

Modelowanie przewodnictwa cieplnego w pomieszczeniach

Ewelina Kalicka

Luty 2026

Spis treści

1 Wstęp	3
2 Opis praktyczny eksperymentów	3
2.1 Położenie grzejnika w pokoju	3
2.2 Pasożytnictwo cieplne	3
2.3 Ogólne założenia projektu	3
3 Opis matematyczny eksperymentów	4
4 Problem 1 - wyniki eksperymentów	4
5 Problem 2 - wyniki eksperymentów	6
5.1 Scenariusz 1	6
5.2 Scenariusz 2	6
5.3 Scenariusz 3	7
5.4 Podsumowanie pasożytnictwa cieplnego	7

1 Wstęp

Poniższy raport będzie dotyczył analizy dwóch problemów związanych z rozkładem temperatury i przepływem ciepła w mieszkaniach. Odpowiadamy na dwa następujące pytania:

1. Czy grzejnik musi znajdować się pod oknem? Tutaj zbadamy wpływ położenia grzejnika na efektywność ogrzewania pokoju.
2. Jak paseożytnictwo cieplne działa na zużycie energii? Jak w takim przypadku rozkłada się temperatura w sąsiadujących ze sobą pomieszczeniach?

2 Opis praktyczny eksperymentów

2.1 Położenie grzejnika w pokoju

Eksperyment będzie polegał na symulacji pokoju, w którym znajduje się jeden grzejnik oraz jedno okno. Grzejnik ustawiamy w różnych odległościach od okna i w każdym ze scenariuszy mierzymy:

- średnią temperaturę w pokoju μ_u
- odchylenie standardowe temperatury w pokoju $\sigma_u = \sigma_u(r)$, gdzie r - odległość od okna.

Do analizy wykorzystujemy również parametry fizyczne, takie jak moc grzejnika, ciepło właściwe czy ciśnienie atmosferyczne.

2.2 Paseożytnictwo cieplne

Zagadnienie paseożytnictwa cieplnego zbadamy na układzie trzech, sąsiadujących pokoi. Sprawdzimy jak brak ogrzewania w jednym lub dwóch pomieszczeniach wpływa na komfort cieplny i zużycie energii. Będziemy analizować następujące scenariusze:

- Wszyscy włączają grzejniki.
- Tylko sąsiedzi na bokach grzeją, środkowy pokój ma wyłączony grzejnik.
- Tylko środkowy pokój jest ogrzewany.

Dla każdego scenariusza będziemy mierzyć średnią temperaturę, odchylenie standardowe oraz zużycie energii w każdym pokoju.

2.3 Ogólne założenia projektu

Zdefiniujmy jeszcze założenia, które dotyczyć będą obu problemów.

Krok czasowy będzie wynosił $h_t = 1.0$, co odpowiada jednej sekundzie, a jednostką czasu będzie godzina. Symulacje przeprowadzimy w czasie 6 godzin, a więc 21000 sekund.

Wszystkie grzejniki używane do eksperymentu mają taką samą powierzchnię i moc 900 W. Termostat ustawiamy na 22°C.

Każdy pokój ma taki sam rozmiar 3×3 m, jeden grzejnik oraz jedno okno położone na "górnjej" ścianie. Pokoje podzielimy na siatkę kwadratów o bokach 0.1 m.

Początkową temperaturę w pokoju ustawiamy na 17°C, a jako zewnętrzną temperaturę przyjmujemy 0°C.

3 Opis matematyczny eksperymentów

Teraz przejdziemy do matematycznego opisu naszych eksperymentów. Będziemy rozpatrywać przepływ ciepła w pomieszczeniach zgodnie z następującym równaniem przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \Delta u + f_i(x, u),$$

gdzie: $u(x, t)$ to temperatura w punkcie x i czasie t , α - współczynnik przewodnictwa cieplnego ($19 \cdot 10^6$), $f_i(x, u)$ - źródło ciepła.

Źródło generuje ciepło wyłącznie w miejscu, gdzie znajduje się grzejnik i tylko wtedy, gdy średnia temperatura w pokoju jest poniżej ustawionej wartości termostatu.

