POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

PHS4700
Physique pour les applications multimédia

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 01

Numéro de l'équipe :

Numéro de devoir : 01

Nom : Diop	Prénom : Abdul Hamid	Matricule : 2141605
Signature :		
Nom : Berger	Prénom : Javier	Matricule : 2206989
Signature :		
Nom : Ngandjui Tchuente	Prénom : Ewald Jordan	Matricule : 2029689
Signature :		
Nom : Jourba	Prénom : Alexandra	Matricule : 2413451
Signature :		

Sommaire

Introduction

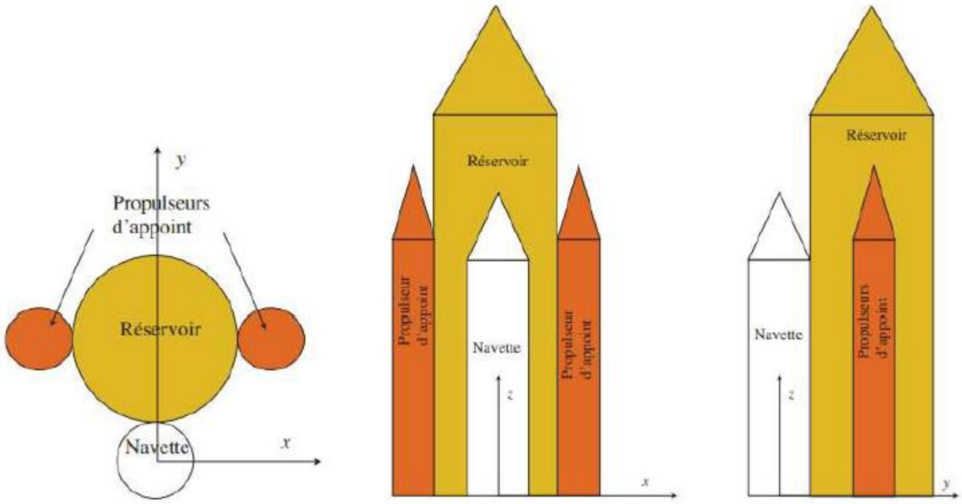


Figure 1 : Modèle de la navette spatiale américaine avec son lanceur,
Vue du haut (gauche), de côté (centre) et de face (droite)

Le but de ce devoir est d'étudier le comportement dynamique de la navette et de son lanceur. Pour cela, on modélise la navette comme indiqué sur la Figure 1. Ensuite, une fonction sur Matlab permettant de connaitre la position du centre de masse, le moment d'inertie ainsi que l'accélération angulaire du système navette-propulseur en fonction de différentes conditions initiales a été mise au point.

La signature de la fonction est la suivante :
function [pcmNL, INL, alphaNL] = Devoir1(AngRot, omega, forces, posNL)

Les paramètres de la fonction sont les suivant :

AngRot représente l'angle de rotation (en radians) de la navette autour de l'axe des x.

omega est le vecteur ω décrivant la vitesse angulaire (en radians/s) de la navette autour de son centre de masse.

forces est un vecteur de trois composantes indiquant les forces (Newton) exercées par le moteur de la navette et les propulseurs.

posNL est le vecteur indiquant la position de la navette dans l'espace. Il correspond à la position d'un point situé au bas et au centre du cylindre composant la navette.

Et la fonction retourne

pcmNL, le vecteur indiquant la position du centre de masse du système navette-lanceur ;

INL, le moment d'inertie du système navette-lanceur par rapport à son centre de masse dans le système du laboratoire ;

alphaNL, le vecteur indiquant l'accélération angulaire du système navette-lanceur autour de son centre de masse.

Étapes de résolution

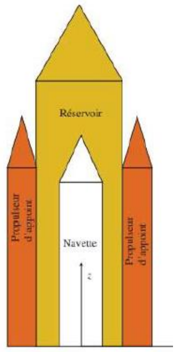
1. Position du centre de masse du système complet dans son propre référentiel :

La position $\vec{r}_{cm,\ NL/systeme}$ du centre de masse du système [navette + lanceur] dans son propre référentiel est donnée par la relation :

$$\vec{r}_{cm,\ systeme/systeme} = \frac{1}{m_{\,systeme}} \sum_{i\,=\,1}^{4} \vec{r}_{cm,i/systeme}\, m_i$$

Avec :

$$m_{\,totale} = \sum_{i=1}^{4} m_i$$



Où **i** identifie les différentes composantes du système : la navette, et pour le lanceur les propulseurs gauche, droit ainsi que le réservoir. Pour alléger les notations, on notera les vecteurs de centre de masses des différentes composantes $\vec{r}_{cm,i/systeme}$ simplement $\vec{r}_i$ dans toute cette partie, vu qu'on fait dans un premier temps tous les calculs dans le référentiel du système.

