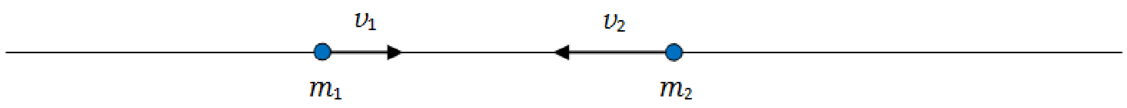
Dwuwymiarowe Zderzenia Sprężyste

Do rozwiązania problemu dwuwymiarowego potrzebne będzie rozwiązanie podobnego problemu, ale w przypadku jednowymiarowym. Dlatego zaczynamy od omówienia jednowymiarowego zderzenia sprężystego.

Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze

Dane są dwa ciała punktowe o masach m_1, m_2 i prędkościach υ_1, υ_2 poruszające się wzdłuż tej samej prostej. W pewnym momencie dochodzi do kolizji. Jakie będą prędkości po zderzeniu?

Oznaczmy prędkości po zderzeniu dodając symbol prim: υ_1', υ_2'. Zatem chcemy obliczyć wartości prędkości po zderzeniu jako wyrażenia zależne od m_1, m_2, υ_1, υ_2.



Rysunek 1. Jednowymiarowe zderzenie punktów materialnych – stan przed zderzeniem.

Zasada zachowania pędu:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'. \tag{1}$$

Zasada zachowania energii:

Zderzenie jest elastyczne (idealnie sprężyste), więc może zmienić się tylko energia kinetyczna poszczególnych punktów materialnych, ale całość energii kinetycznej jest zachowana.

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2. \tag{2}$$

Rozwiązując układ (1)-(2) względem υ_1', υ_2' otrzymujemy

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2},\ \upsilon_2' = \frac{-(m_1 - m_2)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Zderzenia sprężyste w dwóch wymiarach

Jeżeli kule poruszają się na płaszczyźnie, to mamy do czynienia z ruchem w dwóch wymiarach, dlatego ruch musi być opisany przy pomocy wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Mamy dane są wektory prędkości przed zderzeniem

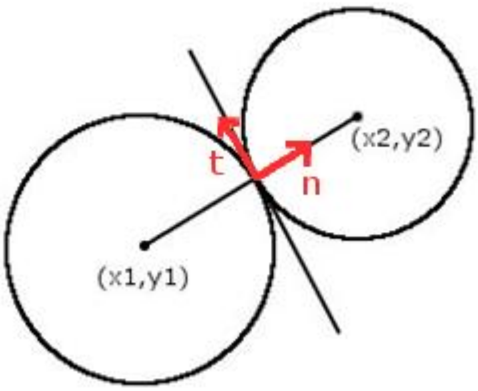
$$\vec{\upsilon}_1 = [\upsilon_{1,x},\ \upsilon_{1,y}],\ \vec{\upsilon}_2 = [\upsilon_{2,x},\ \upsilon_{2,y}], \tag{4}$$

a naszym zadaniem jest obliczenie wektorów prędkości po zderzeniu

$$\vec{\upsilon}_1' = [\upsilon_{1,x}',\ \upsilon_{1,y}'],\ \vec{\upsilon}_2' = [\upsilon_{2,x}',\ \upsilon_{2,y}'], \tag{5}$$

które powinny oczywiście zależeć od (4). W ten sposób rozwiążemy problem zderzenia, gdyż będzie my znali ruch kul po zderzeniu.

Podstawowy pomysł polega na rozważeniu punktu styku kul w momencie zderzenia i rozłożeniu wektorów (pędu i prędkości) w dwóch kierunkach: prostopadłym oraz stycznym do powierzchni stykających się kul.



Rysunek 2. Zderzenie na płaszczyźnie – kule w monecie zderzenia.

Oznaczmy współrzędne środków obu okręgu odpowiednio jako (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2). Wtedy wektor normalny jednostkowy do okręgu pierwszego w punkcie styczności ma postać

$$\vec{n} = [n_x,\ n_y] = \frac{[x_2 - x_1,\ y_2 - y_1]}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \tag{6}$$

a wektor styczny

$$\vec{t} = [t_x,\ t_y] = [-n_x,\ n_y] = \frac{[-(y_2 - y_1),\ x_2 - x_1]}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \tag{7}$$

Podstawowe założenie: przyjmujemy, że powierzchnie obu kul są idealnie gładkie, a więc

po zderzeniu składowe styczne prędkości nie ulegają zmianie, natomiast składowe normalne zachowują się tak, jak w zderzeniu jednowymiarowym

Obliczamy więc rzuty wektorów $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ na osie lokalnego układu współrzędnych określonego przez wektory $\vec{n}$ oraz $\vec{t}$:

$$\upsilon_{i,n} = \vec{\upsilon}_i \circ \vec{n},\ \upsilon_{i,t} = \vec{\upsilon}_i \circ \vec{t} \ \text{ dla } \ i = 1, 2, \tag{8}$$

gdzie $\circ$ oznacza iloczyn skalarny: $\vec{u}\circ\vec{w}=u_x w_x+u_y w_y$.

