Zderzenia idealnie sprężyste kul w dwóch wymiarach

1. Obliczanie prędkości po zderzeniu

Aby rozwiązać ogólny problem zderzenia idealnie sprężystego (ze współczynnikiem resuscytacji równym jedności) w przestrzeni dwuwymiarowej, a więc na płaszczyźnie, najpierw należy rozpatrzyć je w jednym wymiarze.

Zderzenie idealnie sprężyste w jednym wymiarze

Dwie kule o masach m_1, m_2 i prędkościach v_1, v_2 poruszają się wzdłuż tej samej prostej. Gdy dochodzi do kolizji, prędkości po zderzeniu $v_1{}'$, $v_2{}'$ możemy wyliczyć korzystając z zasady zachowania pędu:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}' \tag{1}$$

Ze względu na charakter zderzenia - zderzenie idealnie sprężyste - spełniona jest również zasada zachowania energii. Może zmienić się energia kinetyczna poszczególnych obiektów, ale sumaryczna wartość układu musi być zachowana:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1{}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}'^2 \tag{2}$$

Aby uzyskać wartości prędkości tuż po zderzeniu, należy rozwiązać układ równań (1)-(2) względem $v_1{}'$ i $v_2{}'$:

Dla $v_1{}' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_2{}'}{m_1}$:

$$m_1 v_1{}^2 + m_2 v_2{}^2 = m_1 \left(v_1 + \frac{m_2}{m_1} v_2 - \frac{m_2}{m_1} v_2{}'\right)^2 + m_2 v_2{}'^2$$

$$\begin{aligned} m_1 v_1{}^2 + m_2 v_2{}^2 \\ &= m_1 \left(v_1{}^2 + 2 v_1 \frac{m_2}{m_1} v_2 - 2 v_1 \frac{m_2}{m_1} v_2{}' + \frac{m_2{}^2}{m_1{}^2} v_2{}^2 - 2 \frac{m_2{}^2}{m_1{}^2} v_2 v_2{}' + \frac{m_2{}^2}{m_1{}^2} v_2{}'\right) \\ &\quad + m_2 v_2{}'^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1{}^2 v_1{}^2 + m_1 m_2 v_2{}^2 \\ &= m_1{}^2 v_1{}^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2{}' + m_2{}^2 v_2{}^2 - 2 m_2{}^2 v_2 v_2{}' + m_2{}^2 v_2{}' \\ &\quad + m_1 m_2 v_2{}'^2 \end{aligned}$$

$$0 = 2 m_1 m_2 v_1 v_2 - m_1 m_2 v_2{}^2 + m_2{}^2 v_2{}^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2{}' - 2 m_2{}^2 v_2 v_2{}' + m_2{}^2 v_2{}' + m_1 m_2 v_2{}'^2$$

$$0 = m_1 m_2 (2 v_1 v_2 - v_2{}^2 - 2 v_1 v_2{}' + v_2{}'^2) + m_2{}^2 (v_2{}^2 - 2 v_2 v_2{}' + v_2{}')$$

dla $m_2 \neq 0$

$$0 = m_1(2v_1(v_2 - v_2') - {v_2}^2 + {v_2}'^2) + m_2({v_2}^2 - 2v_2v_2' + v_2')$$

.. doprowadzenie do wyniku dla obu prędkości końcowych (3)-(4) - prośba o wskazówkę

Ostatecznie otrzymujemy:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

$$v_2' = \frac{-(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Zderzenie idealnie sprężyste w dwóch wymiarach - przypadek ogólny

W przypadku ruchu kul na płaszczyźnie, ruch musi być opisany przy pomocy wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Mając dane wektory prędkości przed zderzeniem określone jako:

$$\overrightarrow{v_1} = [v_{1,x}, v_{1,y}]$$

$$\overrightarrow{v_2} = [v_{2,x}, v_{2,y}]$$

wektory po zderzeniu określamy analogicznie:

$$\overrightarrow{v_1}' = [v_{1,x}', v_{1,y}']$$

$$\overrightarrow{v_2}' = [v_{2,x}', v_{2,y}']$$

mając na uwadze ich zależność od wektorów przed zderzeniem. Celem jest obliczenie wektorów po zderzeniu.

Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest wzięcie pod uwagę punktu styku kul w momencie zderzenia oraz rozłożeniu wektorów prędkości w kierunku:
- normalnym
- oraz stycznym
do powierzchni stykających się kul.