Les masses de chacune des composantes du système sont connues, cependant leurs centres de masse ne sont pas connus. Chaque composante ayant une forme constituée d'un cylindre superposé avec un cône, elles ont un centre de masse individuel qui peut être trouvé en calculant séparément le centre de masse de ce cône et de ce cylindre, puis en faisant leur moyenne pondérée.

Centre de masse de la navette seule dans le référentiel du système complet

Comme expliqué dans le paragraphe précédent, et comme on peut le voir dans le fichier Matlab, la navette est composée d'un cylindre et d'un cône dont les données sont les suivantes :

$h_{\,cylindre,\ nav.} = 27{,}93\ m$
$r_{nav.} = 3{,}5\ m$
$h_{\,cône,\ nav.} = 9{,}31\ m$
$m_{totale,\ nav.} = 109\ 000\ kg$

Sachant que la masse volumique est uniforme, la prochaine étape consiste à trouver le volume des composantes de la navette pour en déduire leurs masses.

$$V_{\,cylindre,\ nav.} = \pi \times r_{nav.}{}^2 \times h_{\,cylindre,\ nav.}\ [\,m^3\,]$$

$$V_{\,cône,\ nav.} = \frac{1}{3} \times \pi \times r_{nav.}{}^2 \times h_{cône,\ nav.}\ [\,m^3\,]$$

$$V_{total,\ nav.} = V_{cône,\ nav.} + V_{cylindre,\ nav.}\ [\ m^3\ ]$$

Avec ces informations, la masse du cylindre et du cône est calculable séparément.

$$m_{cylindre,\ nav.} = \frac{m_{\ nav.} \times V_{cylindre,\ nav.}}{V_{total,\ nav.}}\ [\ kg\ ]$$

$$m_{cône,\ nav.} = \frac{m_{\ nav.} \times V_{cône,\ nav.}}{V_{total,\ nav.}}\ [\ kg\ ]$$

Une fois ceci obtenu, le centre de masse de la navette peut être calculé. Le centre de masse d'un cylindre homogène (solide ou creux) est situé au milieu de sa hauteur, soit à une distance **h $_{cylindre}$ /2** du centre de la base, où **h** $_{cylindre}$ est la hauteur du cylindre. Quant au centre de masse d'un cône droit homogène, il est situé à une distance de **h $_{cône}$ /4** du centre de sa base, où **h** $_{cône}$ est la hauteur du cône. Ainsi les vecteur positions des centres de masse des deux solides composantes de la navette sont les suivants :

$$\vec{r}_{\ cylindre,\ nav.} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cylindre,\ nav.}/_2 \end{bmatrix}$$

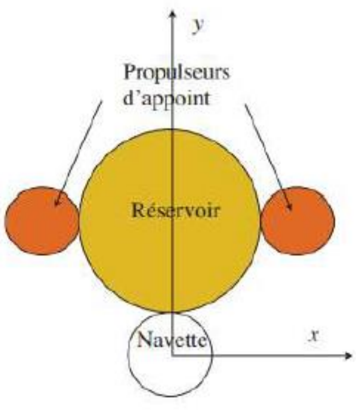
$$\vec{r}_{cône,\ nav.} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{cône,\ nav.}/_4 \end{bmatrix}$$

Le centre de masse total de la navette s’obtient avec la formule suivante :

$$\boldsymbol{\vec{r}_{nav.}} = \frac{\boldsymbol{m_{cylindre,\ nav.} \times \vec{r}_{\ cylindre,\ nav.} + \vec{r}_{cône,\ nav.} \times m_{cône,\ nav.}}}{\boldsymbol{m_{nav.}}}$$

Centre de masse des propulseurs d’appoint seuls dans le référentiel du système navette + lanceur

