Topologiczna optymalizacja z użyciem równań sprzężonych

Na dzisiejszych zajęciach dobierzemy wektor grubości elementów $\theta = $ thick, tak by ugięcie belki było jak najmniejsze. Jedynym elementem który zależy od θ jest macierz sztywności:

$$S(\theta)x = F$$

A dokładniej: macierz sztywności jest sumą macierzy elementów przemnożonych przez elementy θ. Dla późniejszej poprawy zbieżności dołożymy potęgę $\gamma = 3$ do tej zależności:

$$S(\theta) = \sum_i \theta_k^\gamma K^k$$

Będziemy chcieli zoptymalizować przesunięcie węzła w którym przyłożyliśmy siłę. Stwórzmy wektor g, który ma -1 w miejscu tego przemieszczenia, a resztę wartości ma zerową. Teraz nasza funkcja celu to $J = -\langle x, g\rangle$. Potraktujmy nasze równanie statyki jako więź i rozpiszmy funkcję celu powiększoną o mnożniki Lagrange:

$$-\sum_i x_i g_i + \sum_j \lambda_j (\sum_i S_{ji}(\theta)x_i - F_j)$$

Optymalne rozwiązanie powinno zerować pochodne po x, λ i θ:

$$\begin{cases} -g_i + \sum_j \lambda_j S_{ji}(\theta) & = 0 \\ \sum_i S_{ji}(\theta)x_i - F_j & = 0 \\ \sum_{ij} \lambda_j \frac{\partial}{\partial\theta_k} S_{ji}(\theta)x_i & = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie to nasze równanie statyki. Pierwsze równanie to równanie sprzężone (adjoint):

$$S^T(\theta)\lambda = g$$

Trzecie równanie to równanie ma gradient funkcji celu względem parametrów:

$$\frac{d}{d\theta_k} J = \sum_{ij} \lambda_j \frac{\partial}{\partial\theta_k} S_{ji}(\theta)x_i = \gamma\theta_k^{\gamma-1} \sum_{ij} K_{ji}^k(\theta)\lambda_j x_i$$

Zadanie

Wprowadź w funkcji mnożącej przez macierz sztywności `SMult` parametr $\gamma = 3$ (`gamma`) podnosząc `thick` do potęgi `gamma`. Zdefiniuj zmienną '$frac$' $= 0.5$ i ustaw początkowe θ (`thick`) na równe `frac`.

Zadanie

Zdefiniuj wektor g i rozwiąż równanie sprzężone (zauważ że S jest symetryczna).

Zadanie

Zdefiniuj funkcję `calc_grad(int n, double * x, double * lambda, double * grad)`. Skopiuj do niej zawartość funkcji mnożącej `SMult` i zmień:

```
r[♢] += x[♠]*pow(thick[♣],gamma)*♡;
```

na:

```
grad[♣] += gamma*pow(thick[♣],gamma-1)*lambda[♢]*x[♠]*♡;
```

Wyświetl tak policzony gradient. Pamiętaj, że gradient ma taką samą długość jak `thick`, czyli `mx*my`. Pamiętaj także by wyzerować `grad` i wyciąć część murującą stopnie swobody.

Optymalizacja

Gradient wskazuje nam w jakim kierunku powinniśmy przesuwać nasze wartości parametrów by uzyskać lepszy wynik. Pierwszym nasuwającym się schematem postępowania byłoby:

```
thick[i] += grad[i];
```

Zadanie

Dodaj gradient do parametrów `thick[i] += grad[i];`. Iteruj taką procedurę, oglądając wyniki.

Tak ustawiony problem optymalizacyjny jest nieograniczony. Chcemy jednak uzyskać najmniejsze ugięcie przy ustalonej „masie” belki. Tzn: chcemy zachować sumę parametrów θ: $\sum_i \text{thick[i]} = \text{frac*mx*my}$. Możemy łatwo nałożyć ten więz na `grad`:

Zadanie

Odejmij od wektora `grad` jego sumę.

W kolejnych iteracjach grad ma różną skalę. Na początku jest duży, a później mały. Typową techniką w takich wypadkach jest normalizacja:

Zadanie

Zdefiniuj zmienną `move = 0.05`. Podziel `grad` przez jego największy element i pomnóż przez `move*5`.

Na nasz projekt musimy jednak narzucić bardziej istotne warunki. Po pierwsze nigdzie grubość nie może przekroczyć 1, i musi być powyżej 0. Ponadto zazwyczaj chcemy, by zmiana w pojedynczej iteracji nie przekroczyła `move`. Te warunki dość trudno pogodzić z warunkiem stałej sumy elementów.

Zadanie

Wynik dodania gradientu do parametrów wstaw do nowego wektora `nt[i] = thick[i] + grad[i];`. Dla danego parametru `scale` oblicz `thick[i] = scale * nt[i];`. Na tak obliczone `thick` narzuć powyżej opisane 4 warunki, obcinając za duże, bądź za małe wartości.

Zadanie

Zsumuj wartości `thick` po poprzedniej procedurze. Dobierz `scale` metodą bisekcji tak by $\sum_i \text{thick[i]} = \text{frac*mx*my}$.

Zadanie

Przetestuj program dla różnych obciążeń, ustawień parametru `move` i ustawień maksymalnej liczby iteracji w metodzie gradientów sprzężonych.