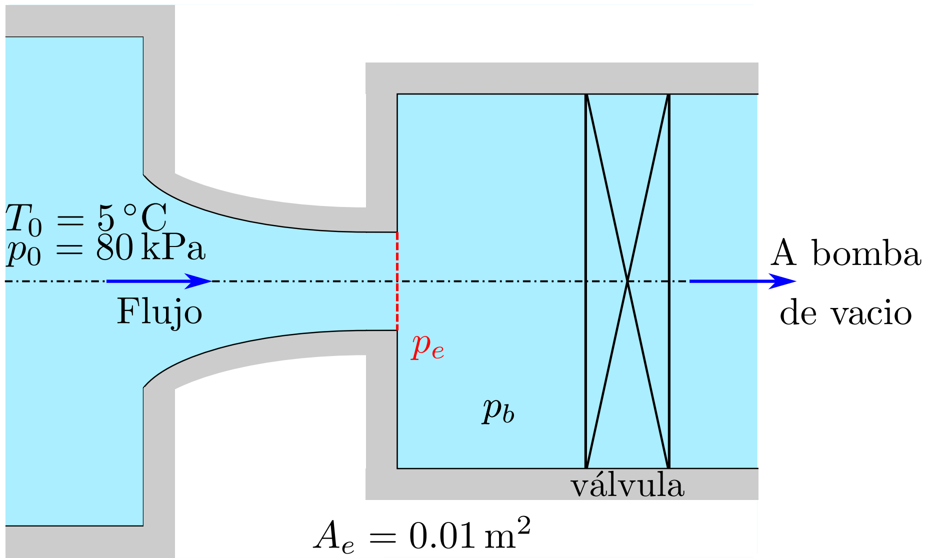

Figura 1

Respuesta:

El flujo másico máximo se puede obtener a partir de la condición crtica para toberas, la cual indica que el máximo valor para Ma en la sección de menor área del conducto (garganta) debe ser igual a 1. Para toberas convergentes, la garganta coincidirá con el plano de salida, mientras que para toberas convergente-divergentes no. El flujo másico máximo puede ser obtenido a partir de la siguiente relación:

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847 A^* \rho_0 \left(RT_0\right)^{1/2} = \frac{0.6847 p_0 A^*}{\left(RT_0\right)^{1/2}}$$

Como el área crítica (aquella requerida para que $Ma = 1$) estará determinada por el conducto ($A^* = A_e$), podemos evaluar la expresión anterior. con:

$$p_0 = 80\text{kPa}$$
$$T_0 = 5°\text{C} = 278.3 \text{ K}$$
$$A_e = 0.01\text{m}^2$$

Obtendremos:

$$\dot{m}_{\max} = \frac{0.684 \cdot 80\text{kPa} \cdot 0.01 \text{ m}^2}{\left(286.9 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 278.3\text{K}\right)^{1/2}}$$

$$\dot{m}_{max} = 1.94 \text{ kg/s}$$

La presión en el plano de salida puede ser obtenida considerando que el flujo está estrangulado (la presión en el plano de salida deberá ser igual a la presión crítica). *Nota: para toberas convergente-divergentes la presiónm crítica para flujo estrangulado se alcanzará en la garganta, que no coincide con el plano de salida.* Entonces:

$$\left(\frac{p_e}{p_s}\right)_{\text{estrangulado}} = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{2}{2.4}\right)^{1.4/0.4} = 0.528$$

Nota: la razón p^*/p_0 *siempre tendrá un valor igual a* 0.528 *para aire.*

Problema 3:

Determine las condiciones de flujo en 2 y 3 para la tobera representada en la figura 2. Considere que el flujo es isoentrópico en toda la tobera y no se forman ondas de choque.