Oznaczając współrzędne środków okręgów jako (x_1, y_1) i (x_2, y_2), wektor normalny jednostkowy do okręgu pierwszego w punkcie styczności będzie miał postać:

$$\vec{n} = [n_x, n_y] = \frac{[x_2 - x_1,\ y_2 - y_1]}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{5}$$

natomiast wektor styczny:

$$\vec{t} = [t_x, t_y] = [-n_y, n_x] = \frac{[-(y_2 - y_1),\ x_2 - x_1]}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{6}$$

Zakładając, że powierzchnie obu kul są idealnie gładkie możemy wyjść z założenia, że po zderzeniu zmianie ulegną jedynie składowe prędkości normalne. Możemy więc potraktować zachowanie składowych normalnych jak w przypadku zderzenia jednowymiarowego.

Obliczenia należy rozpocząć od wykonania rzutów wektorów prędkości v_1', v_2' na osie lokalnego układu współrzędnych wyznaczonego przez wektor normalny i styczny $\vec{n}, \vec{t}$:

$$\begin{cases} v_{i,n} = \vec{v_i} \circ \vec{n} \\ v_{i,t} = \vec{v_i} \circ t \end{cases} , i \in \{1,2\} \tag{7}$$

gdzie ∘ oznacza iloczyn skalarny, a więc:

$$v_{1,n} = \vec{v_1} \circ \vec{n} = v_{1,x}n_x + v_{1,y}n_y$$
$$v_{1,t} = \vec{v_1} \circ t = v_{1,x}t_x + v_{1,y}t_y$$
$$v_{2,n} = \vec{v_2} \circ \vec{n} = v_{2,x}n_x + v_{2,y}n_y$$
$$v_{2,t=}\vec{v_2} \circ \vec{t} = v_{2,x}t_x + v_{2,y}t_y$$

Zgodnie z założeniami, składowe styczne przed i po zderzeniu pozostaną bez zmian:

$$v_{1,t}' = v_{1,t} \tag{8}$$

$$v_{2,t}' = v_{2,t} \tag{9}$$

Natomiast składowe normalne zmienią się zgodnie ze wzorami (3)-(4) dla przypadku jednowymiarowego dla kierunku wyznaczonego przez wektor normalny:

$$v_{1,n}' = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,n} + 2m_2v_{2,n}}{m_1 + m_2} \tag{10}$$

$$v_{2,n}' = \frac{-(m_1 - m_2)v_{2,n} + 2m_1v_{1,n}}{m_1 + m_2} \tag{11}$$

Aby uzyskać wartości wektorów w pierwotnym układzie współrzędnych, prędkości należy przetransformować:

$$\vec{v_1}' = v_{1,n}'\vec{n} + v_{1,t}'\vec{t} \tag{12}$$

$$\vec{v_2}' = v_{2,n}'\vec{n} + v_{2,t}'\vec{t} \tag{13}$$

<u>Zderzenie idealnie sprężyste w dwóch wymiarach - przypadek szczególny (identyczne kule)</u>

W przypadku zderzeń jednakowych kul, wzory (3)-(4) zostaną bardzo uproszczone ze względu tą samą wartość masy $m_1 = m_2 = m$:

$$v_1' = v_2 \tag{14}$$

$$v_2{}' = v_1 \tag{15}$$

a więc poszczególne składowe (8)-(11) w równaniach (12)-(13) będą wynosić odpowiednio:

$$v_{1,t}{}' = v_{1,t} \tag{16}$$

$$v_{2,t}{}' = v_{2,t} \tag{17}$$

$$v_{1,n}{}' = v_{2,n} \tag{18}$$

$$v_{2,n}{}' = v_{1,n} \tag{19}$$

Zderzenie idealnie sprężyste w dwóch wymiarach - przypadek szczególny (zderzenie ze ścianą)

Z kolei w przypadku zderzenia kuli ze ścianą, korzystając ze wzorów (3)-(4) i biorąc pod uwagę, że dla kuli o małej masie m_1i prędkości $v_1 \neq 0$ i ścianie o bardzo dużej masie m_2 pozostającej w spoczynku ($v_2 = 0$):

$$\lim_{m_2 \to \infty} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -1$$

$$\lim_{m_2 \to \infty} \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0$$

Oznacza to, że po zderzeniu kuli ze ścianą, ściana pozostanie nadal nieruchoma (co jest raczej intuicyjne), a kula będzie poruszać się z wektorem prędkości o składowych:

$$v_{1,n}{}' = -v_{1,n} \tag{20}$$

$$v_{1,t}{}' = v_{1,t} \tag{21}$$

Co dla przykładowego odbicia od ściany pionowej, leżącej na prawej krawędzi obszaru będzie oznaczało jedynie zmianę składowej x-owej na przeciwną.

2. Detekcja zderzenia w dwóch wymiarach

Kule mają różne masy, promienie oraz prędkości i położenia początkowe. N kul umieszczonych jest w prostokątnym pudle o zadanych wymiarach, ograniczonym dwoma ścianami pionowymi i poziomymi. Założeniem symulacji jest brak sił zewnętrznych działających na kule, a więc pomiędzy zderzeniami kule poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Wszelkie zderzenia zostały uproszczone do zderzenia dwóch obiektów. W przypadku zderzeń wielu obiektów, zostają one rozpatrzone po kolei jako sekwencja zderzeń dwóch obiektów.

