





PHS4700
Physique pour les applications multimédia

PAGE COUVERTURE OBLIGATOIRE POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 01

Numéro de l'équipe :

Numéro de devoir : 02

Nom : Diop	Prénom : Abdul Hamid	Matricule : 2141605
Signature : 		
Nom : Berger	Prénom : Javier	Matricule : 2206989
Signature : 		
Nom : Ngandjui Tchuenta	Prénom : Ewald Jordan	Matricule : 2029689
Signature : 		
Nom : Jourba	Prénom : Alexandra	Matricule : 2413451
Signature : 		

Sommaire

Introduction.....	3
Étapes de résolution.....	4
1. Définition du problème et hypothèses	4
2. Résolution numérique	5
3. Conditions d'arrêt.....	Error! Bookmark not defined.
Analyse des résultats	7
Conditions initiales	7
Résultats des simulations	7
Analyse et conclusions	10

Introduction

Ce rapport vise à étudier la trajectoire d'une balle de ping-pong soumise à différentes forces physiques.

Lors d'un match de ping-pong, la balle est influencée par plusieurs forces telles que la gravité, la résistance de l'air (frottement visqueux) et la force de Magnus, qui s'applique sur une balle en rotation. Ces forces modifient sa trajectoire et son comportement en vol. L'objectif de cette simulation est de modéliser la trajectoire de la balle et d'analyser comment elle se comporte en fonction des conditions initiales et des forces appliquées.

Pour ce faire, nous avons conçu une fonction sous Matlab permettant de simuler la trajectoire de la balle. La fonction tient compte de différents phénomènes physiques et détermine si la balle touche la table, le filet, ou sort des limites du jeu. Trois scénarios de simulation sont envisagés :

- **Option 1** : La balle est soumise uniquement à la gravité.
- **Option 2** : La balle subit à la fois la gravité et une force de frottement visqueux.
- **Option 3** : En plus de la gravité et du frottement visqueux, la force de Magnus, due à la rotation de la balle, est prise en compte.

Chacun de ces scénarios est testé avec différentes conditions initiales, telles que la position, la vitesse et la vitesse angulaire de la balle. La simulation s'arrête dès que la balle touche la table, le filet ou le sol. La trajectoire de la balle est calculée à partir des équations du mouvement, et les résultats obtenus permettent de visualiser le chemin parcouru par la balle et d'évaluer si le coup est réussi ou non.

La fonction Matlab développée pour cette simulation est appelée de la manière suivante :

```
[coup, vbf, ti, x, y, z] = Devoir2(option, rbi, vbi, wbi)
```

Les paramètres d'entrée de la fonction sont les suivants :

- **option** : Un entier qui détermine le type de simulation :
 - 1 pour une simulation avec seulement la gravité.
 - 2 pour une simulation avec la gravité et la résistance de l'air.
 - 3 pour inclure la gravité, la résistance de l'air et la force de Magnus.
- **rbi** : Un vecteur contenant les coordonnées initiales de la position du centre de masse de la balle en mètres.
- **vbi** : Un vecteur représentant la vitesse initiale de la balle en m/s.
- **wbi** : Un vecteur indiquant la vitesse angulaire initiale de la balle autour de son centre de masse, exprimée en rad/s.

Les résultats retournés par la fonction sont :

- **coup** : Un entier indiquant l'issue de la simulation :
 - 0 si le coup est réussi et que la balle atterrit du côté opposé.
 - 1 si la balle touche la table du côté du joueur, indiquant un coup raté.
 - 2 si la balle frappe le filet.
 - 3 si la balle sort du jeu et touche le sol.
- **vbf** : Un vecteur indiquant la vitesse finale de la balle en m/s.
- **ti** : Un vecteur contenant les instants de temps correspondant aux différentes positions de la balle pendant la simulation.
- **x, y, z** : Des vecteurs contenant les coordonnées de la balle pour chaque instant enregistré.

Ce rapport présentera les résultats obtenus pour plusieurs simulations, avec des graphiques illustrant les trajectoires et des tableaux résumant les données clés pour chaque essai.

