Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción

MECÁNICA DE FLUIDOS

5 - Análisis dimensional

Análisis dimensional

En este capítulo exploraremos la técnica de **análisis dimensional**, la cual (a groso modo) consiste en el uso de parámetros adimensionales para la descripción de procesos físicos. Esta técnica permitirá analizar problemas que pudieran ser muy complejos para las técnicas de análisis integral o diferencial y se basa en la agrupación de las variables (o parámetros), mediante su multiplicación o cociente, en grupos que se caracterizan por carecer de dimensiones (dicho de otra forma, por ser adimensionales). Esta agrupación resulta en una disminución efectiva de la cantidad de parámetros requeridos para modelar el fenómeno en cuestión y, por ende, simplificando el problema a estudiar. Además, si se realiza de manera correcta, permitirá plantear, interpretar, presentar y extrapolar resultados experimentales.

Resultados de aprendizaje

R8: Proponer modelos a escala para abordar diferentes problemas de mecánica de fluidos a partir del análisis dimensional.

Objetivo de la clase

- **Reconocer los principios del análisis dimensional**
- **Aplicar el teorema pi de Buckingham para generar parámetros adimensionales**
- **Reconocer grupos adimensionales relevantes para la mecánica de fluidos**

Dimensiones

Dimensión: medida con la que una magnitud física es expresada cuantitativamente.

En este curso utilizaremos el sistema MLtT, consistente de 4 dimensiones básicas:

- Tiempo (t)
- Longitud (L)
- Masa (M)
- Temperatura (T)

Ejemplos:

- Fuerza
$$[F] = \mathrm{MLt}^{-2}$$
- Viscosidad
$$[\mu] = \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{t}^{-1}$$
- Viscosidad cinemática
$$[\nu] = \mathrm{L}^{2}\mathrm{t}^{-1}$$
- Velocidad
$$[v] = \mathrm{Lt}^{-1}$$
- Flujo másico
$$[\dot{m}] = \mathrm{Mt}^{-1}$$
- Flujo volumétrico
$$[Q] = \mathrm{L}^{3}\mathrm{t}^{-1}$$

Principio de homogeneidad dimensional

- Una ecuación deducida analíticamente que representa un fenómeno físico debe ser válida para todos los sistemas de unidades.
- Cada término aditivo en la ecuación debe tener las mismas dimensiones.
- La ecuación es valida en cualquier sistema de unidades.
- La integración o diferenciación de la ecuación cambiara su dimensionalidad, mas no su homogeneidad.

Ejemplo: Posición de un cuerpo en caida libre:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

- $[y] = [y_0] = \mathrm{L}$
- $[v_0] = \mathrm{Lt}^{-1}$
- $[t] = \mathrm{t}$
- $[g] = \mathrm{Lt}^{-2}$

$$[y] = [y_0] = [v_0 t] = \left[\frac{1}{2} g t^2\right] = L$$

Grupos adimensionales

Los **grupos adimensionales** corresponden a grupos de cantidades **cuyo cociente o producto carece de dimensiones**.

Ejemplo: Número de Reynolds (Re)

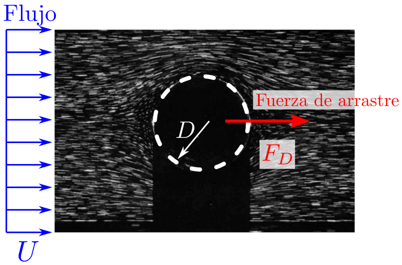
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

Podemos comprobar fácilmente que es efectivamente adimensional, al analizar las dimensiones de cada uno de sus términos:

$$[\mathrm{Re}] = \frac{[\rho][V][L]}{[\mu]} = \frac{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}}\mathrm{L}}{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Lt}}} = [1]$$

Principios del análisis dimensional

Analicemos los principios del análisis dimensional y su importancia mediante el siguiente ejemplo: **Deseamos determinar la fuerza que se ejerce sobre una esfera sumergida en un campo de flujo.**



Analíticamente, podemos determinar esta fuerza para flujos con velocidades muy pequeñas (flujos reptante):

$$F_D = 3\pi\mu UD$$

Sin embargo, a medida que la velocidad aumenta, este análisis se vuelve muy complejo (¡incluso imposible!)

