



POLYTECHNIQUE
MONTREAL

PHS4700





Physique pour les applications multimédia

PAGE COUVERTURE OBLIGATOIRE POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 01

Numéro de l'équipe : 02

Numéro de devoir : 03

Nom : Diop	Prénom : Abdul Hamid	Matricule : 2141605
Signature : 		
Nom : Berger	Prénom : Javier	Matricule : 2206989
Signature : 		
Nom : Ngandjui Tchuenta	Prénom : Ewald Jordan	Matricule : 2029689
Signature : 		
Nom : Jourba	Prénom : Alexandra	Matricule : 2413451
Signature : 		

Sommaire

Introduction.....	3
Étapes de résolution.....	4
Détermination de la trajectoire d'un rayon lumineux et formation d'un point image.....	4
Aspects inhérents à la simulation numérique.....	6
Analyse des résultats.....	9
Paramètres des différents cas.....	9
Résultats des simulations.....	9
Cas 1.....	9
Cas 2.....	10
Cas 3.....	10
Cas 4.....	11
Conclusion.....	12

Introduction

Le présent rapport a pour objectif d'étudier la formation de l'image perçue par un observateur d'un bloc de métal coloré, ce dernier flottant dans un milieu transparent de forme ellipsoïdale et à priori différent du milieu de l'observateur. L'objet est regardé dans plusieurs conditions différentes, que ce soit au niveau des indices de réfraction des milieux concernés ou de la position de l'observateur, en revanche la position et la nature de l'objet observé ne varient pas.

Ces paramètres influencent la trajectoire des rayons lumineux, et donc in fine la position de l'image perçue par l'observateur. L'objectif est donc de développer une simulation pour modéliser la formation de l'image et analyser comment celle-ci s'effectue en fonction des différentes conditions d'observation, en se basant sur le formalisme de l'optique géométrique.

La fonction Matlab développée pour cette simulation est appelée de la manière suivante :

```
[xi yi zi face]=Devoir4(nout,nin,poso)
```

Les paramètres d'entrée de la fonction sont les suivants :

- **nout** : l'indice de réfraction du milieu de l'observateur.
- **nin** : l'indice de réfraction du milieu de l'objet, le bloc transparent de forme ellipsoïdale.
- **poso** = [**x_O** ; **y_O** ; **z_O**] : le vecteur position désignant la position de l'observateur.

Les résultats retournés par la fonction sont :

- **xi** : le vecteur contenant toutes les coordonnées selon x des points images produits par les rayons issu de l'objet.
- **yi** : le vecteur contenant toutes les coordonnées selon y des points images produits par les rayons issu de l'objet.
- **zi** : le vecteur contenant toutes les coordonnées selon z des points images produits par les rayons issu de l'objet.
- **face** : le vecteur contenant, pour chaque point image, le numéro de la surface que le rayon a touché.

Ce rapport présentera les résultats obtenus pour plusieurs simulations, avec des graphiques illustrant les trajectoires et des tableaux résumant les données clés pour chaque essai.

Étapes de résolution

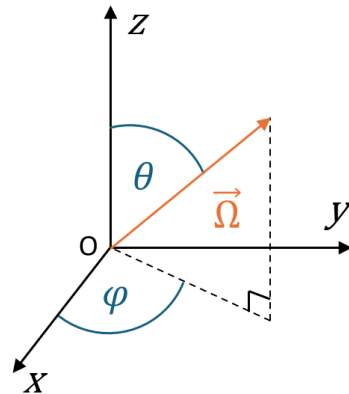
Détermination de la trajectoire d'un rayon lumineux et formation d'un point image

On considère un pavé métallique coloré qui est immergé dans un bloc transparent de forme ellipsoïdale et d'indice optique n_B , et un observateur situé en \vec{r}_O à l'extérieur de ce bloc, et également immergé dans un milieu transparent d'indice optique n_O . Malgré le fait que le bloc métallique soit coloré, on considérera que l'indice optique ne change pas en fonction de la longueur d'onde et on se limitera à une approche purement géométrique du problème.