Les mêmes étapes de résolution utilisées pour la navette seront reprises pour les propulseurs d’appoint en les adaptant aux nouvelles données, dont notamment une translation car le centre de la base des propulseurs d’appoint ne se trouve pas à l’origine comme celui de la navette. Voici les données du problème :



$h_{\ cylindre,\ prop.} = 39{,}9\ m$
$r_{prop.} = 1{,}855\ m$
$h_{\ cone,\ prop.} = 5{,}6\ m$
$m_{\ totale,\ prop.} = 469\ 000\ kg$

$Decalage\ X_{prop.\ D} = r_{rés.} + r_{prop.}$
$Decalage\ X_{prop.\ G} = -Decalage\ X_{prop.\ D}$
$Decalage\ Y_{prop.} = r_{navette} + r_{rés.}$

Sachant que la masse volumique est uniforme, la prochaine étape consiste à trouver le volume des composantes de la navette pour en déduire leurs masses.

$$V_{cylindre,\ prop.} = \pi \times r_{prop.}{}^2 \times h_{cylindre,\ prop.} \quad [\,m^3\,]$$

$$V_{cone,\ prop.} = \frac{1}{3} \times \pi \times r_{prop.}{}^2 \times h_{cone,\ prop.} \quad [\,m^3\,]$$

$$V_{total,\ prop.} = V_{cone,\ prop.} + V_{cylindre,\ prop.} \quad [\,m^3\,]$$

Avec ces informations, la masse du cylindre et du cône est calculable.

$$m_{cylindre,\ prop.} = \frac{m_{\ prop.} \times V_{cylindre,\ prop.}}{V_{total,\ prop.}}\ [\,kg\,]$$

$$m_{cone,\ prop.} = \frac{m_{\ prop.} \times V_{cone,\ prop.}}{V_{total,\ prop.}}\ [\,kg\,]$$

Une fois ceci obtenu, les vecteur positions des centres de masse des deux solides composantes des propulseurs sont calculables.

Pour le propulseur droit, les données sont les suivantes :

$$\vec{r}_{\ cylindre,\ prop.\ D} = \begin{bmatrix} Decalage\ X_{prop.\ D} \\ Decalage\ Y_{prop.} \\ h_{cylindre,\ nav.}/_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{cone,\ prop.\ D} = \begin{bmatrix} Decalage\ X_{prop.\ D} \\ Decalage\ Y_{prop.} \\ h_{cylindre,\ nav.} + h_{cone,\ nav.}/_4 \end{bmatrix}$$

Le centre de masse total du propulseur droit s'obtient avec la formule suivante :

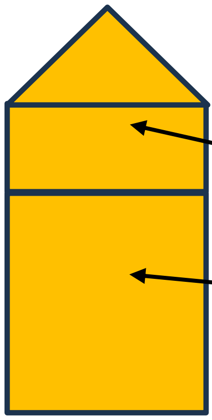
$$\boldsymbol{\vec{r}_{prop.\ D}} = \frac{\boldsymbol{m_{cylindre,\ prop.}} \times \boldsymbol{\vec{r}_{\ cylindre,\ prop.\ D}} + \boldsymbol{m_{cone,\ prop.}} \times \boldsymbol{\vec{r}_{cone,\ prop.\ D}}}{\boldsymbol{m_{totale,\ prop.}}}$$

La même démarche s'applique pour le propulseur gauche, en veillant bien à changer la valeur du décalage selon l'axe X ($\boldsymbol{Decalage\ X_{\ prop.\ G} = -Decalage\ X_{\ prop.\ D}}$ ***).***

Centre de masse du réservoir seul dans le référentiel du système complet

Pour le réservoir, étant donné que la masse volumique n'est pas uniforme partout, le calcul du centre de masse diffèrera de quelques étapes par rapport à celui de la navette et des propulseurs.