Étapes de résolution

1. Définition du problème et hypothèses

On considère ici la balle de ping-pong de forme sphérique, de masse m_b et de rayon R_b , qui évolue dans l'air. Celle-ci est soumise à la gravité \vec{F}_g , ainsi qu'aux frottements de l'air \vec{F}_v et à l'effet Magnus \vec{F}_M selon l'option en envisagée – dans la suite, on considérera que les trois forces sont actives. On se place dans le référentiel du laboratoire, dont l'origine est située au pied de la table à droite du joueur, au niveau du sol. Au vu des forces agissant sur la balle et étant donné qu'on se place dans le formalisme de la mécanique du point, on peut faire l'hypothèse que l'accélération et la vitesse ne dépendent que du temps. On connaît également la position et la vitesse initiales de la balle, $\vec{r}_b(0)$ et $\vec{v}_b(0)$, ainsi que sa vitesse angulaire $\vec{\omega}_{b,0}$, que l'on considère comme constante au cours du temps.

On cherche à obtenir la trajectoire de la balle à partir du temps initial jusqu'à un temps t_f , qui sera déterminé soit par l'instant où la balle touche une des surfaces de la table, soit par une valeur maximale $t_{max} = 10$ s dans le cas où la balle sortirait du jeu sans toucher la table.

Au vu de l'hypothèse simplificatrice effectuée sur la vitesse angulaire et des résultats demandés par l'énoncé ($\vec{v}_b(t_f)$ et $\vec{r}_b(t)$ pour $t \in [0, t_f]$), on va effectuer la résolution uniquement en accélération linéaire, en laissant de côté l'accélération angulaire.

On utilise ainsi le principe fondamental de la dynamique pour calculer l'accélération de la balle de ping-pong à un instant t :

$$\vec{a}_b(t) = \frac{1}{m_b} * (\vec{F}_g + \vec{F}_v(t) + \vec{F}_M(t))$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= -m_b g * \hat{z} \\ \vec{F}_v(t) &= -k_{visc} |\vec{v}_b(t)| * \vec{v}_b(t) \\ \vec{F}_M(t) &= S_{Magnus} * (\vec{\omega}_{b,0} \times \vec{v}_b(t)) \end{aligned}$$

avec $k_{visc} = \frac{1}{2} \rho C_v A$ et $A = \pi R_b^2$ avec $S_{Magnus} = 4\pi C_M \rho R_b^3$

et les valeurs suivantes pour les différents paramètres :

- Accélération de la pesanteur : $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- Masse volumique de l'air : $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$
- Coefficient de traînée : $C_v = 0.5$

- Coefficient de Magnus : $C_M = 0.29$
- Masse de la balle : $m_b = 2.74 \text{ g}$
- Rayon de la balle : $R_b = 1.99 \text{ cm}$

La résolution de l'équation différentielle vectorielle ci-après permet ensuite d'obtenir la vitesse et l'accélération à un instant t :

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}(\vec{q}(t), t)$$

$$\vec{q}(0) = \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} \vec{v}_b(0) \\ \vec{r}_b(0) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} v_{b,x}(t) \\ v_{b,y}(t) \\ v_{b,z}(t) \\ r_{b,x}(t) \\ r_{b,y}(t) \\ r_{b,z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{pmatrix} \quad \vec{g}(\vec{q}(t), t) = \begin{pmatrix} a_{b,x}(t) \\ a_{b,y}(t) \\ a_{b,z}(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}$$

