



Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción



Mecánica de fluidos

5- Análisis dimensional

Modelamiento y similitud

Túnel de viento, ¿qué es? ¿para qué se utiliza?



Previo a discutir los conceptos de modelamiento y de similitud, debemos hacer distinción entre dos conceptos:

Prototipo

Sistema físico para el cual se realizan las predicciones.



Modelo

Representación de un sistema físico que puede ser utilizado para predecir el comportamiento del sistema en algún aspecto deseado.



Teoría de Modelos

En base a los principios del análisis dimensional, cualquier problema puede ser descrito en base a un conjunto de Π s, tal que:

$$\Pi_i = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n) \quad (1)$$

Si la relación anterior describe el comportamiento de un prototipo, una relación similar puede ser desarrollada para un modelo de este prototipo:

$$\Pi_{1m} = f(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, \dots, \Pi_{nm}) \quad (2)$$

donde f tendrá la misma funcionalidad para modelo y prototipo, **siempre cuando ambos se vean afectados por el mismo fenómeno físico.**

Si los Π_s son desarrollados de forma que la variable que se desea predecir está contenida en Π_1 , el modelo se puede **diseñar y operar** bajo las siguientes condiciones:

$$\Pi_{2m} = \Pi_2$$

$$\Pi_{3m} = \Pi_3$$

...

$$\Pi_{nm} = \Pi_n$$

Condiciones necesarias para la similitud

Entonces, bajo la suposición de que f tiene la misma forma para modelo y prototipo:

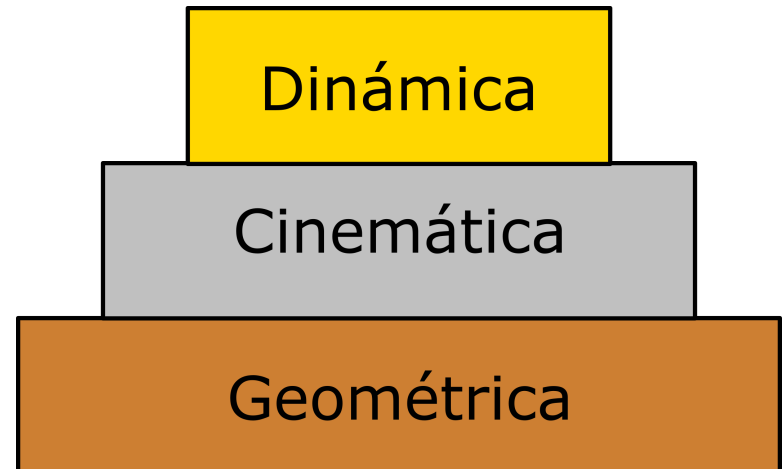
$$\Pi_1 = \Pi_{1m}$$

Ecuación de predicción

Grados de similitud

Comúnmente, el grado de similitud entre modelo y prototipo se clasifica en tres tipos:

- Similitud geométrica
- Similitud cinemática
- Similitud dinámica



Similitud geométrica

- El modelo y el prototipo deben poseer la misma forma geométrica.
- El tamaño del modelo puede ser modificado mediante algún factor de escala.

Para cumplir con este tipo de similitud se requiere que:

- Todas las dimensiones del modelo tengan la misma escala lineal con las dimensiones del prototipo.
- Todos los ángulos se conserven (los ángulos en modelo y prototipo sean iguales).
- Todas las direcciones de flujo se conserven.
- La orientación del modelo y del prototipo con respecto a sus alrededores deben ser idénticas.

Similitud cinemática

- La velocidad en cualquier punto en el flujo del modelo debe ser proporcional a la velocidad en el punto correspondiente en el flujo del prototipo (la escala debe ser la misma para todos los puntos).

Para cumplir con este tipo de similitud se requiere que:

- **Exista semejanza geométrica.**
- El escalamiento temporal debe tener la misma escala lineal que el escalamiento geométrico (L_m/L).
- Las velocidades que describen el movimiento del fluido en el modelo tienen la misma escala lineal con las velocidades del prototipo (V_m/V)

Nota: Existirá semejanza cinemática si partículas homólogas se encuentran en puntos homólogos a tiempos homólogo

Similitud dinámica

- **Todas las fuerzas en el flujo del modelo se escalan por un factor constante a las fuerzas correspondientes el el flujo del prototipo.**

Para cumplir con este tipo de similitud se requiere que:

- **Exista semejanza geométrica.** Se debe cumplir con todos los requerimientos para este tipo de similitud.
- **Exista semejanza cinemática.** Se debe cumplir con todos los requerimientos para este tipo de similitud.
- El escalamiento de las fuerzas debe tener la misma escala lineal que los escalamientos geométrico y cinemático.
- Las fuerzas en el modelo tienen la misma escala lineal con las fuerzas del prototipo.

Similitud dinámica en flujos de fluido

La similitud dinámica corresponde a más restrictivo de los tres tipos, ya que requiere de los otros dos tipos de similitud (de igual forma, la similitud cinemática es más restrictiva que la geométrica).

De manera general, dependiendo del tipo de flujo, lograremos la similitud dinámica cuando (suponiendo que se posee similitud geométrica):

- **Flujo compresible:** Re , Ma y $k = c_p/c_v$ son iguales para modelo y prototipo.
- **Flujo incompresible sin superficie libre:** Re es igual para modelo y prototipo.
- **Flujo incompresible con superficie libre:** Re y Fr deben ser iguales para modelo y prototipo. Dependiendo del caso, también We .

Similitud incompleta

Consideremos el estudio del flujo de un fluido en un canal abierto. Supongamos que este flujo puede ser caracterizado tan solo mediante el número de Reynolds (Re) y el número de Froude (Fr). Para lograr la similitud dinámica se requiere:

$$Fr_m = Fr \quad \wedge \quad Re_m = Re$$

La similitud del número de Froude requiere:

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

Ya que tanto modelo y prototipo son operados en el mismo campo gravitacional, la escala de velocidad es:

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \sqrt{\lambda_L}$$

La similitud del número de Reynolds requiere:

$$\frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

La escala de velocidad en base a este número es:

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{L}{L_m}$$

Considerando que la escala de velocidad debe ser determinada a partir de la similitud para los números de **Froude** y de **Reynolds**:

$$\frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{L}{L_m} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \sqrt{\lambda_m}$$

De esta forma:

$$\frac{\mu_m / \rho_m}{\mu / \rho} = \frac{\nu_m}{\nu} = (\lambda_m)^{3/2}$$

La cual establece que para lograr similitud dinámica, se debe utilizar un fluido cuya viscosidad cinemática ν_m cumpla:

$$\nu_m = \nu (\lambda_m)^{3/2}$$

Lo cual puede ser muy difícil (o imposible!).

Ejemplo

Supongamos que deseamos estudiar el flujo de agua en un canal abierto. Para esto, decidimos crear un modelo en una escala de 1/8. La viscosidad cinemática del fluido a utilizar en el modelo debiese ser

$$\begin{aligned}\nu_m &= \nu_{\text{agua}} (1/8)^{3/2} \\ &= 0.0442 \nu_{\text{agua}}\end{aligned}$$

Entones, deberemos emplear un líquido que cumpla con este requerimiento (**¡pero antes deberemos encontrarlo!**).