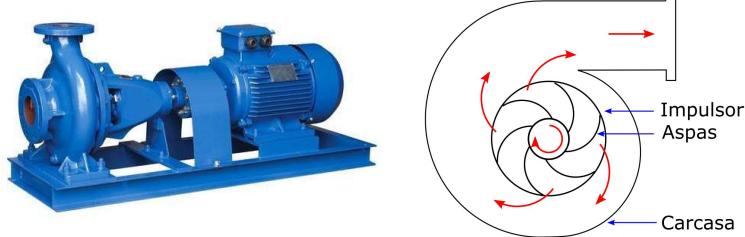


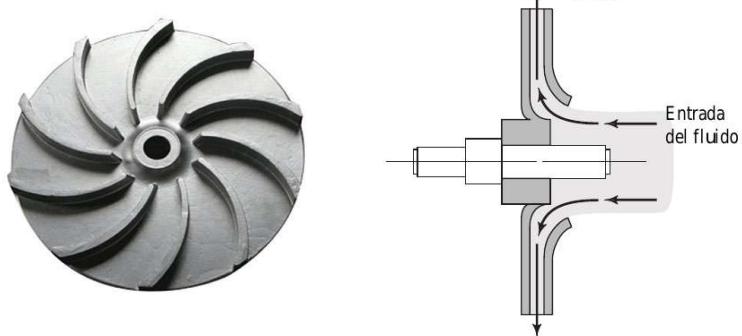
Caso de estudio: Leyes de Semejanza para bombas centrífugas

Las bombas son equipos que **entregan energía al fluido**, permitiéndole fluir bajo condiciones en las cuales no lo haría espontáneamente. El tipo de bombas más utilizadas para impulsar fluidos incompresibles corresponden a las **bombas centrífugas**.

Esquema general de una bomba centrífuga



Impulsor



Funcionamiento de una bomba centrífuga

El funcionamiento de una bomba centrífuga puede ser simplificado al siguiente proceso:

- El fluido ingresa a la bomba a través de la línea de descarga, en el centro del impulsor, con velocidad paralela al eje de este último
- El fluido es expulsado radialmente, debido al giro del impulsor

- La dirección del flujo es rectificada por la carcasa y el fluido es expulsado a través de la línea de descarga

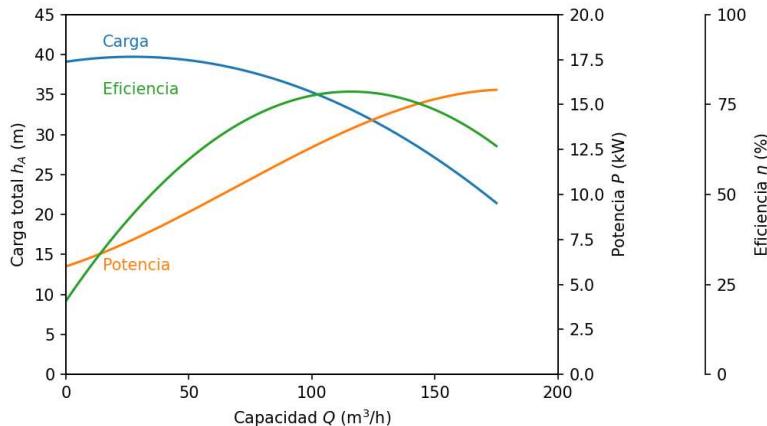


En el proceso anteriormente descrito, la bomba entrega energía al fluido, la cual es normalmente caracterizada mediante la **carga que eleva la bomba** h_A :

$$h_A = \frac{p_D - p_S}{\gamma} \quad (1)$$

donde los sufijos D y S indican descarga y succión, respectivamente

El funcionamiento de una bomba centrífuga variará de modelo en modelo. De esta forma, cada bomba tendrá asociada **una curva de rendimiento** en particular.



La carga que eleva la bomba h_A , el caudal generado Q (capacidad), la potencia P requerida para su funcionamiento y la eficiencia η con la cual trabaja están relacionados entre ellos. Esta relación (y la relación con otros parámetros adicionales) no puede ser determinada mediante métodos analíticos, **por lo que la caracterización de estas curvas debe realizarse experimentalmente**. Por lo general, esta caracterización es realizada por el fabricante y es presentada en catálogos a través de gráficos que incluyen estas curvas de rendimiento.

Es importante destacar que las curvas de rendimiento son desarrolladas para un modelo en específico de bomba (con un tamaño determinado, incluyendo el **diámetro del impulsor D**), trabajando a una **velocidad**

del impulsor ω específica, y con un **fluido** en particular. De esta forma, si deseamos determinar las curvas de rendimiento para otras condiciones de operación, deberemos realizar experimentos adicionales para determinar estas nuevas curvas de rendimiento (**¡o hacer uso del análisis dimensional!**).