2. Résolution numérique

On utilise la méthode de Runge-Kutta pour résoudre numériquement l'ED précédente. Pour ce faire, on commence par définir le pas temporel de résolution – la valeur de dt étant établie arbitrairement :

$$t_{i+1} = t_i + dt$$

$$dt = 1e - 4$$

La solution est alors approximée de proche en proche à partir des conditions initiales par la formule suivante :

$$\vec{q}(t_{i+1}) = \vec{q}(t_i) + \frac{dt}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

avec :

$$\vec{k}_1 = \vec{g}(\vec{q}(t_i), t_i)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{g}\left(\vec{q}(t_i) + \frac{dt}{2} * \vec{k}_1, t_i + \frac{dt}{2}\right)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{g}\left(\vec{q}(t_i) + \frac{dt}{2} * \vec{k}_2, t_i + \frac{dt}{2}\right)$$

$$\vec{k}_4 = \vec{g}(\vec{q}(t_i) + dt * \vec{k}_3, t_i + dt)$$

En pratique, cela se traduit par une boucle qui parcourt un vecteur contenant tous les instants t_i de 0 à t_{max} , avec un pas de dt . A chaque itération, on garde en mémoire la solution courante obtenue en position $\vec{r}_b(t_i)$.

On utilise également cette solution en position pour calculer les critères d'arrêt :

Situation	Critère	Coup correspondant
La balle touche la table côté adverse	$\begin{cases} 0 \leq r_{b,x}(t_{i+1}) \leq L_t \\ 0 \leq r_{b,y}(t_{i+1}) \leq l_t \text{ et } r_{b,x}(t_{i+1}) > x_{filet} + R_b \\ r_{b,z}(t_{i+1}) \leq h_t + R_b \end{cases}$	0

La balle touche la table côté joueur	$\begin{cases} 0 \leq r_{b,x}(t_{i+1}) \leq L_t \\ 0 \leq r_{b,y}(t_{i+1}) \leq l_t \text{ et } r_{b,x}(t_{i+1}) < x_{filet} - R_b \\ r_{b,z}(t_{i+1}) \leq h_t + R_b \end{cases}$	1
La balle touche le filet	$\begin{cases} x_{filet} - R_b \leq r_{b,x}(t_{i+1}) \leq x_{filet} + R_b \\ y_{filet, \min} \leq r_{b,y}(t_{i+1}) \leq y_{filet, \max} \\ z_{filet, \text{bas}} - R_b \leq r_{b,z}(t_{i+1}) \leq z_{filet, \text{haut}} + R_b \end{cases}$	2
La balle sort du jeu et touche le sol	$t_i = t_{max}$	3

Lorsqu'un des critères d'arrêt est atteint, l'instant courant t_i est relevé et devient l'instant final t_f , et la boucle cesse d'être exécutée. La solution en vitesse correspondante $\vec{v}_b(t_f)$ est également relevée.

Analyse des résultats

La fonction implémentée servira à simuler 4 essais de tirs. Les conditions initiales de la balle (position du centre de masse, vitesse et vitesse angulaire) varieront entre chaque essai. Pour chaque essai, les 3 options de combinaisons de forces seront pour avoir au total 12 simulations.

Conditions initiales

Tableau 1.1.1 : conditions initiales des essais

Essai	rbi (m)	vbi (m/s)	wbi (rad/s)
1	(0.00, 0.50, 1.10)	(4.00, 0.00, 0.80)	(0.00, -70.00, 0.00)
2	(0.00, 0.40, 1.14)	(10.00, 1.00, 0.20)	(0.00, 100.00, -50.00)
3	(2.74, 0.50, 1.14)	(-5.00, 0.00, 0.20)	(0.00, 100.00, 0.00)
4	(0.00, 0.30, 1.00)	(10.00, -2.00, 0.20)	(0.00, 10.00, -100.00)

Résultats des simulations

Tableau 1.2.1 : résultats de l'essai 1

options	Coup	Vitesse finale (m/s)	Temps final (s)	Position finale (m)
1	2 (raté filet)	(4.0, 0.0, -2.5075)	0.3376	(1.3504, 0.5, 0.8116)
2	1 (raté côté joueur)	(3.3168, 0.0, -2.5006)	0.3543	(1.2929, 0.5, 0.7797)
3	2 (raté filet)	(3.4413, 0.0, -1.6304)	0.3811	(1.3870, 0.5, 0.9323)