Propuesta: Ya que un análisis teórico no será posible, investiguemos experimentalmente el flujo alrededor de la esfera **(pero antes, ¡debemos planificar nuestros experimentos!)**

Previo a diseñar nuestros experimentos, consideremos los parámetros que supondremos tendrán un efecto importante sobre la fuerza de arrastre:

- Velocidad del flujo (U)
- Diámetro de la esfera (D)
- Propiedades del fluido:
  - Viscosidad (μ)
  - Densidad (ρ)

De esta forma, podremos inicialmente suponer que la fuerza de arrastre F_D será una función de U, D, μ y ρ:

$$F_D = f(U, D, \rho, \mu)$$

Ahora, diseñemos nuestros experimentos:

1. Iniciemos con 10 **mediciones** independientes sobre una esfera de diametro fijo en un tunel de viento, en las que variamos la **velocidad** del flujo.
2. Analicemos ahora el efecto del diámetro de la esferza (supongamos que **mediciones sobre esferas de 10 diámetros distintos** bastan)

¿Existe un efecto cruzado entre diámetro y velocidad?

- Deberemos realizar las 10 mediciones de velocidad sobre cada una de las 10 esferas **(En total, 100 experimentos)**

Sumemos ahora el posible efecto de la **viscosidad** y **densidad** (que podremos caracterizar con 10 corridas experimentales para cada propiedad)

$\Rightarrow$ **¡Deberemos realizar 10000 corridas experimentales para caracterizar nuestro flujo!**

Propuesta alternativa: Al realizar un análisis dimensional descubriremos que los parámetros que caracterizan nuestro flujo (F_D, U, ρ, μ, D) se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$\frac{F_D}{\rho U^2 D^2} = f'\left(\frac{\rho U D}{\mu}\right)$$

Si multiplicamos el término en rojo por 8π obtendremos el coeficiente de arrastre C_D (que corresponde a un grupo adimensional):

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 \frac{\pi}{4} D^2}$$

El término en azul corresponde al número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U D}{\mu}$$

De esta forma:

$$C_D = f'(\mathrm{Re})$$

¡Hemos reducido nuestro problema a dos parámetros!

Esta reducción de parámetros sugiere que podemos reducir el número de experimentos considerablemente, ya que exiten menos variables que debemos considerar

Teorema Pi de Buckingham

El **teorema Pi de Buckingham** permite determinar una relación entre grupos adimensionales, reduciendo efectivamente el número de variables involucradas y simplificando el problema a estudiar.

Este teorema se divide en dos partes:

- Si un proceso físico satisface el principio de homogeneidad dimensional e involucra n variables, entonces **puede ser reducido a una relación entre solo k variables adimensionales o Πs**. La reducción $j = n - k$ será igual al máximo número de variables que no forman un pi entre ellas y siempre es menor o igual que el número de dimensiones que describen las variables

En nuestro problema de la esfera:

- Existen 5 variables (F, D, μ, ρ y U)
- Las variables están descritas por 3 dimensiones (M, L y t)

$$k = n - j \geq 5 - 3 = 2$$

- Encontrar la reducción j y después seleccionar j variables que no formen un pi entre ellas. Cada grupo pi deseado será una potencia del producto de estas j variables más una variable adicional, a la cual se le asigna cualquier exponente distinto a cero. Cada grupo pi encontrado será independiente.