Ejemplos de situaciones en las cuales deseamos extrapolar estas curvas son:

- **Cambio de la velocidad del impulsor** : la velocidad del impulsor es determinada por el motor de la bomba. Si es motor eléctrico, dependerá de la frecuencia de la corriente eléctrica que es alimentada a este. En Chile, $\omega = 900, 1450$, o 2900 rpm para motores de 6, 4 y 2 polos, respectivamente.
 - Si disponemos de la curva de rendimiento para una velocidad, podemos estimar la curva que se obtendría si se cambia el motor (notar que a medida que aumenta ω , también lo hará h_A y Q).
 - Si empleamos variadores de frecuencia, es posible cambiar ω . Esta estrategia es empleada para controlar el flujo.
- **Escalamiento de la bomba** : si el fabricante desea diseñar una bomba de mayor capacidad, puede realizar estimaciones iniciales del tamaño requerido de la bomba a partir de las curvas de rendimiento de una bomba conocida. **Esto suponiendo que existirá similitud geométrica entre ambas bombas**

A modo de resumen:

Disponemos de:

- Curva de rendimiento de una bomba, de geometría establecida, trabajando bajo condiciones de operación fijas.

Deseamos:

- Determinar expresiones que nos permitan extrapolar la curva de rendimiento a:
 - Condiciones de operación distintas a las cuales la curva de rendimiento fue determinada (**cambio de la velocidad del impulsor**)
 - Bombas de mayor (o menor) tamaño, de **geometría similar** a la de la bomba de la cual disponemos la curva de rendimiento.

Análisis dimensional: Aplicación del teorema Pi de Buckingham

1- Listado de parámetros relevantes

La experiencia ha demostrado que la carga elevada por una bomba, expresada como energía por unidad de masa (gh_A), depende de:

- El caudal Q
- La densidad del fluido ρ
- La velocidad del impulsor ω (expresada por lo general en rpm)
- El diámetro del impulsor D

- La viscosidad del fluido μ
- La rugosidad del material que compone la bomba

De esta forma:

$$gh_A = f(Q, \rho, \omega, D, \mu, \epsilon) \quad (2)$$

Notar que el producto gh_A será considerado como una única variable compuesta a partir de este punto

2- Dimensiones primarias

Consideraremos como dimensiones primarias M, L y t

3- Matriz dimensional

Las dimensiones de los parámetros involucrados son:

	gh_A	Q	ρ	ω	D	μ	ϵ
M	0	0	1	0	0	1	0
L	2	3	-3	0	1	-1	1
t	-2	-1	0	-1	0	-1	0

y la correspondiente matriz dimensional es:

$$\mathbf{A}_{dim} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4- Determinación de la reducción j

El rango de la matriz dimensional es:

$$\text{rank}(\mathbf{A}_{dim}) = 3$$

De esta forma, $j = 3$. Ya que el proceso considera 7 parámetros dimensionales, deberemos:

- Seleccionar 3 variables de repetición
- Generar 4 grupos adimensionales

5- Variables de repetición

Consideraremos como variables de repetición: D, ω y ρ

6- Ecuaciones dimensionales

Primer grupo adimensional Π_1

$$\Pi_1 = D^a \omega^b \rho^c (gh_A) \Rightarrow (L)^a (t^{-1})^b (ML^{-3})^c (L^2 t^{-2}) = M^0 L^0 t^0 \quad (3)$$

$$\begin{array}{ll} M : & c = 0 \\ L : & a - 3c + 2 = 0 \\ t : & -b - 2 = 0 \end{array}$$

En forma matricial:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -2 \\ 2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -2.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \end{array} \right]$$



De esta forma:

$$\Pi_1 = \frac{gh_A}{D^2 \omega^2}$$

Segundo grupo adimensional Π_2

$$\Pi_2 = D^a \omega^b \rho^c \mu \Rightarrow (L)^a (t^{-1})^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}t^{-1}) = M^0 L^0 t^0 \quad (4)$$

La ecuación dimensional, en forma matricial:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -2.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \end{array} \right]$$



De esta forma:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \omega D^2}$$

Tercer grupo adimensional Π_3

$$\Pi_2 = D^a \omega^b \rho^c Q \Rightarrow (L)^a (t^{-1})^b (ML^{-3})^c (L^3 t^{-1}) = M^0 L^0 t^0 \quad (5)$$

La ecuación dimensional, en forma matricial:

$$\begin{matrix} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -3.0 \\ -1.0 \\ 0.0 \end{array} \right]$$



De esta forma:

$$\Pi_3 = \frac{Q}{D^3 \omega}$$

Cuarto grupo adimensional Π_4

$$\Pi_2 = D^a \omega^b \rho^c \epsilon \Rightarrow (L)^a (t^{-1})^b (ML^{-3})^c (L) = M^0 L^0 t^0 \quad (6)$$