Pour déterminer la forme et l'endroit où va se former l'image du bloc perçue par l'observateur, considérons d'abord un seul rayon partant du bloc et arrivant jusqu'à l'observateur. En faveur du **principe de retour inverse de la lumière**, le trajet suivi par le rayon ne sera pas modifié si on change le sens de propagation : autrement dit, pour déterminer la trajectoire suivie par notre rayon, on peut partir indifféremment du bloc ou de l'observateur. Étant donné que le bloc est constitué d'une infinité de points sources émettant chacun dans une infinité de directions différentes, il est plus aisé à des fins de simulations de partir de l'observateur, qui n'est constitué que d'un seul point.

On considère donc un rayon se propageant à partir du point \vec{r}_O dans une direction $\vec{\Omega}$ (vecteur unitaire) définie comme suit à partir des angles θ et φ , respectivement l'angle polaire et l'angle azimutal :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



Le rayon va alors se propager en ligne droite, et trois cas de figure peuvent alors se présenter :

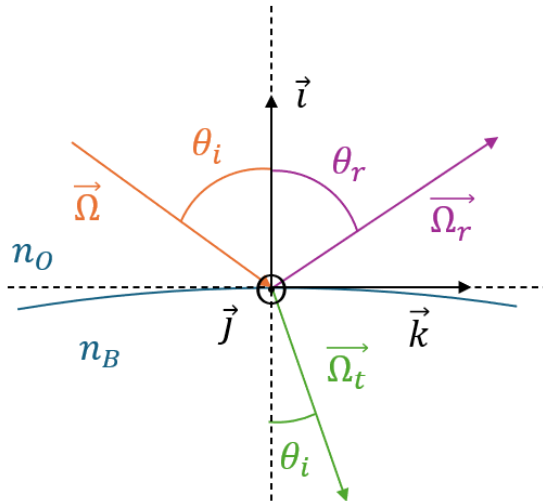
- Cas 1 : l'indice optique du milieu de propagation reste le même, et le rayon continue de se propager en ligne droite.
- Cas 2 : l'indice optique change, et le rayon rencontre alors une interface entre deux milieux d'indice différents.
- Cas 3 : le rayon rencontre l'objet opaque sur sa trajectoire, et sa propagation s'arrête.

Étudions ce qu'il se passe dans le cas 2. Pour déterminer la nouvelle trajectoire du rayon, on va appliquer les lois de Snell-Descartes ; pour cela, on récupère la normale à la surface de séparation \vec{n} dont les coordonnées sont données par l'énoncé. Le plan formé par \vec{n} et le vecteur unitaire du rayon incident $\vec{\Omega}$ forment le plan d'incidence, qui contient les rayons réfléchis et transmis. On définit ensuite les deux tangentes à la surface de séparation au niveau du point d'incidence comme suit – le tout forme un repère local au point d'incidence qui sera utile par la suite (on rappelle que $\vec{\Omega}$ est défini de façon à être unitaire) :

$$\vec{j} = \vec{\Omega} \times \vec{n}$$

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$

Les lois de la réfraction et de la réflexion s'énoncent de la manière suivante :



$$n_O \sin(\theta_i) = n_B \sin(\theta_t)$$

$$\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$$

$$\sin(\theta_i) = s_i = \vec{\Omega} \cdot \vec{i}$$

$$\sin(\theta_t) = s_t = \frac{n_O}{n_B} \vec{\Omega} \cdot \vec{k}$$

On peut alors extraire les vecteurs $\vec{\Omega}_r$ et $\vec{\Omega}_t$ modélisant les rayons issus du rayon incident qui sont réfléchis et transmis à l'interface :

$$\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega} - 2\vec{i}(s_i)$$

$$\vec{\Omega}_t = -\vec{i}\sqrt{1-s_t^2} + \vec{k}s_t$$

Notons que si $n_B < n_O$, le rayon réfracté n'existe que si $\theta_i \leq \arcsin\left(\frac{n_B}{n_O}\right)$. Si l'angle incident dépasse cette valeur, il y a réflexion totale.