Na ścianach i oknach stosujemy warunki brzegowe, wynikające z następującego wzoru:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{\lambda_{material}}{\lambda_{air}}(u_1 - u_2),$$

gdzie: $\lambda_{material}$, λ_{air} to współczynniki przenikania ciepła przez materiał (ściana lub okno) i powietrze, \vec{n} - jednostkowy wektor normalny, zawsze skierowany na zewnątrz ($\vec{n} = (0, \pm 1)$ lub $\vec{n} = (\pm 1, 0)$), u_1 - temperatura na ścianie lub oknie, u_2 - temperatura zewnętrzna.

Aby rozwiązać powyższe równania przewodnictwa ciepła stosujemy niejawnym schematem oraz dyskretyzację przestrzeni, taką jak w rozdziale *Ogólne założenia projektu*, tzn. $h_x = h_y = 0.1$, $h_t = 1.0$, a cały obszar traktujemy jako prostokąt podzielony na pokoje, okna i ściany.

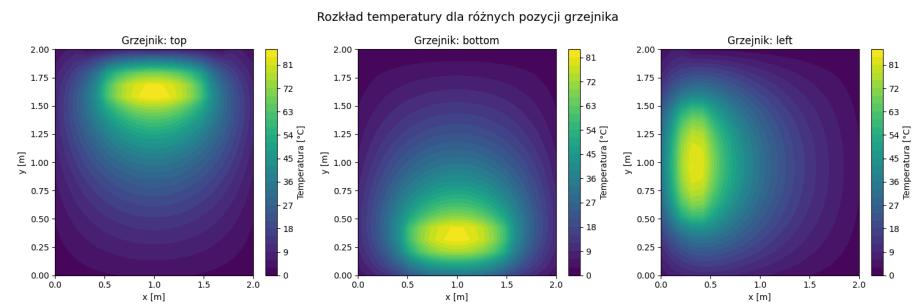
4 Problem 1 - wyniki eksperymentów

W tym rozdziale przejdziemy do przedstawienia wyników symulacji dla problemu pierwszego, dotyczącego położenia grzejnika w pokoju. Zaprezentujemy heatmapy rozchodzenia się ciepła oraz dodatkowo, porównamy dane takie jak: średnia temperatura i odchylenie standardowe.

Zacznijmy od przedstawienia schematu pokoju, dla trzech różnych położień grzejnika:



Widzimy, że mamy następujące schematy: grzejnik pod oknem, na przeciwniejszej ścianie oraz na ścianie bocznej. Zobaczmy, jak w takich sytuacjach rozkłada się ciepło w pokoju:



W każdym ze scenariuszy rozłożenie temperatury wygląda bardzo podobnie. Jeśli jednak przyjrzymy się dokładniej widzimy, że gdy grzejnik znajduje się pod oknem to przy pozostałych ścianach ciepło rozkłada się bardziej równomiernie. Gdy grzejnik jest na bocznej ścianie, to przy oknie kumuluje się mniej ciepła niż na "dolnej" ścianie - zwłaszcza jeśli popatrzymy na prawe rogi pokoju. Natomiast, gdy grzejnik jest na przeciwko okna, to obszar przy oknie nie nagrzewa się zbyt dobrze.

Oprócz wykonania wykresu policzyliśmy również średnią temperaturę i odchylenie standardowe:

Położenie grzejnika	Średnia temperatura μ_u [°C]	Odchylenie standarde σ_u [°C]
Pod oknem	20.10	19.42
Przeciw okna	20.66	19.79
Boczna ściana	20.17	19.58

Najwyższa średnia temperatura pojawia się, gdy grzejnik jest na przeciwko okna, a najniższa, gdy jest on pod oknem. Zwrócmy jednak uwagę, że za to najmniejsze odchylenie standardowe pojawia się, gdy grzejnik jest pod oknem, co zgadza się z wcześniejszymi obserwacjami z wykresów.