Zgodnie z tym co powiedziano wyżej składowe styczne nie ulegają zmianie, a więc

$$\upsilon'_{1,t}=\upsilon_{1,t},\ \upsilon'_{2,t}=\upsilon_{2,t}. \tag{9}$$

Z drugiej strony składowe normalne zmieniają się zgodnie ze wzorami (3)

$$\upsilon'_{1,n}=\frac{(m_1-m_2)\upsilon_{1,n}+2m_2\upsilon_{2,n}}{m_1+m_2},\ \upsilon'_{2,n}=\frac{-(m_1-m_2)\upsilon_{2,n}+2m_1\upsilon_{1,n}}{m_1+m_2}. \tag{10}$$

To w zasadzie kończy obliczenia. Ponieważ jednak docelowo chcemy mieć współrzędne wektorów prędkości w ustalonym układzie laboratoryjnym, należy wektory przetransformować do tego układu. Mamy więc

$$\begin{cases}\vec{\upsilon}'_1=\upsilon'_{1,n}\vec{n}+\upsilon'_{1,t}\vec{t},\\ \vec{\upsilon}'_2=\upsilon'_{2,n}\vec{n}+\upsilon'_{2,t}\vec{t},\end{cases} \tag{11}$$

gdzie $\upsilon'_{1,n}$, $\upsilon'_{1,t}$, $\upsilon'_{2,n}$, $\upsilon'_{2,t}$ dane są wzorami (9),(10).

Aby zapisać w sposób bardziej zwarty końcowe wyrażenia, wprowadźmy oznaczenia

$$\mu_1=\frac{m_1}{m_1+m_2},\ \mu_2=\frac{m_2}{m_1+m_2},$$
$$\|x-y\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Korzystając z (6) i (7) (postacie wektorów normalnego i stycznego) możemy wyliczyć składowe z równości wektorowych (11). Otrzymujemy następujące składowe prędkości po zderzeniu, gdzie już wykorzystaliśmy (9) (równość składowych stycznych przed i po zderzeniu, czyli $\upsilon'_{1,t}=\upsilon_{1,t}$, $\upsilon'_{2,t}=\upsilon_{2,t}$):

$$\begin{cases}\upsilon'_{1,x}=\upsilon'_{1,n}n_x+\upsilon'_{1,t}t_x=(\upsilon'_{1,n}(x_2-x_1)-\upsilon_{1,t}(y_2-y_1))/\|x-y\|,\\ \upsilon'_{1,y}=\upsilon'_{1,n}n_y+\upsilon'_{1,t}t_y=(\upsilon'_{1,n}(y_2-y_1)+\upsilon_{1,t}(x_2-x_1))/\|x-y\|,\\ \upsilon'_{2,x}=\upsilon'_{2,n}n_x+\upsilon'_{2,t}t_x=(\upsilon'_{2,n}(x_2-x_1)-\upsilon_{2,t}(y_2-y_1))/\|x-y\|,\\ \upsilon'_{2,y}=\upsilon'_{2,n}n_y+\upsilon'_{2,t}t_y=(\upsilon'_{2,n}(y_2-y_1)+\upsilon_{2,t}(x_2-x_1))/\|x-y\|.\end{cases} \tag{12}$$

Wartości współrzędnych $\upsilon'_{2,n}$, $\upsilon'_{2,n}$ wyliczamy ze wzorów (10):

$$\upsilon'_{1,n}=(\mu_1-\mu_2)\upsilon_{1,n}+2\mu_2 v_{2,n},\ \upsilon'_{2,n}=-(\mu_1-\mu_2)\upsilon_{2,n}+2\mu_1\upsilon_{1,n}, \tag{13}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\upsilon_{1,n} &= (\upsilon_{1,x}(x_2 - x_1) + \upsilon_{1,y}(y_2 - y_1)) / \| x - y \|, \\
\upsilon_{1,t} &= (-\upsilon_{1,x}(y_2 - y_1) + \upsilon_{1,y}(x_2 - x_1)) / \| x - y \|, \\
\upsilon_{2,n} &= (\upsilon_{2,x}(x_2 - x_1) + \upsilon_{2,y}(y_2 - y_1)) / \| x - y \|, \\
\upsilon_{2,t} &= (-\upsilon_{2,x}(y_2 - y_1) + \upsilon_{2,y}(x_2 - x_1)) / \| x - y \|.
\end{aligned} \tag{14}$$

Opis Algorytmu

Obiekt opisujący poruszającą się kulę

```
class MovingBall {
      double x, y;
      double r;
      double m
      vect2D v;
}
Inicjalizacja
MovingBall B1(x1,y1,r1,m1), B2(x2,y2,r2,m2);
```

//warunek początkowy: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq r_1 + r_2$

```
B1.setVelocity(v1x,v1y);
B1.setVelocity(v2x,v2y);
while (1) {
      B1.move; B2.move;
      if (hit(B1,B2)) {
            v1_new=CalcVelAfterHit(B1,B2).v1;
            v2_new=CalcVelAfterHit(B1,B2).v2;
      }
}
```

Procedura `hit(B1,B2)` oblicza, czy doszło do kolizji – czyli dotknięcia się kul. Dla obiektów takich jak dwie kul można to bardzo łatwo sprawdzić, mianowicie warunkiem dotknięcia się kul jest, aby odległość od środków kul była równa sumie ich promieni:

$$\begin{aligned}
&\textbf{if}\,((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 == r^2) \\
&\qquad \textbf{return}\ \textit{true}; \\
&\textbf{else} \\
&\qquad \textbf{return}\ \textit{false};
\end{aligned}$$

Procedura `CalcVelAfterHit` jest zdefiniowana na podstawie wzorów (12), (13) i (14).