On reprend ensuite le raisonnement avec le nouveau rayon obtenu, toujours avec les mêmes 3 cas de figures, jusqu'à arriver sur l'objet opaque qui arrête la propagation.

L'observateur va alors percevoir une image dite « virtuelle », car de son point de vue tout se passe comme si les rayons qui lui arrivaient se propageaient en ligne droite depuis un point source virtuel situé à une distance d égale à celle parcourue réellement par le rayon lumineux. Pour calculer d , il faut relever les différents points de rencontre avec une interface \vec{r}_n , puis effectuer la somme $\sum_n |\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1}|$.

On utilise ensuite l'équation vectorielle d'une droite pour déterminer la position du point image perçu par l'observateur, avec $\vec{\Omega}$ le vecteur direction de propagation initial :

$$\overrightarrow{r_{B,image}} = \vec{r}_O + d\vec{\Omega}$$

Aspects inhérents à la simulation numérique

Pour former une image complète de l'objet, il faut pouvoir calculer la trajectoire d'un grand nombre de rayons issu de l'observateur. En pratique on se limitera à un nombre limité, selon les conditions décrites par l'énoncé. Toujours d'après les conditions décrites par l'énoncé, tous les rayons issus de l'observateur ne rencontreront pas l'objet ; ces rayons ne seront pas conservés pour la simulation.

En pratique, les points d'interface sont calculés en faisant l'intersection du rayon et de la surface ellipsoïdale, ce qui revient à trouver des points $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ qui vérifient :

$$\frac{(x_i - 4)^2}{a^2} + \frac{(y_i - 4)^2}{b^2} + \frac{(z_i - 11)^2}{c^2} = 1$$

où a, b et c sont les demi-axes de l'ellipsoïde. Le rayon lumineux est défini par l'équation paramétrique :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_O + t \vec{\Omega}$$

Où \vec{r}_O est la position de l'observateur et $\vec{\Omega}$ est le vecteur directionnel du rayon.

En substituant $\vec{r}(t)$ dans l'équation de l'ellipsoïde, on obtient une équation quadratique en t :

$$\frac{(x_O + t \Omega_x - 4)^2}{a^2} + \frac{(y_O + t \Omega_y - 4)^2}{b^2} + \frac{(z_O + t \Omega_z - 11)^2}{c^2} = 1$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$At^2 + Bt + C = 0$$

avec :

$$A = \frac{\Omega_x^2}{a^2} + \frac{\Omega_y^2}{b^2} + \frac{\Omega_z^2}{c^2}$$

$$B = 2 \left(\frac{\Omega_x(x_O - 4)}{a^2} + \frac{\Omega_y(y_O - 4)}{b^2} + \frac{\Omega_z(z_O - 11)}{c^2} \right)$$

$$C = \frac{(x_O - 4)^2}{a^2} + \frac{(y_O - 4)^2}{b^2} + \frac{(z_O - 11)^2}{c^2} - 1$$

La résolution de cette équation fournit les valeurs de t correspondant aux points d'intersection entre le rayon et la surface de l'ellipsoïde. Seules les solutions réelles et positives de t sont retenues, car elles correspondent aux points situés devant l'observateur.