Aplicación del teorema Pi de Buckingham

El teorema Pi de Buckingham puede ser convenientemente dividido en 7 pasos (en rojo, la aplicación al ejemplo discutido en la sección anterior)

1. **Contar y hacer una lista con las *n* variables involucradas en el problema**
   En el ejemplo anterior existen 5 variables: F, D, μ, ρ y U.
2. **Seleccionar un conjunto de dimensiones primarias**
   Las dimensiones primarias son: M, L y t
3. **Hacer una lista con las dimensiones de cada variable**

	F	U	D	ρ	μ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1
t	-2	-1	0	0	-1

4. **Encontrar la reducción** $j = n - k$

Matriz dimensional del proceso (notar que se obtiene a partir de la tabla desarrollada en el paso anterior):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La reducción j será equivalente al rango de la matriz dimensional:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ El rango de la matriz es } 3 \rightarrow j = 3$$

5. **Seleccionar un grupo de j variables, las cuales (en conjunto) contengan todas las dimensiones primarias.**
   - Estas variables serán combinados con cada uno de los parámetros restantes (uno a la vez), por lo que son denominadas como variables de repetición
   - Las dimensiones de las variables de repetición seleccionadas no pueden ser obtenidas mediante potencias de otras variables de repetición
   - No seleccionar el parámetro dependiente como variable de repetición

Variables de repetición ρ, U y D

6. **Armar ecuaciones dimensionales, combinando los parámetros seleccionados en el paso anterior con el resto de los parámetros. Resolver las ecuaciones dimensionales para obtener los k grupos adimensionales.**

$$\Pi_1 = \rho^a U^b D^c F \rightarrow \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = \left(M^0 L^0 t^0\right)$$

Igualando los exponentes para cada dimensión:

$$\begin{aligned} M: & \quad a + 1 = 0 & & a = -1 \\ L: & \quad -3a + b + c + 1 = 0 & \rightarrow \quad & c = -2 \\ t: & \quad -b - 2 = 0 & & b = -2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 D^2}$$

El segundo grupo adimensional se construye de igual forma:

$$\Pi_2 = \rho^d U^e D^f \mu \rightarrow \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = \left(M^0 L^0 t^0\right)$$

$$\begin{aligned} M: &\quad d + 1 = 0 \\ L: &\quad -3d + e + f - 1 = 0 \\ t: &\quad -e - 1 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} d &= -1 \\ f &= -1 \\ e &= -1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D}$$

7. **Verificar que todos los sean adimensionales. Escriba la relación entre los grupos adimensionales obtenidos.**

Verificación:

$$[\Pi_1] = \left[\frac{F}{\rho U^2 D^2}\right] = \frac{\left(\frac{ML}{t^2}\right)}{\left(\frac{M}{L^3}\right)\left(\frac{L}{t}\right)^2 (L)^2} = [1]$$

$$[\Pi_2] = \left[\frac{\mu}{\rho U D}\right] = \frac{\left(\frac{ML}{t}\right)}{\left(\frac{M}{L^3}\right)\left(\frac{L}{t}\right)(L)} = [1]$$

La relación funcional entre los dos grupos será:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \Rightarrow \frac{F}{\rho U^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho U D}\right)$$

El término de la izquierda corresponde a 8π veces el coeficiente de arrastre C_D y el de la derecha a Re^{-1}:

$$C_D = f(\mathrm{Re})$$

Lineamientos para elegir variables de repetición

- No seleccionar la variable dependiente como variable de repetición, de caso contrario podrá aparecer en todos los grupos adimensionales.
- Los parámetros repetitivos seleccionados no deben formar un grupo adimensional entre ellos mismos.
- Los parámetros repetitivos seleccionados deben contener (en conjunto) todas las dimensiones primarias del problema.
- No escoger parámetros adimensionales como variables de repetición. Los parámetros adimensionales (por ejemplo, ángulos) son grupos adimensionales por sí solos.
- No escoger variables que posean las mismas dimensiones o que sean potencias de la otra.
- De ser posible, escoger constantes dimensionales sobre variables dimensionales.
- De ser posible, escoger parámetros comúnes.
- De ser posible, escoger parámetros simples.

Lineamientos para utilizar los grupos adimensionales resultantes

- Los grupos adimensionales pueden ser elevados a una potencia constante pura adimensional
- Se puede aplicar una operación funcional sobre un grupo adimensional (por ejemplo seno, coseno, etc.).
- Los grupos adimensionales pueden ser muttiplicados por una constante pura adimensional.
- Se puede formar un producto o cociente de dos (o más) grupos adimensionales para reemplazar uno de ellos.
- Se puede reemplazar un parámetro dimensional en el grupo adimensional por otro de igual dimensión.