Voici les données initiales connues :



$h_{cylindre,\ res.} = 39{,}1\ m$
$r_{res.} = 3{,}5\ m$
$h_{cone,\ res.} = 9{,}31\ m$
$h_{res.} = h_{cylindre,\ res.} + h_{cone,\ res.}$

$Decalage\ Y_{res.} = r_{nav.} + r_{res.}$

$m_{totale,\ H} = 108\,000\ kg$
$m_{totale,\ O} = 631\,000\ kg$
$m_{res.} = m_{totale,\ O} + m_{totale,\ H}$ *(la masse des parois est négligée)*

$h_{cylindre,\ O} = h_{cylindre,\ res.}/\ 3$
$h_{cylindre,\ H} = 2 \times h_{cylindre,\ res.}/\ 3$

A partir de ces informations, le réservoir peut être décomposé en 3 composantes dont les volumes et ensuite les masses peuvent être déduit afin de trouver leur centre de masse de chacun avec les formules ci-dessous. En ce qui concerne les masses, on a uniquement besoin de calculer les masses séparées d'oxygène contenues dans le cône et le cylindre, vu qu'on a accès qu'à la masse totale d'oxygène.

$$V_{total,\ O} = V_{cylindre,\ O} + V_{cone,\ O}\ \ [m^3]$$

$$V_{cylindre,\ O} = \pi \times r_{res.}{}^2 \times h_{cylindre,\ O}\ [m^3]$$
$$V_{cone,\ O} = \frac{1}{3} \times \pi \times r_{res.}{}^2 \times h_{cone,\ res.}\ [m^3]$$

$$m_{cylindre,\ O} = \frac{m_{oxygene} \times V_{cylindre,\ O}}{V_{total,\ O}}\ [kg]$$
$$m_{cone,\ O} = m_{totale,\ O} - m_{cylindre,\ O}\ [kg]$$

$$\vec{r}_{cylindre,\ H} = \begin{bmatrix} 0 \\ Decalage\ Y_{res.} \\ h_{cylindre,\ H}/_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{cylindre,\ O} = \begin{bmatrix} 0 \\ Decalage\ Y_{res.} \\ h_{cylindre,\ H} + h_{cylindre,\ O}/_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{cone,\ O} = \begin{bmatrix} 0 \\ Decalage\ Y_{res.} \\ h_{cylindre,\ res.} + h_{cone,\ res.}/_4 \end{bmatrix}$$

Finalement pour trouver le centre de masse total du réservoir, la formule suivante s'applique :

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{res.}} = \frac{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{totale,\ H}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cylindre,\ H}} + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{cylindre,\ O}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cylindre,\ O}} + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{cone,\ O}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cone,\ O}}}{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{reservoir}}}$$

Calcul de la position du centre de masse du système complet dans son propre référentiel

$$m_{systeme} = m_{nav.} + m_{res.} + 2 \times m_{prop.} \ [\,kg\,]$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm,\ systeme/systeme}} = \frac{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{nav.}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{nav.}} + m_{res.} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{res.}} + m_{prop.} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{prop.\ G}} + m_{prop.} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{prop.\ D}}}{m_{systeme}}$$

Application numérique :

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm,\ systeme/systeme}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{7.2301} \\ \mathbf{24.7279} \end{pmatrix} \boldsymbol{m}$$

2. Position du centre de masse dans le référentiel du laboratoire

Pour passer au référentiel du laboratoire, il faut prendre en compte deux données d'entrée :

- la rotation θ_x du référentiel local du système [navette + lanceur] autour de l'axe X, par rapport à celui du laboratoire ; les rotations autour des autres axes ne sont pas prises en compte.
- la translation $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{O,\ systeme/labo}}$ de l'origine du référentiel du système dans le référentiel du laboratoire.

Cela se traduit par la formule suivante, qui de fait est une formule de passage des coordonnées du système à celles du laboratoire :

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm,\ systeme/labo}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{x}}) * \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm,\ systeme/systeme}} + \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{O,\ systeme/labo}}$$

Où $R(\theta_x)$ est la matrice de rotation d'angle θ_x , donnée par :

$$R(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta_x) & -sin(\theta_x) \\ 0 & sin(\theta_x) & cos(\theta_x) \end{pmatrix}$$

<u>Pour le cas 1</u>, comme il n'y pas de rotation et que la navette est sur le pas de tir, le référentiel local et global sont confondus ; on a

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm,\ systeme/labo}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm,\ systeme/systeme}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{7.2301} \\ \mathbf{24.7279} \end{pmatrix} \boldsymbol{m.}$$

<u>Pour les cas 2</u>, on obtient :