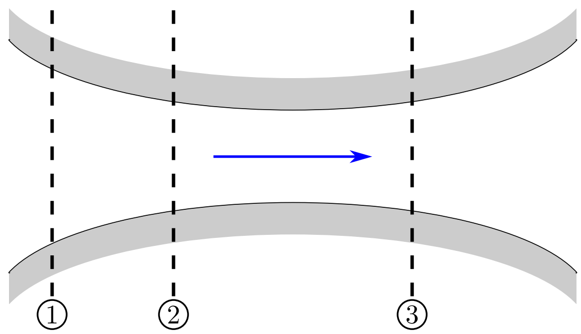

Figura 2

Considere:

- $V_1 = 180\,\mathrm{m/s}$
- $p_1 = 500\,\mathrm{kPa}$
- $T_1 = 470\,\mathrm{K}$
- $A_1 = 0.05\,\mathrm{m}^2$
- $A_2 = A_3 = 0.036\,\mathrm{m}^2$
- El flujo en 3 es supersónico

Respuesta: a) Condiciones de flujo en 2
Primero debemos determinar las propiedades de estancamiento. Para esto, calcularemos Ma_1 y calcularemos las propiedades de estancamiento en 1 a partir de las propiedades en este punto (las cuales ya son conocidas):

$$Ma_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} = 0.415$$

ya que $Ma_1 < 1$, el flujo previo a la garganta **debe** ser supersónico (incluyendo al punto 2). Las propiedades de estancamiento pueden ser obtenidas a partir de las relaciones para gases ideales:

$$\frac{T_{0_1}}{T_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2\right) \Rightarrow T_{0_1} = 486.2\mathrm{k}$$

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2\right)^{k(k-1)} \Rightarrow p_{0_1} = 563\mathrm{kPa}$$

El área crítica se calcula mediante:

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{\left(1 + 0.2Ma_1^2\right)^3}{1.728Ma_1} = 1.544$$

$$\Rightarrow A^* = 0.0323 \text{ m}^2$$

Ya conocidas las propiedades de estancamiento en 1, supondremos que (ya que no existe onda de choque) el flujo es isoentrópico en toda la tobera. Entonces, las propiedades de estancamiento y el área crítica en 2 serán iguales que las propiedades de estancamiento en 1:

$$T_{0_1} = T_{0_2}$$
$$p_{0_1} = p_{0_2}$$
$$A_1^* = A_2^*$$

Al ”extrapolar” estas propiedades, podremos calcular las propiedades de flujo en 2 a partir de las relaciones para propiedades de estancamiento para gases ideales. Primero determinaremos Ma_2 a partir de la relación de área crítica (conocemos T_{0_2}, p_{0_2}, A_2^* y A_2, necesitamos: Ma_2, T_2, p_2):

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{\left(1 + 0.2Ma_2^2\right)^3}{1.728Ma_2}$$

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{0.036m^2}{0.0323m^2} = 1.115 = \frac{\left(1 + 0.2Ma_2^2\right)^3}{1.728Ma_2}$$

Al resolver esta ecuación no lineal, debemos asegurarnos que la raiz obtenida sea menor a 1 (el flujo en este punto **debe** ser subsónico). Considerando este requerimiento obtendremos:

$$Ma_2 = 0.673$$

Conocido Ma_2 podemos calcular el resto de las propiedades utilizando las relaciones para propiedades de estancamiento:

$$\frac{T_0}{T_2} = 1.091 \rightarrow T_2 = 445.6K$$

$$\frac{P_0}{P_2} = 1.355 \rightarrow P_2 = 415.5\text{kpa}$$

además, podemos calcular la velocidad de flujo:

$$V_2 = Ma_2 \cdot c = Ma_2\sqrt{kRT_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = 284.5 \text{ m/s}$$

b) Condición de flujo en 3

Para obtener las propiedades del flujo en este punto, realizaremos el mismo procedimiento que para el punto 2, pero ahora consideraremos que el flujo debe ser supersónico. Entonces:

$$\frac{A_3}{A^*} = \frac{(1 + 0.2Ma_3^2)^3}{1.728Ma_3}$$

$$\frac{0.036}{0.0323} = \frac{\left(1 + 0.2Ma_3^2\right)^3}{1.728Ma_3}$$

Al resolver esta ecuación no lineal, ahora deberemos asegurarnos que la raiz obtenida sea mayor a 1 (para que el flujo sea supersónico). Al considerar este requerimiento obtendremos:

$$Ma_3 = 1.4$$

y el resto de las propiedades a partir de este valor:

$$\frac{P_0}{P_3} = 3.1823 \Rightarrow P_3 = 1.769 \text{ lepa}$$

$$\frac{T_2}{13} = 1.392 \to T_3 = 349.3\text{k}$$

Nota: Todas las propiedades calculadas a partir de las expresiones mencionadas en este problema (con excepción de Ma) pueden ser obtenidas a partir de las tablas del apéndice de flujos compresibles

Problema 4:

Para la tobera presentada en la figura 3 determine:

1. Condición de diseño
2. Presión máxima requerida para que exista flujo supersónico en la zona divergente
3. Presión mínima requerida para que se formen ondas de choque normales
4. Condiciones de flujo en el plano de salida si $p_b = 50\,\mathrm{kPa}$. Además, condiciones de flujo antes y despues de la onda de choque y el área transversal de la onda de choque.

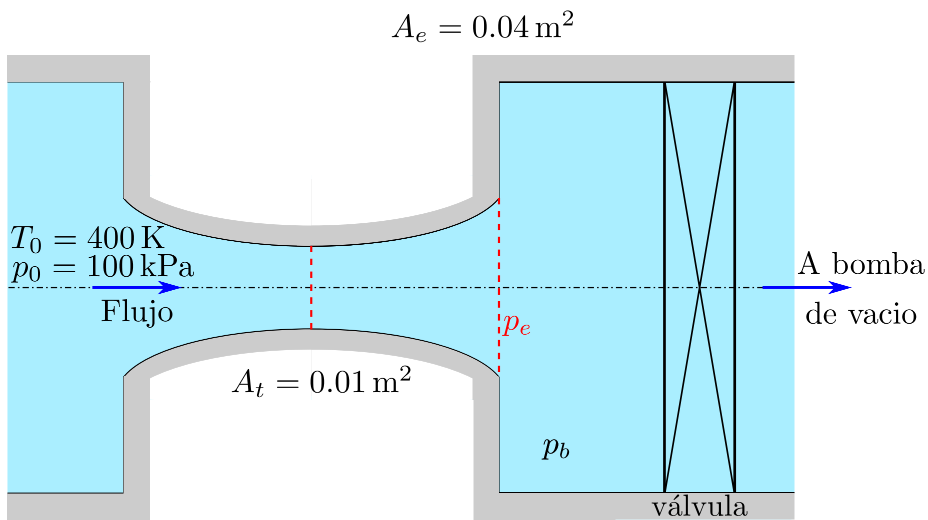

Figura 3

Respuesta:

a) Condición de diseño.

La condición de diseño será aquella para la que podremos obtener flujo supersónico posteriormente a nuestra tobera. Para que esto se cumpla no deberá haber ondas de choque en ningun punto. Es decir, el flujo será isoentrópico en toda la tobera y la presión en el plano de salida p_e deberá ser igual a la presión en el reservorio de la derecha p_b (esta última igualdad asegura que no se formarán ondas de choque oblicuas o de expansión en la zona posterior a la tobera). Ya que el flujo es isoentrópico en toda la tobera:

$$p_0 = p_{0_e}$$
$$T_0 = T_{0_e}$$
$$A^* = A_e^* = A_t = 0.01 \text{ m}^2$$

Para obtener Ma_e, utilizaremos la relación para área crítica:

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{0.04 \text{ m}^2}{0.01 \text{ m}^2} = 4 = \frac{\left(1 + 0.2\text{Ma}_\text{e}{}^2\right)^3}{1.728\text{Ma}_\text{e}}$$