Grupos adimensionales relevantes para la mecánica de fluidos

Fuerzas (relevantes) que actúan en el flujo de fluidos:

- Inercia $\propto \rho V^2 L^2$
- Fuerzas viscosas $\sim \tau A = \mu \frac{du}{dy} A \propto \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L$
- Presión $\sim \delta p A \propto \delta p L^2$
- Gravedad $\sim mg \propto g \rho L^3$
- Tensión superficial $\sim \gamma L$
- Fuerza de compresibilidad $\sim \kappa A \propto \kappa L^2$

- Número de Reynolds (Re)

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \propto \frac{\text{Inercia}}{\text{Viscosidad}}$$

- Número de Euler (Eu), coeficiente de presión (C_p)

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \propto \frac{\text{Presión}}{\text{Inercia}}$$

- Número de cavitación (Ca)

$$\mathrm{Ca} = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} \propto \frac{\text{Presión}}{\text{Inercia}}$$

- Número de Froude (Fr)

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \propto \sqrt{\frac{\text{Inercia}}{\text{Gravedad}}}$$

- Número de Weber (We)

$$\mathrm{We} = \frac{\rho V^2 L}{\gamma} \propto \frac{\text{Inercia}}{\text{Tensión superficial}}$$

- Número de Mach (Ma)

$$\mathrm{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}} = \frac{V}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}} \propto \sqrt{\frac{\text{Inercia}}{\text{Compresibilidad}}}$$

Modelamiento y similitud

Previo a discutir los conceptos de modelamiento y de similitud, debemos hacer distinción entre dos conceptos:

- **Prototipo**: sistema físico para el cual se realizan las predicciones.
- **Modelo**: **representación** de un sistema físico que puede ser utilizado para predecir el comportamiento del sistema en algún aspecto deseado.

Teoría de modelos

En base a los principios del análisis dimensional, cualquier problema puede ser descrito en base a un conjunto de Πs, tal que:

$$\Pi_i = f(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_n)$$

Si la relación anterior describe el comportamiento de un prototipo, una relación similar puede ser desarrollada para un modelo de este prototipo:

$$\Pi_{1m} = f(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, ..., \Pi_{nm})$$

donde f tendrá la misma funcionalidad para modelo y prototipo, **siempre cuando ambos se vean afectados por el mismo fenómeno físico**

Si los Πs son desarrollados de forma que la variable que se desea predecir está contenida en Π_1, el modelo se puede diseñar y operar bajo las siguientes condiciones:

$$\Pi_{2m} = \Pi_2$$

$$\Pi_{3m} = \Pi_3$$

$$\ldots$$

$$\Pi_{nm} = \Pi_n$$

Condiciones necesarias para la similitud

Entonces, bajo la suposición de que f tiene la misma forma para modelo y prototipo:

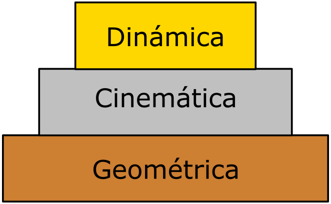
$$\Pi_1 = \Pi_{1m}$$

Ecuación de predicción

Grados de similitud

Comúnmente, el grado de similitud entre modelo y prototipo se clasifica en tres tipos:

- **Similitud geométrica**
- **Similitud cinemática**
- **Similitud dinámica**



Similitud geométrica

El modelo y el prototipo deben poseer la misma forma geométrica. El tamaño del modelo puede ser modificado mediante algún factor de escala.

Para cumplir con este tipo de similitud se requiere que:

- Todas las dimensiones del modelo tengan la misma escala lineal con las dimensiones del prototipo.
- Todos los ángulos se conserven (los ángulos en modelo y prototipo sean iguales).
- Todas las direcciones de flujo se conserven.
- La orientación del modelo y del prototipo con respecto a sus alrededores deben ser idénticas.