5 Problem 2 - wyniki eksperymentów

Przejdźmy teraz do problemu dotyczącego pasożytnictwa cieplnego. Podobnie jak w pierwszym problemie, wykonamy heatmaps rozchodzącego się ciepła i policzymy średnią temperaturę i odchylenie standardowe w każdym pokoju. Dodatkowo, policzymy zużycie energii, używając funkcji zliczającej ciepło wydzielone podczas eksperymentu, tzn.:

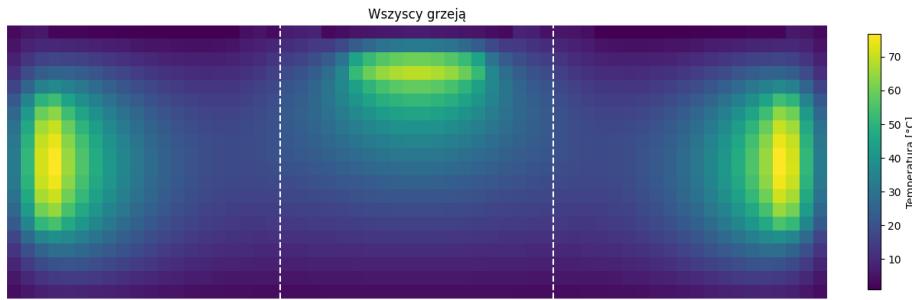
$$\int_0^t \int_{\Omega} f(x, u(x, s)) dx ds$$

Tym co zrobimy, do policzenia powyższej całki jest dyskretyzacja wewnętrznej całki za pomocą sumy np.sum(), przemnożonej przez h_x oraz h_y . Zewnętrzną całkę dyskretyzujemy za pomocą sumy przemnożonej przez krok h_t .

Zaznaczmy jeszcze, że do symulacji używamy trzech pokoi o tych samych rozmiarach, w których znajduje się jedno okno (na "górnjej" ścianie). Wszędzie znajduje się jeden grzejnik, jednak jest on w różnych miejscach: lewy pokój ma grzejnik na lewej ścianie, środkowy - pod oknem, a prawy - na prawej ścianie.

5.1 Scenariusz 1

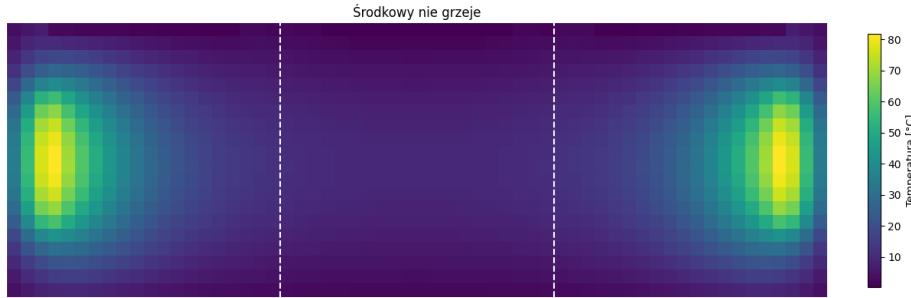
Zacznijmy od scenariusza, w którym we wszystkich trzech pokojach włączony jest grzejnik. Zobaczmy, jak prezentuje się heatmapa ciepła:



Widzimy, że ciepło dość równomiernie rozkłada się we wszystkich pomieszczeniach, a różnice temperatur nie są aż takie duże. Najlepiej ogrzany jest środkowy pokój, co wynika z tego, że dociera do niego jeszcze ciepło wytwarzane przez sąsiadów.