W symulacji występują dwa rodzaje zderzeń:
- zderzenie kula-kula
- zderzenie kula-ściana
Każdy z przypadków należy rozpatrzyć osobno.

Jednym z kluczowych zadań symulacji jest detekcja kolejnego zderzenia, a więc określenie czasu, w którym ono nastąpi. Wykorzystany algorytm przedstawia poniższy schemat:

1) Dla i-tej kuli, gdzie $i \in < 1, N >$, znajdź czas, dla którego nastąpi zderzenie z każdą ze ścian, w kierunku których kula porusza się.
2) Znajdź najmniejszą wartość czasu i zapamiętaj jako t_{min}
3) Dla każdej pary kul, jeżeli nastąpi pomiędzy nimi zderzenie, oblicz czas zderzenia.
4) Znajdź najmniejszą wartość czasu i jeżeli jest mniejszy od t_{min}, ustaw nową wartość zmiennej.

Opis działania dla punktów 1) oraz 3) przedstawiono poniżej.

Zderzenie typu kula-ściana

Ponieważ kule znajdują się w prostokątnym pudle o czterech różnych ścianach, w przypadku zderzenia kula-ściana należy określić, która ze ścian będzie uczestniczyć w zderzeniu. W tym celu można wykorzystać informację o kierunku ruchu kuli zawartą w jej wektorze prędkości. Ponieważ symulacja jest wyświetlana na monitorze, układ współrzędnych został przyjęty zgodnie z układem ekranu. Jeżeli składowa x-owa prędkości kuli jest dodania, kula porusza się w kierunku prawej ściany. Jeżeli jest mniejsza, w kierunku lewej. Z kolei w przypadku składowej y-owej, dodatnia wartość oznacza ruch w kierunku ściany dolnej, a ujemna w kierunku ściany górnej.

Dysponując powyższą informacją można określić, z którą ze ścian nastąpi kolejne zderzenie. W kolejnym kroku należy wyliczyć czas zderzenia. Przykładowo dla zderzenia ze ścianą dolną, jeżeli kula o promieniu r znajduje się w odległości s od krawędzi ściany (mierząc od środka kuli), a jej prędkość wynosi:

$$\vec{v} = [v_x, v_y]$$

Kula poruszając się ruchem jednostajnym prostoliniowym pokona dystans do ściany:

$$s - r = v_x t \tag{22}$$

w czasie:

$$t = \frac{s - r}{v_x} \tag{23}$$

Następnie prędkość kuli po zderzeniu ze ścianą można wyliczyć ze wzorów (20)-(21).

Zderzenie typu kula-kula

W przypadku dwóch kul o prędkościach $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ zderzenie nastąpi w momencie, gdy odległość s pomiędzy środkami kul będzie równa sumie ich promieni. Oznaczając współrzędne środków okręgów jako (x_1, y_1) i (x_2, y_2) oraz korzystając z faktu, że poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym, dystans s można określić jako:

$$s = r_1 + r_2 = \sqrt{((x_2 + v_{2,x}t) - (x_1 + v_{1,x}t))^2 + ((y_2 + v_{2,y}t) - (y_1 + v_{1,y}t))^2} \tag{24}$$

Równanie (24) można doprowadzić do postaci równania kwadratowego względem niewiadomego czasu t:

$$\begin{aligned} 0 = t^2 &\left(\left(v_{x,2} - v_{x,1}\right)^2 + \left(v_{y,2} - v_{y,1}\right)^2\right) \\ &+ 2t\left((x_2 - x_1)\left(v_{x,2} - v_{x,1}\right) + (y_2 - y_1)\left(v_{y,2} - v_{y,1}\right)\right) \\ &+ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (r_1 + r_2)^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Rozwiązując równanie (25) względem t należy rozpatrzyć tylko te przypadku, w których $\Delta \gg 0$, ponieważ w przeciwnym razie kule nie zderzą się. Z wyliczonych czasów t_1, t_2 należy wybrać mniejszy, ale równocześnie większy od 0. Mając dany czas, prędkości kul po zderzeniu można wyliczyć ze wzorów (12)-(13).

3. Algorytm

Ogólny algorytm symulacji łączy wcześniejsze zagadnienia w następujących krokach:

1) Wyznacz czas najbliższego zderzenia (zgodnie z sekcją drugą)
2) Przesuń kule do najbliższego zderzenia
3) Wykonaj obliczenia potrzebne do przebiegu zderzenia (zgodnie z sekcją pierwszą)
4) Wróć do pierwszego kroku