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm,\ systeme/labo}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{5.4226\,.} \\ \mathbf{56.1025} \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

3. Matrice d'inertie dans le référentiel du système

On décompose la matrice d'inertie du système complet par rapport à son centre de masse $G_{syst.}$ comme suit :

$$\boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(systeme) = \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(navette) + \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(reservoir) + \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(prop.G) + \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(prop.D)$$

Dans toute la suite de cette partie, on calculera les matrices d'inerties des cônes et cylindres verticaux constituant les différentes composantes du système par rapport à leurs centres de masses propres, à l'aide de la formule pour un cône plein donnée par l'énoncé et de la formule suivante pour le cylindre plein :

$$\boldsymbol{I}_{G_{cylindre}}(cylindre\ plein) = m_{cylindre} * \begin{pmatrix} \frac{{r_{cylindre}}^2}{4} + \frac{{h_{cylindre}}^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{{r_{cylindre}}^2}{4} + \frac{{h_{cylindre}}^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{{r_{cylindre}}^2}{2} \end{pmatrix}$$

Une fois cela fait, on déplacera les matrices obtenues au centre de masse global des composantes grâce au théorème de Huygens généralisé appliqué à un solide quelconque de masse m :

$$\boldsymbol{I}_P(solide) = \boldsymbol{I}_{G_{solide}}(solide) + m * \boldsymbol{T}(\overrightarrow{PG_{solide}})$$

Avec $\overrightarrow{PG_{solide}} = \overrightarrow{OG_{solide}} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$ le vecteur de translation entre un point P quelconque et G_{solide} le centre de masse du solide considéré (avec O l'origine du référentiel commun), et la matrice $\boldsymbol{T}(\overrightarrow{PG_{solide}})$ définie par :

$$\boldsymbol{T}(\overrightarrow{PG_{solide}}) = \begin{pmatrix} t_y^2 + {t_z}^2 & -t_x t_y & -t_x t_z \\ -t_x t_y & t_x^2 + {t_z}^2 & -t_y t_z \\ -t_x t_z & -t_y t_z & t_x^2 + {t_y}^2 \end{pmatrix}$$

Pour les vecteurs de translations, on se placera systématiquement dans le référentiel local du système [navette + lanceur] dans cette sous partie.

Matrice d'inertie de la navette seule

Comme vu précédemment, la navette peut se décomposer en deux parties, une coiffe conique et un cylindre plein. On calcule ainsi :

- $\boldsymbol{I}_{G_{cone,\ nav.}}(cone, nav.)$ avec $m_{cone,\ nav.}$ calculée précédemment, $r_{nav.}$ et $h_{cone,\ nav.}$
- $\boldsymbol{I}_{G_{cylindre,\ nav.}}(cylindre, nav.)$ avec $m_{cylindre,\ nav.}$ calculée précédemment, $r_{nav.}$ et $h_{cylindre,\ nav.}$

Puis on obtient la matrice d'inertie de la navette par rapport à son centre de masse $G_{nav.}$ en déplaçant ces deux matrices en ce point :

$$\boldsymbol{I}_{G_{nav.}}(navette) = \boldsymbol{I}_{G_{nav.}}(cone, nav.) + \boldsymbol{I}_{G_{nav.}}(cylindre, nav.)$$

Avec les vecteurs de translations suivants :

$$\overrightarrow{G_{nav.}G_{cone,\ \ nav.}} = \vec{r}_{\ cone,\ \ nav.} - \vec{r}_{\ nav.}$$

$$\overrightarrow{G_{nav.}G_{cylindre,\ \ nav.}} = \vec{r}_{\ cyllindre,\ \ nav.} - \vec{r}_{\ nav.}$$

Matrice d'inertie des propulseurs seuls

Les propulseurs se décomposent de manière similaire, et leurs matrices d'inerties dans leurs référentiels propres sont identiques. On calcule ainsi :

- $\boldsymbol{I}_{G_{cone,\ \ prop.\ D\ et\ G}}(cone, prop.)$ avec $m_{cone,\ \ prop.}$ calculée précédemment, $r_{prop.}$ et $h_{\ cone,\ \ prop.}$
- $\boldsymbol{I}_{G_{cylindre,\ \ prop.\ D\ et\ G}}(cylindre, prop.)$ avec $m_{cylindre,\ \ prop.}$ calculée précédemment, $r_{prop.}$ et $h_{\ cylindre,\ \ prop.}$