Choix des rayons initiaux

Dans le code, les rayons initiaux sont générés en échantillonnant des angles polaires θ et azimutaux ϕ autour de la direction pointant vers le centre de l'ellipsoïde. La direction du vecteur allant de l'observateur au centre de l'ellipsoïde est calculée :

$$\vec{d} = \vec{c}_m - \vec{r}_O$$

où $\vec{c}_m = (4, 4, 11)$ est le centre de l'ellipsoïde. Les angles polaires et azimutal sont alors déterminés :

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{d_z}{|\vec{d}|} \right)$$
$$\varphi_0 = \arctan 2(d_y, d_x)$$

Ces angles sont ensuite générés autour de ces valeurs centrales en utilisant des intervalles définis :

$$\begin{aligned}\theta &\in [\theta_0 + \theta_{\min}, \theta_0 + \theta_{\max}] \\ \varphi &\in [\varphi_0 + \varphi_{\min}, \varphi_0 + \varphi_{\max}]\end{aligned}$$

où θ_{\min} , θ_{\max} , φ_{\min} et φ_{\max} sont des angles définissant l'étendue de l'échantillonnage.

Les vecteurs directionnels des rayons sont alors calculés à partir de ces angles:

$$\vec{\Omega} = [\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta)]$$

Cette méthode permet de couvrir un cône de directions orienté vers l'ellipsoïde, augmentant ainsi la probabilité que les rayons interceptent l'objet à l'intérieur.

Calcul des positions des interfaces

Pour chaque rayon généré, nous résolvons l'équation quadratique en t pour déterminer les points d'intersection avec l'ellipsoïde. Les solutions positives de t fournissent les positions des interfaces \vec{r}_i . Les normales à la surface de l'ellipsoïde au point d'intersection sont calculées en dérivant l'équation de l'ellipsoïde :

$$\vec{n} = \left[\frac{2(x_i - 4)}{a^2}, \frac{2(y_i - 4)}{b^2}, \frac{2(z_i - 11)}{c^2} \right]$$

Puis normalisées:

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Ces normales sont utilisées pour appliquer les lois de Snell-Descartes et déterminer si le rayon sera réfracté ou réfléchi à l'interface.

Application des lois de l'optique géométrique

Au point d'intersection, nous déterminons si le rayon est réfracté ou réfléchi. Le paramètre s_t est calculé pour chaque rayon :

$$s_t = \frac{n_{\text{in}}}{n_{\text{out}}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{k})$$

Où \vec{k} est un vecteur perpendiculaire au plan d'incidence, défini par :

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \vec{\Omega} \times \vec{n} \\ \vec{k} &= \vec{n} \times \vec{j}\end{aligned}$$

Si $s_t < 1$, le rayon est réfracté à l'intérieur de l'ellipsoïde, avec une nouvelle direction donnée par :

$$\vec{\Omega}_t = -\vec{n} \sqrt{1 - s_t^2} + \vec{k} s_t$$

Si $s_t \geq 1$, le rayon subit une réflexion totale interne, et sa direction devient :

$$\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega} - 2(\vec{\Omega} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

Interaction avec le bloc métallique

Les rayons réfractés sont ensuite testés pour déterminer s'ils interceptent le bloc métallique à l'intérieur de l'ellipsoïde. Cela implique de résoudre les équations d'intersection entre le rayon et les plans définissant les faces du bloc. Si une intersection valide est trouvée (c'est-à-dire que le point d'intersection se trouve à l'intérieur des limites du bloc), nous calculons la position du point d'impact et identifions la face touchée.

Gestion des réflexions internes multiples

Pour les rayons qui ne touchent pas le bloc après la première réfraction, le code gère les réflexions internes successives. À chaque réflexion, le rayon réfléchi est calculé :

$$\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega} - 2(\vec{\Omega} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

Nous résolvons à nouveau l'équation quadratique pour trouver le prochain point d'intersection avec l'ellipsoïde, calculons la nouvelle normale, et vérifions si le rayon touche le bloc. Ce processus se répète jusqu'à ce que le rayon sorte de l'ellipsoïde ou qu'un nombre maximal d'itérations soit atteint.