Al resolver esta expresión, deberemos asegurarnos que la raiz obtenida sea mayor a 1 (la condición de diseño establece que el flujo debe ser supersónico). Al considerar este requerimiento obtendremos:

$$Ma_e = 2.94$$

a partir de este valor, podemos obtener la presión en el plano de salida:

$$\frac{p_{0_e}}{p_e} = 33.56 \rightarrow p_e = 2.97\text{kPa}$$

y $p_b = p_e = 2.97$ kPa debido a la condición de diseño.
Nota: Si aumentamos la presión p_b se generarán ondas de choque oblicuas en la salida de la tobera y si disminuimos p_b se formarán ondas de expansión

b) Presión máxima requerida para que exista flujo supersónico en la zona divergente.
Para determinar la presión máxima requerida para que exista flujo supersónico en algúna punto de la zona divergente de la tobera, deberemos considerar primero el comportamiento que tendrá el flujo de aire a medida que variamos p_b. Si iniciamos con $p_b = p_0$ no habrá flujo. A medida que disminuimos p_b ($p_b < p_0$) se generará flujo hacia la derecha. Inicialmente, obtendremos flujo incompresible en toda la tobera. Si disminuimos p_b lo suficiente, la velocidad de flujo aumentará y observaremos efectos de compresibilidad en el flujo, mas este se mantendrá aún subsónico en toda la tobera. Si disminuimos p_b aún más podremos llegar al punto en que logremos obtener Ma_1 en la garganta. En este punto crítico, inicialmente obtendremos flujo subsónico en la zona divergente de la tobera. Además, hasta este punto, podremos considerar que el flujo en toda la tobera es isoentrópico. Si continuamos disminuyendo p_b, obtendremos inicialmente flujo supersónico en la zona divergente con ondas de choque en la tobera (y posteriormente, flujo con ondas de choque oblicuas posteriores a la tobera, condición de diseño y flujo con ondas expansivas posteriores a la tobera, en ese orden). En resumidas cuentas, para determinar la presión máxima p_b requerida para que exista flujo supersónico en algún punto, deberemos determinar la presión para la que:

- El flujo está estrangulado ($Ma_t = 1$)
- El flujo en la zona divergente es subsónico (esto implica además que el flujo será subsónico en toda la tobera y que no se forman ondas de choque en ningún punto)
- Todo el flujo es isoentrópico

Considerando el último requerimiento, podemos obtener las propiedades de estancamiento y críticas para el plano de salida:

$$\begin{aligned}
&p_0 = p_{0_e}\\
&T_0 = T_{0_e}\\
&A^* = A_e^* = A_t = 0.01 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

y a partir de ellas calcular Ma_2:

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{0.04 \text{ m}^2}{0.01 \text{ m}^2} = 4 = \frac{\left(1 + 0.2\mathrm{Ma_e}^2\right)^3}{1.728\mathrm{Ma_e}}$$

Al resolver esta expresión, deberemos asegurarnos que la raiz obtenida sea menor a 1 (ya que establecimos que el flujo debe ser subsónico en la zona divergente). Al considerar este requerimiento obtendremos:

$$M_{a_e} = 0.1465$$

El cual podemos utilizar para determinar la presión en el plano de salida a partir de la correspondiente expresión para presión de estancamiento. Entonces:

$$\frac{p_{0_e}}{p_e} = 1.015 \rightarrow p_e = \frac{100\text{kpa}}{1.015} = 98.5\text{kPa}$$