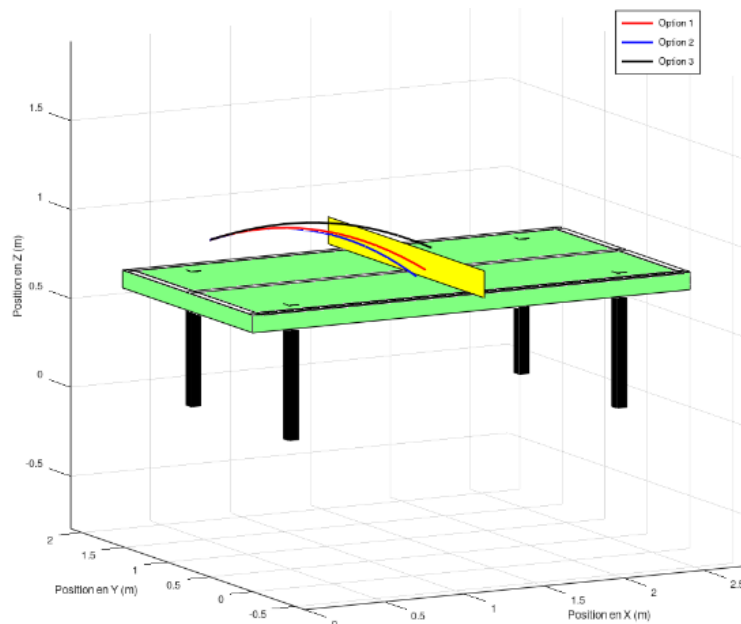


Figure 1.1.1 : graphique de l'essai 1

Tableau 1.2.2 : résultats de l'essai 2

options	Coup	Vitesse finale (m/s)	Temps final (s)	Position finale (m)
1	3 (raté hors jeu)	(10.0, 1.0, -4.6892)	0.4990	(4.99, 0.899, 0.0197)
2	0 (réussi)	(7.0087, 0.7009, -2.4119)	0.3068	(2.5588, 0.6559, 0.7798)
3	2 (raté filet)	(8.0573, 0.0391, -2.7723)	0.1525	(1.3768, 0.4743, 0.9323)