Formation de l'image virtuelle

Les positions des points où les rayons touchent le pavé métallique sont utilisées pour calculer les points images perçus par l'observateur. La position du point image est donnée par:

$$\vec{r}_{\text{image}} = \vec{r}_O + d_{\text{total}} \vec{\Omega}$$

Où d_{total} est la distance totale parcourue par le rayon, incluant les segments à l'intérieur de l'ellipsoïde. Cela revient à considérer que l'observateur voit les rayons comme se propageant en ligne droite dans son milieu. Les coordonnées (x_i, y_i, z_i) de ces points images sont stockées, ainsi que l'information sur la face du pavé touchée. Ces données permettent de reconstruire l'image virtuelle de l'objet tel que perçu par l'observateur.

Analyse des résultats

Paramètres des différents cas

Tableau 1.1.1 : paramètres des différents cas

Cas	nout	nin	poso
1	1	1	(0,0,5)
2	1	1.5	(0,0,5)
3	1	1.5	(0,0,0)
4	1.2	1	(0,0,5)

Résultats des simulations

Cas 1

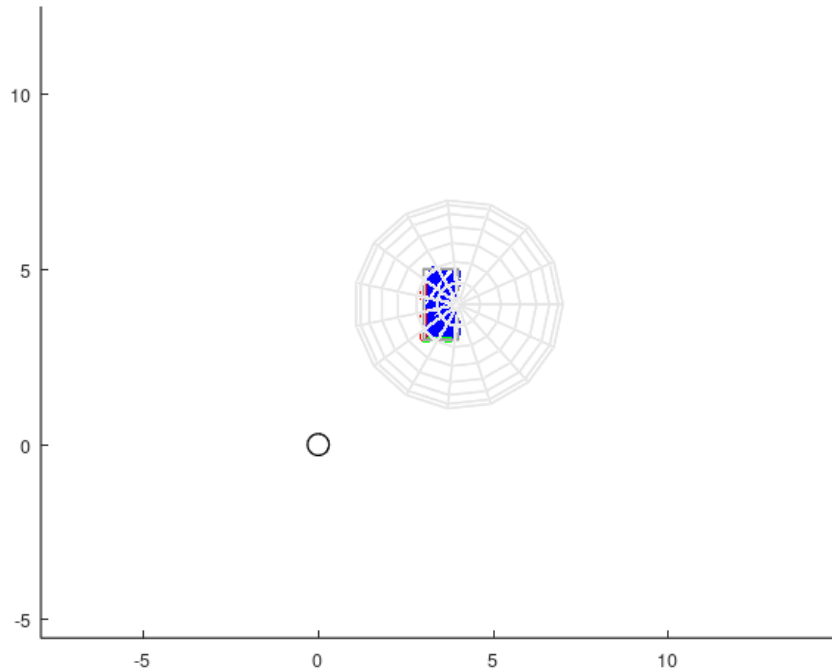


Figure 1.1.1 : résultat de la simulation 1

Cas 2

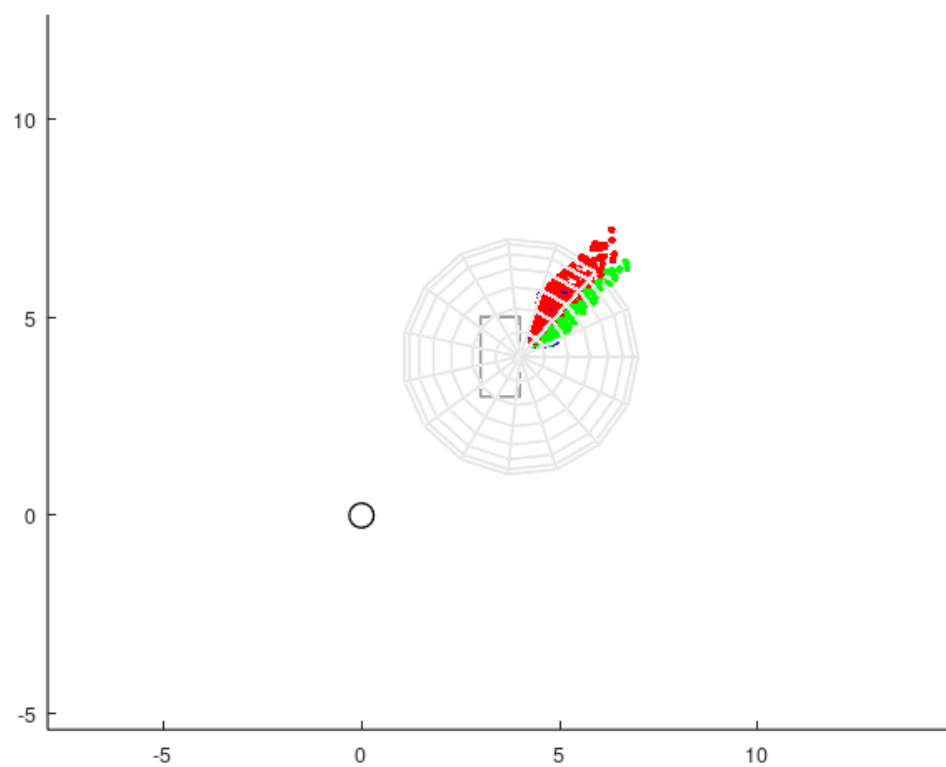


Figure 1.1.2 : résultat de la simulation 2

Cas 3

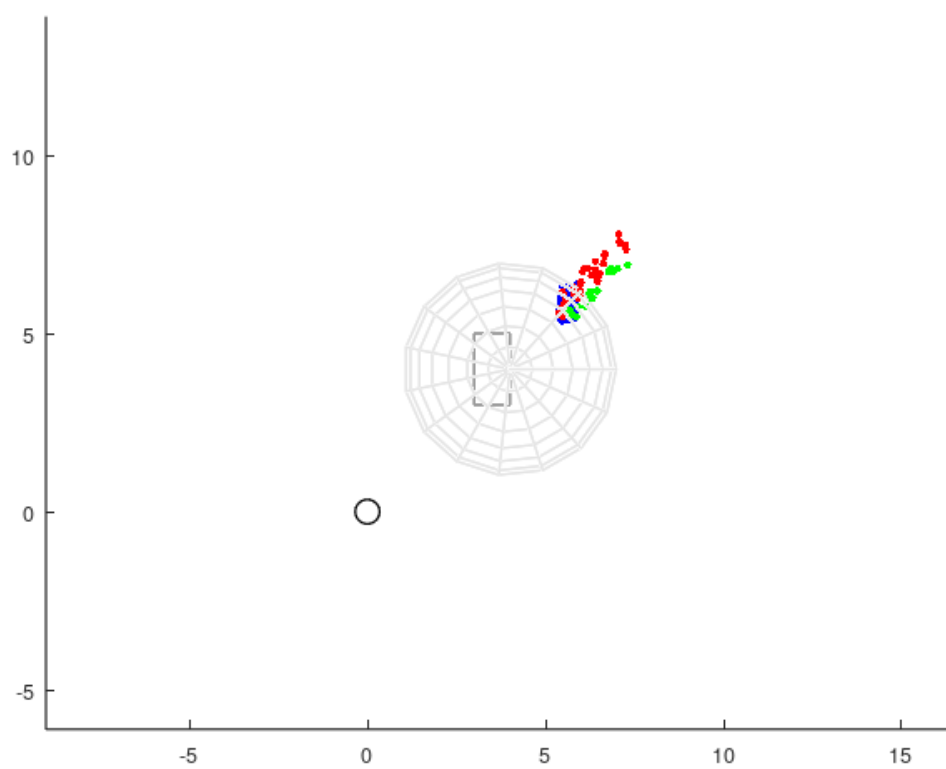


Figure 1.1.3 : résultat de la simulation 3

Cas 4

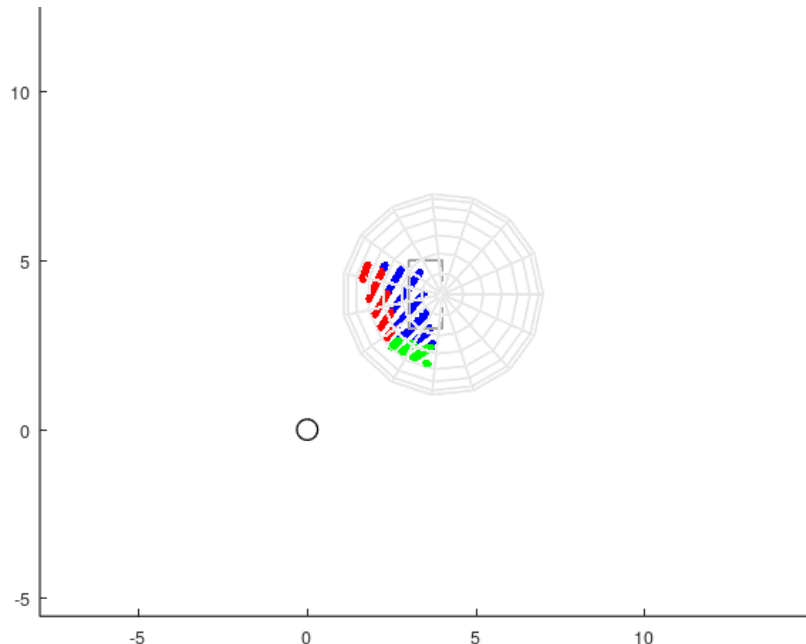