La ecuación dimensional, en forma matricial:

$$\begin{matrix} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -1.0 \\ -0.0 \\ 0.0 \end{array} \right]$$



De esta forma:

$$\Pi_4 = \frac{\epsilon}{D}$$

7- Verificación y presentación

La verificación queda de ejercicio para el(la) lector(a)

La funcionalidad entre los grupos adimensionales determinados es:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$$

$$\frac{gh_A}{D^2\omega^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho\omega D^2}, \frac{Q}{D^3\omega}, \frac{\epsilon}{D}\right) \quad (7)$$

En esta expresión:

- El término en azul se denomina **coeficiente de carga hidrostática** C_H

$$C_H = \frac{gh_A}{D^2\omega^2}$$

- El término en rojo es el **número de Reynolds** Re , con velocidad características ωD :

$$Re = \frac{\rho(\omega D)D}{\mu}$$

- El término en magenta se denomina **coeficiente de capacidad** C_Q

$$C_Q = \frac{Q}{D^3\omega}$$

- El término en verde se denomina **rugosidad relativa** ϵ/D

Leyes de semejanza

A partir de la relación entre grupos dimensionales obtenida utilizando el teorema Pi de Buckingham y bajo el supuesto de que existe similitud entre **modelo** (correspondiente a la bomba cuya curva de rendimiento fue caracterizada) y **prototipo** (la condición de operación o bomba que deseamos predecir), podemos establecer:

Si:

$$\left(\frac{\mu}{\rho\omega D^2} \right)_1 = \left(\frac{\mu}{\rho\omega D^2} \right)_2$$

$$\left(\frac{Q}{D^3\omega} \right)_1 = \left(\frac{Q}{D^3\omega} \right)_2$$

$$\left(\frac{\epsilon}{D} \right)_1 = \left(\frac{\epsilon}{D} \right)_2$$

Entonces:

$$\left(\frac{gh_A}{D^2\omega^2} \right)_1 = \left(\frac{gh_A}{D^2\omega^2} \right)_2$$

Los sufijos 1 y 2 indican modelo y prototipo.

La expresión anterior requiere igualar al menos tres grupos adimensionales, con tal de predecir un cuarto. A pesar de esto, es común hacer las siguientes simplificaciones:

- Las bombas, por lo general, trabajan a números de Reynolds elevados (de 0.8 a 1.5×10^7), con flujos completamente turbulentos. Ya que un cambio en la condición de operación implicaría un cambio en este parámetro relativamente pequeño (esto en especial considerando la magnitud elevada a la cual se trabaja). Es por esto que **el efecto del número de Reynolds sobre el coeficiente de carga hidrostática generalmente se considera como constante**.
- La rugosidad relativa por lo general es desconocida y varía al comparar bombas, pero debido al alto número de Reynolds al cual se trabaja, se espera que su efecto se mantenga más o menos constante

De esta forma, al analizar la similitud entre modelo y prototipo nos limitamos a establecer:

$$C_H = f(C_Q)$$

De esta forma:

Si:

$$\left(\frac{Q}{D^3\omega} \right)_1 = \left(\frac{Q}{D^3\omega} \right)_2$$

Entonces:

$$\left(\frac{gh_A}{D^2\omega^2} \right)_1 = \left(\frac{gh_A}{D^2\omega^2} \right)_2$$

Reordenando la primera expresión podemos obtener:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^3$$

y al reordenar la segunda expresión (con $g_1 = g_2$, ya que las bombas son operadas en el mismo campo gravitacional):

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

Estas expresiones permite relacionar **puntos homólogos** entre modelo y prototipo (puntos en los que existe similitud). Las dos expresiones anteriores son denominadas **Leyes de semejanza o de afinidad** y son válidas para bombas y turbinas.

En adición a las expresiones anteriores, es posible determinar una expresión que relate la potencia requerida por modelo y prototipo, si estos se encuentran en un punto homólogo:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^3 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^5$$

Esta expresión se determina mediante un análisis dimensional, a partir de la funcionalidad $P = f(Q, \rho, \omega, D, \mu)$ y su obtención queda como ejercicio para el(la) lector(a).

Aplicación: Efecto del cambio de la velocidad del impulsor sobre la curva de rendimiento de la bomba

En el siguiente ejemplo se escala la curva de rendimiento de una bomba para distintos valores de ω , a partir de la curva de rendimiento medida para $\omega = 2900 \text{ rmpm}$. El diámetro del impulsor (y la geometría) de la bomba se mantienen constantes. De esta forma, las leyes de afinada se reducen a:

- **Capacidad**

$$Q_2 = Q_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

- **Capacidad de carga**

$$h_2 = h_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2$$