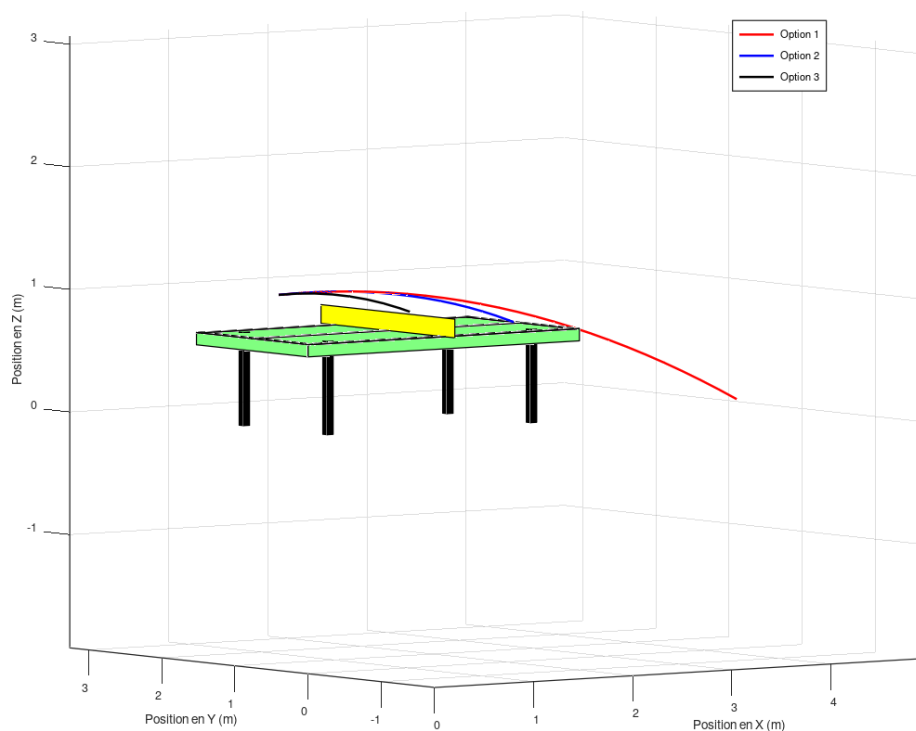


Figure 1.1.2 : graphique de l'essai 2

Tableau 1.2.3 : résultats de l'essai 3

options	Coup	Vitesse finale (m/s)	Temps final (s)	Position finale (m)
1	2 (raté filet)	(-5.0, 0.0, -2.4460)	0.2701	(1.3895, 0.5, 0.8365)
2	2 (raté filet)	(-4.1232, 0.0, -2.4838)	0.2971	(1.3898, 0.5, 0.7879)
3	0 (réussi)	(-4.1124, 0.0, -1.6639)	0.4911	(0.5676, 0.5, 0.7798)

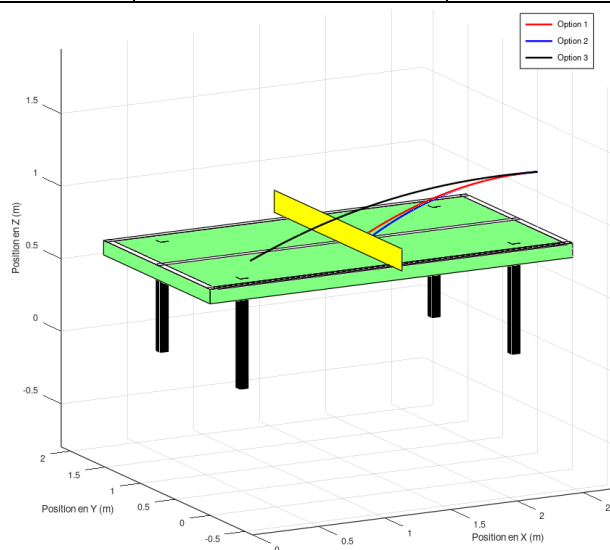


Figure 1.1.3 : graphique de l'essai 3

Tableau 1.2.4 : résultats de l'essai 4

options	Coup	Vitesse finale (m/s)	Temps final (s)	Position finale (m)
1	3 (raté hors jeu)	(10.0, -2.0, -4.3874)	0.4682	(4.6820, -0.6364, 0.0195)
2	2 (raté filet)	(8.2862, -1.6572,-1.1647)	0.1486	(1.3508, 0.0298, 0.9253)
3	2 (raté filet)	(7.7692, -3.1914,-1.3534)	0.1527	(1.3504, -0.1036, 0.9078)