Puis on déplace les matrices d'inertie pour le propulseur droit :

$$\boldsymbol{I}_{\ G_{prop.\ D}}(prop. D) = \boldsymbol{I}_{G_{prop.\ D}}(cone, prop.\ D) + \boldsymbol{I}_{G_{prop.\ D}}(cylindre, prop. D)$$

Avec les vecteurs de translation :

$$\overrightarrow{G_{prop.\ D}G_{cone,\ \ prop.\ D}} = \vec{r}_{\ cone,\ \ prop.\ D} - \vec{r}_{prop.\ D}$$

$$\overrightarrow{G_{prop.\ D}G_{cylindre,\ \ prop.\ D}} = \vec{r}_{\ cyllindre,\ \ prop.\ D} - \vec{r}_{prop.\ D}$$

La démarche est similaire pour obtenir $\boldsymbol{I}_{\ G_{prop.\ G}}(prop. G)$, en changeant les vecteurs de translation de manière adéquate pour déplacer les matrices d'inerties au centre de masse du propulseur gauche $G_{prop.\ G}$.

Matrice d'inertie du réservoir seul

On décompose cette fois le composant en trois parties pour tenir compte de la masse volumique non-homogène du cylindre, et on calcule :

- $\boldsymbol{I}_{G_{cone,\ \ O}}(cone,\ O)$ avec $m_{cone,\ \ O}$ calculée précédemment, $r_{res.}$ et $h_{\ cone,\ \ res.}$
- $\boldsymbol{I}_{G_{cylindre,\ \ O}}(cylindre,\ O)$ avec $m_{cylindre,\ \ O}$ calculée précédemment, $r_{res.}$ et $h_{cylindre,\ \ O}$
- $\boldsymbol{I}_{G_{cylindre,\ \ H}}(cylindre,\ H)$ avec $m_{totale,\ \ H}$, $r_{res.}$ et $h_{cylindre,\ \ H}$

On obtient ainsi la matrice d'inertie du réservoir complet par rapport à son centre de masse $G_{res.}$:

$$\boldsymbol{I}_{\ G_{res.}}(reservoir) = \boldsymbol{I}_{G_{res.}}(cone, O) + \boldsymbol{I}_{G_{res.}}(cylindre, O) + \boldsymbol{I}_{G_{res.}}(cylindre, H)$$

Avec les vecteurs de translation :

$$\overrightarrow{G_{res.}G_{cone,\ \ O}} = \vec{r}_{\ cone,\ \ O} - \vec{r}_{\ res.}$$

$$\overrightarrow{G_{res.}G_{cylindre,\ \ O}} = \vec{r}_{\ cyllindre,\ \ O} - \vec{r}_{\ res.}$$

$$\overrightarrow{G_{res.}G_{cylindre,\ \ H}} = \vec{r}_{\ cyllindre,\ \ H} - \vec{r}_{\ res.}$$

Matrice d'inertie du système complet

On translate simplement les matrices d'inerties $\boldsymbol{I}_{\ G_{nav.}}(navette), \boldsymbol{I}_{\ G_{prop.\ D}}(prop.D), \boldsymbol{I}_{\ G_{prop.\ G}}(prop.G)$ et $\boldsymbol{I}_{\ G_{res.}}(reservoir)$ obtenues au centre de masse $G_{syst.}$ du système complet :

$$\boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(systeme) = \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(navette) + \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(reservoir) + \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(prop.G) + \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(prop.D)$$

Avec les vecteurs de translation :

$$\overrightarrow{G_{syst.}G_{nav.}} = \vec{r}_{\ nav.} - \vec{r}_{\ syst.}$$

$$\overrightarrow{G_{syst.}G_{res.}} = \vec{r}_{\ res.} - \vec{r}_{\ syst.}$$

$$\overrightarrow{G_{syst.}G_{prop.\ G}} = \vec{r}_{\ prop.\ G} - \vec{r}_{\ syst.}$$

$$\overrightarrow{G_{syst.}G_{prop.\ D}} = \vec{r}_{\ prop.\ D} - \vec{r}_{\ syst.}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(systeme) = \begin{pmatrix} 2.6826e+08 & 0 & 0 \\ 0 & 2.9658e+08 & -7.6659e+06 \\ 0 & -7.6659e+06 & 4.8832e+07 \end{pmatrix} kg.m^2$$