Figure 1.1.4 : résultat de la simulation 4

Dans la simulation 1, les indices de réfraction sont égaux ($n_0=n_b=1$), donc aucune réfraction ni réflexion ne se produit. L'image perçue est identique au bloc métallique, sans déformation ni déplacement.

Pour la simulation 2, on a $n_0=1$ et $n_b=1,5$, la différence d'indices entraîne une forte réfraction. Les rayons sont nettement déviés en traversant le bloc transparent, ce qui crée une distorsion importante et un décalage notable de l'image virtuelle par rapport à la position réelle du bloc.

La simulation 3 est similaire à la simulation 2 ($n_0=1$ et $n_b=1,5$), mais avec l'observateur centré sous le bloc. Cette position particulière engendre des angles d'incidence extrêmes, augmentant la probabilité de phénomènes complexes comme des réflexions multiples. Ces effets rendent la distorsion plus localisée et asymétrique.

Dans le cas de la simulation 4, Avec $n_0=1,2$ et $n_b=1$ les rayons subissent une réfraction inversée (déviation vers l'extérieur). La différence entre les indices de réfraction étant plus basses, on peut remarquer une distorsion moins prononcées que dans les simulations 2 et 3, mais la différence des indices entraîne aussi des phénomènes de réflexion totale pour les rayons aux angles d'incidence élevés. Ces réflexions limitent la pénétration de certains rayons, affectant la couverture et la précision de l'image virtuelle.

Conclusion

Ce laboratoire nous a permis d'appliquer les concepts de l'optique géométrique, tels que la réfraction, la réflexion et la réflexion totale, à travers des simulations numériques. En modélisant le trajet des rayons lumineux dans un bloc transparent ellipsoïdal et leur interaction avec un bloc métallique, nous avons exploré l'effet des indices de réfraction et des positions d'observation sur la formation des images.

L'implémentation en MATLAB a présenté des défis, notamment dans la gestion des réflexions multiples et des calculs de trajectoires lumineuses. Un point à améliorer serait l'optimisation des calculs pour les intersections avec l'ellipsoïde. Actuellement, chaque rayon est traité individuellement, mais regrouper les calculs par lots réduirait significativement le temps de calcul pour les simulations avec un grand nombre de rayons, bien que cela pourrait réduire la précision.

En somme, ce laboratoire a permis de clarifier certains concepts du domaine de l'optique en nous permettant d'avoir une certaine intuition sur la manière dont les rayons lumineux interagissent avec différentes surfaces, dans différents milieux.