Ya que no existen ondas de choque en ningún punto (incluyendo el plano de salida):

$$p_e = p_b = 98.5\text{kPa}$$

c) Presión mínima requerida para que se formen ondas de choque normales
Para determinar esta presión deberemos considerar que si disminuimos la presión p_b a partir del punto anterior, observaremos que la onda de choque normal se desplazará progresivamente hacia la derecha, hasta que alcanze el plano de salida. A partir de este punto, si disminuimos aún más p_b, observaremos ondas de choque oblicuas posteriores al plano de salida (luego condición de diseño y despues ondas expansivas posteriores al plano de salida). Entonces, deberemos determinar la presión p_b para la que exista una onda de choque normal en el plano de salida. Es decir, el flujo será isoentrópico hasta este punto (toda la tobera) y luego tendremos una onda de choque normal. Si consideramos la primera condicón, podremos determinar p_e de igual forma a que lo hicimos en el punto a (flujo isoentrópico en toda la tobera, con flujo supersónico en la zona divergente). Entonces:

$$p_e = 2.97\text{kPa}$$

$$Ma_e = 2.94$$

La presión p_b estará determinada por el cambio de presión a través de la onda de choque. Utilizando la expresión correspondiente a este cambio:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2kMa_1^2 - (k-1)\right]$$

Para esta expresión deberemos considerar que 2 representa el punto posterior a la onda de choque y 1 el punto anterior. Entonces:

$$Ma_1 = Ma_3$$

y:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_b}{p_e}$$

Al resolver esta ecuación:

$$p_b = 9.9175 \cdot p_e = 9.9175 \cdot 2.94\text{kPa} = 29.2\text{kPa}$$

d) Condiciones de flujo en el plano de salida si $p_b = 50\,\text{kPa}$. Además, condiciones de flujo antes y despues de la onda de choque y el área transversal de la onda de choque.
Ya que $p_b = 50\,\text{kPa} < 98.5\,\text{kPa}$ observaremos flujo supersónico en la zona divergente (según establecimos en el punto b). Además, ya que $p_b = 50\,\text{kPa} > 29.2\,\text{kPa}$, se formará una onda de choque normal dentro de la zona divergente de la tobera (según determinamos en el punto c). Ya que la onda de choque no se forma en el plano de salida podremos utilizar la siguiente expresión:

$$\frac{p_e}{p_{0_1}}\frac{A_e}{A_t} = \frac{p_e}{p_{0_e}}\frac{A_e}{A_e^*}$$

Además, ya que el flujo posterior a la onda de choque normal será isoentrópico (y no observaremos la formación de otra onda de choque ya que el fluido debe ser subsónico posteriormente a la onda de choque normal), además:

$$p_e = p_b = 50\text{kPa}$$

Entonces:

$$\frac{50\text{kPa}}{1000\text{kPa}}\frac{0.04\text{m}^2}{0.01\text{m}^2} = 4 = \frac{p_e}{p_{0_e}}\frac{A_e}{A_e^*}$$

Las razones de la derecha pueden ser determinadas utilizando las expresiones para condiciones de estancamiento y área crítica:

$$\frac{p_{0_e}}{p_e} = \left(1 + \frac{k-1}{2}Ma_e^2\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{A_e}{A_e^*} = \frac{1}{Ma_e}\left(\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)Ma_e^2}{\frac{1}{2}(k+1)}\right)^{(1/2)(k+1)/(k-1)}$$

notar que $p_{0_e} \neq p_0$ y $A_e^* \neq A^*$, debido a que existe un cambio no isoentrópico ocacionado por la onda de choque. Reemplazando estas dos ecuaciones podemos calcular Ma_e:

$$4 = \frac{p_{0_e}}{p_e} = \left(1+\frac{k-1}{2}Ma_e^2\right)^{k/(k-1)} * \frac{A_e}{A_e^*} = \frac{1}{Ma_e}\left(\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)Ma_e^2}{\frac{1}{2}(k+1)}\right)^{(1/2)(k+1)/(k-1)}$$

