Równania ruchu

Na tych laboratoriach skupimy się na scałkowaniu równania ruchu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}$$

Gdzie $\mathbf{x}$ to odkształcenie, $\mathbf{f}$ to siła, $\mathbf{M}$ to macierz masowa, zaś $\mathbf{S}$ to macierz sztywności.

Na początek przez $\mathbf{y}$ oznaczmy prędkość odkształcenia, czyli $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$. Teraz mamy układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{y} \end{cases}$$

Zastępując pochodną po lewej stronie przez różnicę skończoną mamy:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\frac{\mathbf{y}^{n+1}-\mathbf{y}^n}{\mathrm{dt}} &= \mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x} \\ \frac{\mathbf{x}^{n+1}-\mathbf{x}^n}{\mathrm{dt}} &= \mathbf{y} \end{cases}$$

Po prawej stronie równania możemy użyć $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ z nowej $(n+1)$, bądź starej (n) iteracji. W zależności co użyjemy otrzymamy mniej lub bardziej uwikłane równanie, a schemat będzie jawny (explicit) bądź niejawny (implicit).
Uwaga: aby porównać różne schematy, każdy schemat zapisz w oddzielnej funkcji, której nagłówek powinien mieć postać:

```
void Dynamics_schemat(int N, double *x, double *y, double *f, double t_m
```

gdzie `x` i `y` to początkowe wartości $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, `f` to wektor sił, `t_max` to całkowity czas całkowania, a `dt` to krok czasowy.

Schemat prawie jawny (almost explicit)

Na początek wstawmy po prawej stronie wartości ze starej iteracji. Otrzymamy:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} &= \mathbf{M}\mathbf{y}^n + \mathrm{dt}(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^n) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \mathrm{dt}\mathbf{y}^n \end{cases}$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez macierz masową $\mathbf{M}$. W pliku `MesLib.h` jest ona zdefiniowana w analogiczny sposób jak macierz sztywności: przez globalną tablicę `M` i globalną stałą `Mm`.
Uwaga: W mnożeniu przez macierz masową, należy także zamrozić wybrane stopnie swobody.

Zadanie

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu według następującego schematu:

- Oblicz $\mathbf{b}^n = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + \mathrm{dt}(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^n)$,
- Oblicz $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathrm{dt}\mathbf{y}^n$,
- Rozwiąż układ: $\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{b}^n$,
- Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny, a dla jakich nie.

Zadanie

Jak wygląda wzór na całkowitą energię układu (energia potencjalna sprężystości + energia kinetyczna)? Zróżniczkuj ją po t i pokaż, że jest stała.

Zadanie

Wydrukuj w konsoli jak zmienia się całkowita energia układu w czasie.

Schemat pół niejawny (semi-implicit)

Prostą modyfikacją jest użycie po prawej stronie $\mathbf{x}$ ze starej iteracji i $\mathbf{y}$ z nowej, otrzymując:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} &= \mathbf{M}\mathbf{y}^n + \mathrm{dt}(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^n) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \mathrm{dt}\mathbf{y}^{n+1} \end{cases}$$

Zadanie

Przekopiuj funkcję `Dynamics` i zmodyfikuj ją tak aby układ na $\mathbf{y}^{n+1}$ był rozwiązywany przed obliczeniem $\mathbf{x}^{n+1}$.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

Schemat niejawny (fully-implicit)

Możemy także po prawej stronie wziąć obie wartości z nowej iteracji, otrzymując:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} & = \mathbf{M}\mathbf{y}^{n} + \mathrm{dt}(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^{n+1}) \\ \mathbf{x}^{n+1} & = \mathbf{x}^{n} + \mathrm{dt}\mathbf{y}^{n+1} \end{cases}$$

Wstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^{n} + \mathrm{dt}(\mathbf{f} - \mathbf{S}(\mathbf{x}^{n} + \mathrm{dt}\mathbf{y}^{n+1}))$$

Po przekształceniu:

$$(\mathbf{M} + \mathrm{dt}^2\mathbf{S})\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^{n} + \mathrm{dt}(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^{n})$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez $\mathbf{M} + \mathrm{dt}^2\mathbf{S}$

Zadanie

Zmodyfikuj kod, by realizował schemat w pełni niejawny, zamieniając macierz $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M} + \mathrm{dt}^2\mathbf{S}$ w obliczeniu y-ka.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

W pół kroku (midpoint)

Ostatnia z metod, którymi się zajmiemy bierze po prawej stronie średnią z wartości w nowej i starej iteracji:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} & = \mathbf{M}\mathbf{y}^{n} + \mathrm{dt}\left(\mathbf{f} - \mathbf{S}\frac{\mathbf{x}^{n+1}+\mathbf{x}^{n}}{2}\right) \\ \mathbf{x}^{n+1} & = \mathbf{x}^{n} + \mathrm{dt}\frac{\mathbf{y}^{n+1}+\mathbf{y}^{n}}{2} \end{cases}$$

Po wstawieniu drugiego równania do pierwszego mamy:

$$\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^{n} + \mathrm{dt}\left(\mathbf{f} - \mathbf{S}\frac{\mathbf{x}^{n} + \mathrm{dt}\frac{\mathbf{y}^{n+1}+\mathbf{y}^{n}}{2} + \mathbf{x}^{n}}{2}\right)$$

Po uproszczeniu:

$$\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^{n} + \mathrm{dt}\left(\mathbf{f} - \mathbf{S}\left(\mathbf{x}^{n} + \mathrm{dt}\frac{\mathbf{y}^{n+1}+\mathbf{y}^{n}}{4}\right)\right)$$

Ostatecznie:

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\mathrm{dt}^2}{4}\mathbf{S}\right)\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^{n} + \mathrm{dt}\left(\mathbf{f} - \mathbf{S}\left(\mathbf{x}^{n} + \mathrm{dt}\frac{\mathbf{y}^{n}}{4}\right)\right)$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez $\mathbf{M} + \frac{\mathrm{dt}^2}{4}\mathbf{S}$.

Zadanie

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu według następującego schematu (dla uproszczenia zapisu pominęliśmy number `n` iteracji):

- Oblicz $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{\mathrm{dt}}{4}\mathbf{y}$,
- Oblicz $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{y} + \mathrm{dt}(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x})$,
- Oblicz $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{\mathrm{dt}}{4}\mathbf{y}$,
- Rozwiąż układ: $(\mathbf{M} + \frac{\mathrm{dt}^2}{4}\mathbf{S})\mathbf{y} = \mathbf{b}$,
- Oblicz $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{\mathrm{dt}}{2}\mathbf{y}$,
- Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

Zadanie

Udowodnij, że metoda „w pół kroku” zachowuje energię całkowitą układu.[1]

[1] Podpowiedź: tak jak $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ to $x_{n+1}^T M x_{n+1} - x_n^T M x_n = (x_{n+1}-x_n)^T M (x_{n+1} + x_n)$