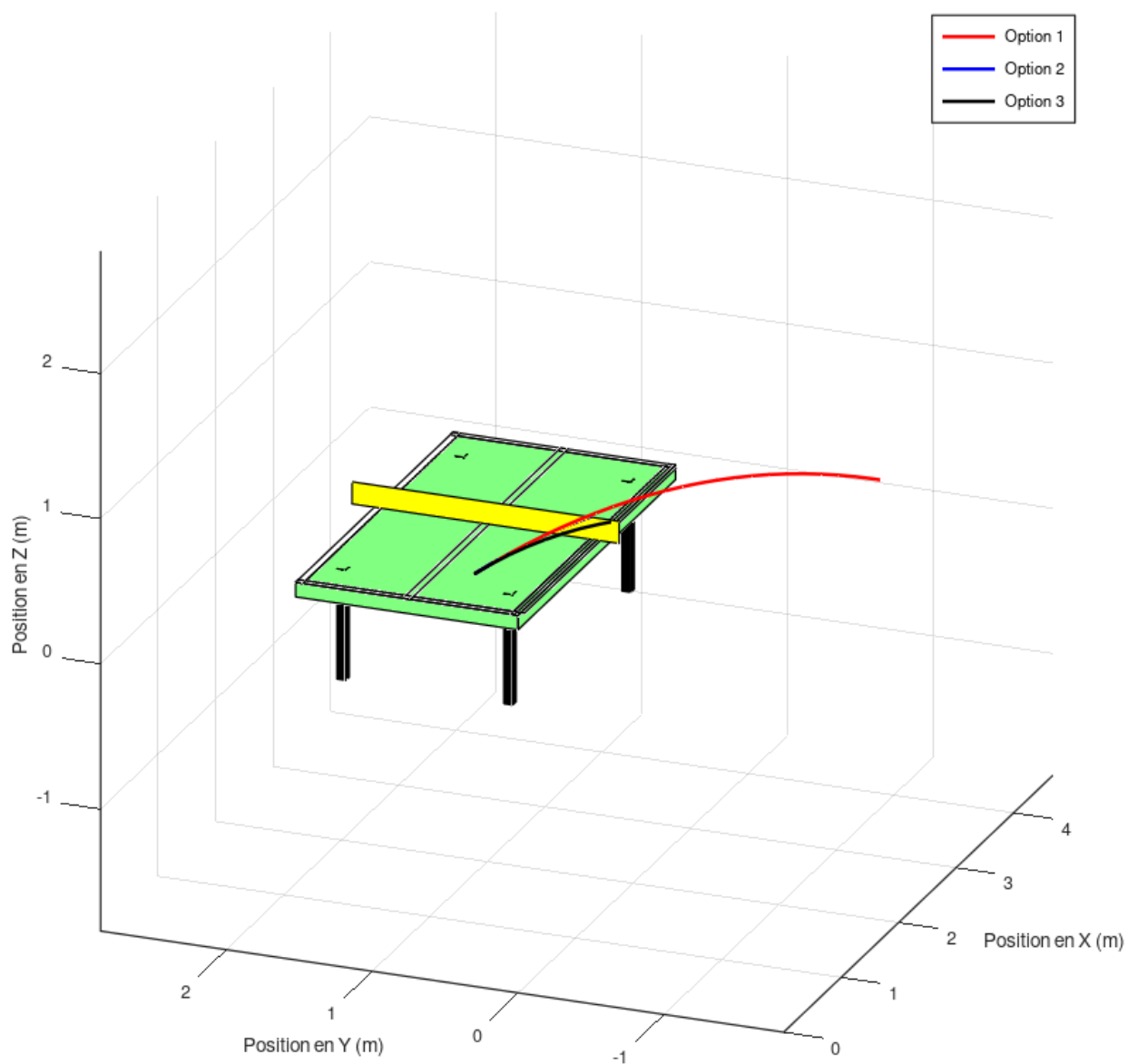


Figure 1.1.4 : graphique de l'essai 4

Analyse et conclusions

Points pertinents à propos des résultats :

- Comme la balle a une composante y de vitesse angulaire prononcée dans les 4 essais, Il est normal de remarquer une déviation verticale de la trajectoire lorsque la force de Magnus est appliquée. Dans les essais où une rotation autour de l'axe z verticale est présente (essais 2 et 4), on voit qu'il y a une déviation de la vitesse et de la position finale selon l'axe des y (le long des côtés gauches et droites de la table). Finalement, dans les essais où il n'y a aucune rotation autour de l'axe des z (1 et 3), on voit que la balle garde la même valeur de position en y durant toute la trajectoire (0.5 m).
- Dans l'essai 1, le seul essai où la vitesse angulaire autour de l'axe des y est négative, on peut remarquer que l'effet Magnus a permis à la balle de finir plus haut selon l'axe des z car la force de Magnus est dirigée vers le haut. Dans les autres essais, la vitesse angulaire positive autour de l'axe des y permet plutôt à la balle de se diriger vers le bas.

En conclusion, cette simulation met en évidence l'importance de la modélisation précise des forces aérodynamiques pour prévoir la trajectoire d'un objet. Les effets du frottement de l'air et de la force Magnus sont essentiels pour reproduire des conditions réalistes. De manière plus général des changements qui semblent insignifiants dans les composantes individuelles des vecteurs de force peuvent mener à des résultats entièrement différents.