Al resolver esta ecuación no lineal, obtendremos:

$$Ma_e = 0.287$$

Nota: Para determinar Ma_e utilizando la tabla correspondiente, deberemos iterar utilizando la ecuación objetivo:

$$\text{E.O.} = \frac{p_e}{p_{0_e}}\frac{A_e}{A_e^*} - 4$$

donde los valores de $\frac{p_e}{p_{0_e}}$ y $\frac{A_e}{A_e^*}$ se obtendrán a partir de la tabla y deberemos modificar el valor de Ma_e. Conocido Ma_e podemos determinar la razón A_e/A_e^* a partir de la relaciones para área crítica. Entonces:

$$\frac{Ae}{A_e^*} = 2.118$$

Recordando que $p_{0_1} = p_0$ ya que el flujo es isoentrópico hasta el punto previo a la onda de choque y $p_{0_e} = p_{0_2}$ ya que el fluijo es isoentrópico a partir de la onda de choque (con $\hat{S}_2 > \hat{S}_1$), la presión de estancamiento en el plano de salida puede ser determinada a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A_e^*}$$

con A_e/A_e^* calculado en el paso previo y A_t/A_e definido por la geometría del sistema.
Reemplazando los correspondientes valores obtendremos:

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{A_t}{A_e}\cdot\frac{A_e}{A_e^*} = \frac{0.01\ \text{m}^2}{0.04\ \text{m}^2}\cdot 2.118 = 0.5295$$

Entonces:

$$p_{0_2} = 0.2592\cdot p_{0_1} = 0.5295\cdot 100\text{kPa} = 52.95\text{kPa}$$

podemos determinar la temperatura en el plano de salida a partir de la relación para temperatura de estancamiento (a partir de Ma_e)

$$\frac{T_{0_e}}{T_e} = 1.016$$

y como $T_{0_e} = T_{0_2}$ y $T_{0_2} = T_{0_1}$ (la temperatura de estancamiento se mantiene constante a través de una onda de choque normal):

$$T_e = 392.96K$$

Para calcular las condiciones de flujo en los puntos previos y posteriores a la onda de choque (puntos 1 y 2) deberemos primero determinar Ma_1. Esto lo lograremos a partir de la relación para el cambio de presión de estancamiento a través de una onda de choque:

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \left[\frac{(k+1)Ma_1^2}{2+(k-1)Ma_1^2}\right]^{k/(k-1)} \left[\frac{k+1}{2kMa_1^2-(k-1)}\right]^{1/(k-1)} =$$

con $p_{0_2}/p_{0_1} = 0.5295$ (calculado previamente), al resolver esta ecuación no lineal obtendremos:

$$Ma_1 = 2.425$$

*Nota: debemos recordar que $Ma_1 > 1$ ya que el flujo previo a la onda de choque **debe** ser supersónico.* Conocido Ma_1 podemos calcular las propiedades del fluido previo a la onda de choque utilizando las correspondientes relaciones para propiedades de estancamiento:

$$\frac{p_0}{p_1} = 15.2 \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{100\text{kPa}}{15.2} = 6.6\text{kPa}$$

$$\frac{T_0}{T_1} = 2.18 \longrightarrow T_1 = \frac{400k}{2.18} = 183.5\text{K}$$

También podemos calcular Ma_2, T_2 y p_2 a partir de Ma_1 utilizando la relación para onda de choque:

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{(k-1)Ma_1^2+2}{2kMa_1-(k-1)}} \Rightarrow Ma_2 = 0.5205$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 3.2428 \Rightarrow p_2 = p_1 \cdot 3.2428 = 21.4 \text{ kPa}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 2.0643 \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot 2.0643 = 378.3\text{k}$$

Finalmente, para el área transversal de la onda de choque, utilizaremos la relación para área crítica (con $A^* = A_t$):

$$\left(\frac{A_1}{A^*}\right) = 2.425 \Rightarrow A_1 = A_t \cdot 2.425 = 0.1 \cdot 2.425 = 0.2425\text{m}^2$$

Nota: $A_2 = A_1$ ya que el grosor de la onda de choque es despreciable, podemos calcular este *área considerando la* relación para el área crítica en el punto 2 (con $A_2^* = A_e^*$)

Nota: Todas las propiedades calculadas a partir de las expresiones mencionadas en este problema (con excepción de Ma) pueden ser obtenidas a partir de las tablas del apéndice de flujos compresibles