4. Matrice d'inertie dans le référentiel du laboratoire

Pour refléter la rotation qui s'opère entre le repère local du système et le repère global du laboratoire, on applique la matrice de rotation $R(\theta_x)$ définie auparavant :

$$\boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(systeme)\Big/_{laboratoire} = R(\theta_x) * \boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(systeme)\Big/_{systeme} * R(\theta_x)^T$$

Pour le cas 1, il n'y a pas de rotation, d'où :

$$\boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(systeme)\Big/_{laboratoire} = \begin{pmatrix} 2.6826e+08 & 0 & 0 \\ 0 & 2.9658e+08 & -7.6659e+06 \\ 0 & -7.6659e+06 & 4.8832e+07 \end{pmatrix} kg.m^2$$

Pour le cas 2 :

$$\boldsymbol{I}_{G_{syst.}}(systeme)\Big/_{laboratoire} = \begin{pmatrix} 2.6826e+08 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0413e+08 & -1.0344e+08 \\ 0 & -1.0344e+08 & 2.4128e+08 \end{pmatrix} kg.m^2$$

5. Accélération angulaire

L'accélération angulaire de la fusée est déterminée en utilisant cette équation :

$$I \cdot \alpha = M - \omega \times (I \cdot \omega)$$

où :

- I est la matrice d'inertie du système navette-lanceur par rapport à son centre de masse dans le référentiel du laboratoire, calculé précédemment.
- α est le vecteur accélération angulaire du système.
- M est le moment total appliqué sur le système.
- ω est le vecteur vitesse angulaire du système.

Pour résoudre l'équation ci-dessus et obtenir α, nous procédons comme suit :

$$\alpha = I^{-1} \cdot (M - \omega \times (I \cdot \omega))$$

Tout d'abord il nous faut calculer le moment appliqué à la fusée.

Détermination des positions des forces

- Position de la force de la navette :

$$\text{posForceNavette} = \text{posNL}$$

- Position de la force des propulseurs :
  Le propulseur gauche est décalé par rapport à la navette en x et y. Son positionnement est obtenu en appliquant une rotation (matrice Rx) et une translation au point de référence.

$$\text{posForcePropulseurG} = \text{posNL} + Rx \cdot (-\delta x, \delta y, 0)$$

Donc pour le propulseur droit on a :

$$\text{posForcePropulseurG} = \text{posNL} + Rx \cdot (\delta x, \delta y, 0)$$

où :

- δx =rRéservoir+rPropulseur
- δy=rNavette+rRéservoir
  sont les décalages des propulseurs par rapport à l'origine.

Détermination des directions des forces

Les forces propulsives agissent le long de l'axe z de la fusée après rotation. Pour obtenir leur direction dans le référentiel du laboratoire, nous appliquons la matrice de rotation Rx au vecteur $(0, 0, 1)^T$

$$\text{directionForce}=\text{Rx}\cdot(0, 0, 1)^T$$

Ainsi, nous pouvons calculer les vecteurs de forces :

- FNavette=FNavette×directionForce
- FPropulseurG=FPropulseurG×directionForce
- FPropulseurD=FPropulseurD×directionForce

Calcul du moment

Le moment (torque) appliqué par chaque force est calculé en effectuant le produit vectoriel entre le bras de levier (distance entre le point d'application de la force et le centre de masse du système) et le vecteur force correspondant.