Similitud cinemática

La velocidad en cualquier punto en el flujo del modelo debe ser proporcional a la velocidad en el punto correspondiente en el flujo del prototipo (la escala debe ser la misma para todos los puntos).

Para cumplir con este tipo de similitud se requiere que:

- Exista semejanza geométrica.
- El escalamiento temporal debe tener la misma escala lineal que el escalamiento geométrico (L_m/L).
- Las velocidades que describen el movimiento del fluido en el modelo tienen la misma escala lineal con las velocidades del prototipo (V_m/V).

Nota: Existirá semejanza cinemática si partículas homólogas se encuentran en puntos homólogos a tiempos homólogos.

Similitud dinámica

Todas las fuerzas en el flujo del modelo se escalan por un factor constante a las fuerzas correspondientes el el flujo del prototipo.

Para cumplir con este tipo de similitud se requiere que:

- Exista semejanza geométrica. Se debe cumplir con todos los requerimientos para este tipo de similitud.
- Exista semejanza cinemática. Se debe cumplir con todos los requerimientos para este tipo de similitud.
- El escalamiento de las fuerzas debe tener la misma escala lineal que los escalamientos geométrico y cinemático.
- Las fuerzas en el modelo tienen la misma escala lineal con las fuerzas del prototipo.

Similitud dinámica en flujos de fluidos

La similitud dinámica corresponde a más restrictivo de los tres tipos, ya que requiere de los otros dos tipos de similitud (de igual forma, la similitud cinemática es más restrictiva que la geométrica). De manera general, dependiendo del tipo de flujo, lograremos la similitud dinámica cuando (suponiendo que se posee similitud geométrica):

- **Flujo compresible**: Re, Ma y $k = c_p/c_v$ son iguales para modelo y prototipo.
- **Flujo incompresible sin superficie libre**: Re es igual para modelo y prototipo.
- **Flujo incompresible con superficie libre**: Re y Fr deben ser iguales para modelo y prototipo. Dependiendo del caso, también We

Similitud incompleta

Consideremos el estudio del flujo de un fluido en un canal abierto. Supongamos que este flujo puede sercaracterizado mediante el número de Reynolds (Re) y el número de Froude (Fr). Para lograr la similitud dinámica se requiere:

$$\mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr}_p \quad \wedge \quad \mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}$$

La similitud del **número de Froude** requiere:

$$\mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

Ya que tanto modelo y prototipo son operados en el mismo campo gravitacional, la escala de velocidad es:

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \sqrt{\lambda_L}$$

La similitud del **número de Reynolds** requiere:

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

La escala de velocidad en base a este número es:

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\mu_m}{\mu}\frac{\rho}{\rho_m}\frac{L}{L_m}$$

Considerando que la escala de velocidad también debe ser determinada por el número de Froude Fr:

$$\frac{\mu_m}{\mu}\frac{\rho}{\rho_m}\frac{L}{L_m} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \sqrt{\lambda_m}$$

De esta forma:

$$\frac{\mu_m/\rho_m}{\mu/\rho} = \frac{\nu_m}{\nu} = (\lambda_m)^{3/2}$$

La expresión:

$$\frac{\nu_m}{\nu} = (\lambda_m)^{3/2}$$

Establece que para lograr **similitud dinámica**, se debe utilizar un fluido cuya viscosidad cinemática ν_m cumpla:

$$\nu_m = \nu\,(\lambda_m)^{3/2}$$

Lo cual puede ser muy difícil (o imposible!).

Por ejemplo: Supongamos que deseamos estudiar el flujo de agua en un canal abierto. Para esto, decidimos crear un modelo en una escala de $1/8$. La viscosidad cinemática del fluido a utilizar en el modelo debiese ser $\nu_m = \nu_{\text{agua}}\,(1/8)^{3/2} = 0.0442\,\nu_{\text{agua}}$. Entones, deberemos emplear un líquido que cumpla con este requerimiento (¡pero antes deberemos encontrarlo!).