5.2 Scenariusz 2

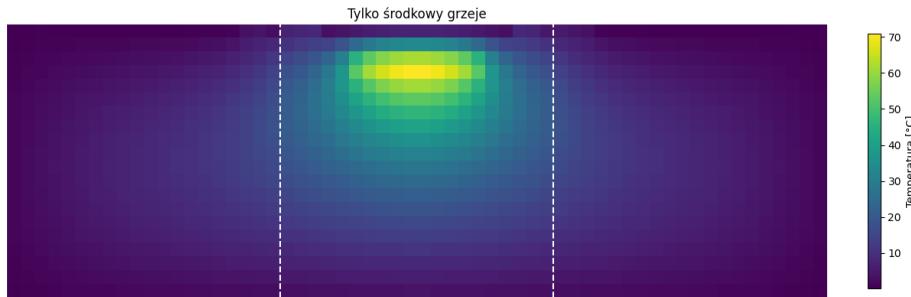
Teraz przejdźmy do scenariusza, w którym wyłączamy grzejnik w środkowym pokoju, a grzeją tylko sąsiedzi, czyli klasycznego problemu pasożytnictwa cieplnego.



Widzimy, że w tym przypadku rozkład temperatury znacznie różni się od scenariusza 1. W pokojach bocznych temperatura dalej jest dość wysoka, jednak w środkowym pokoju wyraźnie spada, w porównaniu do wcześniejszej sytuacji. Pomimo wyłączonego grzejnika, obserwujemy, że ciepło dostarczane jest przez ściany, od sąsiadów. Dlatego mimo spadku temperatury, utrzymuje się ona na poziomie między 10 a 15°C.

5.3 Scenariusz 3

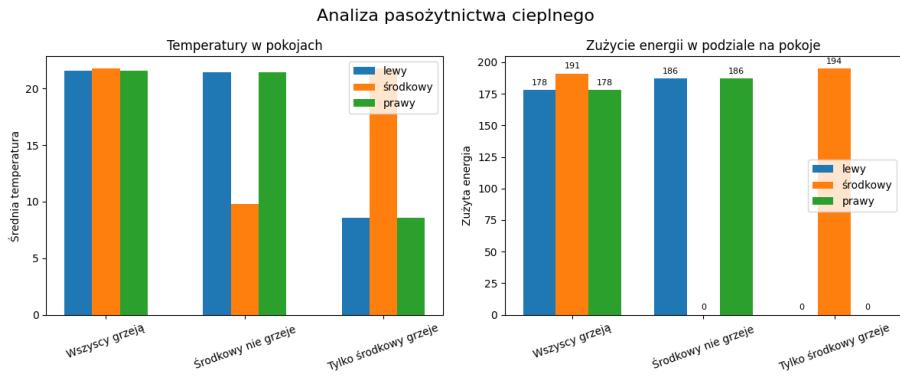
W tym rozdziale zbadamy ostatni scenariusz, w którym grzeje tylko środkowy pokój, a grzejniki u sąsiadów zostają wyłączone.



Tutaj już widzimy, że temperatura u sąsiadów znacząco spada. Ciepło jest przekazywane ze środkowego pokoju, jednak nie na tyle intensywnie by wystarczyło na ogrzanie pozostałych pomieszczeń.

5.4 Podsumowanie pasożytnictwa cieplnego

Na sam koniec przejdźmy do porównania średnich temperatur i zużycia energii w każdym ze scenariuszy:



Widzimy, że każdy scenariusz znacząco wpływa nie tylko na średnią temperaturę w pokoju, ale również na zużycie energii.

W sytuacji, gdy grzeją wszystkie pokoje, mamy najwyższe średnie temperatury dla wszystkich pomieszczeń, które dodatkowo są dość porównywalne względem siebie. Zużycie energii również rozkłada się prawie równomiernie.

W przypadku, gdy środkowy pokój nie grzeje, widzimy, że zużycie energii w pozostałych pomieszczeniach wzrasta. Natomiast średnia temperatura w środkowym pokoju znacząco spada o ponad połowę.

Odwrotna sytuacja następuje, gdy grzejniki wyłączaemy u sąsiadów, a grzeje tylko środkowy pokój. Wtedy tylko on dostarcza ciepło i zużywa energię wyższą od sąsiadów w scenariuszu 2. Natomiast u sąsiadów temperatura jeszcze bardziej spada.

Takie wyniki potwierdzają, że brak ogrzewania w poszczególnych pomieszczeniach prowadzi do znaczącej wymiany energii cieplnej między pokojami, co skutkuje w nierównomiernym rozkładzie temperatury oraz zużycia energii.