- MNavette=(posForceNavette−pcmNL)×FNavette
- MPropulseurG=(posForcePropulseurG−pcmNL)×FPropulseurG
- MPropulseurD=(posForcePropulseurD−pcmNL)×FPropulseurD

$$\mathbf{M=MNavette+MPropulseurG+MPropulseurD}$$

Nous avons ainsi le Moment appliquée à la fusée et pouvonst utilisée la formule de l'accélération angulaire précedente :

$$\boldsymbol{\alpha=I^{-1}\cdot(M-\omega\times(I\cdot\omega))}$$

On obtient ainsi :

cas 1 :

$$\boldsymbol{\alpha=\begin{pmatrix}-0.2658\\0\\0\end{pmatrix}\mathbf{m/s^2}}$$

cas 2 :

$$\boldsymbol{\alpha=\begin{pmatrix}-0.2811\\0.1141\\-0.1413\end{pmatrix}\mathbf{m/s^2}}$$

Analyse des résultats

On traduit les indcations de l'énoncé en conditions initiales pour les deux cas :

- cas 1 : $\theta_x = 0$ rad

  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$rad/s

  $F_{prop.\ D}$ = $F_{prop.\ D}$ = 8.75 MN, $F_{nav.}$ = 11 MN

  $\vec{r}_{O,\ systeme/labo} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ m

- cas 2 : $\theta_x = -\frac{\pi}{3}$ rad

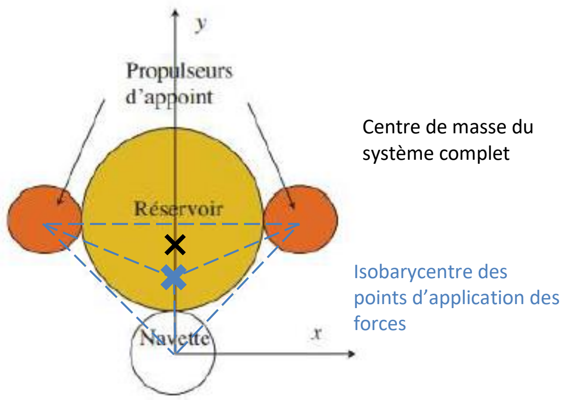
  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -0.54 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rad/s

  $F_{prop.\ D}$ = $F_{prop.\ D}$ = 8.75 MN, $F_{nav.}$ = 11 MN

  $\vec{r}_{O,\ systeme/labo} = \begin{pmatrix} 0 \\ -19.6075 \\ 0 \end{pmatrix}$ m

cas	**pcmNL (m)**	**INL (kg.m^2)**	**alphaNL (rad/s^2)**
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 7.2301 \\ 24.7279 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.6826e+08 & 0 & 0 \\ 0 & 2.9658e+08 & -7.6659e+06 \\ 0 & -7.6659e+06 & 4.8832e+07 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.2658 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5.4226\,. \\ 56.1025 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.6826e+08 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0413e+08 & -1.0344e+08 \\ 0 & -1.0344e+08 & 2.4128e+08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.2811 \\ 0.1141 \\ -0.1413 \end{pmatrix}$

Dans le cas 1, les forces de propulsion exercées par la navette et les deux propulseurs d'appoint sont symétriques par rapport à l'axe x mais pas par rapport à l'axe y, et dirigées le long de l'axe z. Il est à noter que le système navette + lanceur présente une symétrie le long de l'axe des x mais pas de celui des y ni des z, ce qui est traduit par la forme de la matrice d'inertie qui n'est pas diagonale.
On remarque que l'accélération angulaire obtenue est non-nulle autour de l'axe X, alors qu'il n'y a pas d'angle de rotation initial : cela s'explique par le fait que la coordonnée du barycentre de tous les points d'application des forces et celle du centre de masse du système ne sont pas confondues le long de l'axe y, le moment résultant en x est donc non nul, et la navette tourne autour de l'axe des x.



Dans le cas 2, l'extinction du propulseur d'appoint droit crée une asymétrie dans la distribution des forces, ce qui est traduit par une forte augmentation en valeur absolue des termes non-diagonaux dans la matrice d'inertie du système.
Le barycentre des points d'application des forces n'est plus appliqué en x = 0 dans le référentiel du système, ce qui génère des moments non nuls supplémentaire. Cette situation conduit notamment à une accélération angulaire supplémentaire du système navette-lanceur autour des axes y et z. Cependant, la contribution à cette accélération due à la variation du moment d'inertie dans le temps reste peu significative en raison de la faible valeur de la vitesse angulaire initiale.

Conclusion

Le comportement angulaire de la navette est fortement influencé par la relation entre la position de son centre de gravité et le barycentre des forces appliquées. Il est cependant à noter que beaucoup d'hypothèses simplificatrices ont été faites : pas de prise en compte de la gravité, pas de prise en compte de la perte de masse due à la poussée.